MODELOS DE PÓRTICO PLANO PARA ANÁLISE FISICAMENTE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO

Leandro Mota Peres

Peres, Leandro Mota.
P437m Modelos de pórtico plano para análise fisicamente não linear de estruturas de concreto armado [manuscrito] / Leandro Mota Peres. - 2014.
xi, 96 f., enc.: il.

Orientador: Roque Luiz da Silva Pitangueira.
Coorientador: Samuel Silva Penna.

Dissertação (mestrado) Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Bibliografia: f. 93-96.

1. Engenharia de estruturas - Teses. 2. Método dos elementos finitos-Teses. 3. Concreto armado - Teses. I. Pitangueira, Roque Luiz da Silva. II. Penna, Samuel Silva. III. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. IV. Título.

CDU: 624(043)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

MODELOS DE PÓRTICO PLANO PARA ANÁLISE FISICAMENTE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO

Leandro Mota Peres

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de "Mestre em Engenharia de Estruturas".

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Roque Luiz da Silva Pitangueira
DEES - UFMG (Orientador)

Prof. Dr. Samuel Silva Penna
DEES - UFMG (Coorientador)

Prof. Dr. Fernando Amorim de Paula
DEES - UFMG

Profa. Dra. Claudia Maria de Oliveira Campos
UFF-RJ

Belo Horizonte, **07 de Novembro de 2014**

Investir em conhecimento rende sempre os melhores juros.

Benjamin Franklin

Índice

Índice ii

Lista de Tabelas iv

Lista de Figuras viii

Resumo ix

Abstract x

Agradecimentos xi

1 Introdução 1
- 1.1 Justificativa . . . 3
- 1.2 Objetivos . . . 5
  - 1.2.1 Objetivos Gerais . . . 5
  - 1.2.2 Objetivos Específicos . . . 5
- 1.3 Organização do Texto . . . 5

2 Modelos de Pórtico Plano 7
- 2.1 Teoria de Timoshenko . . . 7
- 2.2 Teoria de Bernoulli-Euler . . . 15

3 Análise Fisicamente Não Linear de Estruturas 16
- 3.1 Leis Constitutivas Não Lineares . . . 17
  - 3.1.1 Leis Polinomiais para o Concreto . . . 17
  - 3.1.2 Lei Exponencial para o Concreto . . . 18
  - 3.1.3 Lei Elastoplástica para o Aço . . . 19
- 3.2 Relações Tensão-Deformação Generalizada . . . 19
  - 3.2.1 Modelos Numéricos . . . 20
  - 3.2.2 Modelo Simplificado de Branson (1968) . . . 21
  - 3.2.3 Ensaios Experimentais . . . 23
- 3.3 Solução de Equações Não Lineares de Equilíbrio . . . 25
  - 3.3.1 Controle de Carga . . . 27
  - 3.3.2 Controle Direto de Deslocamento . . . 28

4 Implementação Computacional **30**
4.1 Organização do Núcleo Numérico do `INSANE` 31
4.2 Análise Estática Fisicamente Não Linear 33
4.3 Pacote `MaterialMedia` 34

5 Simulações Numéricas **36**
5.1 Influência dos Parâmetros dos Materiais e Características Geométricas das Seções 37
5.1.1 Influência dos Parâmetros dos Materiais 37
5.1.2 Influência das Características Geométricas 48
5.2 Estudos de Caso 54
5.2.1 Viga Biapoiada - Farage (1995) 55
5.2.2 Viga Biapoiada - Álvares (1993) 57
5.2.3 Viga Biapoiada - Jarek et al. (2011) 62
5.2.4 Viga Contínua - Silva (1977) 66
5.2.5 Pilar - Razvi e Saatciaglu (1989) 74
5.2.6 Pórtico Plano - Vecchio e Emara (1992) 81

6 Considerações Finais **88**

Referências Bibliográficas **93**

Lista de Tabelas

5.1 Variação do módulo de elasticidade inicial do concreto (E_0). 38
5.2 Variação da máxima tensão de compressão (f_c). 38
5.3 Variação da máxima tensão de tração (f_t). 38
5.4 Variação da deformação relativa a máxima tensão de compressão (ε_c). 39
5.5 Variação da deformação relativa a máxima tensão de tração (ε_t). . . . 39
5.6 Variação do módulo de elasticidade do aço (E_s). 39
5.7 Variação da tensão de escoamento (f_y). 39
5.8 Parâmetros das leis tensão-deformação. 49
5.9 Parâmetros das leis tensão-deformação. 56
5.10 Parâmetros das leis tensão-deformação. 59
5.11 Parâmetros das leis tensão-deformação. 63
5.12 Parâmetros das leis tensão-deformação. 68
5.13 Comparação dos resultados obtidos pelo `INSANE` e os calculados por Silva (1977) 73
5.14 Parâmetros das leis tensão-deformação. 76
5.15 Parâmetros das leis tensão-deformação. 83

Lista de Figuras

2.1 Exemplos de leis constitutivas. 9
2.2 Exemplo de decomposição da seção transversal em quadriláteros. . . . 10
2.3 Relação para o esforço normal. 14
2.4 Relação para o cisalhamento. 14
2.5 Relação para a flexão. 14

3.1 Leis polinomiais (Penna, 2011). 18
3.2 Lei exponencial para o concreto em tração. 18
3.3 Lei elastoplástica para o aço. 19
3.4 Estado elementar de solicitação para a flexão. 20
3.5 Estado elementar de solicitação para o cisalhamento. 21
3.6 Modelo para ensaio experimental. 24
3.7 Processo incremental-iterativo com controle de carga (Fuina, 2009). . 27
3.8 Processo incremental-iterativo com controle direto de deslocamento (Fuina, 2009). 29

4.1 Simbologia do diagrama em UML utilizada nesta dissertação. 31
4.2 Organização do núcleo numérico do sistema `INSANE`. 31
4.3 Diagrama de classes para `Persistence`. 32
4.4 Diagrama de classes para `Material`. 35
4.5 Diagrama de classes para `inelasticLaw`. 35
4.6 Diagrama de classes para `ConstitutiveModel`. 35

5.1 Seção transversal analisada. 38
5.2 Comparação das relações tensão-deformação generalizada variando E_0, para (a) cisalhamento, (b) compressão, (c) flexão e (d) tração. . 40
5.3 Comparação das relações tensão-deformação generalizada variando f_c, para (a) cisalhamento, (b) compressão, (c) flexão e (d) tração. 41

5.4 Comparação das relações tensão-deformação generalizada variando f_t, para (a) cisalhamento, (b) compressão, (c) flexão e (d) tração. 42
5.5 Comparação das relações tensão-deformação generalizada variando ε_c, para (a) cisalhamento, (b) compressão, (c) flexão e (d) tração. 43
5.6 Comparação das relações tensão-deformação generalizada variando ε_t, para (a) cisalhamento, (b) compressão, (c) flexão e (d) tração. 44
5.7 Comparação das relações tensão-deformação generalizada variando E_s, para (a) cisalhamento, (b) compressão, (c) flexão e (d) tração. . 45
5.8 Comparação das relações tensão-deformação generalizada variando f_y, para (a) cisalhamento, (b) compressão, (c) flexão e (d) tração. . . 46
5.9 Variação da base. 48
5.10 Variação da altura. 48
5.11 Variação da taxa de armadura. 48
5.12 Variação do cobrimento. 49
5.13 Posicionamento da armadura. 49
5.14 Comparação das relações tensão-deformação generalizada variando a base, para (a) cisalhamento, (b) compressão, (c) flexão e (d) tração. 50
5.15 Comparação das relações tensão-deformação generalizada variando a altura, para (a) cisalhamento, (b) compressão, (c) flexão e (d) tração. 51
5.16 Comparação das relações tensão-deformação generalizada variando a taxa de armadura, para (a) cisalhamento, (b) compressão, (c) flexão e (d) tração. 52
5.17 Comparação das relações tensão-deformação generalizada variando o cobrimento, para (a) cisalhamento, (b) compressão, (c) flexão e (d) tração. 53
5.18 Detalhes da geometria, carregamento e armadura da viga de Farage (1995). 55
5.19 Seção transversal decomposta em camadas. 56
5.20 Relações momento-curvatura para a viga de Farage (1995). 56
5.21 Detalhes da geometria, carregamento e armaduras das vigas de Álvares (1993). 58
5.22 Relações momento-curvatura para as seções apresentadas por Álvares (1993). 59
5.23 Seção transversal decomposta em camadas. 59

5.24 Malha de elementos finitos 60
5.25 Trajetórias de equilíbrio para as vigas (a) subarmada, (b) normalmente armada e (c) super armada. 61
5.26 Detalhes da geometria, carregamento e armaduras da viga de Jarek et al. (2011). 63
5.27 Seção transversal decomposta em camadas. 63
5.28 Relações tensão-deformação generalizada para o cisalhamento. 64
5.29 Relações tensão-deformação generalizada para a flexão. 64
5.30 Malha de elementos finitos. 64
5.31 Trajetórias de equilíbrio do deslocamento vertical no meio do vão. . . 65
5.32 Detalhes da geometria, carregamento e armaduras da viga de Silva (1977). 67
5.33 Seções transversais decompostas em camadas. 68
5.34 Relações tensão - deformação generalizada para a flexão. 69
5.35 Relações tensão - deformação generalizada para o cisalhamento. . . . 69
5.36 Malha de elementos finitos. 70
5.37 Relação entre a carga aplicada e a reação no apoio externo (nó 2). . . 70
5.38 Relação entre a carga aplicada e a reação no apoio interno (nó 19). . 70
5.39 Relação entre a carga aplicada e o momento no nó 10. 71
5.40 Relação entre a carga aplicada e o momento no nó 19. 71
5.41 Trajetória de equilíbrio para o nó 10. 71
5.42 Relação entre a carga aplicada e a rotação no apoio (nó 2). 72
5.43 Detalhes da geometria, carregamento e armaduras dos pilares. 74
5.44 Relações tensão-deformação generalizada para compressão. 75
5.45 Seção transversal decomposta em camadas. 75
5.46 Curvas tensão-deformação para o concreto em compressão. 76
5.47 Malha de elementos finitos dos pilares de Razvi e Saatciaglu (1989). . 76
5.48 Trajetórias de equilíbrio do pliar 3 para deformação axial. 77
5.49 Trajetórias de equilíbrio do pilar 4 para deformação axial. 77
5.50 Pórtico estudado. 78
5.51 Malha de elementos finitos do pórtico. 79
5.52 Deformada da estrutura. 80
5.53 Relação entre carga aplicada e momento no nó 5. 80
5.54 Relação entre carga aplicada e deslocamento horizontal no nó 5. . . . 81

5.55 Detalhes da geometria, carregamento e armadura do pórtico. 82
5.56 Seção transversal decomposta em camadas. 83
5.57 Relações tensão-deformação generalizada para para (a) cisalhamento, (b) compressão, (c) flexão e (d) tração. 84
5.58 Malha de elementos Finitos. 85
5.59 Trajetórias de Equilíbrio para o deslocamento horizontal do nó 9. . . 86

Resumo

Peres, L. M., 2014. Modelos de Pórtico Plano para Análise Fisicamente Não Linear de Estruturas de Concreto Armado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.

O comportamento fisicamente não linear de estruturas de concreto armado, com modelos unidimensionais, tem sido estudado segundo duas vertentes principais: os modelos que consideram as seções transversais homogêneas e usam relações tensão - deformação generalizada, e os modelos que decompõem a seção em áreas menores e usam leis tensão-deformação. Neste cenário, esta dissertação apresenta a formulação e implementação computacional, no sistema `INSANE` (INteractive Structural ANalysis Environment), de modelos de pórtico plano para análise fisicamente não linear através do Método dos Elementos Finitos com o uso de relações tensão-deformação generalizada. Simulações numéricas de estruturas de concreto permitem avaliar o modelo através da comparação com resultados experimentais e resultados numéricos obtidos com um modelo de seção decomposta implementado no mesmo sistema por Fonseca (2006).

Palavras-Chave: Análise Fisicamente Não Linear, Método dos Elementos Finitos, Estruturas de Concreto Armado.

Abstract

Peres, L. M., 2014. Plane Frame Models to Material Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Structures. Dissertation, Federal University of Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brazil.

The material nonlinear behavior of reinforced concrete structures, using one-dimensional models, has been studied according to two main approaches: the models that consider homogeneous cross sections and use stress-strain generalized relations, and models that decompose the section into smaller areas and use stress-strain laws. In this scenery, this work presents the formulation and computational implementation, into the system `INSANE` (INteractive Structural ANalysis Environment), of plane frame models for material nonlinear analysis using the Finite Element Method and stress-strain generalized relations. Numerical simulations of concrete structures allow to evaluate the model by comparing with experimental results and numerical results obtained with cross sections decomposed model implemented in the same system by Fonseca (2006) .

Keywords: Material Nonlinear Analysis, Finite Element Method, Reinforced Concrete Structures.

Agradecimentos

Aos professores Roque Pitangueira e Samuel Penna pelos ensinamentos transmitidos, confiança, amizade e por toda dedicação na orientação desta dissertação;

À Catarina pelo amor e companheirismo que sempre me incentivam, pela ajuda na elaboração das figuras e revisão do texto deste trabalho;

Aos professores do PROPEEs pelos ensinamentos compartilhados;

Aos funcionários do Departamento de Engenharia de Estruturas, em especial à Inês, Patrícia e Fátima, sempre muito atenciosas;

Aos amigos por tornarem esta caminhada muito mais prazerosa;

À CAPES pelo apoio financeiro.

Capítulo 1

Introdução

No dimensionamento de um elemento estrutural, além de garantir que ele seja capaz de suportar aos esforços atuantes, é necessário que os deslocamentos provocados pelas ações solicitantes atendam a determinados limites de aceitação.

Para o caso de peças de concreto armado, principalmente vigas com grandes vãos, uma análise cuidadosa de seus deslocamentos é de fundamental importância, visto que o surgimento de deslocamentos excessivos pode até inviabilizar sua utilização. Nesse sentido, o conhecimento do comportamento desses elementos, principalmente após a fissuração do concreto, torna-se um assunto de grande interesse para a engenharia de estruturas.

Na mecânica estrutural, um problema é dito não linear quando a rigidez da estrutura depende de seus deslocamentos. Tal dependência é considerada fisicamente não linear quando a rigidez é afetada pela resposta do material ao estado de deformação submetido. Nesse sentido, modelos numéricos que consideram esse fator são capazes de simular de forma mais realista o funcionamento de uma estrutura.

Com o desenvolvimento do Método dos Elementos Finitos (MEF) e dos procedimentos para análise não linear, a análise numérica se tornou uma alternativa viável e amplamente difundida, permitindo a modelagem de várias estruturas compostas por diferentes materiais e sob o efeito de solicitações e restrições diversas. Dentre as possibilidades de modelos que permitem tratar o comportamento constitutivo não linear dos materiais, os modelos unidimensionais têm sido muito utilizados em

virtude de sua simplicidade e dos bons resultados obtidos (Penna, 2011). Quando esses modelos são utilizados, a modelagem numérica de estruturas de concreto pode ser desenvolvida com o uso de duas formulações diferentes: as que usam leis tensão-deformação, decompondo as seções transversais em áreas menores, e as que consideram as seções homogêneas, usando relações tensão-deformação generalizada ou, como comumente denominadas na literatura, relações momento-curvatura, uma vez que a não linearidade é mais acentuada em elementos fletidos.

No caso das formulações baseadas em leis tensão-deformação é possível representar seções transversais compostas e de qualquer geometria decompondo-as em várias áreas menores. Em cada uma dessas áreas são monitoradas as relações tensão-deformação não lineares dos materiais e, por meio de um somatório, simplifica-se a integração dos esforços, estimando-se a resposta da seção ao estado de deformação existente. Encontradas as deformações, pode ser determinada a equação constitutiva de cada seção transversal e a matriz de rigidez de cada elemento. Por fim, as forças internas podem ser avaliadas e as trajetórias de equilíbrio obtidas.

Nas formulações que utilizam relações tensão-deformação generalizada, a seção transversal é representada por relações entre os esforços solicitantes na seção (tensões generalizadas) e as deformações generalizadas correspondentes. Dessa forma, usam-se relações entre os esforços axial, de cisalhamento e de flexão e as respectivas deformações generalizadas axial, de cisalhamento e de flexão (curvaturas). A partir dessas relações é possível estimar os esforços na seção para um estado de deformação. A equação constitutiva de cada seção e a matriz de rigidez de cada elemento podem ser determinadas, permitindo obter as forças internas e as trajetórias de equilíbrio.

Para implementação das formulações acima resumidas em computadores, é imprescindível dispor de um sistema computacional amigável a mudanças e que permita o uso dos demais recursos para análise não linear nele disponíveis, sem ter que recodificá-los. Neste sentido, destaca-se o `INSANE` *(INteractive Structural ANalysis Environment)*, que é um programa de código aberto, desenvolvido no Departamento

de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais segundo o paradigma de Programação Orientada a Objetos, utilizando a linguagem *Java*.

Partindo-se dos recursos disponíveis no `INSANE`, foi implementado um modelo para análise fisicamente não linear, baseado em relações tensão-deformação generalizada, visando ganho computacional.

1.1 Justificativa

Formulações baseadas em relações tensão-deformação generalizada vem sendo objeto de estudo nas últimas décadas. Com o intuito de desenvolver modelos que permitam simular o comportamento não linear de seções de concreto armado quando solicitadas por um determinado esforço, diversos trabalhos foram desenvolvidos.

Dentre esses trabalhos pode-se citar Branson (1968) que propôs, com base em experimentação de vigas, uma das expressões mais difundidas no meio técnico para a avaliação da rigidez à flexão do concreto tracionado íntegro existente entre fissuras, sendo inclusive utilizada, de forma simplificada, pela norma brasileira de projeto de estruturas de concreto, NBR 6118:2014. A expressão permite calcular uma rigidez à flexão equivalente para o concreto armado trabalhando entre os Estádios I e II, estabelecidos pela referida norma.

Outro trabalho semelhante ao de Branson (1968) foi apresentado por Ghali e Favre (1986), que propuseram uma curvatura equivalente interpolada entre os valores dos Estádios I e II para a consideração dos efeitos da fissuração. Embora considerem diferentes parâmetros (inércia e curvatura), as expressões de Branson (1968) e de Ghali e Favre (1986) propõem considerar a contribuição do concreto tracionado entre fissuras. A expressão proposta por este último autor é utilizada no CEB (1991).

Visando avaliar as expressões propostas pela norma ACI318 (2002), Khuntia e Ghosh (2004) propuseram uma abordagem analítica para obter os momentos de inércia de pilares e vigas de concreto armado levando em conta a não linearidade

física desses elementos. Foram sugeridas formulações específicas para vigas e pilares visando a redução da inércia desses elementos com base em parâmetros como geometria e taxas de armadura.

Vale ainda destacar as contribuições apresentadas por Leonhardt (1971), que apresenta expressões para o cálculo da rigidez de peças submetidas ao esforço normal, de flexão, cisalhamento e torção, para seções no Estádio I e II.

A implementação dessas expressões para o desenvolvimento de sistemas computacionais de análise estrutural foi outra linha que ganhou destaque com a evolução dos computadores. Ao longo das últimas décadas diversos trabalhos foram desenvolvidos nesse sentido. Um exemplo ilustrativo é o trabalho desenvolvido por Carvalho (1994), que adaptou um programa desenvolvido por Barboza (1992), para a análise fisicamente não linear de pavimentos de edifícios pelo método da grelha equivalente. A consideração da fissuração é feira a partir de relações momento-curvatura para a flexão e momento-rotação para a torção. Essas relações são obtidas por expressões como as propostas por Branson (1968), Ghali e Favre (1986) e Leonhardt (1971). Com a implementação dessas expressões tem-se um sistema computacional restrito aos modelos programados, que após serem validados, podem ser aplicados para análise de diferentes estruturas compostas por variadas seções de concreto.

Outra alternativa é a adoção de um ambiente computacional que permita a utilização de relações tensão-deformação generalizada obtidas de diferentes formas, sem a necessidade de uma nova implementação a cada novo modelo, o que proporciona inúmeras possibilidades de análise, sendo possível adotar relações obtidas em ensaios experimentais, por equações como as citadas anteriormente ou por outros modelos numéricos mais sofisticados, como os baseados em decomposição da seção transversal e leis tensão-deformação.

Nesse último caso, torna-se interessante uma análise com um grande número de repetições de seções transversais, como, por exemplo, em um sistema de vigamento de um pavimento tipo de um edifício, onde grande parte das vigas apresentam a

mesma seção transversal e mesma armadura. Dessa forma, pode-se utilizar o modelo de seção decomposta para a obtenção das relações tensão-deformação generalizada de cada seção que compõem o pavimento e utilizá-las em um modelo de seção homogeneizada para a análise do pavimento propriamente dito.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivos Gerais

Objetivou-se estudar e implementar um modelo fisicamente não linear baseado em relações tensão-deformação generalizada no sistema `INSANE`. Optou-se pelo modelo unidimensional, em virtude da simplicidade e ampla aplicação na área de projetos estruturais, e por usar elementos finitos de pórtico plano, que possibilita a análise de diversos tipos de estruturas.

1.2.2 Objetivos Específicos

Dentre os objetivos específicos desta dissertação, citam-se:

(1) realizar simulações numéricas de estruturas de concreto armado compostas por diferentes seções e formas de carregamento, demonstrando as possibilidades de uso do sistema `INSANE` para a análise fisicamente não linear com o uso de modelos unidimensionais;

(2) avaliar a eficiência e as limitações da formulação implementada em relação ao modelo de seção decomposta que usa relações tensão-deformação, implementado por Fonseca (2006); e

(3) comparar os resultados obtidos com os dois modelos apresentados com resultados experimentais disponíveis na literatura.

1.3 Organização do Texto

Esta dissertação está organizado em seis capítulos. Além deste texto inicial, os demais capítulos são resumidamente apresentados a seguir.

No Capítulo 2 é apresentada a formulação do modelo baseado em relações tensão-deformação generalizada partindo-se das equações utilizadas para o modelo tensão-deformação.

Após expor a formulação teórica, alguns temas relativos a análise não linear são detalhados no Capítulo 3, como leis constitutivas para os materiais, métodos para obtenção de relações tensão-deformação generalizada e métodos para solução de equações não lineares de equilíbrio.

O Capítulo 4 compreende o projeto orientado a objetos da implementação computacional, onde as interfaces e classes criadas e/ou alteradas no núcleo numérico do `INSANE` são apresentadas.

A validação do modelo numérico implementado é feita com as simulações numéricas expostas no Capítulo 5.

Por fim, no Capítulo 6 são feitas as considerações finais, apresentado conclusões sobre o tema abordado neste trabalho e propostas para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Modelos de Pórtico Plano

Este capítulo aborda inicialmente o modelo de elementos finitos unidimensionais de pórtico plano, baseado na Teoria de Timoshenko, que usa decomposição da seção transversal e leis tensão-deformação, com base no trabalho implementado no sistema `INSANE` por Fonseca (2006). Em seguida, a alternativa de evitar a integração dos esforços na seção transversal decomposta através de sua homogeneização e prescrição de relações tensão-deformação generalizada é apresentada.

Por fim, é apresentada a formulação do modelo baseado na Teoria de Bernoulli-Euler, como uma particularização daquele baseado na Teoria de Timoshenko.

2.1 Teoria de Timoshenko

Para um modelo de pórtico plano, considerando a Teoria de Timoshenko, são adotadas as seguintes hipóteses:
(1) seções transversais normais ao eixo da barra antes da flexão permanecem planas, mas não permanecem necessariamente ortogonais a tal eixo depois da flexão;
(2) a barra suporta deformações devidas à força normal, ao cisalhamento e à flexão;
(3) admite-se constante a distribuição de tensões tangenciais ao longo da seção transversal, porém modificada por um fator de correção de cisalhamento da seção, de maneira que o trabalho da deformação tangencial constante coincida com o trabalho da deformação calculado com a distribuição exata; e

(4) existe uma completa interação entre os vários materiais da barra na seção transversal, ou seja, considera-se que a aderência é perfeita entre o aço e o concreto, sendo que, cada material possui uma lei tensão-deformação não linear independente, atribuída a cada subdivisão da seção.

Partindo das relações tensão-deformação, normais e tangenciais, pode-se escrever as equações:

$$\sigma_{xx} = E_s(\varepsilon_{xx}) \cdot \varepsilon_{xx} \text{ e} \tag{2.1}$$

$$\tau_{xy} = G_s(\gamma_{xy}) \cdot \gamma_{xy}, \tag{2.2}$$

onde σ_{xx} é a tensão normal na direção x, ε_{xx} a deformação normal na direção x, τ_{xy} a tensão de cisalhamento no plano xy, γ_{xy} a deformação de cisalhamento no plano xy, E_s o módulo de elasticidade secante longitudinal e G_s o módulo de elasticidade secante transversal.

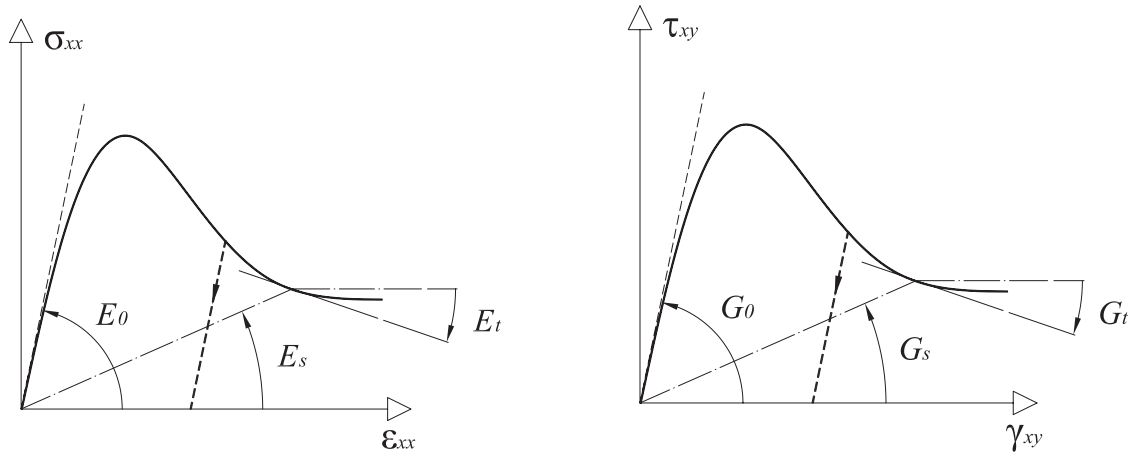
Relações incrementais entre tensões e deformações também podem ser escritas na forma:

$$d\sigma_{xx} = E_t(\varepsilon_{xx}) \cdot d\varepsilon_{xx} \text{ e} \tag{2.3}$$

$$d\tau_{xy} = G_t(\gamma_{xy}) \cdot d\gamma_{xy}, \tag{2.4}$$

onde E_t e G_t são, respectivamente, o módulo de elasticidade tangente longitudinal e transversal.

Os módulos secantes e tangentes são funções das deformações, como mostrado nas Equações (2.1) a (2.4), e obtidos por leis constitutivas dos materiais, como mostrado na Figura 2.1.



(a) - Tensão axial. (b) - Tensão de cisalhamento.

Figura 2.1: Exemplos de leis constitutivas.

Conhecendo-se a distribuição das deformações em cada seção transversal, as propriedades secantes e tangentes dos materiais podem ser obtidas a partir da lei constitutiva. De posse das propriedades dos materiais, os esforços internos podem ser calculados pela integração das tensões ao longo da seção transversal, logo:

$$N = \int_A \sigma_{xx}\, dA, \tag{2.5}$$

$$V_y = \int_A \tau_{xy}\, dA \text{ e} \tag{2.6}$$

$$M_z = \int_A -\sigma_{xx} \cdot y\, dA, \tag{2.7}$$

onde N é o esforço axial, V_y é o esforço cortante e M_z é o momento fletor.

Para a seção decomposta em pequenas áreas, o cálculo dos esforços internos pode ser simplificado por um somatório (Galgoul, 1979; Sfakianakis, 2001; Romero et al., 2002). A Figura 2.2 mostra a decomposição da seção transversal em pequenas áreas conhecidas, podendo cada uma delas ser composta por um tipo de material diferente.

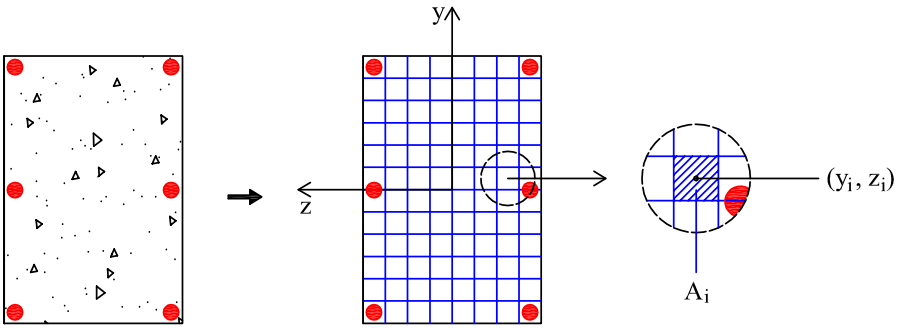


Figura 2.2: Exemplo de decomposição da seção transversal em quadriláteros.

Este tipo de aproximação permite que sejam monitoradas, em cada uma das áreas quadrilaterais, as tensões e deformações e que seja aproximada a resposta da seção transversal pela soma das contribuições de cada quadrilátero.

As relações entre deformações e deformações generalizadas são dadas por:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_a - y \cdot \kappa_z \text{ e} \tag{2.8}$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_y, \tag{2.9}$$

onde ε_a, κ_z e γ_y são respectivamente, as deformações generalizadas axial, de flexão (curvatura) e de cisalhamento.

Substituindo as Equações (2.8) e (2.9) nas Equações (2.1) e (2.2), tem-se:

$$\sigma_{xx} = E_s(\varepsilon_{xx}) \cdot (\varepsilon_a - y \cdot \kappa_z) \text{ e} \tag{2.10}$$

$$\tau_{xy} = G_s(\gamma_{xy}) \cdot \gamma_y. \tag{2.11}$$

Simplificando as integrais das Equações (2.5) a (2.7) por um somatório e substituindo as Equações (2.10) e (2.11), os esforços internos passam a ser dados por:

$$N = \sum_{i=1}^{q} A_i \cdot (\varepsilon_a - y_i \cdot \kappa_z) \cdot E_{si}, \tag{2.12}$$

$$V_y = \sum_{i=1}^{q} A_i \cdot (\alpha_y \gamma_y) \cdot G_{si} \text{ e} \tag{2.13}$$

$$M_z = -\sum_{i=1}^{q} A_i \cdot (\varepsilon_a - y_i \cdot \kappa_z) \cdot E_{si} \cdot y_i, \tag{2.14}$$

onde A_i é a área de um quadrilátero, q é o número de áreas em que a seção foi decomposta e α_y é o fator de correção do cisalhamento acrescentado na Equação (2.13).

A partir dessas equações, as tensões generalizadas (vetor $\underline{M}$) podem ser calculadas através da multiplicação da matriz constitutiva secante generalizada da seção transversal (C_s) pelas deformações generalizadas ($\underline{\chi}$):

$$\underline{M} = \underline{C_s} \ \ \underline{\chi}, \tag{2.15}$$

onde:

$$\underline{M}^T = \left[\begin{array}{ccc} N & V_y & M_z \end{array} \right], \tag{2.16}$$

$$\underline{\chi}^T = \left[\begin{array}{ccc} \varepsilon_a & \gamma_y & \kappa_z \end{array} \right] \quad \text{e} \tag{2.17}$$

$$\underline{C_s} = \sum_{i=1}^{q} A_i \left[\begin{array}{ccc} E_{si} & 0 & -y_i E_{si} \\ 0 & \alpha_y G_{si} & 0 \\ -y_i E_{si} & 0 & y_i^2 E_{si} \end{array} \right], \tag{2.18}$$

ou na forma incremental, com a matriz constitutiva tangente generalizada da seção transversal (C_t):

$$\underline{dM} = \underline{C_t} \ \ \underline{d\chi}, \tag{2.19}$$

onde $\underline{C_t}$ é dada por:

$$\underline{C_t} = \sum_{i=1}^{q} A_i \begin{bmatrix} E_{ti} & 0 & -y_i E_{ti} \\ 0 & \alpha_y G_{ti} & 0 \\ -y_i E_{ti} & 0 & y_i^2 E_{ti} \end{bmatrix}. \tag{2.20}$$

Nas matrizes constitutivas secante e tangente (Equações 2.18 e 2.20), além da área, outras duas propriedades geométricas da seção estão presentes, o momento estático (Q) e o momento de inércia (I), ambos em relação ao eixo z, dados por:

$$Q_z = \sum_{i=1}^{q} A_i \cdot y_i \text{ e} \tag{2.21}$$

$$I_z = \sum_{i=1}^{q} A_i \cdot y_i^2. \tag{2.22}$$

Analisando as matrizes constitutivas secante e tangente (Equações 2.18 e 2.20), é possível perceber que a diagonal de cada matriz é composta pelas rigidezes da seção ao esforço normal, cisalhamento e flexão. Além disso, visto que, para seções aproximadamente simétricas, o momento estático pode ser considerado zero, assim, tais matrizes são reescritas levando-se em conta apenas os termos das diagonais, resultando na seguinte forma:

$$C_s = \begin{bmatrix} E_s A & 0 & 0 \\ 0 & G_s A \alpha_y & 0 \\ 0 & 0 & E_s I_z \end{bmatrix}, \tag{2.23}$$

onde $E_s A$, $G_s A \alpha_y$ e $E_s I_z$ são as rigidezes secantes associadas aos esforços normal, cortante e de flexão, respectivamente.

$$C_t = \begin{bmatrix} E_t A & 0 & 0 \\ 0 & G_t A \alpha_y & 0 \\ 0 & 0 & E_t I_z \end{bmatrix}, \tag{2.24}$$

onde $E_t A$, $G_t A \alpha_y$ e $E_t I_z$ são as rigidezes tangentes associadas aos esforços normal, cortante e de flexão, respectivamente.

Dessa forma, as relações entre tensões generalizadas (esforços solicitantes) e deformações generalizadas são dadas pelas equações:

$$N = AE_s \cdot \varepsilon_a, \tag{2.25}$$

$$V_y = AG_s \cdot \gamma_y \text{ e} \tag{2.26}$$

$$M_z = E_s I_z \cdot \kappa_z. \tag{2.27}$$

Relações incrementais também podem ser escritas utilizando a rigidez tangente, da seguinte forma:

$$dN = AE_t \cdot d\varepsilon_a, \tag{2.28}$$

$$dV_y = AG_t \cdot d\gamma_y \text{ e} \tag{2.29}$$

$$dM_z = E_t I_z \cdot d\kappa_z. \tag{2.30}$$

As rigidezes da seção são funções das deformações generalizadas e podem ser obtidas por relações tensão-deformação generalizadas, como ilustrado nas Figuras 2.3, 2.4 e 2.5, onde são mostradas relações esquemáticas para o esforço normal, cisalhamento e flexão, com as propriedades secantes e tangentes.

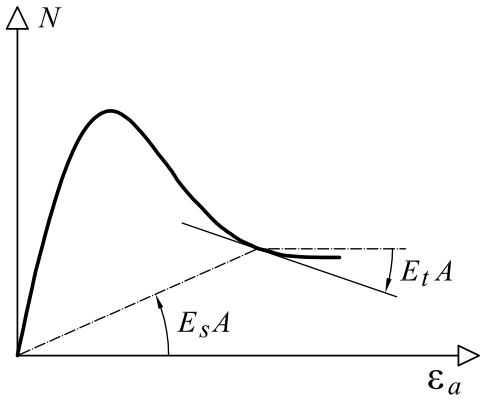


Figura 2.3: Relação para o esforço normal.

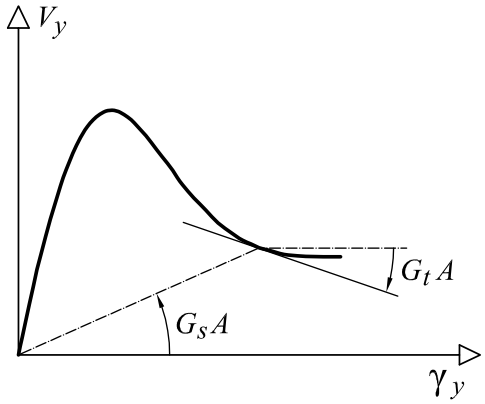


Figura 2.4: Relação para o cisalhamento.

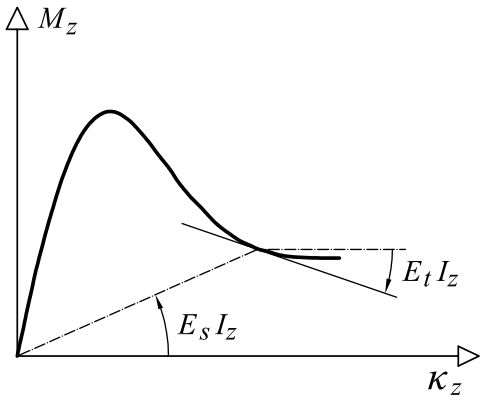


Figura 2.5: Relação para a flexão.

Dessa forma, o esforço na seção é obtido diretamente a partir de um dado estado de deformação, sem a necessidade de integração dos esforços, obtendo-se ganho computacional.

2.2 Teoria de Bernoulli-Euler

Para um modelo de pórtico plano considerando a Teoria de Bernoulli-Euler, assumem-se as seguintes hipóteses:

(1) seções transversais normais ao eixo da barra antes da flexão, permanecem planas e ortogonais a tal eixo depois da flexão e
(2) a barra suporta deformações devido à força normal e à flexão.

Estas diferem das hipóteses da Teoria de Timoshenko quanto à ortogonalidade das seções e quanto à consideração de deformações de cisalhamento. Portanto, não há necessidade de uma hipótese equivalente à hipótese (3) daquela Teoria. Assume-se ainda como válida a hipótese (4).

Dessa forma, para o vetor de tensões generalizadas incrementais (dM), deformações generalizadas incrementais ($d\chi$) e a matriz constitutiva tangente ($\underline{C_t}$), tem-se:

$$\underline{dM}^T = \left[\begin{array}{cc} N & M_z \end{array} \right], \tag{2.31}$$

$$\underline{d\chi}^T = \left[\begin{array}{cc} \varepsilon_a & k_z \end{array} \right] \text{ e} \tag{2.32}$$

$$\underline{C_t} = \sum_{i=1}^{q} A_i \left[\begin{array}{cc} E_{ti} & -y_i E_{ti} \\ -y_i E_{ti} & y_i^2 E_{ti} \end{array} \right]. \tag{2.33}$$

A matriz constitutiva tangente reescrita em termos da diagonal principal fica:

$$\underline{C_t} = \left[\begin{array}{cc} E_t A & 0 \\ 0 & E_t I_z \end{array} \right]. \tag{2.34}$$

Capítulo 3

Análise Fisicamente Não Linear de Estruturas

Em problemas onde a não linearidade física é considerada, dois aspectos são indispensáveis para o processamento da análise: um modelo constitutivo que represente adequadamente o comportamento do material ou da seção transversal, e um método de controle para a solução das equações não lineares de equilíbrio.

Quando é utilizado o modelo de seção decomposta é necessário leis constitutivas que representem o comportamento dos materiais, no caso o aço e o concreto, tanto em compressão quanto em tração. Já para o modelo de seção homogeneizada são usadas relações tensão-deformação generalizada representativas da seção transversal.

Os métodos de controle, dependendo do problema analisado, podem ou não descrever a trajetória de equilíbrio. Não existe um método geral que seja capaz de descrever o comportamento de qualquer tipo de estrutura. Assim sendo, a escolha de um método adequado torna-se uma decisão importante, que influencia diretamente no desenvolvimento da análise.

Nesse sentido, é abordado neste capítulo as leis constitutivas utilizadas neste trabalho para o concreto e o aço. Para as relações tensão-deformação generalizada são apresentadas diferentes opções para obtenção de tais relações, a saber: modelos numéricos, ensaios experimentais e pela expressão para inércia equivalente da NBR6118 (2014). Com relação aos métodos de controle é apresentado o método de controle de carga, que embora seja um dos mais utilizados, não permite a completa

descrição das trajetórias de equilíbrio dos problemas aqui analisados. Na sequência o método de controle direto de deslocamentos é apresentado, sendo este o utilizado nas simulações deste trabalho.

3.1 Leis Constitutivas Não Lineares

Os modelos baseados na decomposição da seção transversal necessitam de relações tensão-deformação para os diversos materiais constituintes. Estas leis constitutivas captam a integridade do módulo secante a partir do estado de deformação de pontos da seção e são propostas pela aproximação de equações matemáticas, ajustadas com base em experimentos e correlacionadas com propriedades características do material. A seguir são apresentadas as leis tensão-deformação para o concreto e o aço utilizadas neste trabalho.

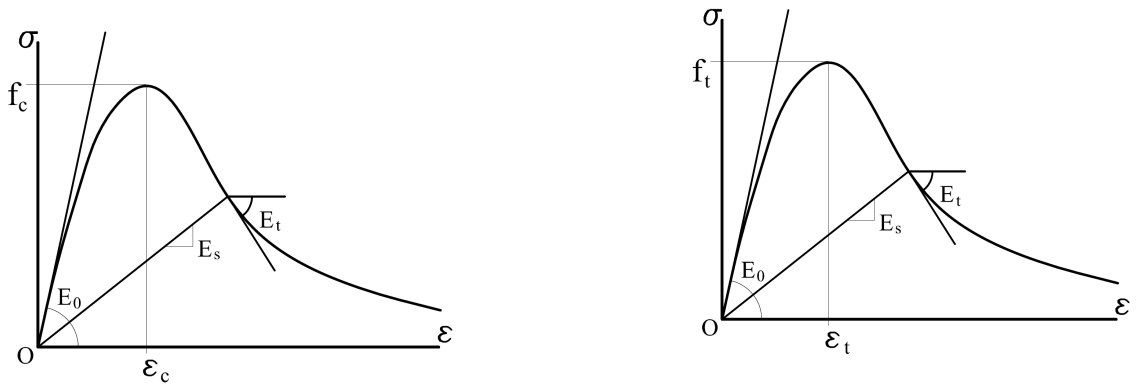
3.1.1 Leis Polinomiais para o Concreto

As leis propostas por Carreira e Chu (1985, 1986) levam em conta o amolecimento do concreto na compressão e sua capacidade de resistência à tração. Estas leis apresentam formas polinomiais baseadas nos limites de tensão e deformação para tração e para compressão, sendo dadas pelas Equações 3.1 e 3.2 e ilustradas na Figura 3.1.

$$\sigma_t = f_t \cdot \frac{k_t \cdot (\frac{\varepsilon}{\varepsilon_t})}{k_t - 1 + (\frac{\varepsilon}{\varepsilon_t})^{k_t}}, \quad \text{com} \quad k_t = \frac{1}{1 - (\frac{f_t}{\varepsilon_t E_0})} \quad \text{e} \tag{3.1}$$

$$\sigma_c = f_c \cdot \frac{k_c \cdot (\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c})}{k_c - 1 + (\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c})^{k_c}}, \quad \text{com} \quad k_c = \frac{1}{1 - (\frac{f_c}{\varepsilon_c E_0})} \quad , \tag{3.2}$$

onde σ_t é tensão de tração, σ_c é tensão de compressão, f_t é a máxima tensão de tração, f_c é a máxima tensão de compressão, ε_t é a deformação relativa a máxima tensão de tração, ε_c é a deformação relativa a máxima tensão de compressão, ε é a deformação corrente e E_0 é o módulo de elasticidade inicial do concreto.



(a) - Compressão (b) - Tração

Figura 3.1: Leis polinomiais (Penna, 2011).

3.1.2 Lei Exponencial para o Concreto

A proposta de Boone e Ingraffea (1987) aproxima o comportamento à tração do concreto por uma lei exponencial baseada na energia de fratura e em limites de deformação e tensão. A equação é dada por:

$$\sigma = f_t e^{-k(\varepsilon-\varepsilon_t)} \quad \text{sendo:} \;\; k = \frac{h f_t}{G_f} \;\; ou \;\; k = \frac{f_t}{g_f} \, , \tag{3.3}$$

onde σ é a tensão de tração, f_t é tensão limite de resistência à tração, ε é a deformação corrente, ε_t é a deformação relativa ao limite elástico na tração, h é o comprimento característico do material, G_f é a energia de fratura por comprimento de trinca (w) e g_f é a energia de fratura específica. A Figura 3.2 ilustra os parâmetros da equação.

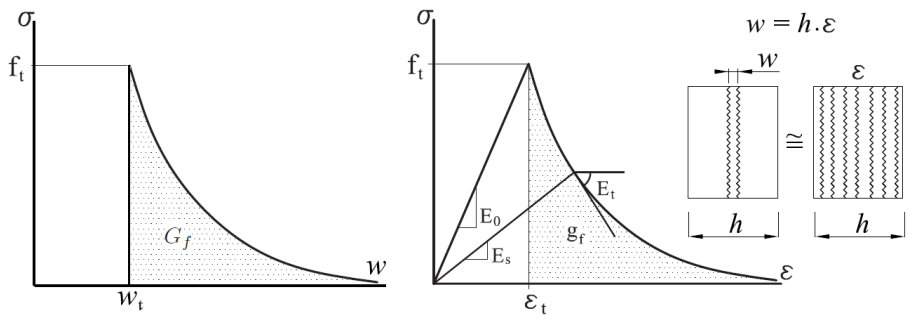


Figura 3.2: Lei exponencial para o concreto em tração.

3.1.3 Lei Elastoplástica para o Aço

Para o aço é adotada a lei elastoplástica apresentada na Figura 3.3, onde E_s é o módulo de elasticidade do aço, E_p é o módulo elastoplástico, f_y é a tensão de escoamento e ε_y a deformação de escoamento. Para o valor do módulo elastoplástico igual a zero, o escoamento do aço se dá por um patamar constante, sem ocorrer endurecimento.

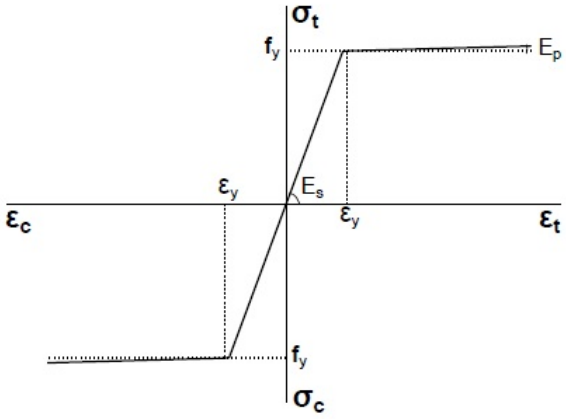


Figura 3.3: Lei elastoplástica para o aço.

3.2 Relações Tensão-Deformação Generalizada

Nesta seção são apresentadas três diferentes formas para a obtenção de relações tensão-deformação generalizada.

Primeiramente, são apresentados modelos numéricos que permitem obter tais relações através da decomposição da seção transversal e prescrição de leis tensão-deformação pontuais.

Posteriormente, o caso de flexão é exposto com base no modelo simplificado de Branson (1968). Optou-se por essa formulação pelo fato da expressão da NBR6118 (2014) para o cálculo da inércia equivalente ser baseada neste trabalho.

Por fim apresenta-se, também para o caso de flexão, como tais relações podem ser obtidas através de ensaios experimentais em vigas de concreto armado.

3.2.1 Modelos Numéricos

Para a obtenção de relações tensão-deformação generalizada, modelos numéricos que utilizam relações tensão-deformação pontuais e a seção transversal decomposta em camadas podem ser usados para simular estados elementares de solicitação e, assim, obter tais relações.

As relações tensão-deformação generalizada para a flexão e esforço normal são obtidas através de um modelo baseado na teoria de Bernoulli-Euler, com um elemento finito de dois nós e dois pontos de Gauss, engastado em uma extremidade e livre na outra. Na extremidade livre é aplicado um momento para obtenção da relação de flexão e uma carga concentrada na direção axial para obtenção da relação do esforço normal. As relações são obtidas em um dos pontos de Gauss. A Figura 3.4 ilustra o modelo utilizado para a flexão.

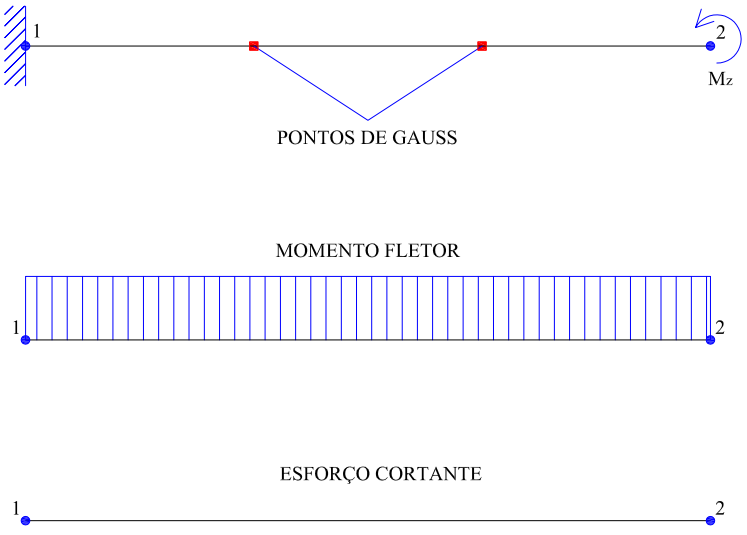


Figura 3.4: Estado elementar de solicitação para a flexão.

No caso da relação para o cisalhamento é utilizado o modelo apresentado na Figura 3.5. Trata-se de uma viga biapoiada modelada com quatro elementos de Timoshenko com dois nós e um ponto de integração. Duas cargas de sentidos opostos são aplicadas, uma no nó 2 e outra no nó 4. Dessa forma, no nó 3 tem-se a

aproximação numérica de um estado de cisalhamento puro, sendo neste nó obtida a relação para o cisalhamento.

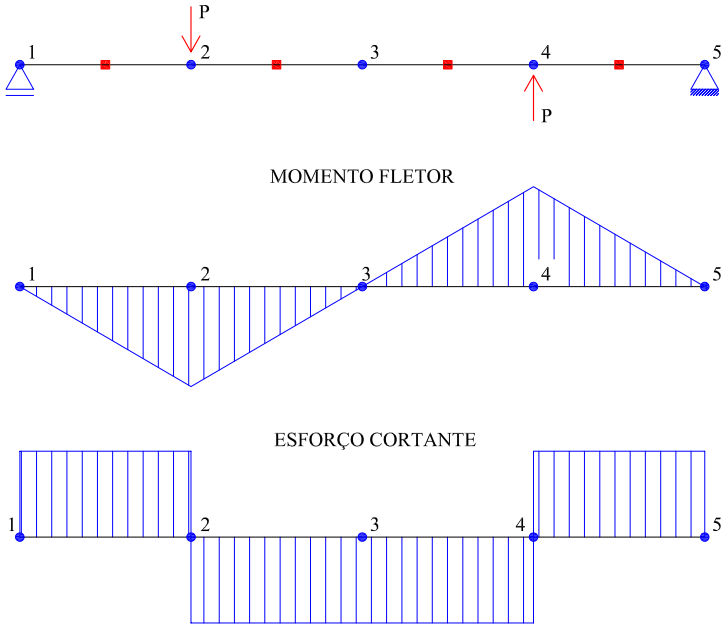


Figura 3.5: Estado elementar de solicitação para o cisalhamento.

3.2.2 Modelo Simplificado de Branson (1968)

O modelo proposto por Branson (1968) admite uma única inércia para todo elemento de concreto, representando os trechos fissurados e não fissurados. Baseia-se em um método semiprobabilístico, o qual toma a variação da tensão ao longo da seção transversal e ao longo do comprimento de maneira simplificada, utilizando expressões empíricas que fornecem valores médios de inércia (Carvalho e Figueiredo Filho, 2007).

Com base neste modelo, a NBR6118 (2014) apresenta uma equação para o cálculo da inércia equivalente representativa de uma seção transversal, conforme mostrado a seguir:

$$(E \cdot I)_{eq} = E_{cs} \cdot \left\{ \left(\frac{M_r}{M_a} \right)^3 \cdot I_c + \left[1 - \left(\frac{M_r}{M_a} \right)^3 \right] \cdot I_{II} \right\}, \tag{3.4}$$

onde:

I_c - momento de inércia da seção bruta de concreto;

I_{II} -momento de inércia da seção fissurada de concreto no estádio II;

M_a - momento fletor atuante na seção;

M_r - momento de fissuração do elemento estrutural; e

E_{cs} - módulo de elasticidade secante do concreto ($E_{cs} = 0,85 \cdot E_{ci}$).

O momento de fissuração do elemento estrutural é dado pela Equação 3.5:

$$M_r = \frac{\alpha \cdot f_{ct,m} \cdot I_c}{y_t}, \tag{3.5}$$

onde:

α - 1, 2 para seções "T"ou duplo "T", e 1, 5 para seções retangulares;

$f_{ct,m}$ - resistência média à tração do concreto; e

y_t - distância do centro de gravidade à fibra mais tracionada.

A inércia da seção fissurada de concreto no estádio II para seções retangulares pode ser obtida pela Equação 3.6:

$$I_{II} = \frac{b \cdot x_{II}^3}{3} + \alpha_e \cdot A_s \cdot (x_{II} - d)^2 + (\alpha_e - 1) \cdot A_s^{'} \cdot (x_{II} - d^{'})^2, \tag{3.6}$$

onde:

b - base da seção transversal do elemento estrutural;

x_{II} - posição da linha neutra;

α_e - relação entre o módulo de deformação longitudinal do aço e do concreto;

A_s - área de aço tracionada;

$A_s^{'}$ - área de aço comprimida;

d - distância do centro de gravidade da armadura tracionada até a borda de concreto comprimido; e

$d^{'}$ - distância do centro de gravidade da armadura comprimida até a borda de concreto comprimido.

A posição da linha neutra (x_{II}) é obtida igualando-se a zero o momento estático da seção homogeneizada. No trabalho de Ghali e Favre (1986) é apresentada a

formulação para o cálculo de x_{II} para vigas com seção "T", obtida da equação do segundo grau mostrada a seguir:

$$a_1 \cdot x_{II}^2 + a_2 \cdot x_{II} + a_3 = 0. \tag{3.7}$$

Os coeficientes a_1, a_2 e a_3 para o caso de seções retangulares são dados por:

$$a_1 = b/2, \tag{3.8}$$

$$a_2 = A_s^{'} \cdot (\alpha_e - 1) + \alpha_e \cdot A_s \text{ e} \tag{3.9}$$

$$a_3 = -d^{'} \cdot (\alpha_e - 1) - d \cdot \alpha_e \cdot A_s. \tag{3.10}$$

Obtidos os parâmetros para o cálculo da inércia equivalente, as curvaturas podem ser obtidas pela equação 3.11.

$$\kappa_z = \frac{M_a}{(E \cdot I)_{eq}}. \tag{3.11}$$

A equação 3.11 é valida para a seção no Estádio II. O momento de escoamento ou momento de plastificação (M_y) das armaduras indica o fim desse Estádio e pode ser obtido pela Equação 3.12, admitindo como simplificação que é valida a proporcionalidade entre tensões e a distância à linha neutra no Estádio II.

$$M_y = \frac{f_y \cdot I_{II}}{\alpha_e \cdot (d - x_{II})}. \tag{3.12}$$

3.2.3 Ensaios Experimentais

Realizando-se o ensaio de flexão em 4 pontos e medindo as deformações no aço e no concreto, as curvaturas podem ser obtidas pela Equação 3.13.

$$\kappa_z = \arctan\left(\frac{|\varepsilon_c| + \varepsilon_s}{d}\right) \simeq \left(\frac{|\varepsilon_c| + \varepsilon_s}{d}\right), \tag{3.13}$$

onde:

ε_c - deformação medida no concreto; ε_s - deformação medida no aço e d - distância do centro de gravidade da armadura tracionada até a borda de concreto comprimido.

Outra forma de se obter as curvaturas, porém de forma indireta, é pela medição dos deslocamentos no meio da viga no ensaio de flexão em 4 pontos. Da Resistência dos Materiais, é possível determinar os deslocamentos em uma viga biapoiada utilizando, por exemplo, o Método da Integração Direta (Hibbeler, 2004). Assim, o deslocamento (Δ) na seção central é dado por:

$$\Delta = \frac{P.a}{24.E.I_z}(4.a^2 - 3.L^2), \tag{3.14}$$

onde Δ, P, a e L são indicados na Figura 3.6, E é o módulo de elasticidade e I_z a inércia a flexão.

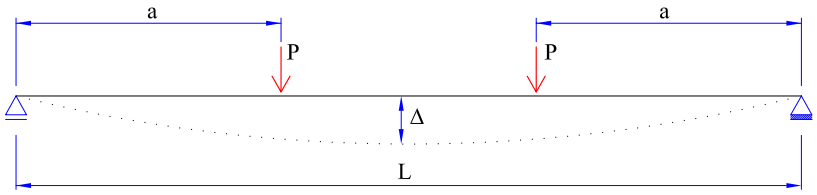


Figura 3.6: Modelo para ensaio experimental.

Escrevendo a Equação 3.14 em função do deslocamento, tem-se:

$$E.I_z = \frac{P.a}{24.\Delta}(4.a^2 - 3.L^2). \tag{3.15}$$

A curvatura κ_z pode ser escrita em função do momento (M_z) e da regidez à flexão ($E.I_z$):

$$\kappa_z = \frac{M_z}{E.I_z}. \tag{3.16}$$

Substituindo a Equação 3.15 na Equação 3.16 tem-se κ_z escrito em função do deslocamento:

$$\kappa_z = \frac{M_z}{\frac{P.a}{24.\Delta}(4.a^2 - 3.L^2)}. \tag{3.17}$$

A Equação 3.17 pode ser reescrista substituindo (M_z) por $P.a$ e fazendo a simplificação, da seguinte forma:

$$\kappa_z = \frac{24.\Delta}{4.a^2 - 3.L^2}. \tag{3.18}$$

Dessa forma as curvaturas associadas a cada nível de carregamento podem ser obtidas em função dos deslocamentos medidos (Δ), da distância entre o apoio e o ponto de aplicação da carga (a) e do vão da viga (L).

3.3 Solução de Equações Não Lineares de Equilíbrio

Em problemas de análise não linear é necessário resolver sistemas com $N + 1$ incógnitas, sendo N deslocamentos incrementais e um incremento no fator de carga, e $N + 1$ equações, sendo N equações de equilíbrio e uma equação de restrição. Para obter a solução desse sistema é necessário utilizar um processo incremental-iterativo.

O método de Newton-Raphson padrão pressupõe que a matriz de rigidez tangente é recalculada a cada iteração. Neste caso, a equação de equilíbrio incremental (3.19) correspondente a iteração j do passo i pode ser escrita da seguinte forma:

$$[K]^i_{j-1} \cdot [\delta U]^i_j = \delta\lambda^i_j \cdot \{P\} + \{Q\}^i_{j-1}, \tag{3.19}$$

onde:

$[K]^i_{j-1}$ é a matriz de rigidez tangente na iteração $j - 1$ do passo i , função do campo de deslocamentos $[U]^i_{j-1}$;

$\{\delta U\}^i_j$ é o vetor de deslocamentos incrementais da iteração j do passo i ;

$\delta\lambda^i_j$ é o incremento do fator de cargas na iteração j do passo i ;

$\{P\}$ é o vetor de cargas de referência; e

$\{Q\}_{j-1}^{i}$ é o vetor de forças residuais da iteração $j-1$ do passo i .

Primeiramente, um valor para o incremento do fator de carga, $\delta\lambda_j$, é estabelecido em função do parâmetro de controle. Assim pode-se obter $\{\delta U\}_j$ em função das parcelas associadas à carga de referência $\{\delta U\}_j^P$ e à carga residual $\{\delta U\}_j^Q$, na forma:

$$\{\delta U\}_j = \delta\lambda_j \cdot \{\delta U\}_j^P + \{\delta U\}_j^Q, \tag{3.20}$$

com

$$[K]_{j-1} \cdot \{\delta U\}_j^P = \{P\} \text{ e} \tag{3.21}$$

$$[K]_{j-1} \cdot \{\delta U\}_j^Q = \{Q\}_{j-1}. \tag{3.22}$$

Ao final de cada iteração, a convergência é verificada por meio da magnitude do vetor de forças residuais $\{Q\}_j$ e/ou da magnitude do vetor de deslocamentos iterativos $\{\delta U\}_j$. O processo iterativo continua até que um determinado critério de convergência seja atendido. Caso seja necessária uma nova iteração, após calculados $\{\delta U\}_j^P$ e $\{\delta U\}_j^Q$ com as equações 3.21 e 3.22, o valor de $\delta\lambda_j$ deve ser obtido com uma equação de restrição que envolve combinações das grandezas do problema.

A atualização das variáveis é feita da seguinte forma:

$$\lambda_j = \lambda_{j-1} + \delta\lambda_j \text{ e} \tag{3.23}$$

$$\{U\}_j = \{U\}_{j-1} + \delta U_j. \tag{3.24}$$

O vetor de cargas residuais da iteração j é dado por:

$$\{Q\}_j = \lambda_j \cdot \{P\} - \{F\}_j, \tag{3.25}$$

onde $\{F\}_j$ é o vetor de forças equivalentes às tensões internas ao final da iteração j. Na primeira iteração de cada passo, o vetor de cargas residuais $\{Q\}_{j-1}$ é nulo.

3.3.1 Controle de Carga

Neste método, a carga externa é incrementada de um valor constante na primeira iteração de cada passo ($j = 1$). Para as demais iterações ($j > 1$), dentro de um mesmo passo, o carregamento externo é constante, ou seja, o incremento de carga é igual a zero. A variável $\delta\lambda_j$ pode ser obtida pela equação 3.26.

$$\delta\lambda_j = \begin{cases} Constante, para\ j = 1 \\ 0, para\ j > 1. \end{cases} \tag{3.26}$$

A Figura 3.7 apresenta um esquema do processo iterativo deste método.

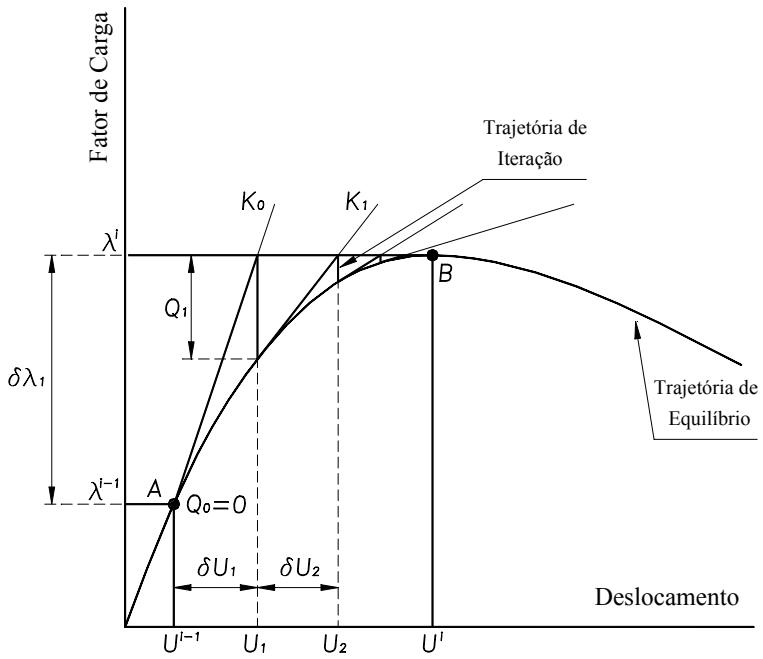


Figura 3.7: Processo incremental-iterativo com controle de carga (Fuina, 2009).

Como as iterações são processadas à carga constante, a utilização deste método falha na passagem por pontos limites de carga, ou seja, quando a carga externa ultrapassa o valor correspondente a um ponto limite (ponto B na Figura 3.7), a linha

horizontal que controla a trajetória de iteração não cruza a trajetória de equilíbrio, logo, nenhum ponto de convergência pode ser obtido.

3.3.2 Controle Direto de Deslocamento

Este método (Batoz e Dhat, 1979) supõe que as iterações são processadas a um deslocamento constante. O incremento da componente k do vetor de deslocamentos, δU_j^k, é dado pela equação 3.27.

$$\delta U_j^k = \begin{cases} Constante, para\ j = 1. \\ 0, para\ j > 1. \end{cases} \tag{3.27}$$

Substituindo o vetor de deslocamentos incrementais por sua componente k na equação $\{\delta U_j\} = \delta\lambda_j \cdot \{\delta U_j^P\} + \{\delta U_j^Q\}$, tem-se a equação 3.28.

$$\delta\lambda_j = \frac{\delta U_j^k - \delta U_j^{Q^k}}{\delta U_j^{P^k}}. \tag{3.28}$$

Na primeira iteração de cada passo o vetor de cargas residuais ($\{Q\}_{j-1}$) é nulo, logo, os deslocamentos a ele associados $\{\delta U_j^{Q^k}\}$ também são nulos, conforme a Equação 3.22. Sendo assim, na primeira iteração, a Equação 3.28 pode ser escrita conforme apresentado na Equação 3.29.

$$\delta\lambda_j = \frac{\delta U_1^k}{\delta U_1^{P^k}}, \quad para\ j = 1. \tag{3.29}$$

Nas demais iterações ($j > 1$), δU_j^k é nulo, conforme a Equação 3.27, e o incremento de cargas proporcionais pode ser escrito como na Equação 3.30.

$$\delta\lambda_j = -\frac{\delta U_j^{Q^k}}{\delta U_j^{P^k}}, \quad para\ j > 1. \tag{3.30}$$

A Figura 3.8 ilustra o procedimento iterativo deste método.

A grande desvantagem deste método é a necessidade de conhecimento prévio da estrutura a ser analisada para que se possa escolher o grau de liberdade adequado a

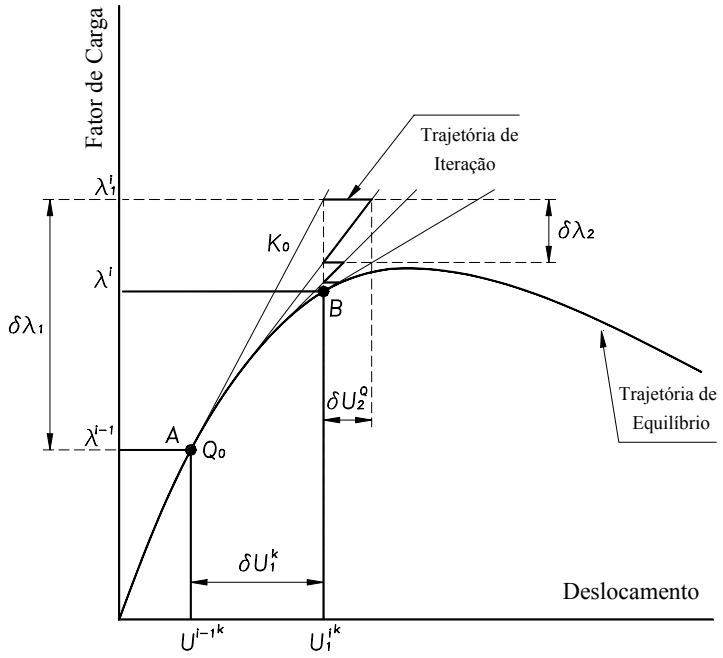


Figura 3.8: Processo incremental-iterativo com controle direto de deslocamento (Fuina, 2009).

ser usado para o controle; dessa forma a experiência do usuário contribui para resolver o problema. Além disso, assim como no método de controle de carga, que não permite a passagem por pontos limites de carga, o controle direto de deslocamento é ineficiente se o deslocamento de controle experimenta diminuição ($snap - back$) de um nível de carga para outro. Isto se deve ao fato da trajetória de iteração, controlada por uma linha vertical, nunca cruzar a trajetória de equilíbrio.

Capítulo 4

Implementação Computacional

Neste capítulo, é apresentada a implementação computacional da formulação baseada em relações tensão-deformação generalizada realizada no `INSANE`.

O sistema é desenvolvido segundo o paradigma de Programação Orientada a Objetos e utiliza a linguagem *Java*, podendo ser dividido em três grandes aplicações: pré-processador, processador e pós-processador. O pré e o pós-processador são aplicações gráficas interativas que fornecem recursos para construir as diversas representações discretas de um problema estrutural, além de visualização de resultados. O processador representa o núcleo numérico e é responsável pela obtenção dos resultados dos modelos.

O código fonte do `INSANE` é livre e sua biblioteca é composta por diversos módulos que permitem aos desenvolvedores realizarem novas implementações independentes e simultâneas, sem modificações significativas no sistema.

A seguir, são discutidas as alterações, na aplicação processador, dos módulos numéricos relacionadas às implementações realizadas. São utilizados diagramas de classes que ilustram a hierarquia das mesmas e como elas se comunicam para desempenhar suas funções. Estes diagramas seguem a proposta da *Unified Modeling Language* (`UML`), que é uma linguagem padronizada para a modelagem de sistemas orientados a objetos.

Para a orientação quanto ao entendimento das contribuições deste trabalho,

adotou-se a simbologia ilustrada na Figura 4.1. As classes do INSANE simbolizadas pelas cores branca, amarela e verde fazem referência às classes não modificadas, modificadas e criadas, respectivamente.

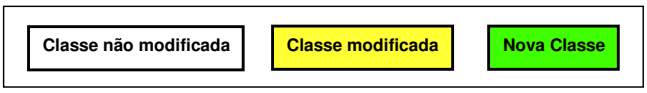


Figura 4.1: Simbologia do diagrama em UML utilizada nesta dissertação.

4.1 Organização do Núcleo Numérico do INSANE

O núcleo numérico do sistema INSANE é formado por interfaces e classes capazes de representar as abstrações necessárias à resolução numérica de diferentes modelos de análise estrutural. A aplicação central que representa este núcleo, dita Processador, depende das relações existentes entre as classes abstratas Solution e Model e as interfaces Assembler e Persistence, ilustradas no diagrama de colaboração entre classes da Figura 4.2.

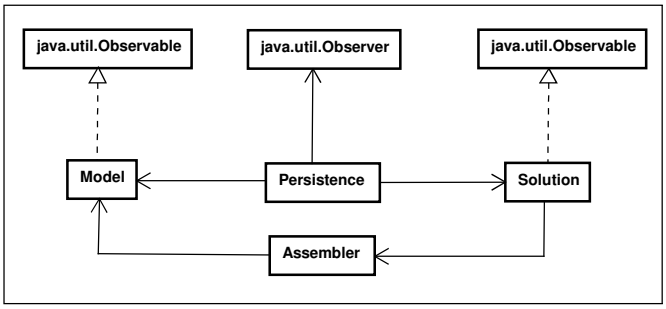


Figura 4.2: Organização do núcleo numérico do sistema INSANE.

A interface Assembler é a responsável por montar as matrizes e vetores do sistema matricial de segunda ordem conforme o problema a ser resolvido:

$$\mathbf{A}\,\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{B}\,\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\,\mathbf{X} = \mathbf{D}, \tag{4.1}$$

sendo $\mathbf{X}$ o vetor de variáveis de estado do problema; $\dot{\mathbf{X}}$ e $\ddot{\mathbf{X}}$ os vetores, respectivamente, com a primeira e segunda variação temporal das variáveis de estado; $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e

C as matrizes dos coeficientes, que podem ou não depender das variáveis de estado e suas derivadas e, por fim, **D** o vetor com os termos independentes deste sistema.

A classe abstrata `Solution` é responsável pelo processo de solução e possui os recursos necessários para a resolução da Equação (4.1), seja esta linear ou não linear.

Já a interface `Model` é implementada por classes capazes de representar diferentes modelos discretos. Cada uma destas classes possui os dados relativos ao modelo discreto de análise e fornece para `Assembler` todas as informações necessárias para montar a equação do modelo a ser resolvido por `Solution`.

A interface `Persistence` se comunica com `Model` e `Solution`, sendo responsável pelo tratamento dos dados de entrada e pela persistência dos dados de saída. Esta persistência é realizada por meio de arquivos *XML* (*eXtensible Markup Language*), que possibilitam a criação de dados estruturados com base em arquivo texto. Na Figura 4.3 é apresentada a hierarquia da interface `Persistence`, que é implementada pela classe `PersistenceAsXML`, modificada a fim de persistir a entrada e a saída de dados referentes as implementações desta dissertação.

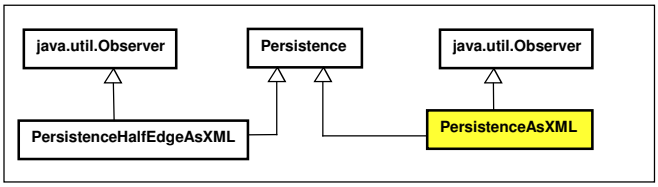


Figura 4.3: Diagrama de classes para `Persistence`.

A interface `Persistence` também é responsável pela observação das alterações das variáveis durante a análise não linear. Este processo de observação de alterações ocorre segundo o padrão de projeto `Observer`, entendido como um mecanismo de propagação de mudanças existente no núcleo numérico do `INSANE`, conforme ilustra a Figura 4.3. A consistência e a comunicação entre o objeto observador `PersistenceAsXML`, que implementa a interface `java.util.Observer`, e os componentes observados `Solution` e `Model`, que estendem a classe `java.util.Observable`, são garantidas, pois quando alguma mudança ocorre no estado do objeto observado, um

mecanismo é disparado e se encarrega de notificar os objetos observadores para se atualizarem.

Na sequência, o núcleo numérico do `INSANE` será detalhado com ênfase nos aspectos relativos à análise fisicamente não linear, visando a inserção das classes necessárias para inclusão do modelo de seção homogeneizada baseado em relações tensão-deformação generalizada.

4.2 Análise Estática Fisicamente Não Linear

Na mecânica dos sólidos computacional, o sistema de equações (4.1) se reduz, no caso estático, para:

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{D}, \tag{4.2}$$

sendo $\mathbf{C}$ a matriz de rigidez global, $\mathbf{X}$ o vetor de deslocamentos nodais e $\mathbf{D}$ o vetor de forças nodais do modelo. Se a análise é fisicamente não linear, a matriz $\mathbf{C}$ depende dos deslocamentos $\mathbf{X}$. Neste caso, as raízes da Equação (4.2) são obtidas por meio de um processo incremental iterativo, sendo o sistema de equações reescrito como:

$$\mathbf{K} \cdot \delta\mathbf{U} = \delta\lambda \cdot \mathbf{P} + \mathbf{Q}, \tag{4.3}$$

onde $\mathbf{K}$ é a matriz de rigidez incremental, $\delta\mathbf{U}$ é o vetor de deslocamentos incrementais, $\delta\lambda$ é um incremento do fator de carga, $\mathbf{P}$ é o vetor de cargas de referência e $\mathbf{Q}$ é o vetor de cargas residuais do modelo, obtido pela diferença entre o vetor de cargas externas e o vetor de forças equivalentes às tensões internas $\mathbf{F}$.

No MEF, a matriz $\mathbf{K}$ e o vetor $\mathbf{F}$ são montados a partir da contribuição de cada elemento finito. Tal processo se baseia em duas operações fundamentais:

$$\mathbf{K}^e = \int_V \mathbf{B}^T\mathbf{E}\mathbf{B}\ dV \quad \text{e} \quad \mathbf{F}^e = \int_V \mathbf{B}^T\boldsymbol{\sigma}\ dV, \tag{4.4}$$

onde $\mathbf{K}^e$ é a matriz de rigidez, $\mathbf{F}^e$ o vetor de cargas nodais equivalentes ao estado de tensão corrente, $\mathbf{B}$ a matriz das relações deformação-deslocamento, $\mathbf{E}$ a matriz constitutiva e $\boldsymbol{\sigma}$ o vetor das tensões correntes do elemento finito, sendo todos integrados sobre o volume, V, de cada elemento.

A sequência de atividades que permite solucionar a Equação 4.3, segue o algoritmo genérico proposto por Yang e Shieh (1990), incluído no sistema `INSANE` por meio dos trabalhos de Fonseca (2006, 2008), Fuina (2004) e Penna (2011), tendo seu início na montagem da matriz de rigidez incremental.

Conforme o equacionamento mostrado no Capítulo 2, as alterações necessárias para implementação do modelo apresentado referem-se apenas aos modelos constitutivos. No sistema `INSANE` tais modelos são implementados no pacote `MaterialMedia` apresentado a seguir.

4.3 Pacote `MaterialMedia`

O pacote `MaterialMedia` contém interfaces e classes necessárias para representar da forma mais geral possível a constituição física dos elementos finitos.

A interface `Material` possui os métodos necessários para obter informações sobre as propriedades dos diferentes materiais, sejam elas propriedades secantes ou tangentes, avaliadas de forma pontual ou secante na seção. Os diferentes materiais são representados pelas classes que implementam a interface `Material`, e que têm como atributos seu identificador e uma coleção do tipo `HashMap` com os valores necessários para caracterizar aquele material. A Figura 4.4 mostra o diagrama de classe da interface `Material` e algumas de suas subclasses utilizadas neste trabalho. Dentre essas subclasses está a `MomentCurvatureMaterial` utilizada para os modelos tensão-deformação generalizada, bem como aquelas utilizadas nos modelos tensão-deformação, implementadas para os materiais descritos na Seção 3.1.

A interface *inelasticLaw*, apresentada na Figura 4.5, permite o acesso da classe `MomentCurvatureMaterial` a três instâncias da classe `MomentCurvatureLaw`, uma para cada esforço interno. Já a interface `MomentCurvatureLaw` é responsável por tratar as relações entre tensões generalizadas e deformações generalizadas fornecidas por `MomentCurvatureTable`, que contém um conjunto de pontos discretos representativos de determinada relação.

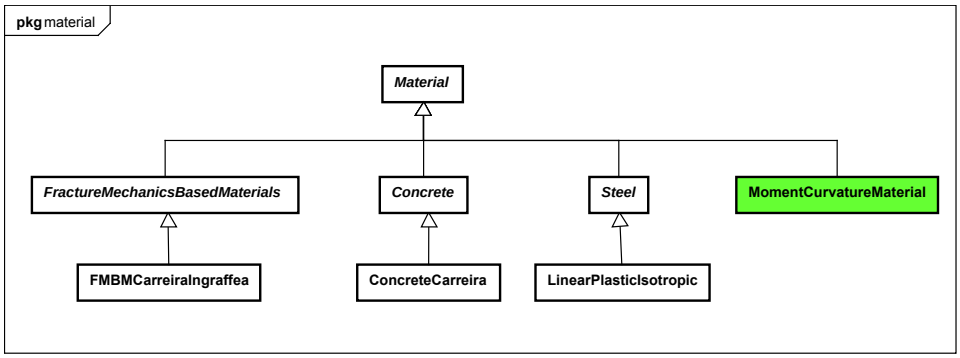


Figura 4.4: Diagrama de classes para `Material`.

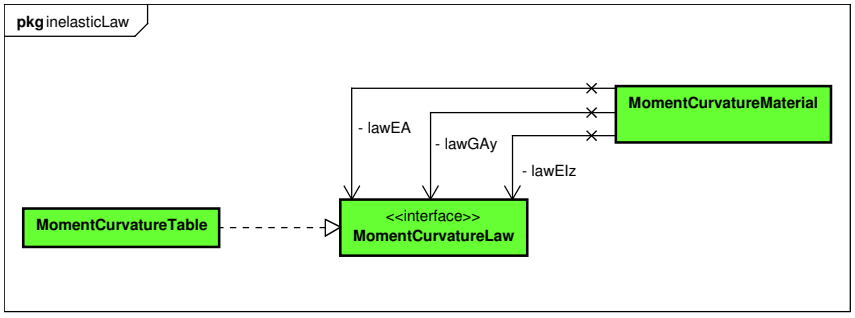


Figura 4.5: Diagrama de classes para `inelasticLaw`.

A Figura 4.6 mostra o diagrama de classes da interface `ConstitutiveModel`, responsável por montar as matrizes constitutivas. Um objeto do tipo `ConstitutiveModel` monta tanto as matrizes constitutivas secantes e tangentes quanto o vetor de tensões referentes às variáveis de estado correntes.

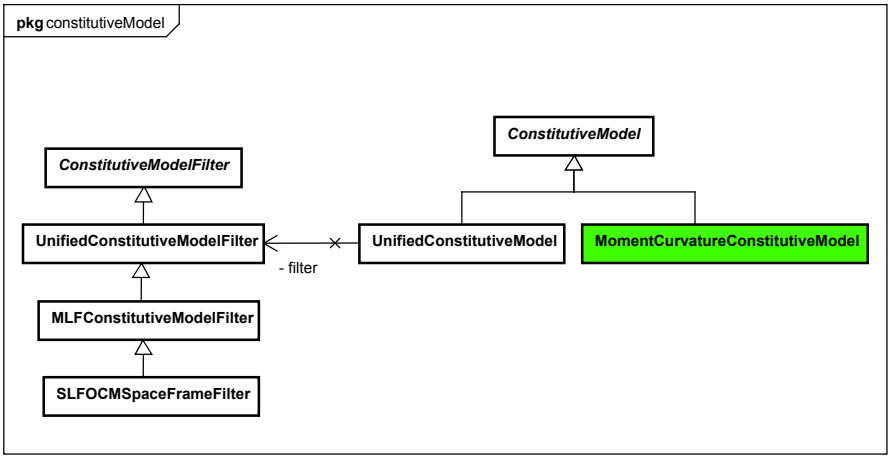


Figura 4.6: Diagrama de classes para `ConstitutiveModel`.

Capítulo 5

Simulações Numéricas

Com o objetivo de validar a implementação da formulação proposta, comparar os dois modelos estudados e apresentar as possibilidades de análise proporcionadas pelo modelo de relações tensão-deformação generalizada, são apresentadas neste capítulo simulações numéricas de problemas fisicamente não lineares, nos quais empregam-se os recursos do `INSANE`.

Este capítulo foi dividido em duas partes. Primeiramente, é analisada a influência dos parâmetros dos materiais e da geometria das seções nas relações tensão-deformação generalizada utilizando modelos que simulam estados elementares de solicitação. Posteriormente, são realizados estudos de caso de estruturas que foram estudadas experimentalmente. Nessas simulações, os resultados obtidos pelos dois modelos numéricos são comparados com os resultados experimentais disponíveis na literatura e em alguns casos com resultados numéricos obtidos por outros autores que utilizaram diferentes modelos para analisar as mesmas estruturas.

Com esses exemplos pretende-se verificar a eficiência dos modelos propostos na descrição das trajetórias de equilíbrio das estruturas analisadas. Todos os modelos tratam de estruturas de concreto armado.

5.1 Influência dos Parâmetros dos Materiais e Características Geométricas das Seções

Os parâmetros das leis constitutivas utilizados para simular a relação entre tensão e deformação do concreto e do aço, e as características geométricas das seções, como tamanho da base, altura, taxa de armadura e cobrimento, podem influenciar nas relações entre tensões generalizadas e deformações generalizadas. Dessa forma, faz-se aqui uma análise da influência desses diferentes parâmetros nessas relações, para os casos de cisalhamento, compressão, flexão e tração. Essas relações foram obtidas utilizando-se modelos que simulam estados elementares de solicitação, conforme a modelagem apresentada na seção 3.2.1.

Vale destacar que o objetivo aqui não é fazer um estudo detalhado da influência dos parâmetros citados nas relações tensão-deformação generalizada. Buscou-se apenas ilustrar como algumas das características das seções e dos materiais podem ou não ter influência nessas relações.

5.1.1 Influência dos Parâmetros dos Materiais

Para a avaliação da influência das propriedades dos materiais considerou-se a lei proposta por Carreira e Chu (1985, 1986) para o concreto em compressão e em tração. O aço foi considerado elastoplástico sem endurecimento. As análises foram feitas para três diferentes valores do módulo de elasticidade inicial do concreto, máxima tensão de compressão, máxima tensão de tração, deformação relativa a máxima tensão de tração e deformação relativa a máxima tensão de compressão. Para o aço variou-se o módulo de elasticidade e a tensão de escoamento. As análises foram feitas para a seção de concreto armado ilustrada na Figura 5.1, que foi decomposta em 40 camadas de concreto.

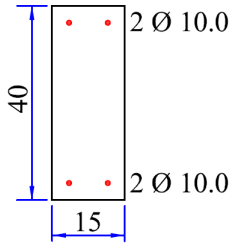


Figura 5.1: Seção transversal analisada.

As propriedades dos materiais são apresentadas nas Tabelas 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 5.7 e os resultados obtidos nas Figuras 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 5.7, 5.8.

Tabela 5.1: Variação do módulo de elasticidade inicial do concreto (E_0).

Concreto	Aço
$E_0 = *$	$E_s = 210.000\ MPa$
$f_c = 25\ MPa$	$f_y = 500\ MPa$
$f_t = 2,5\ MPa$	
$\varepsilon_c = 0,0025$	
$\varepsilon_t = 0,00020$	
* 20.000 25.000 30.000 (MPa)	

Tabela 5.2: Variação da máxima tensão de compressão (f_c).

Concreto	Aço
$E_0 = 25.000\ MPa$	$E_s = 210.000\ MPa$
$f_c = *$	$f_y = 500\ MPa$
$f_t = 2,5\ MPa$	
$\varepsilon_c = 0,0025$	
$\varepsilon_t = 0,00020$	
* 20 25 30 (MPa)	

Tabela 5.3: Variação da máxima tensão de tração (f_t).

Concreto	Aço
$E_0 = 25.000\ MPa$	$E_s = 210.000\ MPa$
$f_c = 25\ MPa$	$f_y = 500\ MPa$
$f_t = *$	
$\varepsilon_c = 0,0025$	
$\varepsilon_t = 0,00020$	
* 2 2,5 3 (MPa)	

Tabela 5.4: Variação da deformação relativa a máxima tensão de compressão (ε_c).

Concreto			Aço
$E_0 = 25.000\ MPa$			$E_s = 210.000\ MPa$
$f_c = 25\ MPa$			$f_y = 500\ MPa$
$f_t = 2,5\ MPa$			
$\varepsilon_c = *$			
$\varepsilon_t = 0,00020$			
* 0,002	0,0025	0,003	

Tabela 5.5: Variação da deformação relativa a máxima tensão de tração (ε_t).

Concreto			Aço
$E_0 = 25.000\ MPa$			$E_s = 210.000\ MPa$
$f_c = 25\ MPa$			$f_y = 500\ MPa$
$f_t = 2,5\ MPa$			
$\varepsilon_c = 0,0025$			
$\varepsilon_t = *$			
* 0,00015	0,00020	0,00025	

Tabela 5.6: Variação do módulo de elasticidade do aço (E_s).

Concreto			Aço
$E_0 = 25.000\ MPa$			$E_s = *$
$f_c = 25\ MPa$			$f_y = 500\ MPa$
$f_t = 2,5\ MPa$			
$\varepsilon_c = 0,0025$			
$\varepsilon_t = 0,00020$			
* 200.000	210.000	220.000	(MPa)

Tabela 5.7: Variação da tensão de escoamento (f_y).

Concreto			Aço
$E_0 = 25.000\ MPa$			$E_s = 210.000\ MPa$
$f_c = 25\ MPa$			$f_y = *$
$f_t = 2,5\ MPa$			
$\varepsilon_c = 0,0025$			
$\varepsilon_t = 0,00020$			
* 400	500	600	(MPa)

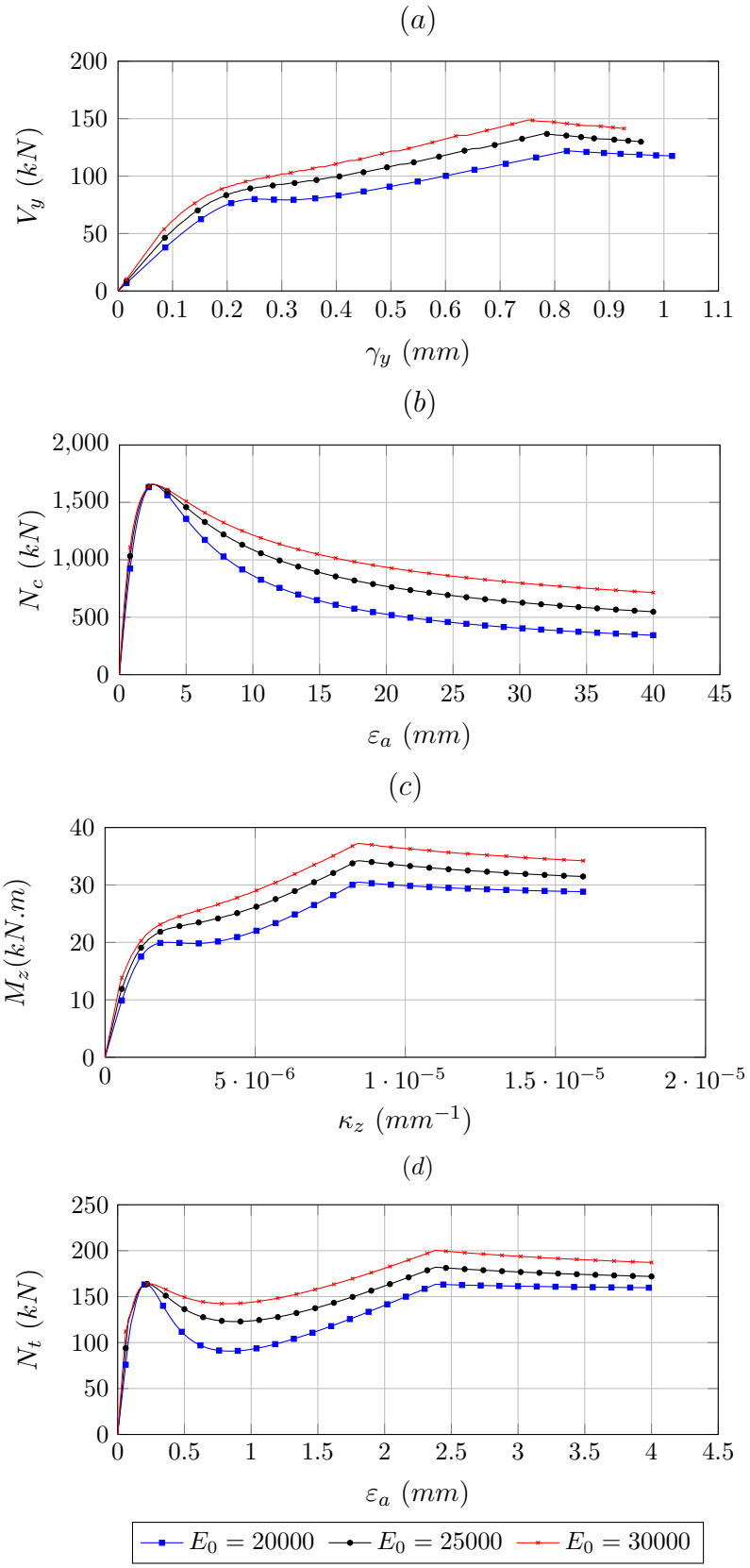


Figura 5.2: Comparação das relações tensão-deformação generalizada variando E_0, para (a) cisalhamento, (b) compressão, (c) flexão e (d) tração.

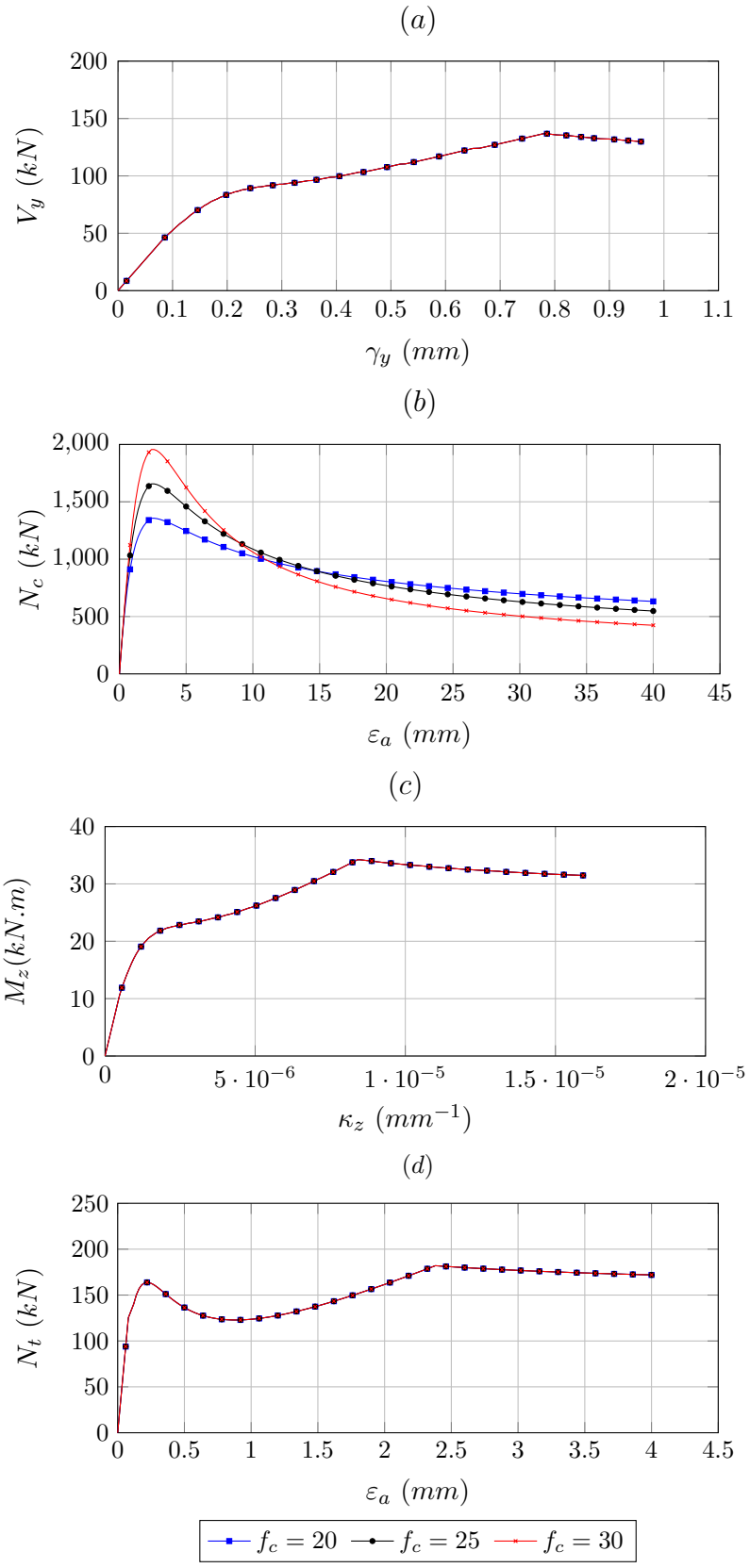


Figura 5.3: Comparação das relações tensão-deformação generalizada variando f_c, para (a) cisalhamento, (b) compressão, (c) flexão e (d) tração.

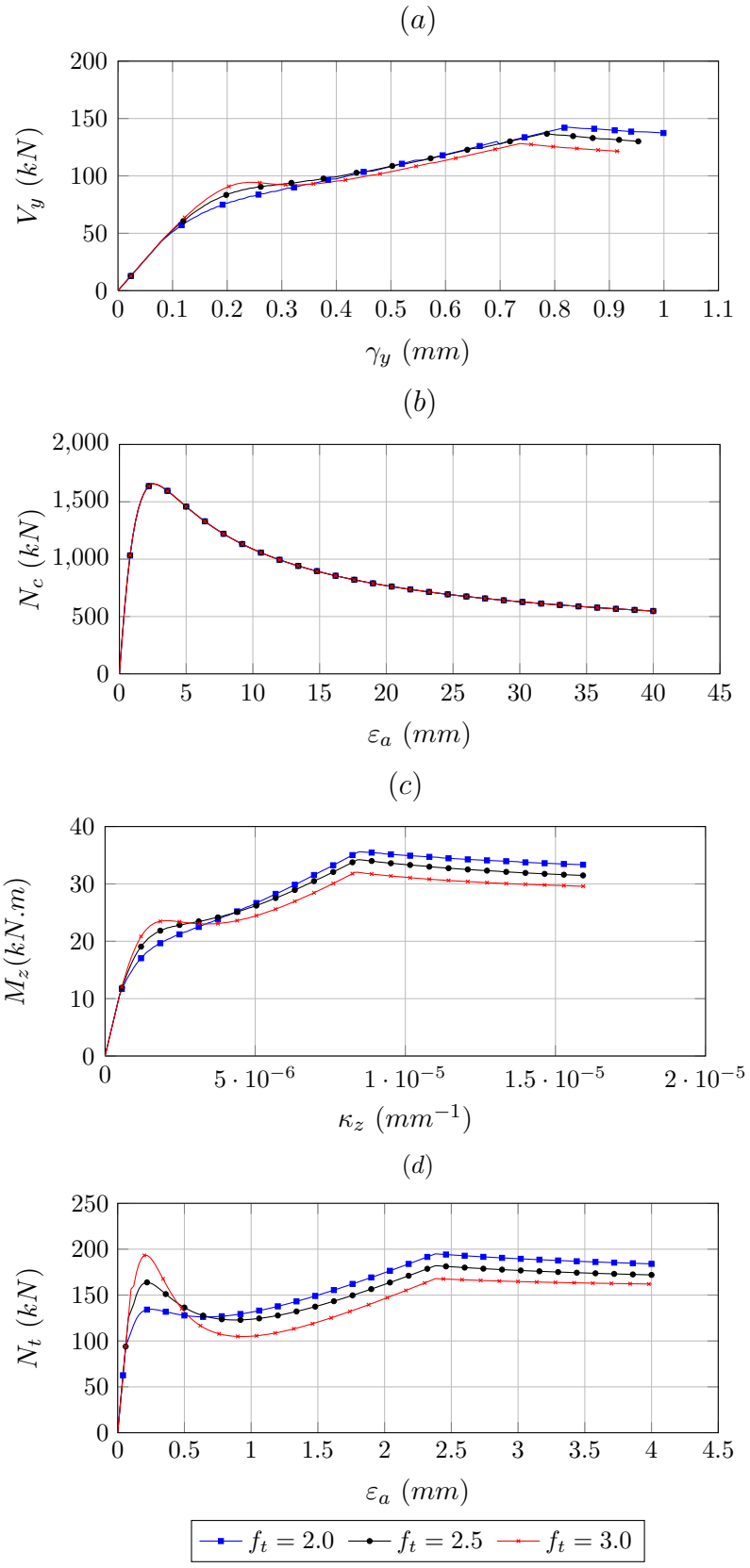


Figura 5.4: Comparação das relações tensão-deformação generalizada variando f_t, para (a) cisalhamento, (b) compressão, (c) flexão e (d) tração.

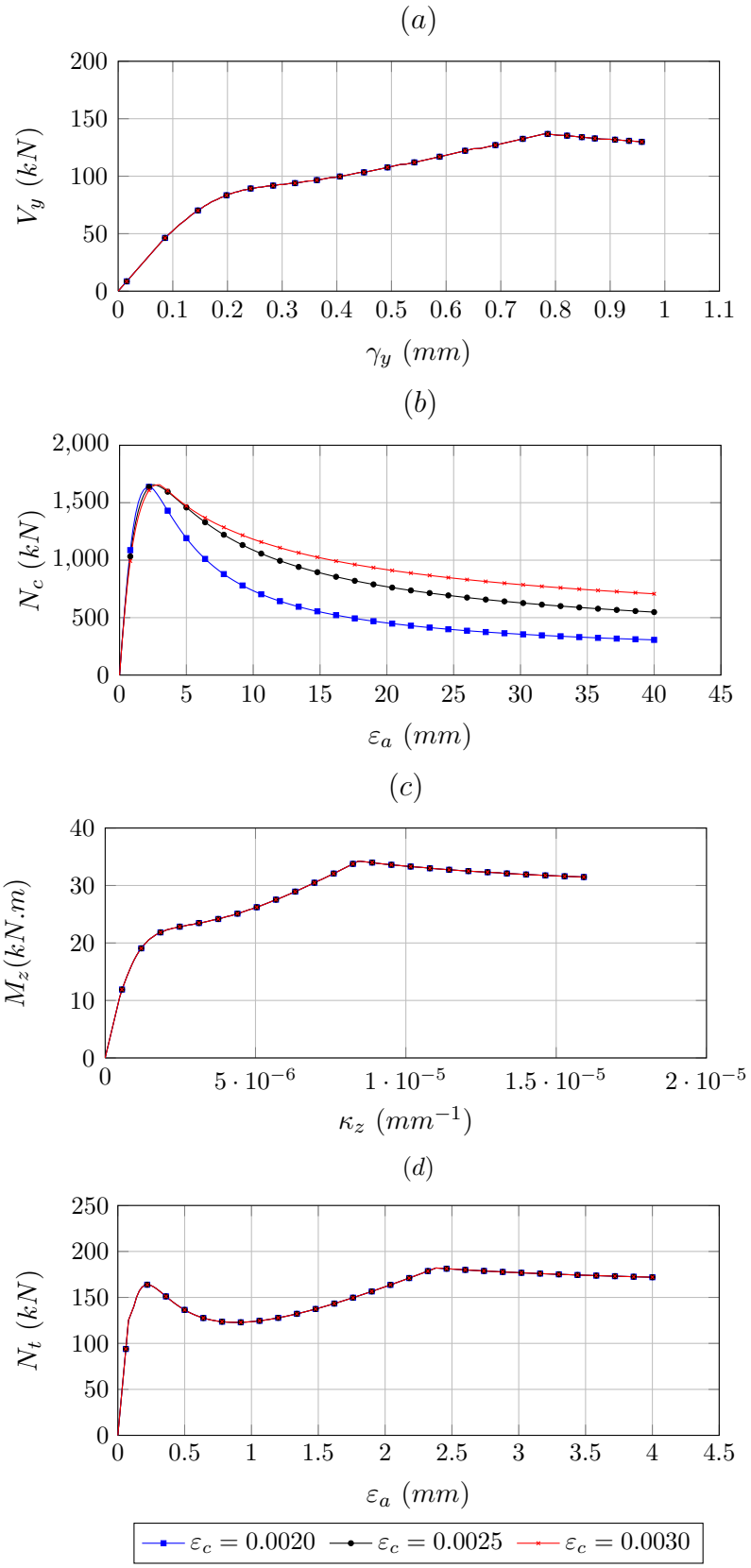


Figura 5.5: Comparação das relações tensão-deformação generalizada variando ε_c, para (a) cisalhamento, (b) compressão, (c) flexão e (d) tração.

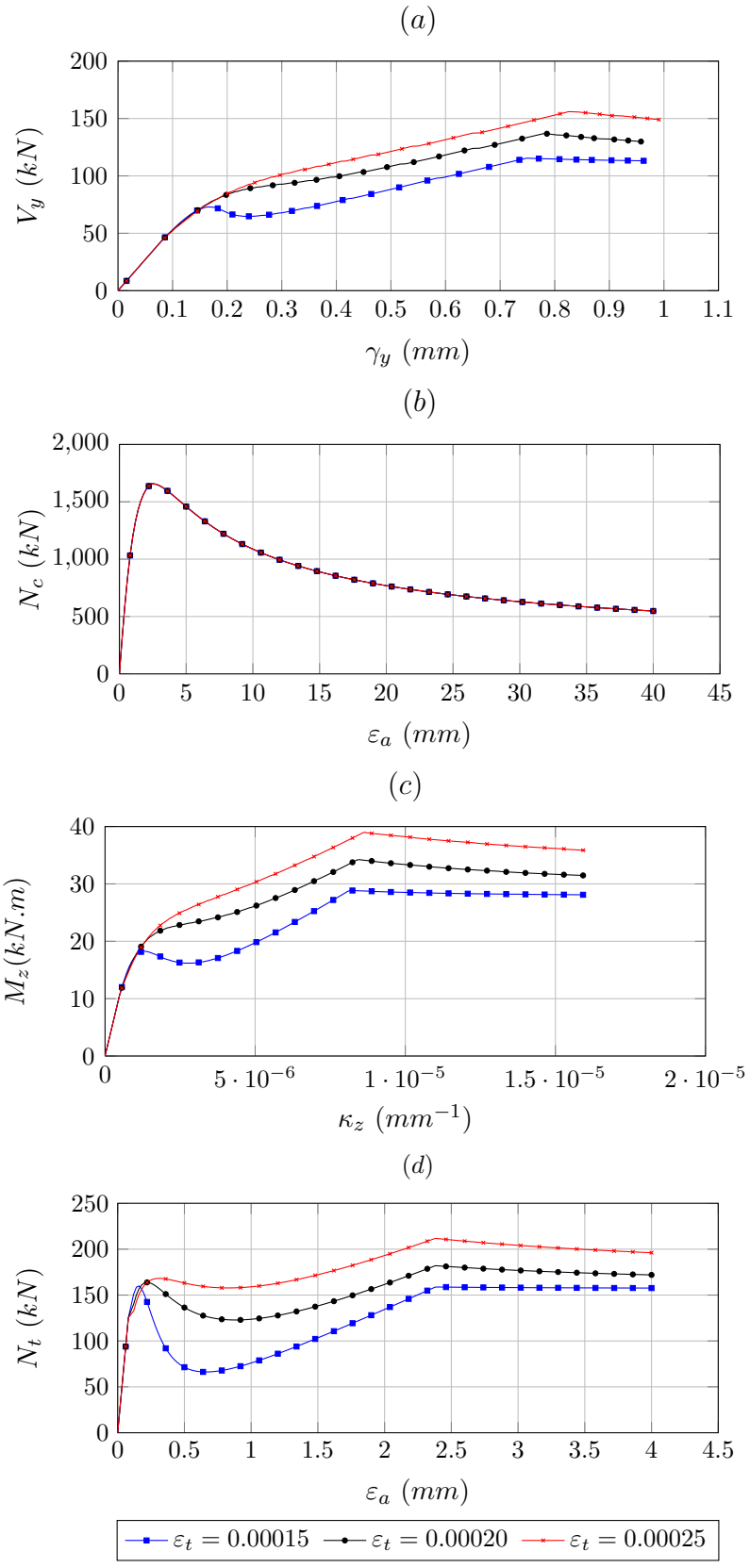


Figura 5.6: Comparação das relações tensão-deformação generalizada variando ε_t, para (a) cisalhamento, (b) compressão, (c) flexão e (d) tração.

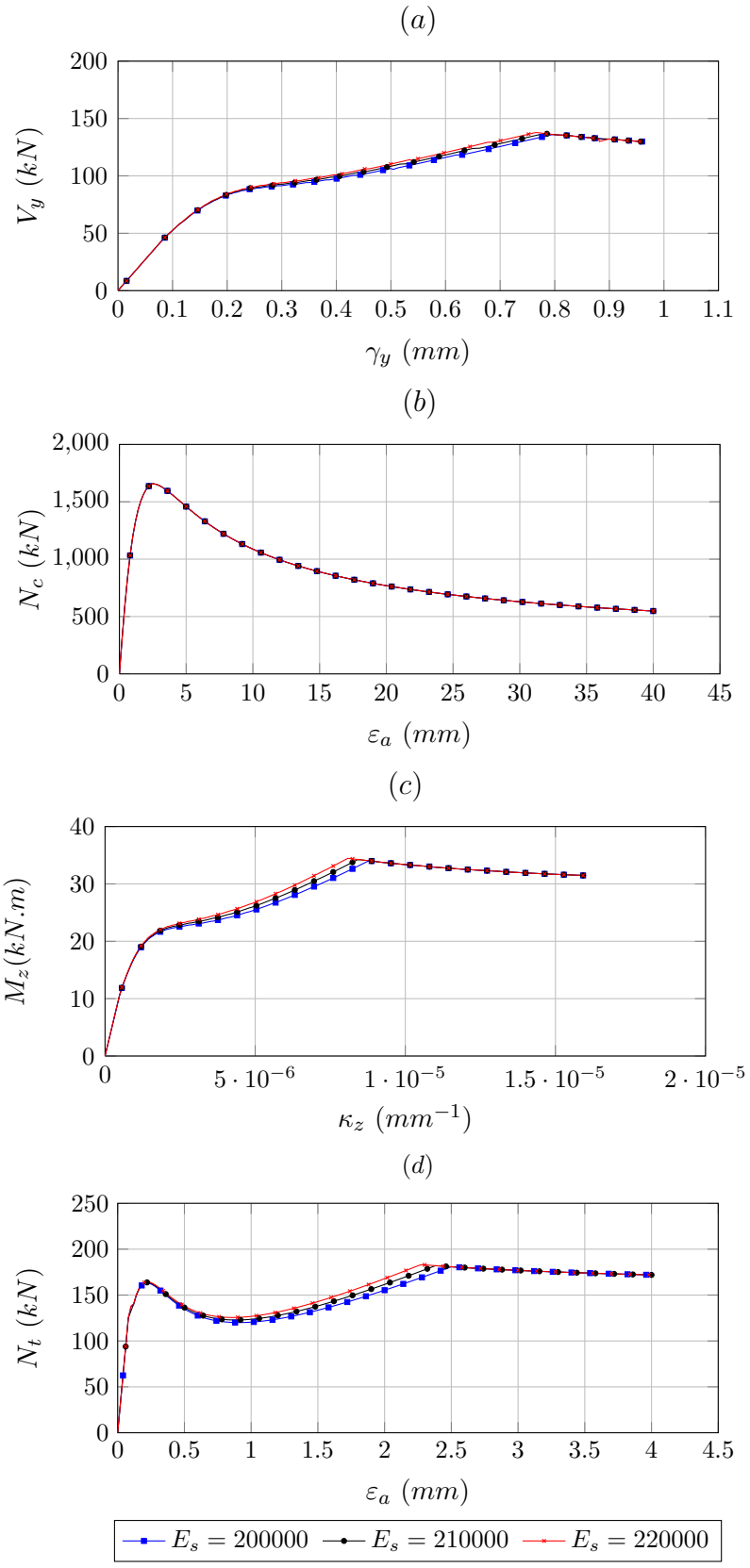


Figura 5.7: Comparação das relações tensão-deformação generalizada variando E_s, para (a) cisalhamento, (b) compressão, (c) flexão e (d) tração.

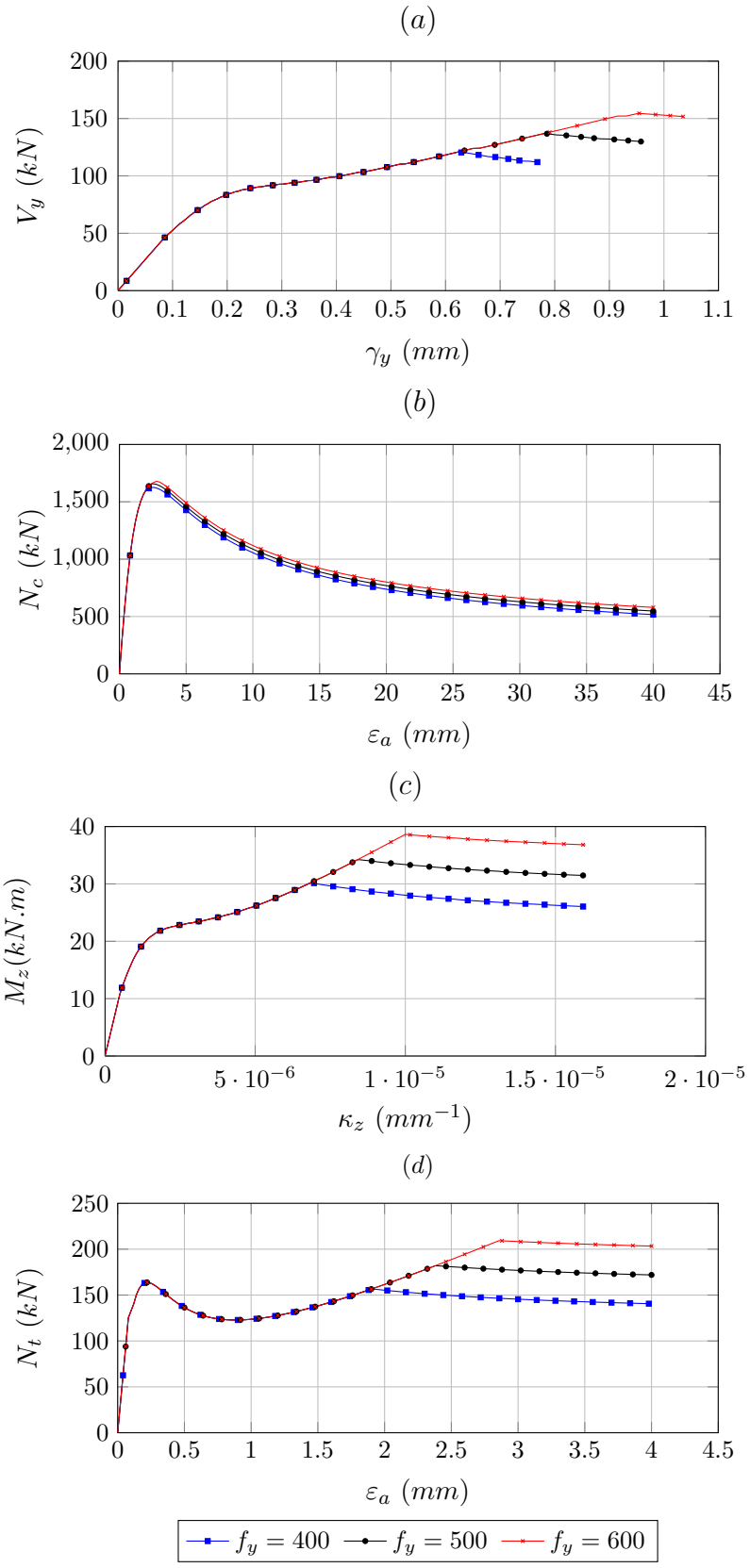


Figura 5.8: Comparação das relações tensão-deformação generalizada variando f_y, para (a) cisalhamento, (b) compressão, (c) flexão e (d) tração.

Através da análise dos resultados obtidos para diferentes valores de propriedades que caracterizam os materiais, é possível perceber, ainda que de forma qualitativa, como cada parâmetro influencia na resposta da seção.

A primeira propriedade avaliada, o modo de elasticidade inicial do concreto, influencia de forma significativa todas as relações analisadas (Figura 5.2), sendo que para o cisalhamento e a flexão, em todos os trechos ocorrem mudanças nas curvas, embora sejam maiores após a fissuração do concreto. Já para o esforço normal, tanto em tração quanto em compressão, as alterações só são significativas após o início da degradação.

Para a variação da resistência à compressão, apenas a relação para o esforço normal de compressão é afetada (Figura 5.3 - b) e ocorre de forma mais acentuada na região próxima ao limite de f_c, alterando também o regime pós crítico. Ao contrário deste caso, conforme já esperado, a variação do limite de resistência à tração (Figura 5.4) não influencia a relação para o esforço normal de compressão, porém influencia todas as demais curvas sendo as maiores alterações observadas para o esforço normal de tração (Figura 5.4 - d).

Como os limites de deformação para o concreto, em compressão (ε_c) e em tração (ε_t), estão diretamente relacionados aos limites de resistência, as mesmas observações feitas anteriormente valem para estes casos (Figuras 5.5 e 5.6) . Destacando-se que, para o limite de tração, as alterações nas curvas também são significativos para a flexão e cisalhamento, o que não é observado com a mesma intensidade quando foi variado o valor de f_t.

Quando variou-se as propriedades do aço, pequenas alterações são observadas nas curvas analisadas, principalmente para a variação do módulo de elasticidade (Figura 5.7), sendo que para a relação de compressão não ocorre nenhuma mudança. Talvez este comportamento se explique pela baixa taxa de armadura da seção.

Com os diferentes valores para a tensão de escoamento (Figura 5.8) observa-se alterações apenas em relação ao limite do escoamento, principalmente para as

relações de cisalhamento, flexão e tração. Nos Estádios I e II , nenhuma alteração é observada.

5.1.2 Influência das Características Geométricas

Para a avaliação da influência das características geométricas das seções, considerou-se a lei proposta por Carreira e Chu (1985, 1986) para o concreto em compressão e tração. O aço foi considerado pela lei elastoplástica sem endurecimento. Os parâmetros das leis constitutivas são apresentados na Tabela 5.8. As análises foram feitas para três diferentes dimensões de base, altura, taxa de armadura e cobrimento, conforme apresentado nas Figuras 5.9, 5.10, 5.11 e 5.12.

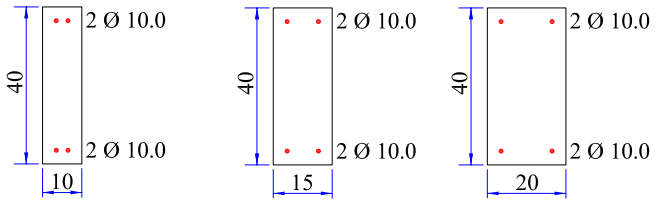


Figura 5.9: Variação da base.

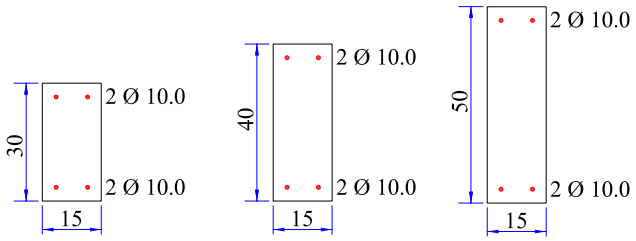


Figura 5.10: Variação da altura.

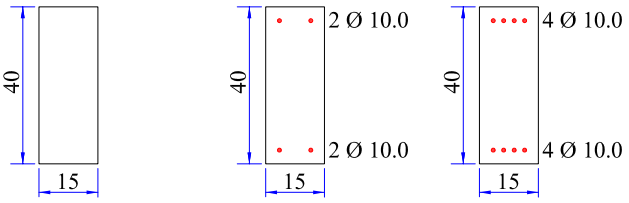


Figura 5.11: Variação da taxa de armadura.

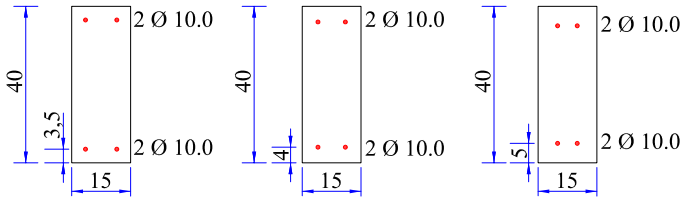


Figura 5.12: Variação do cobrimento.

Tabela 5.8: Parâmetros das leis tensão-deformação.

Concreto	Aço
$E_0 = 23.800MPa$	$E = 210.000MPa$
$f_c = 25MPa$	$f_y = 500MPa$
$f_t = 2,6MPa$	
$\varepsilon_c = 0,0020$	
$\varepsilon_t = 0,00015$	

Os valores dos cobrimentos são referentes às classes de agressividade ambiental I, II e III conforme apresentado na NBR6118 (2014). O posicionamento da armadura, (z_i) na Figura 5.13, é feito a partir de seu centro até a borda, sendo a soma do cobrimento nominal, diâmetro do estribo e metade do diâmetro da armadura longitudinal. Os cobrimentos nominais relativos a cada classe são 2,5 cm, 3,0 cm e 4,0 cm; o diâmetro da armadura longitudinal é 10 mm; para o estribo considerou-se diâmetro de 5 mm. Dessa forma, tem-se os valores apresentados na Figura 5.12.

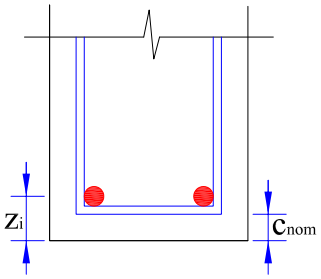


Figura 5.13: Posicionamento da armadura.

Os resultados obtidos são apresentados nas Figuras 5.14, 5.15, 5.16, 5.17.

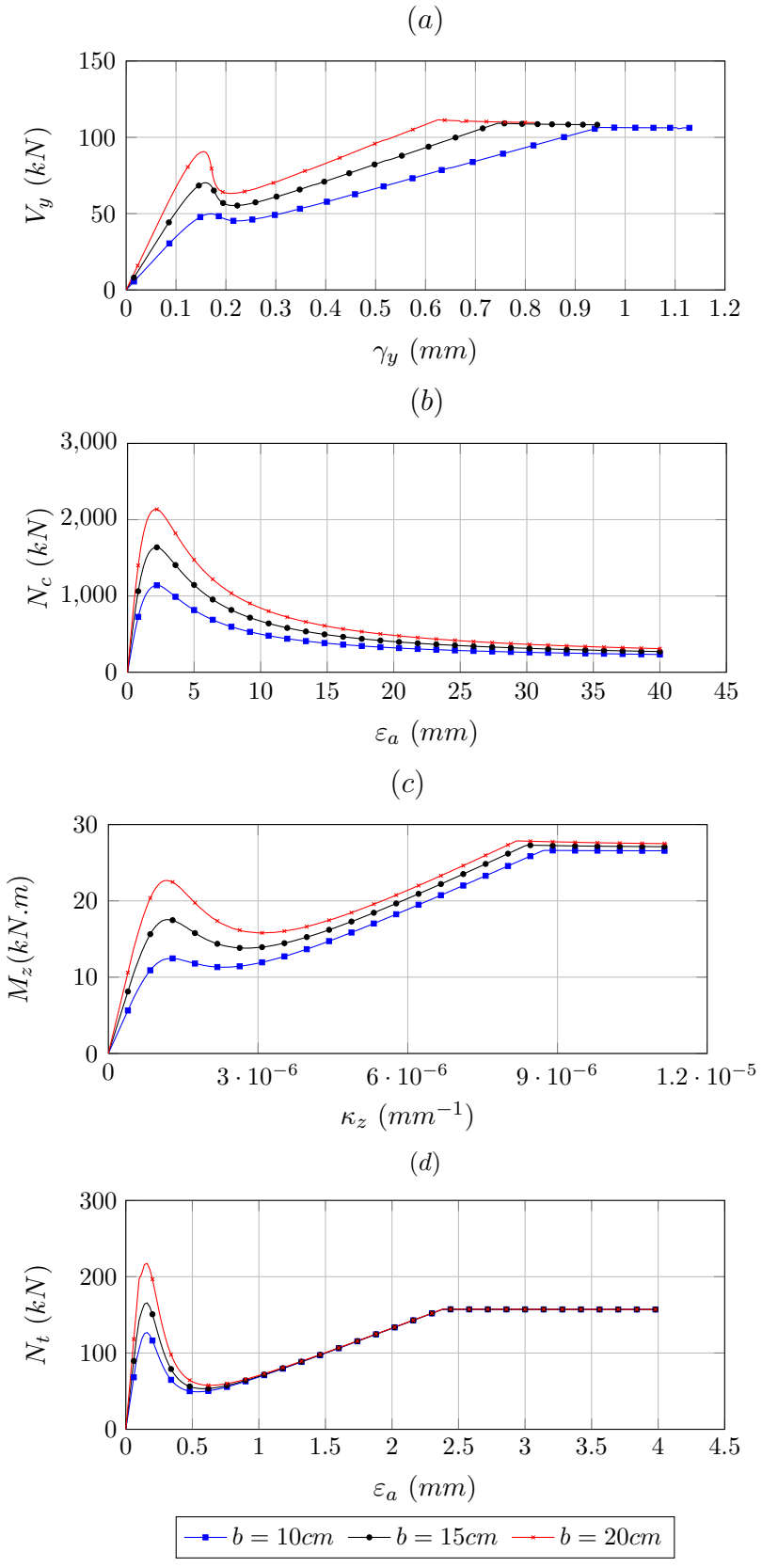


Figura 5.14: Comparação das relações tensão-deformação generalizada variando a base, para (a) cisalhamento, (b) compressão, (c) flexão e (d) tração.

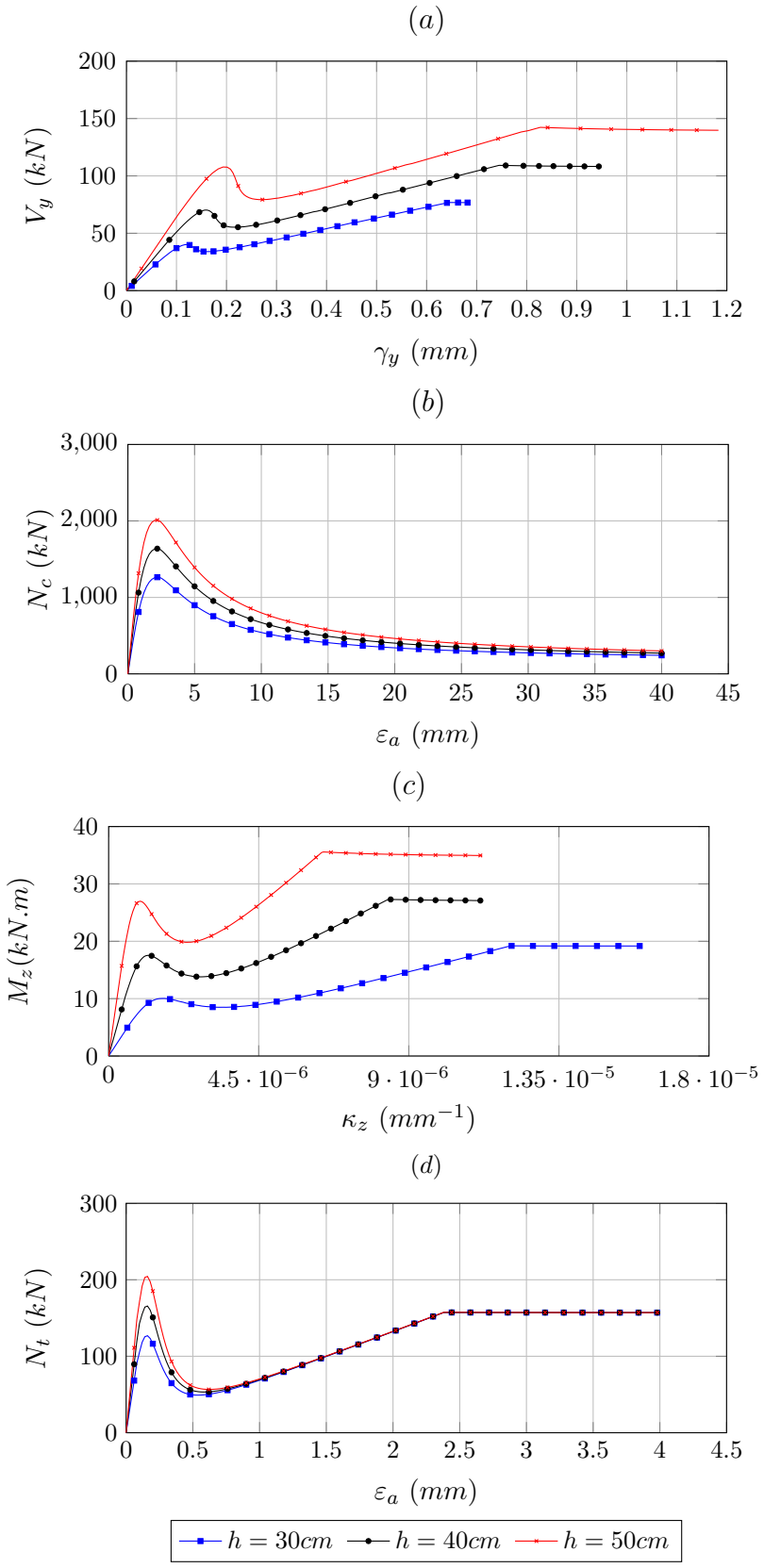


Figura 5.15: Comparação das relações tensão-deformação generalizada variando a altura, para (a) cisalhamento, (b) compressão, (c) flexão e (d) tração.

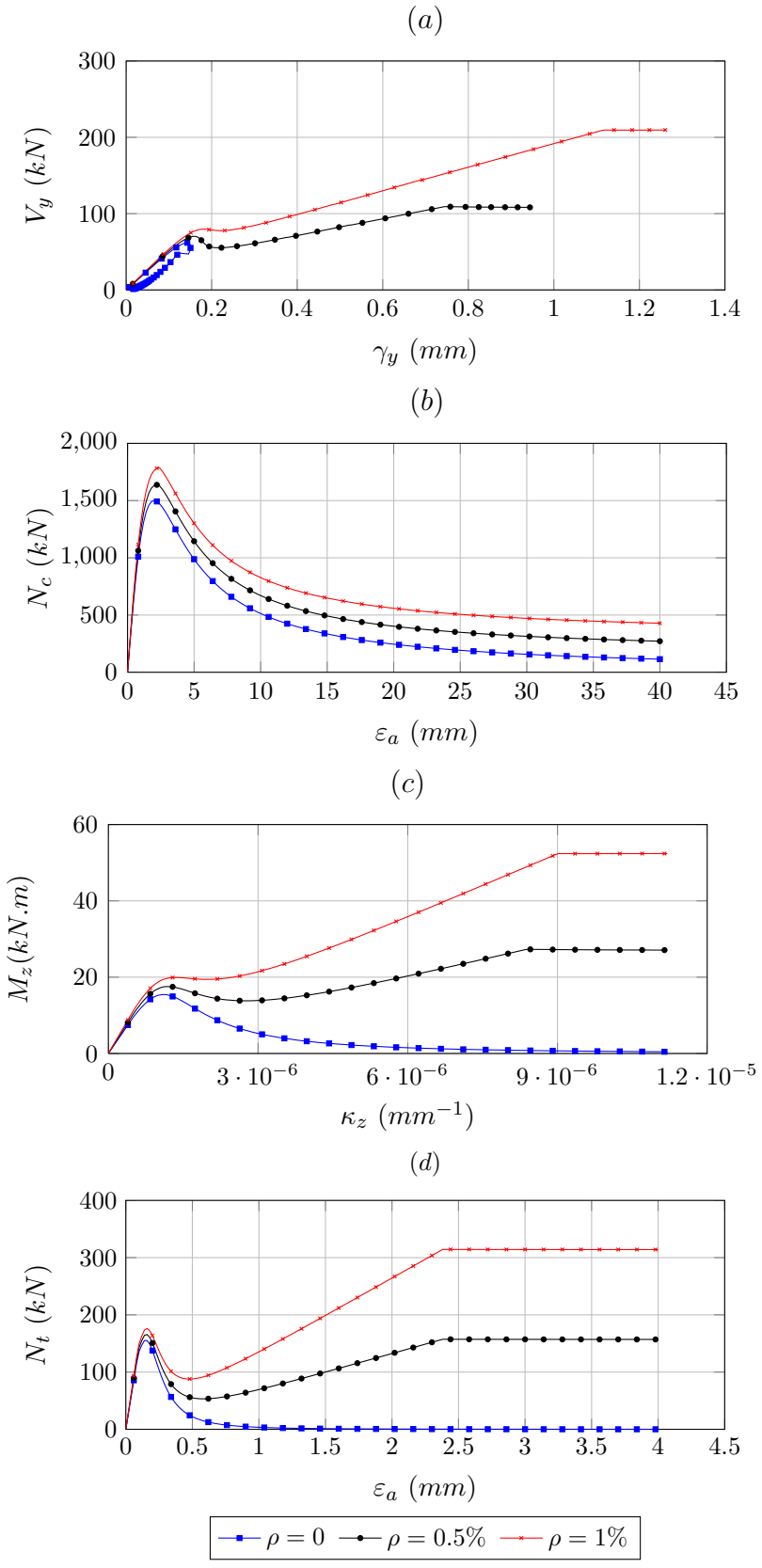


Figura 5.16: Comparação das relações tensão-deformação generalizada variando a taxa de armadura, para (a) cisalhamento, (b) compressão, (c) flexão e (d) tração.

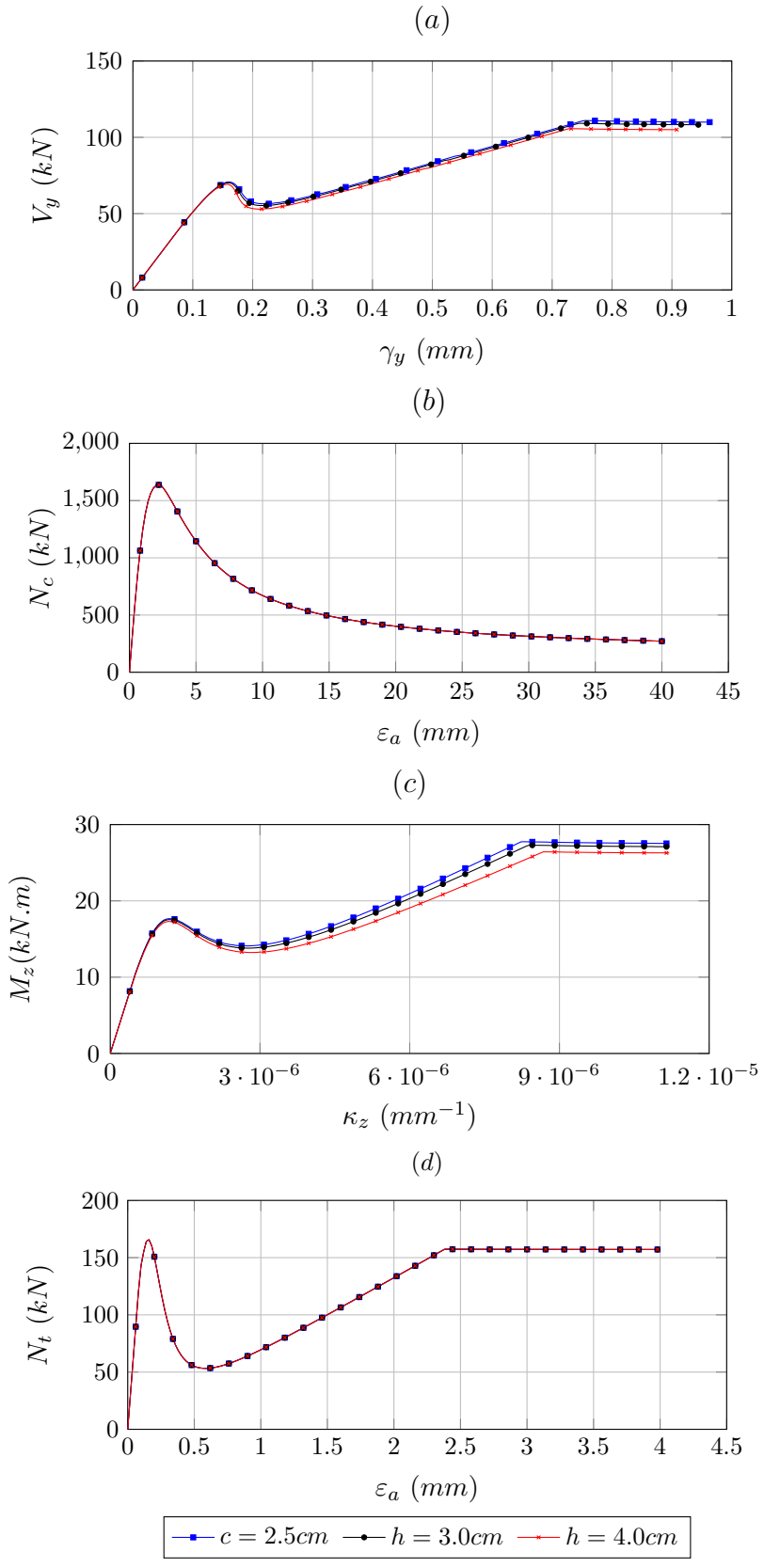


Figura 5.17: Comparação das relações tensão-deformação generalizada variando o cobrimento, para (a) cisalhamento, (b) compressão, (c) flexão e (d) tração.

Para os casos de variação das propriedades geométricas das seções (Figuras 5.14 e 5.15, observa-se influencia em todas as relações que, como sabido, é mais acentuada para a variação da altura. Com relação à curva de tração, é observado que após a fissuração do concreto a armadura é responsável por resistir à maior parte dos esforços e após a fissuração completa de todas as fibras da seção apenas a armadura resiste a todo o esforço. Sendo assim, todas as curvas são iguais a partir deste limite.

Com relação à terceira variável de análise, a variação da área de aço (Figura 5.16), fica claro que tal variação só possui influência significativa após o início da abertura de fissuras no concreto. Portanto, fica evidente que em situações onde se deseja diminuir deformações em peças de concreto, principalmente em elementos fletidos, o aumento da área de aço só é significativo quando o momento atuante na seção é maior que o momento de fissuração, caso contrário, nenhum ou quase nenhum ganho será proporcionado por tal aumento.

A última variável analisada, o cobrimento da armadura (Figura 5.17), conforme esperado, não influencia nas relações para o esforço normal. Para o cisalhamento nada significativo é observado. Já para a flexão pequenas diferenças entre as curvas podem ser observadas, sendo este caso, o único em que o cobrimento pode ser significativo.

5.2 Estudos de Caso

Nesta seção são realizados estudos de caso de estruturas que foram estudadas experimentalmente e os resultados encontram-se disponíveis na literatura.

Os resultados obtidos pelos dois modelos numéricos apresentados são comparados com os resultados experimentais e, em alguns casos, com resultados numéricos obtidos por outros autores utilizando modelos distintos dos aqui adotados.

5.2.1 Viga Biapoiada - Farage (1995)

Visando estudar a influência da resistência do concreto na ductilidade de vigas, Farage (1995) analisou experimentalmente vigas de concreto armado realizando o ensaio de flexão em quatro pontos e obtendo as relações carga-curvatura e carga-deslocamento. Com a medição das deformações do aço e do concreto, as curvaturas foram obtidas pela aproximação dada pela Equação 3.13, apresentada no item 3.3. Por se tratar de um ensaio de flexão em 4 pontos, as curvaturas também podem ser obtidas pela Equação 3.18. Com base nessas medições experimentais, este exemplo compara as relações tensão-deformação generalizada para a flexão (momento-curvatura) obtidas em laboratório com as relações obtidas com base na NBR6118 (2014) descritas na Seção 3.2.2, e com as obtidas pelo modelo numérico com a seção decomposta conforme apresentado na Seção 3.2.1.

Foi analisada a viga de referência `V-1` com geometria, carregamento e armaduras apresentadas na Figura 5.18

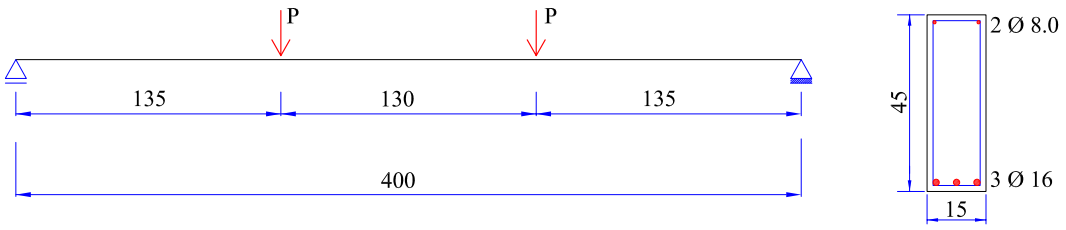


Figura 5.18: Detalhes da geometria, carregamento e armadura da viga de Farage (1995).

No modelo de seção decomposta, as seção transversal foi dividida em 40 camadas de concreto além das áreas que representam as armaduras, conforme apresentado na Figura 5.19.

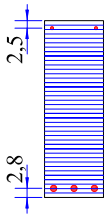


Figura 5.19: Seção transversal decomposta em camadas.

Considerou-se a lei proposta por Carreira e Chu (1985, 1986) para o concreto em compressão e tração. O aço foi considerado pela lei elastoplástica sem endurecimento. As propriedades dos materiais são apresentadas na Tabela 5.9.

Tabela 5.9: Parâmetros das leis tensão-deformação.

Concreto	Aço
$E_0 = 25.322MPa$	$E_s = 200.000MPa$
$f_c = 28,3MPa$	$f_y = 550MPa$
$f_t = 3,1MPa$	
$\varepsilon_c = 0,002$	
$\varepsilon_t = 0,00013$	

Na Figura 5.20 são apresentadas as relações momento-curvatura obtidas experimentalmente com base nas Equações 3.13 e 3.18, com base na NBR6118 (2014) e pelo modelo numérico.

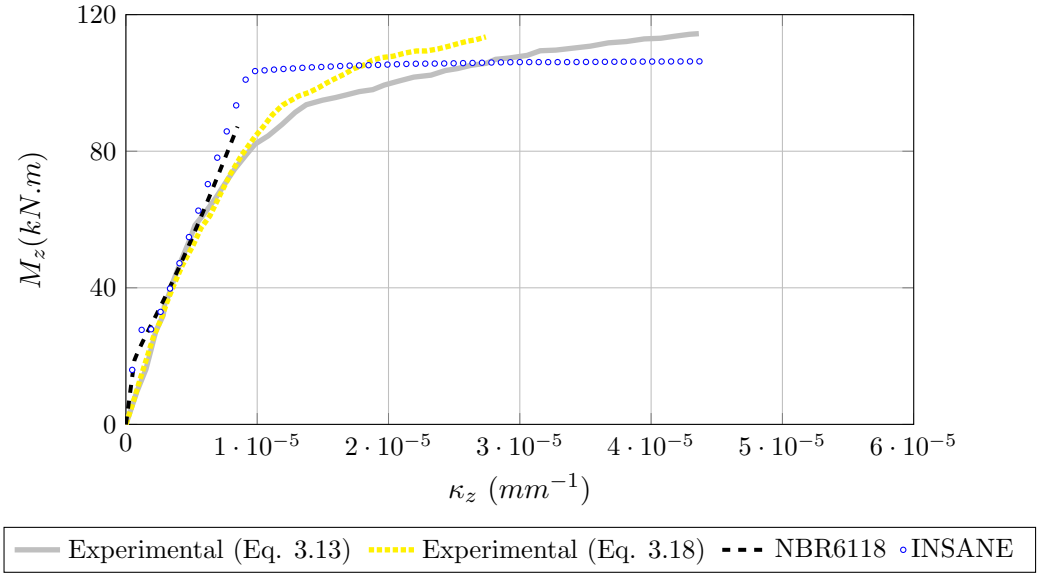


Figura 5.20: Relações momento-curvatura para a viga de Farage (1995).

As relações momento-curvatura obtidas experimentalmente pelos dois métodos, medição dos deslocamentos no meio da viga e medição das deformações no aço e no concreto, apresentaram resultados bastante próximos, principalmente no ramo ascendente. Após o início do escoamento do aço nota-se uma pequena diferença entre os dois resultados.

Com relação aos resultados numéricos obtidos pela NBR 6118:2014 e pelo `INSANE`, tem-se um boa aproximação entre eles e os obtidos experimentalmente no ramo ascendente. O início do escoamento calculado pela Equação 3.12 fornece um resultado que limita a faixa de aplicação para a equação da Norma, razão da interrupção do resultado da NBR 6118. A partir desse limite observa-se diferenças entre os resultados experimentais e o numérico obtido com o `INSANE`. Destaca-se que a curva experimental com base na Equação 3.13 é mais representativa, visto que é obtida diretamente através da medição das deformações no aço e no concreto, ao contrário da curva dada pela Equação 3.18, que é obtida indiretamente através da curva Carga $\times$ Deslocamento. Já a curva do modelo numérico é baseada em simplificações como a hipótese de aderência perfeita e escoamento da armadura a um patamar constante, o que explica a diferença entre os resultados.

5.2.2 Viga Biapoiada - Álvares (1993)

Na NBR6118 (2014), item 17.3.2.1, para a avaliação aproximada da flecha imediata em vigas de concreto armado, foi feita uma simplificação da equação proposta por Branson (1968) para o cálculo da rigidez equivalente de uma seção de concreto armado. A rigidez da seção no Estádio I é calculada sem considerar a armadura, ou seja, é utilizada a seção bruta de concreto como representativa e não a seção homogeneizada. Através da equação para a inércia equivalente é possível obter uma relação momento-curvatura conforme apresentado na Seção 3.2.2.

Com o objetivo de ilustrar a possibilidade de análise não linear com base em uma dada relação momento-curvatura e avaliar a expressão da norma brasileira,

neste exemplo serão analisadas vigas de concreto armado com diferentes taxas de armadura.

Em seu trabalho de mestrado, Álvares (1993) analisou numerica e experimentalmente vigas de concreto armado com diferentes taxas de armadura. Foram ensaiadas peças subarmadas, normalmente armadas e super armadas, todas submetidas à flexão em quatro pontos. A geometria, carregamento e armaduras das seções são apresentadas na Figura 5.21.

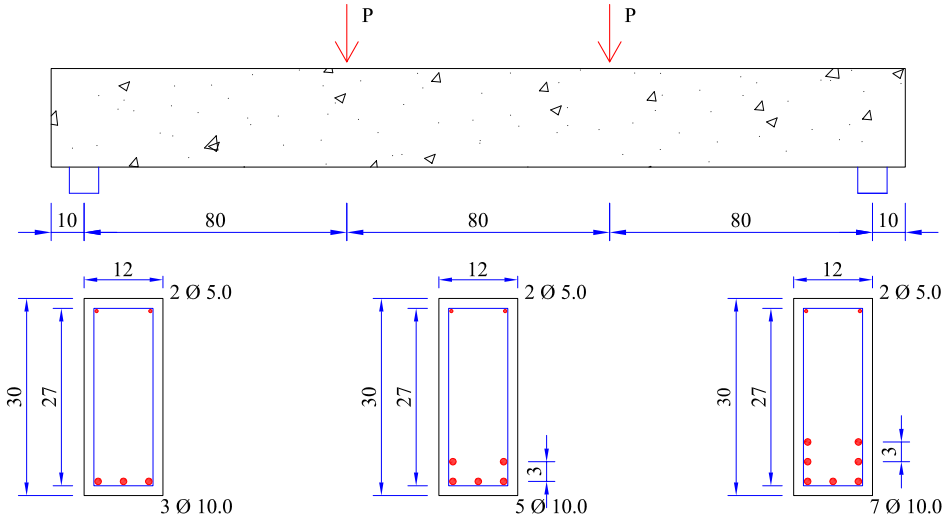


Figura 5.21: Detalhes da geometria, carregamento e armaduras das vigas de Álvares (1993).

A modelagem das vigas foi feita utilizando os modelos de seção homogeneizada e de seção decomposta. No modelo de seção homogeneizada, as relações momento-curvatura, apresentadas na Figura 5.22, foram obtidas conforme apresentado na Seção 3.2.2 para as três seções em estudo.

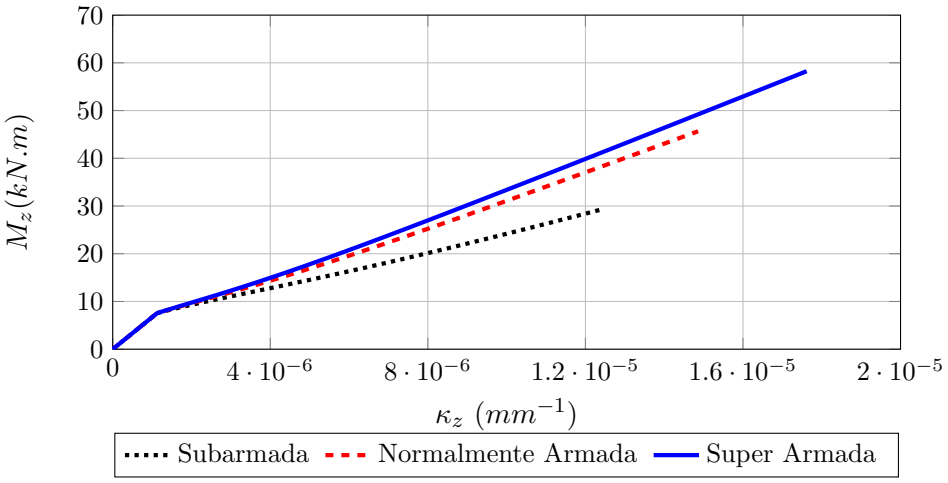


Figura 5.22: Relações momento-curvatura para as seções apresentadas por Álvares (1993).

No modelo de seção decomposta, a seção transversal foi dividida em 30 camadas de concreto e as armaduras posicionadas de acordo com cada seção (Figura 5.23). Considerou-se a lei proposta por Carreira e Chu (1985, 1986) para o concreto em compressão e tração. O aço foi considerado pela lei elastoplástica sem endurecimento. As propriedades dos materiais são as mesmas apresentadas na Tabela 5.10.

Tabela 5.10: Parâmetros das leis tensão-deformação.

Concreto	Aço
$E_0 = 29.200MPa$	$E_s = 196.000MPa$
$f_c = 28MPa$	$f_y = 500MPa$
$f_t = 2,8MPa$	
$\varepsilon_c = 0,0023$	
$\varepsilon_t = 0,00015$	

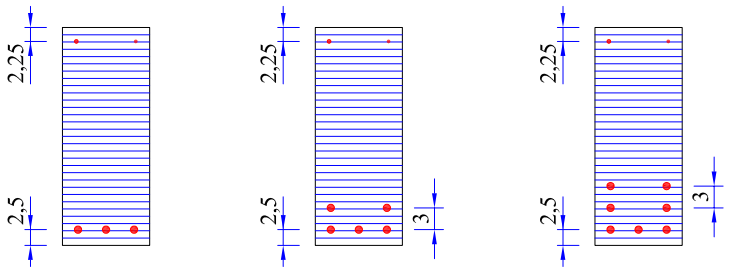


Figura 5.23: Seção transversal decomposta em camadas.

Para os dois modelos as vigas foram discretizadas com seis elementos baseados na Teoria de Bernoulli-Euler. A malha de elementos finitos é apresentada na Figura 5.24. Para a análise incremental iterativa foi utilizado o método de controle direto de deslocamento com incremento de $1,1 \times 10^{-4}\ m$ no deslocamento vertical do nó 4 e uma tolerância para a convergência de 1×10^{-3}.

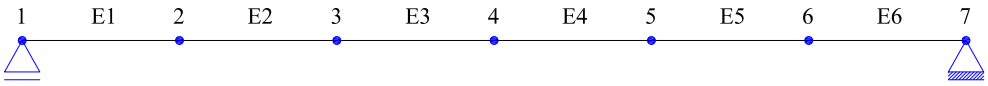


Figura 5.24: Malha de elementos finitos

A seguir são apresentados os resultados obtidos numericamente pelos dois modelos e os obtidos experimentalmente. Os resultados experimentais foram obtidos por Álvares (1993) com o ensaio de duas vigas para cada seção. As faixas apresentadas na cor cinza nos gráficos da Figura 5.25 são delimitadas pelos resultados de cada uma das duas vigas, que representam os limites inferior e superior.

A Figura 5.25 mostra as trajetórias de equilíbrio do deslocamento vertical no meio do vão para as vigas subarmada, normalmente armada e super armada.

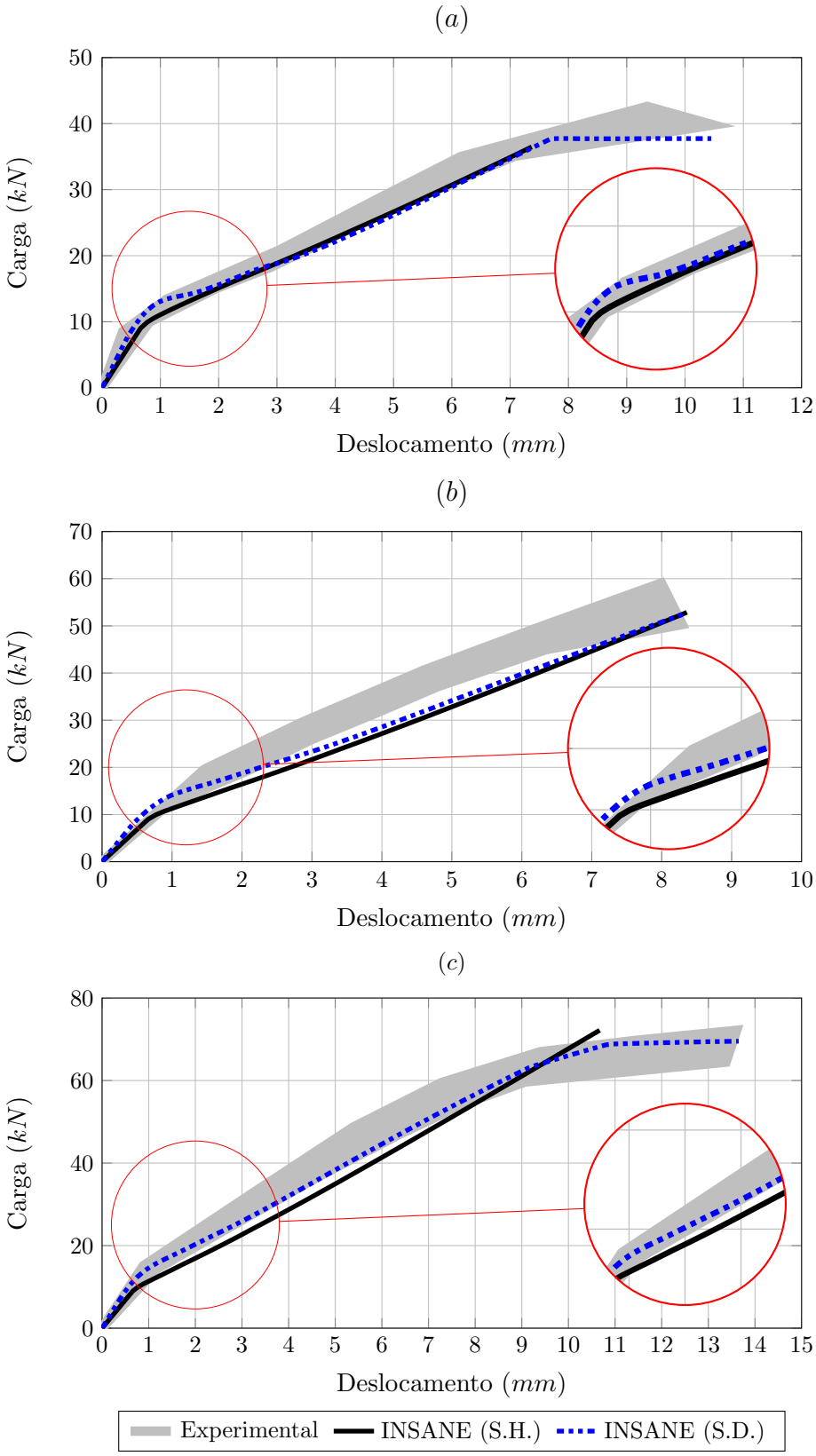


Figura 5.25: Trajetórias de equilíbrio para as vigas (a) subarmada, (b) normalmente armada e (c) super armada.

Observa-se que os dois modelos foram capazes de descrever os resultados experimentais. O modelo de seção homogeneizada com relação momento-curvatura baseada na norma apresenta um comportamento menos rígido devido à simplificação proposta. A diferença de resultados se torna maior para as seções com maiores taxas de armadura, porém, conforme destacado nos gráficos, para as regiões próximas às cargas de utilização, os resultados numéricos são bastante próximos dos experimentais. Além disso, como em situações de projeto são dimensionadas seções subarmadas, é possível obter bons resultados com o modelo proposto pela norma mesmo com as simplificações adotadas.

5.2.3 Viga Biapoiada - Jarek et al. (2011)

No trabalho de Jarek et al. (2011) foi feito um estudo comparativo da modelagem numérica de uma viga simplesmente apoiada submetida à flexão em três pontos. A viga foi ensaiada experimentalmente e analisada utilizando o programa comercial `Ansys®` e um programa específico para análise de dano em concreto desenvolvido em `Fortran`. A trajetória de equilíbrio para o deslocamento vertical no meio do vão obtida pelos modelos numéricos é comparada com o resultado obtido experimentalmente. A modelagem utilizando o `Ansys®` foi feita com elementos tridimensionais para o concreto. As armaduras foram representadas por três modelos diferentes: uma chapa de aço de área equivalente, por meio de armadura difusa em forma de taxa e através da discretização das barras longitudinais. O modelo de armadura em barras foi o que mais se aproximou do resultado experimental. Para o código implementado em `Fortran` foi utilizado o modelo de dano proposto por Mazars (1984) e determinada uma rigidez equivalente, assumindo que toda a seção transversal seja composta por um único material equivalente. Na discretização foram utilizados elementos planos isoparamétricos.

Neste exemplo, a viga estudada por Jarek et al. (2011) com geometria, carregamento e armaduras apresentadas na Figura 5.26 foi analisada utilizando o modelo

de seção decomposta e o de seção homogeneizada.

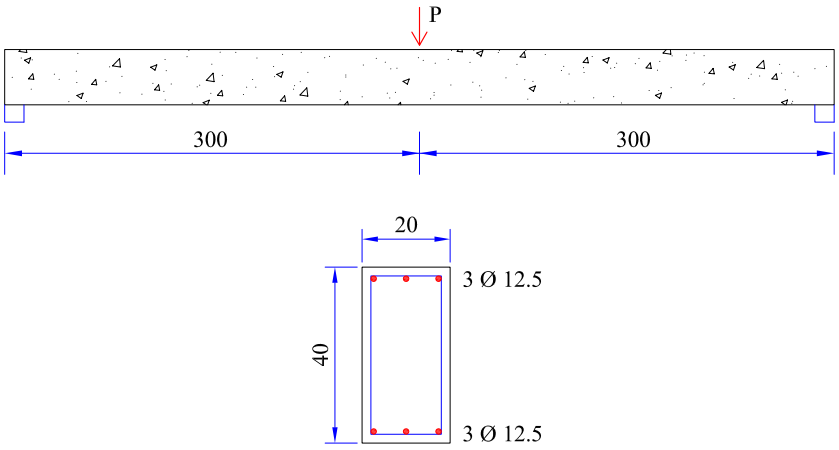


Figura 5.26: Detalhes da geometria, carregamento e armaduras da viga de Jarek et al. (2011).

No modelo de seção decomposta a seção transversal foi divida em quarenta camadas de concreto com espessura de 1 cm e seis áreas de aço de $1,23$ cm^2 correspondente as barras da armadura de diâmetro $12,5$ mm, conforme apresentado na Figura 5.27. Considerou-se a lei proposta por Carreira e Chu (1985, 1986) para o concreto em compressão e tração. O aço foi considerado pela lei elastoplástica sem endurecimento. As propriedades dos materiais são apresentadas na Tabela 5.11.

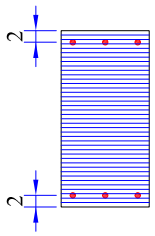


Figura 5.27: Seção transversal decomposta em camadas.

Tabela 5.11: Parâmetros das leis tensão-deformação.

Concreto	Aço
$E_0 = 30.200\ MPa$	$E_s = 210.000 MPa$
$f_c = 39,5\ MPa$	$f_y = 500 MPa$
$f_t = 2,25 MPa$	
$\varepsilon_c = 0,002$	
$\varepsilon_t = 0,00012$	

Para o modelo de seção homogeneizada, foram obtidas relações tensão-deformação generalizada para o cisalhamento (Figura 5.28) e flexão (Figura 5.29) utilizando a metodologia descrita no item 3.2.1.

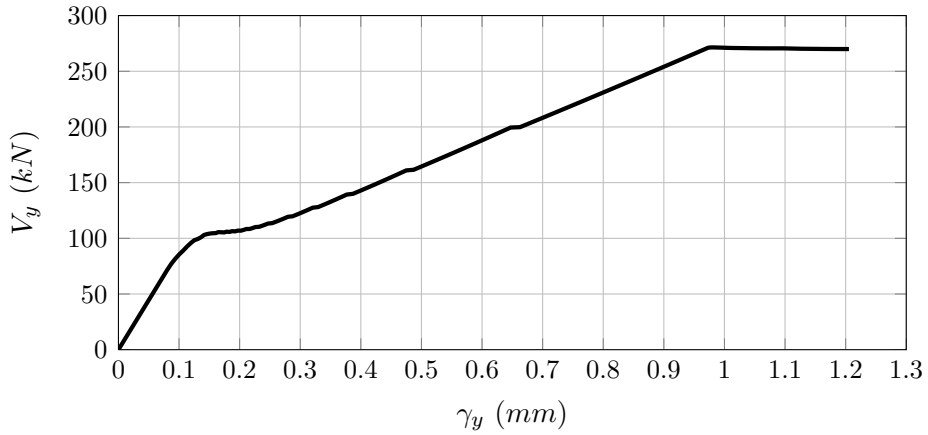


Figura 5.28: Relações tensão-deformação generalizada para o cisalhamento.

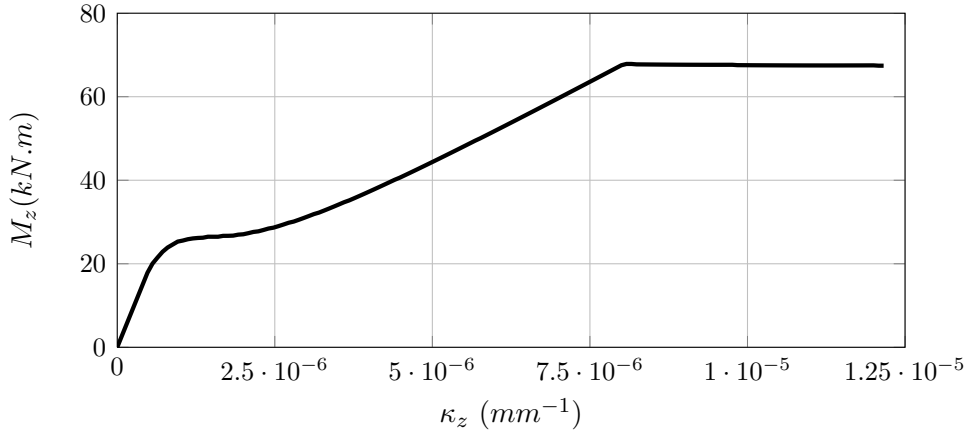


Figura 5.29: Relações tensão-deformação generalizada para a flexão.

Para a discretização segundo a Teoria de Timoshenko, foi considerada a simetria e utilizados 12 elementos de 2 nós com integração reduzida (1 ponto de integração para cada elemento) para representar metade da viga, conforme apresentado na Figura 5.30. A mesma malha foi utilizada para os dois modelos.

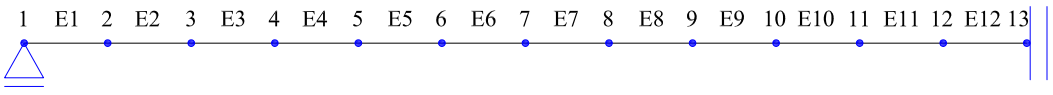


Figura 5.30: Malha de elementos finitos.

Na análise não linear adotou-se o método de controle direto de deslocamento, com incremento de 2×10^{-4} m no deslocamento vertical do nó 2 e uma tolerância para a convergência de 1×10^{-3} .

A Figura 5.31 mostra as trajetórias de equilíbrio para o deslocamento vertical no meio do vão da viga. São apresentados os resultados numéricos e experimentais obtidos por Jarek et al. (2011) e os resultados obtidos no `INSANE` pelos dois modelos: Seção Decomposta (S.D.) e Seção Homogeneizada (S.H.).

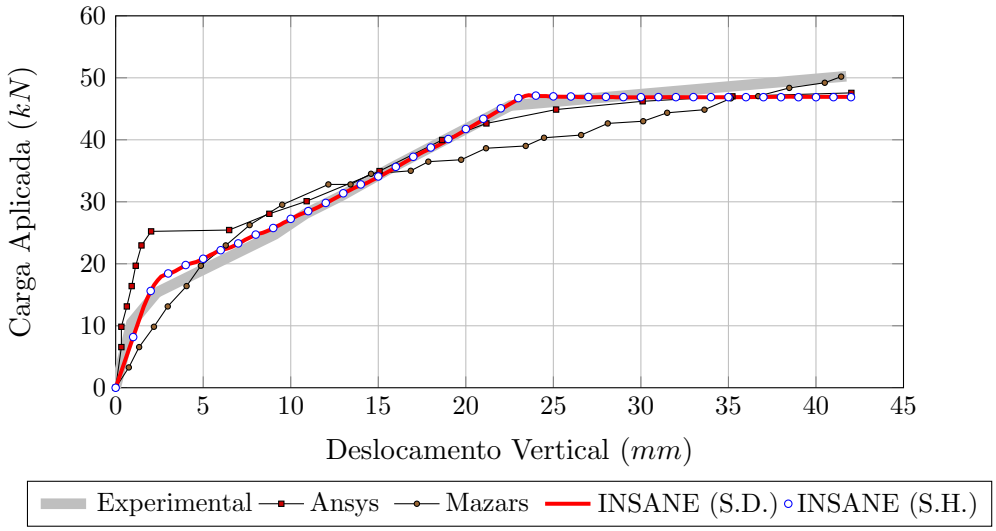


Figura 5.31: Trajetórias de equilíbrio do deslocamento vertical no meio do vão.

O resultado experimental apresenta de forma bem definida a trajetória de equilíbrio em três trechos. O primeiro relativo à seção de concreto íntegra, sendo as tensões de tração atuantes suportadas apenas pelo concreto, o segundo com a seção fissurada e o terceiro com o escoamento da armadura.

Pode-se observar que os modelos numéricos foram capazes de simular a trajetória de equilíbrio obtida experimentalmente. A modelagem proposta por Jarek et al. (2011) com o programa `Ansys`® apresenta uma boa aproximação, porém, a carga relativa ao início da fissuração no concreto é maior que a real. Já para a análise com o modelo de Mazars (1984) não se observa uma definição clara dos Estádios ao qual a seção passa até chegar ao escoamento da armadura, provavelmente por ser usado uma seção equivalente representativa do concreto e do aço. Para os resultados

obtidos pelo INSANE observa-se uma satisfatória concordância com o resultado experimental. Apenas para a etapa de escoamento da armadura observa-se uma pequena diferença que pode ser explicada pela consideração de uma lei elastoplástica para o aço sem endurecimento. Nenhuma diferença entre o modelo de seção decomposta e homogeneizada é observada. Cabe ainda destacar que esses resultados foram obtidos com um modelo unidimensional bastante simples quando comparado aos modelos de elementos tridimensionais usado por Jarek et al. (2011).

5.2.4 Viga Contínua - Silva (1977)

Com o objetivo de estudar a redistribuição de momentos em estruturas hiperestáticas, Silva (1977) analisou diversas vigas de concreto armado. Dentre estas, a viga contínua de referência V3 foi modelada neste exemplo. A geometria, carregamentos e armaduras são apresentadas na Figura 5.32.

Na primeira etapa, os estados elementares de solicitação são simulados para obter as relações tensão-deformação generalizada das seções das vigas. São utilizados modelos numéricos baseados em relações tensão - deformação e seção transversal decomposta. Pela estrutura analisada e a forma de carregamento, são necessárias apenas relações para a flexão e o cisalhamento.

As seções transversais são decompostas em 40 camadas de concreto ao longo de sua altura com espessura de 1.125 cm, além das áreas das armaduras, que são posicionadas de acordo com cada seção, conforme ilustrado na Figura 5.33.

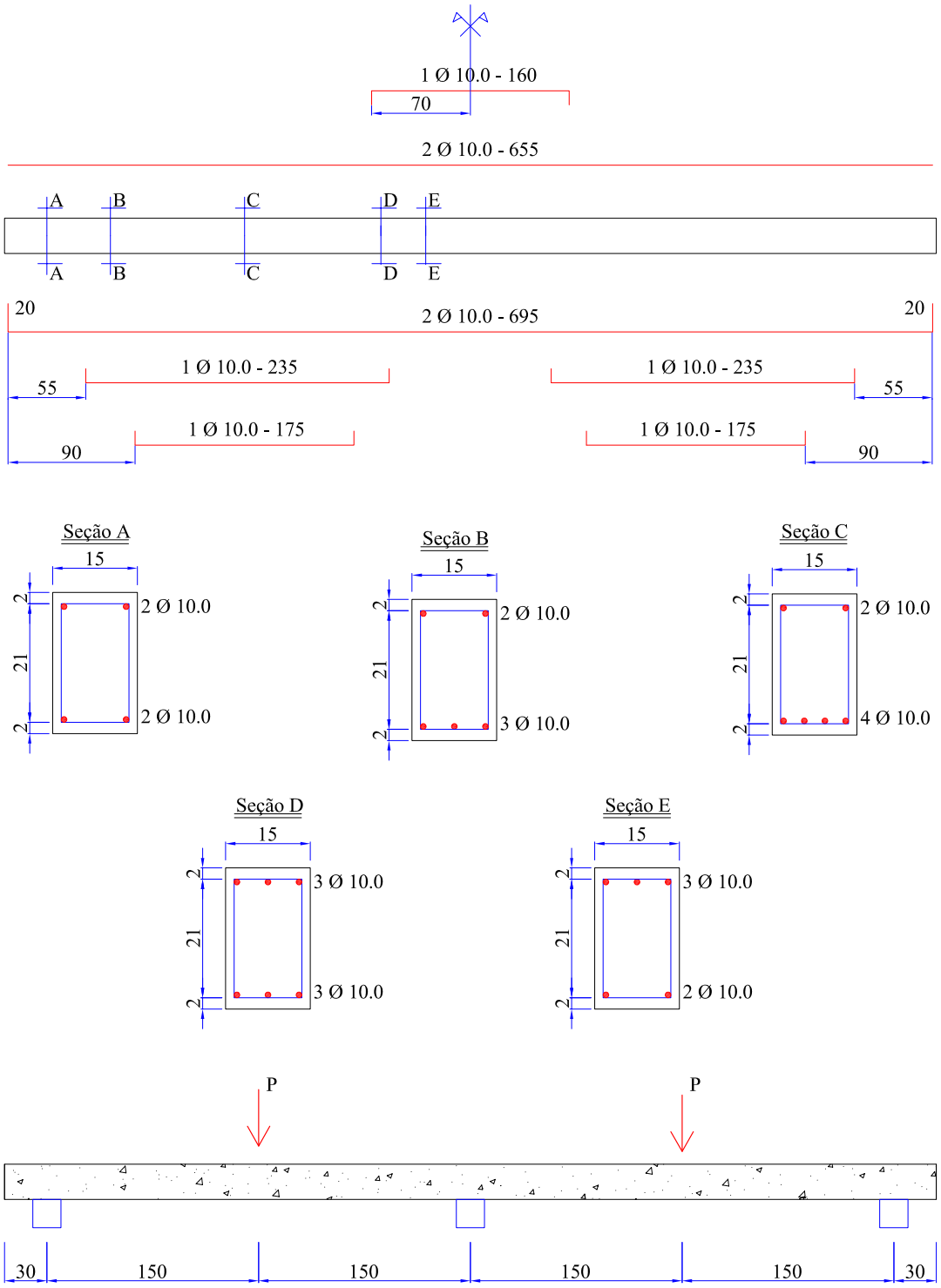


Figura 5.32: Detalhes da geometria, carregamento e armaduras da viga de Silva (1977).

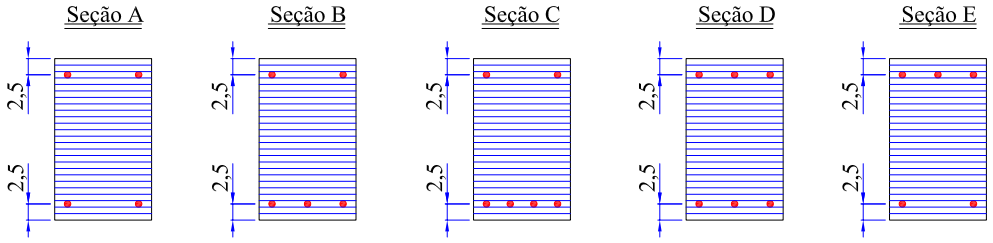


Figura 5.33: Seções transversais decompostas em camadas.

Neste exemplo, considerou-se para o concreto em compressão a lei proposta por Carreira e Chu (1985) e para o concreto em tração, a lei proposta por Boone e Ingraffea (1987). O aço foi considerado pela lei elastoplástica sem endurecimento. Para os parâmetros das leis tensão - deformação para o concreto e o aço utilizados neste exemplo são apresentados na Tabela 5.12.

Tabela 5.12: Parâmetros das leis tensão-deformação.

Concreto	Aço
$E_0 = 24.100MPa$	$E_s = 200.000MPa$
$f_c = 30,2MPa$	$f_y = 505MPa$
$f_t = 2,4MPa$	
$\varepsilon_c = 0,002$	
$\varepsilon_t = 0,0001$	
$h = 0,05m$	
$G_f = 0,00005MPa$	

As relações tensão - deformação generalizada para flexão em torno de z e para o esforço cortante na direção y são apresentadas nas Figuras 5.34 e 5.35, respectivamente.

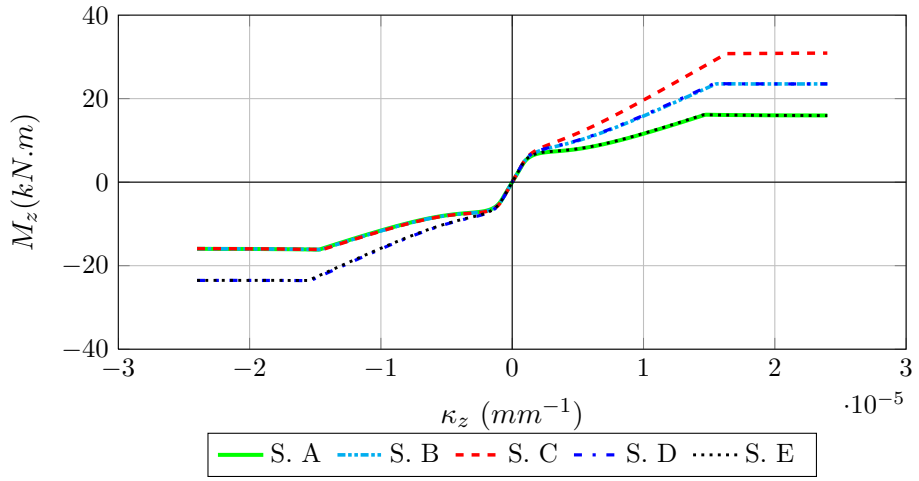


Figura 5.34: Relações tensão - deformação generalizada para a flexão.

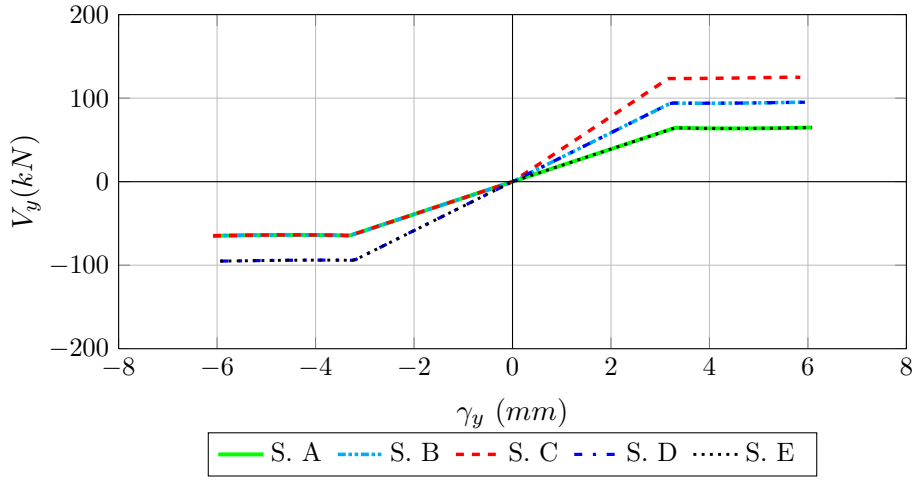


Figura 5.35: Relações tensão - deformação generalizada para o cisalhamento.

Na segunda etapa, as relações obtidas são utilizadas na análise não linear da viga. Além desta análise, é utilizado um outro modelo com leis tensão - deformação e com as mesmas características da seção decomposta em camadas do modelo elementar usado para obtenção das relações tensão - deformação generalizada. Dessa forma, a viga foi analisada segundo a Teoria de Timoshenko. Utilizando-se a hipótese de simetria, a metade da viga foi modelada com discretizaçã de 18 elementos de 2 nós com 1 ponto de integração (integração reduzida). A Figura 5.36 mostra o modelo de elementos finitos.

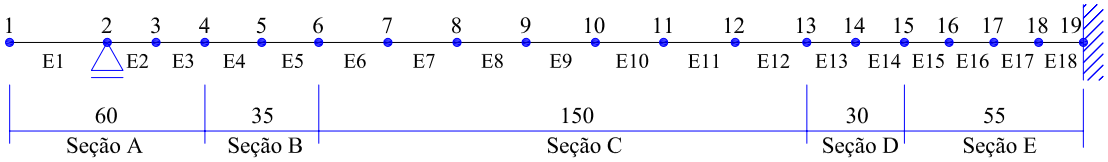


Figura 5.36: Malha de elementos finitos.

Na análise não linear adotou-se o método de controle direto de deslocamentos, com incremento de 5×10^{-4} m no deslocamento vertical do nó 10 (nó de aplicação do carregamento) e uma tolerância para a convergência de 1×10^{-4} .

Os resultados obtidos numericamente pelos dois modelos são comparados com os resultados obtidos experimentalmente, conforme Figuras 5.37 a 5.42.

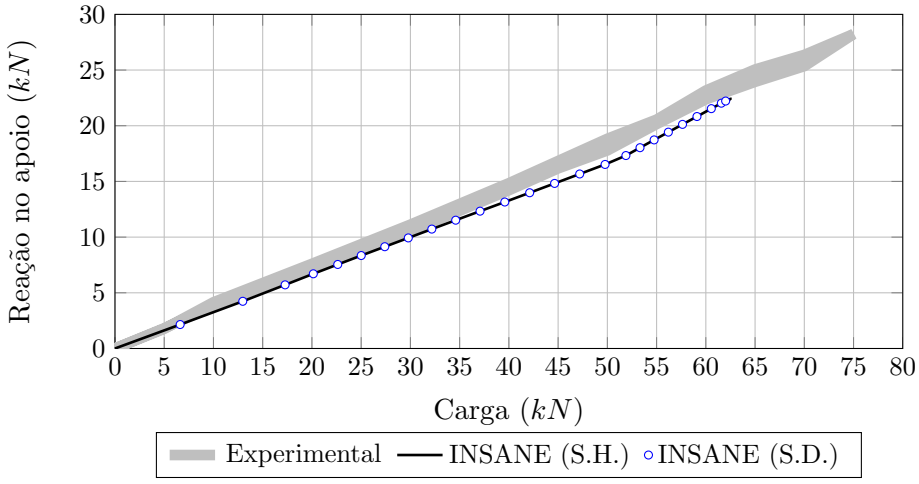


Figura 5.37: Relação entre a carga aplicada e a reação no apoio externo (nó 2).

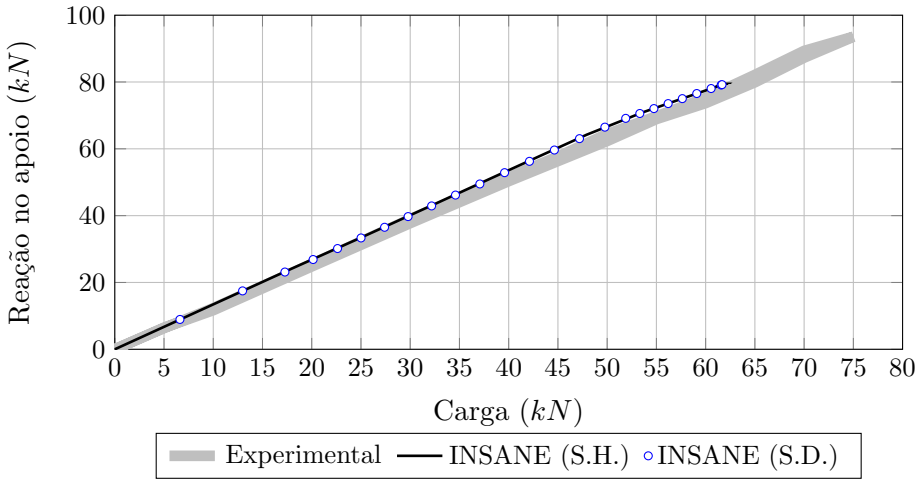


Figura 5.38: Relação entre a carga aplicada e a reação no apoio interno (nó 19).

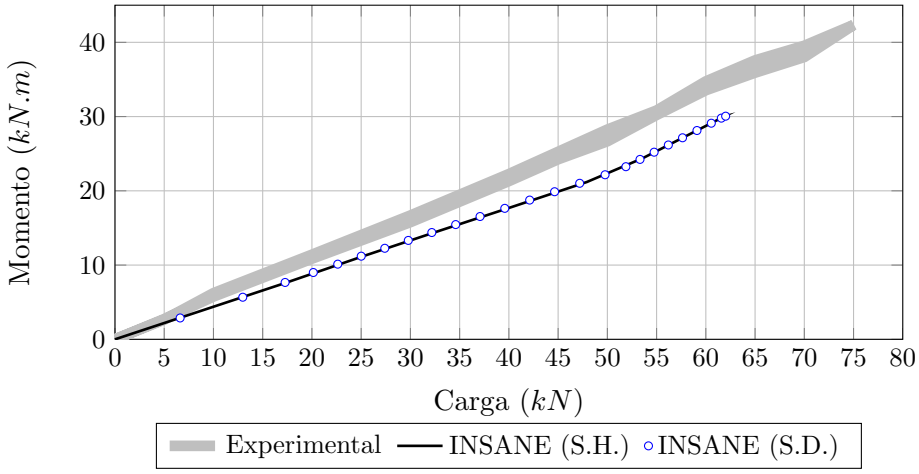


Figura 5.39: Relação entre a carga aplicada e o momento no nó 10.

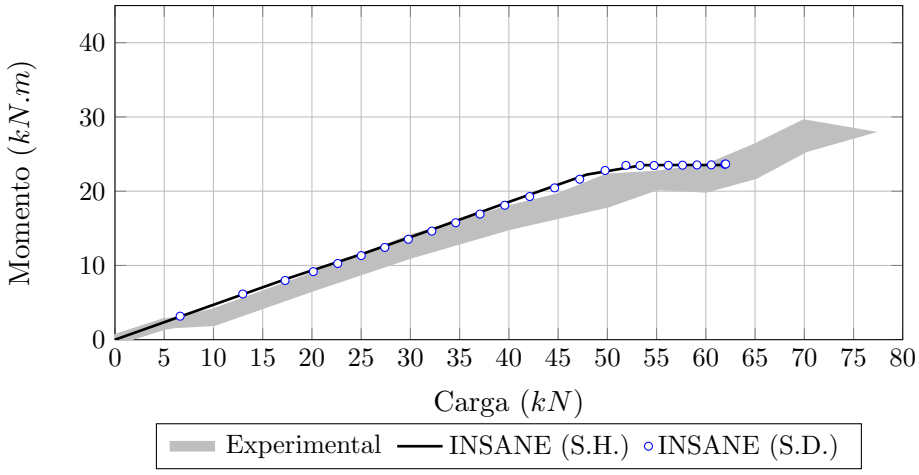


Figura 5.40: Relação entre a carga aplicada e o momento no nó 19.

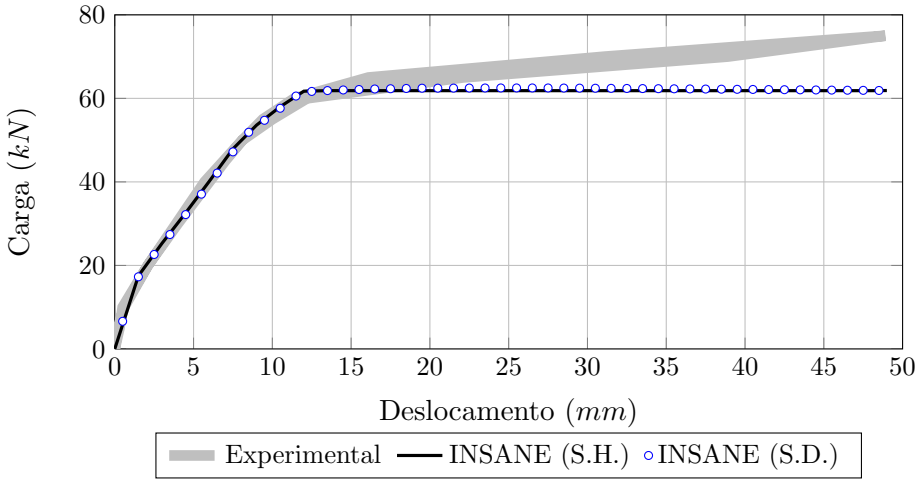


Figura 5.41: Trajetória de equilíbrio para o nó 10.

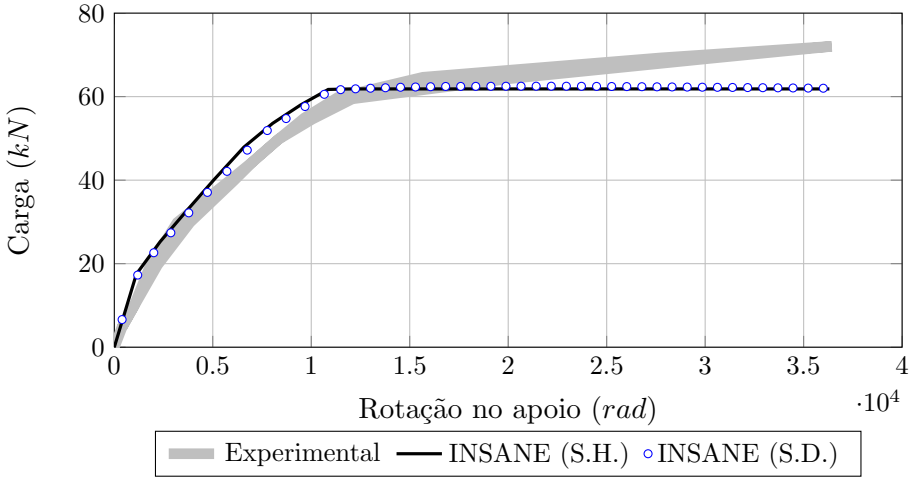


Figura 5.42: Relação entre a carga aplicada e a rotação no apoio (nó 2).

A partir da análise dos resultados, observa-se que as curvas obtidas numericamente apresentam um comportamento semelhante ao obtido experimentalmente. Com relação aos dois modelos numéricos utilizados, não se observa diferenças significativas.

Embora pequenas diferenças possam ser observadas entre os resultados numéricos e o experimental, destaca-se que alguns valores obtidos com os modelos numéricos são bastante próximos dos valores calculados por Silva (1977) para o dimensionamento da vigas, apresentados em seu trabalho. Na Tabela 5.13 são apresentadas as comparações para a reação no apoio externo (R_2), a reação no apoio interno (R_{19}), o momento no nó 10 (M_{10}), o mento no nó 19 (M_{19}), a carga última (P_U) e a carga que provoca a formação da primeira rótula plástica (P_P). Os valores da coluna da esquerda podem ser obtidos no trabalho de Silva (1977) e os valores da coluna da direita, obtidos com o `INSANE` pelo modelo de seção homogeneizada, podem ser observados nas Figuras 5.37 a 5.42, respectivamente.

Tabela 5.13: Comparação dos resultados obtidos pelo INSANE e os calculados por Silva (1977)

Referência	Silva (1977)	INSANE
R_2	$21,80$	$22,00$
R_{19}	$76,72$	$79,21$
M_{10}	$32,70$	$29,90$
M_{19}	$24,99$	$23,53$
P_U	$60,26$	$61,72$
P_P	$44,43$	$47,90$

No ramo ascendente (cargas de utilização) os modelos numéricos apresentaram resultados bastante próximos dos experimentais, descrevendo com boa precisão as trajetórias de equilíbrio. Já para o comportamento na ruptura, os modelos não apresentaram ganho de carga no regime pós-crítico. Uma possível causa para esse comportamento é o uso do módulo elastoplástico (E_p) igual a zero. Entretanto, a influência de outros parâmetros, sejam estes das leis tensão-deformação, do modelo de flexão ou mesmo da discretização do MEF, precisa ser investigada visando um modelo que represente bem e completamente o comportamento não linear da viga.

Com relação à redistribuição de momentos é possível observar a capacidade de rotação das rótulas plásticas que são suficientes para garantir a adaptação ao diagrama de momentos adotado por Silva (1977) para o dimensionamento da viga, não sendo observada ruptura por esgotamento da capacidade de rotação plástica.

Observando os gráficos carga x momento da viga (Figuras 5.39 e 5.40) nota-se que o momento neste nó foi sempre menor que o momento no nó 10, mesmo antes de haver a plastificação. Este comportamento do concreto armado, que só pode se estudado pela análise não linear, contraria a hipótese do cálculo para um material elasto-plástico ideal, segundo as quais o momento no nó 19 seria sempre maior que o momento no nó 10 antes de haver formação de rótulas plásticas.

Vale ainda destacar duas vantagens do modelo de seção homogeneizada, como proposto neste trabalho, em relação ao modelo de seção discretizada, a saber: (1) o custo computacional reduzido e (2) a possibilidade de uso de quaisquer relações

momento-curvatura representadas por conjuntos de pontos discretos. Esta segunda vantagem permite, por exemplo, realizar análises de modelos estruturais complexos utilizando resultados experimentais de ensaios elementares.

5.2.5 Pilar - Razvi e Saatciaglu (1989)

Em um estudo experimental sobre o comportamento de pilares confinados, Razvi e Saatciaglu (1989) ensaiaram pilares curtos de seção quadrada submetidos a compressão axial.

Os pilares de número 3 e 4 do estudo de Razvi e Saatciaglu (1989), cujas características geométricas são apresentadas na Figura 5.43, diferem apenas pelo espaçamento dos estribos, sendo que no pilar 3 o espaçamento entre os estribos é a metade do espaçamento utilizado no pilar 4. A armadura longitudinal e o concreto são os mesmos para os dois pilares.

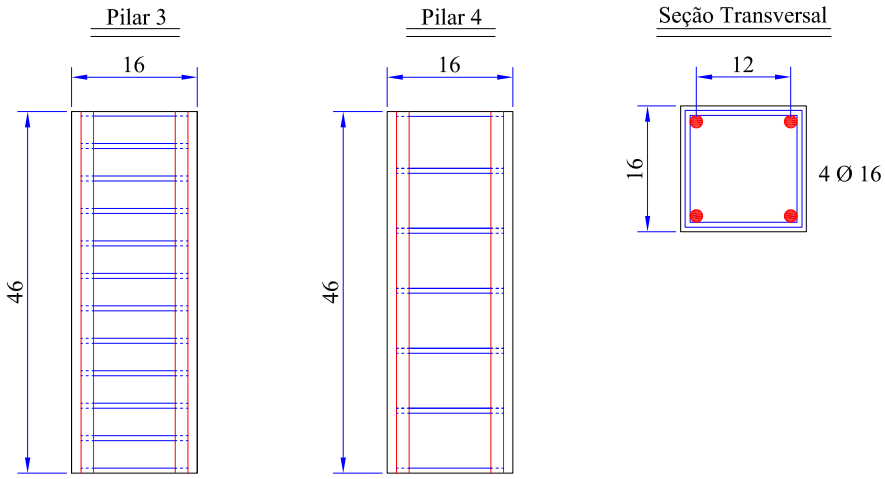


Figura 5.43: Detalhes da geometria, carregamento e armaduras dos pilares.

Esses pilares foram analisados no `INSANE` utilizando os dois modelos apresentados neste trabalho.

Para o modelo tensão-deformação generalizada utilizou-se as relações entre esforço normal e deformação obtidas diretamente dos ensaios experimentais e apresentadas na Figura 5.44.

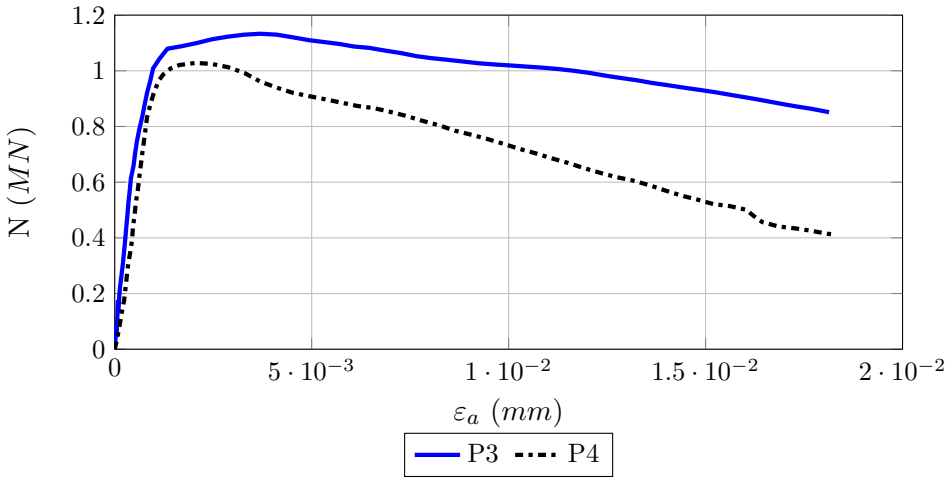


Figura 5.44: Relações tensão-deformação generalizada para compressão.

No modelo tensão-deformação a seção transversal foi dividida em 64 áreas referentes ao concreto e mais 4 áreas relativas a armadura, conforme apresentado na Figura 5.45. Destaca-se que neste modelo os estribos não são incorporados e que não foi utilizada nenhuma lei tensão-deformação própria para o concreto confinado.

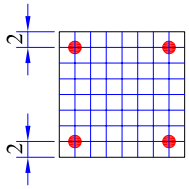


Figura 5.45: Seção transversal decomposta em camadas.

Para o concreto em compressão considerou-se a lei proposta por Carreira e Chu (1985) . Na Figura 5.46 é possível perceber a boa concordância entre as curvas tensão-deformação numérica e a experimental que foi obtida em laboratório por Razvi e Saatciaglu (1989). Com isso tem-se a validação da lei constitutiva para o concreto em compressão. O aço foi considerado pela lei elastoplástica sem endurecimento. As propriedades dos materiais são apresentadas na Tabela 5.14.

Tabela 5.14: Parâmetros das leis tensão-deformação.

Concreto	Aço
$E_0 = 21.000MPa$	$E_s = 188.000MPa$
$f_c = 32MPa$	$f_y = 470MPa$
$f_t = 3,2MPa$	
$\varepsilon_c = 0,002$	
$\varepsilon_t = 0,00015$	

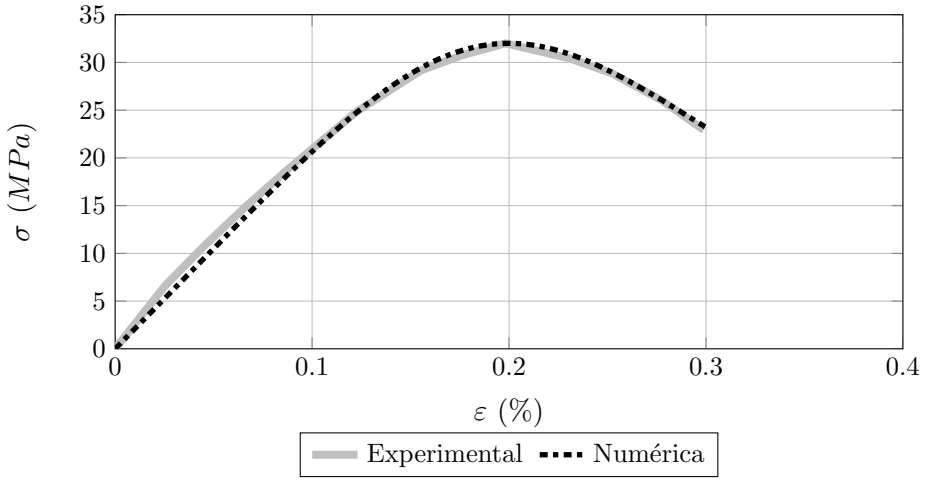


Figura 5.46: Curvas tensão-deformação para o concreto em compressão.

Para a discretização segundo a Teoria de Bernoulli-Euler foram utilizados 2 elementos de 2 nós com 2 pontos de integração para cada elemento, conforme apresentado na Figura 5.47. A mesma malha foi utilizada para os dois modelos.

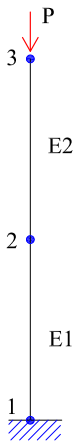


Figura 5.47: Malha de elementos finitos dos pilares de Razvi e Saatciaglu (1989).

Na análise não linear adotou-se o método de controle direto de deslocamento, com incremento de 1×10^{-4} m no deslocamento vertical do nó 3 e uma tolerância para a convergência de 1×10^{-3} .

As Figuras 5.48 e 5.49 apresentam as trajetórias de equilíbrio para a deformação axial dos pilares 3 e 4 respectivamente. Os resultados experimentais são comparados com os resultados obtidos com o `INSANE` pelos dois modelos e os resultados numéricos obtidos por Seixas (2003), que em seu trabalho apresentou um modelo não linear físico e geométrico para análise de pilares de concreto armado sob estado triplo de tensões utilizando elementos finitos isoparamétricos quadráticos. A curva obtida com o modelo tensão-deformação é a mesma nas duas figuras.

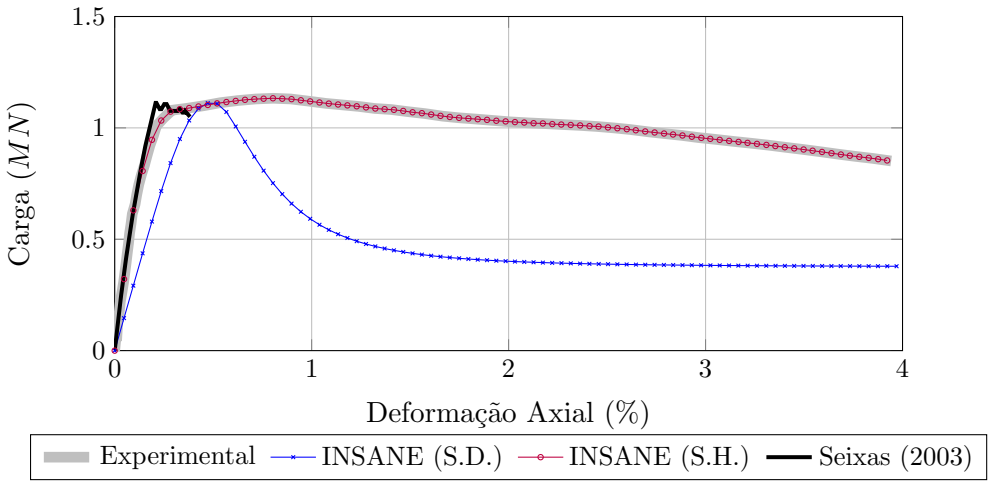


Figura 5.48: Trajetórias de equilíbrio do pliar 3 para deformação axial.

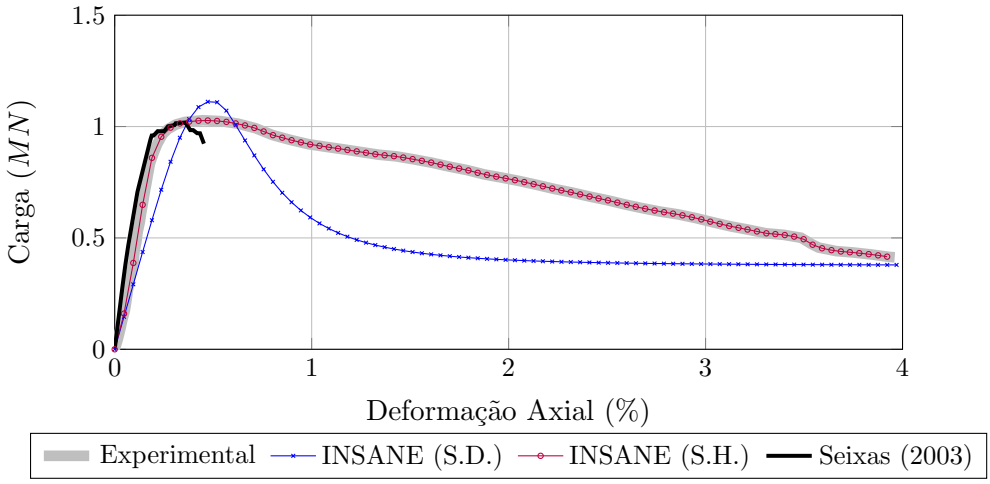


Figura 5.49: Trajetórias de equilíbrio do pilar 4 para deformação axial.

Observa-se que o modelo apresentado por Seixas (2003) simula muito bem o efeito do confinamento do concreto no ramo ascendente das curvas, não sendo capaz de descrever as trajetórias de equilíbrio no regime pós-crítico. Já o modelo tensão-deformação apresenta resultados que não se aproximam bem dos experimentais, principalmente no regime pós-crítico conforme já era esperado pelo fato do efeito do confinamento não ter sido incorporado. No modelo tensão-deformação generalizada fica claro que é possível descrever o ensaio de laboratório numericamente. Evidentemente essa análise fica limitada a esses pilares, porém, é possível utilizá-la para modelar diferentes estruturas compostas por elementos com essas mesmas seções transversais.

Para exemplificar essa aplicação foi modelado um pórtico plano com geometria e carregamentos apresentados na Figura 5.50.

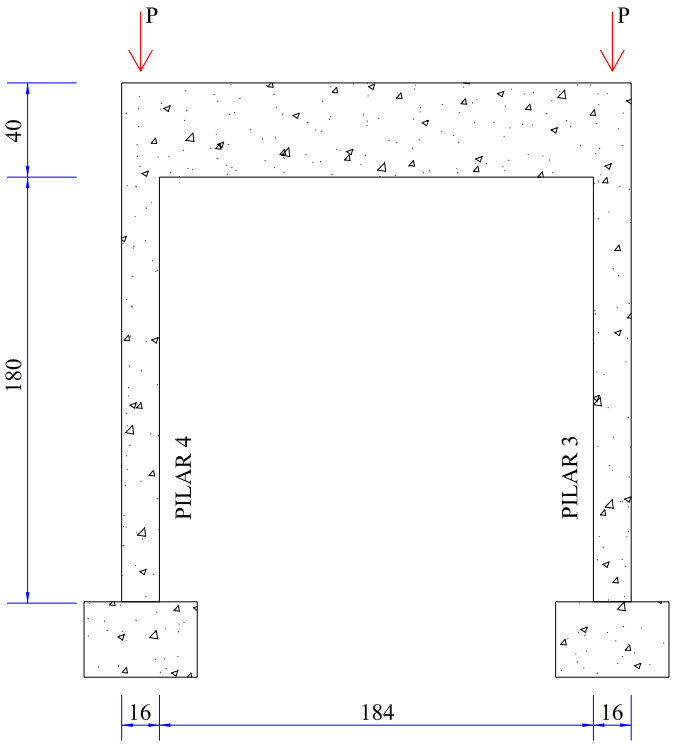


Figura 5.50: Pórtico estudado.

O pórtico foi analisado utilizando o modelo de seção decomposta e homogeneizada, sendo que para o primeiro modelo foram utilizadas as mesmas propriedades dos

materiais apresentadas na Tabela 5.14. No modelo de seção homogeneizada, para o pilar esquerdo do pórtico foi atribuído a relação tensão-deformação generalizada do pilar 4 e para o direito a relação do pilar 3. Utilizando o modelo tensão-deformação foi obtida uma relação momento-curvatura para a seção transversal dos pilares. Para a viga do pórtico foi utilizado o modelo da seção decomposta em camadas.

Na análise não linear deste pórtico adotou-se o método de controle direto de deslocamentos, com incremento de $3,5 \times 10^{-4} m$ no deslocamento vertical do nó 5 e uma tolerância para convergência de 1×10^{-4}.

A discretização do pórtico segundo a Teoria de Bernoulli-Euler foi feita utilizado-se 12 elementos de 2 nós com 2 pontos de integração, para representar as vigas e pilares do pórtico, conforme apresentado na Figura 5.51. A mesma malha foi utilizada para os dois modelos.

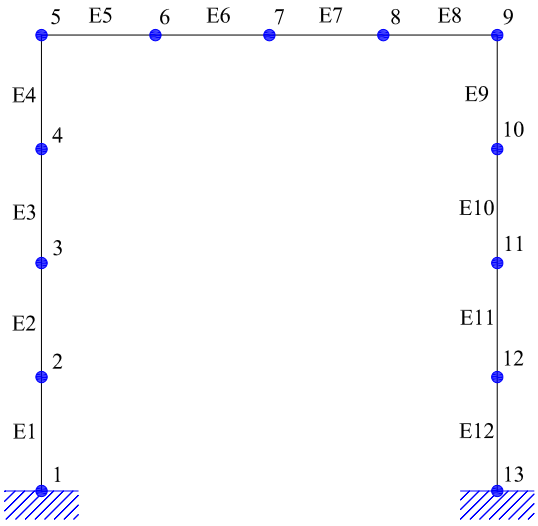


Figura 5.51: Malha de elementos finitos do pórtico.

Com essa análise pretende-se ilustrar que a não consideração do efeito do confinamento do concreto proporcionado pelos estribos pode levar a estrutura a apresentar diferentes respostas, conforme apresentado na Figura 5.52. Nesta figura é apresentada a estrutura deformada no nível de solicitação correspondente ao incremento de $3,5 \times 10^{-2} m$ no deslocamento vertical do nó 5, para os dois modelos citados. O

pórtico da esquerda utiliza o modelo de seção decomposta e o da direita, o modelo seção homogeneizada.

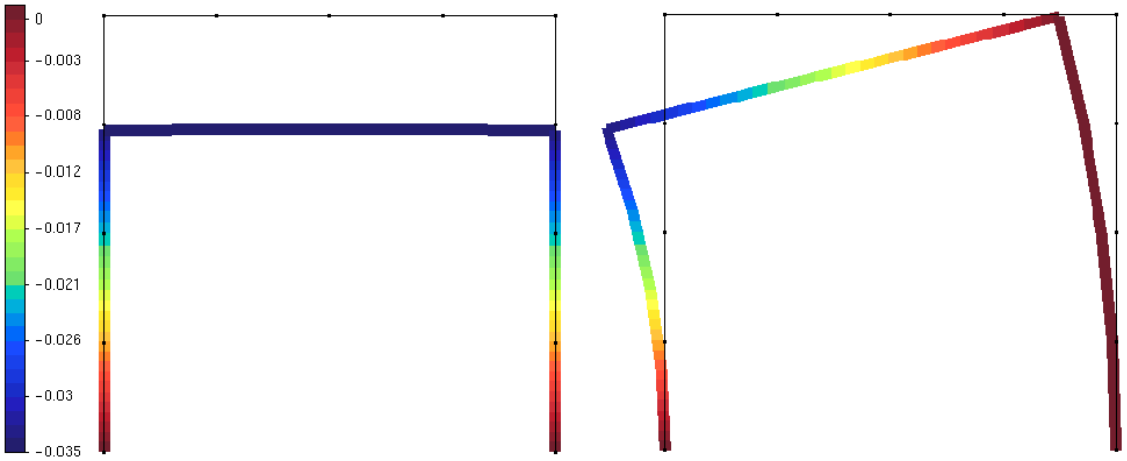


Figura 5.52: Deformada da estrutura.

O modelo que considera o efeito do confinamento do concreto apresenta uma resposta mais semelhante ao comportamento real da estrutura, visto que o pilar da esquerda é menos rígido. Além disso, verifica-se que após o limite de carga do pilar surgem momentos, não existentes no modelo de seção decomposta, no pilar da esquerda, conforme apresentado na Figura 5.53.

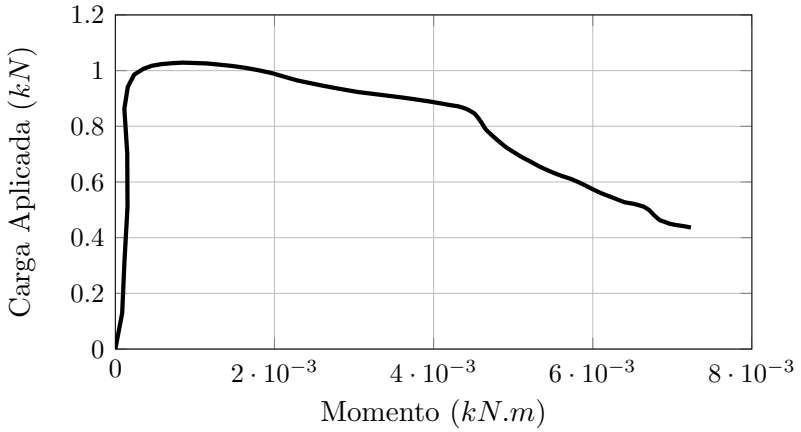


Figura 5.53: Relação entre carga aplicada e momento no nó 5.

Também pode ser ilustrado o surgimento de deslocamentos horizontais, mostrado na Figura 5.54, não existentes no modelo de seção decomposta.

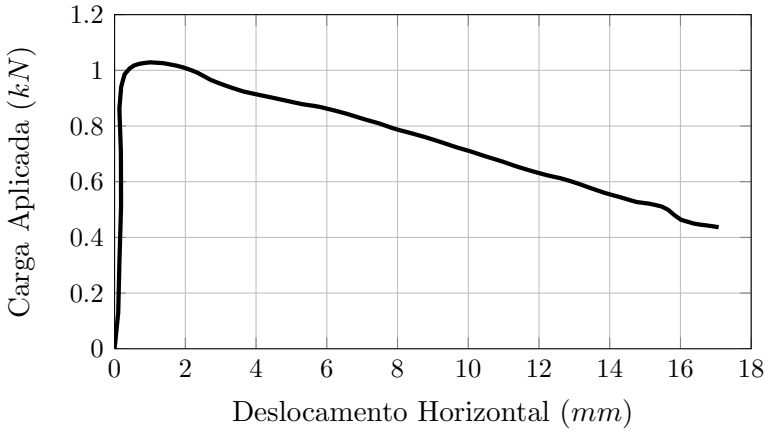


Figura 5.54: Relação entre carga aplicada e deslocamento horizontal no nó 5.

5.2.6 Pórtico Plano - Vecchio e Emara (1992)

Os pórticos de um edifício são responsáveis pelo sistema de contraventamento da estrutura e sua restrição aos deslocamentos horizontais, o que torna o conhecimento de seu comportamento, principalmente após a fissuração do concreto, de grande interesse para a engenharia estrutural. Nesse sentido, são desenvolvidos estudos experimentais e numéricos, com o objetivo de analisar a resposta da estrutura solicitada por um determinado carregamento.

Apesar das dificuldades existentes em relação à experimentação em laboratório, resultados experimentais podem ser encontrados na literatura. Como exemplo pode-se citar os seguintes trabalhos: Read (1965) ensaiou dois pórticos em escala real, de um vão e um pavimento, com carga vertical aplicada em quatro pontos da viga; os dois pórticos apresentam mesma geometria e mesma armadura, porém um deles é bi-engastado na base e o outro é bi-articulado. Wilby e Bandit (1967) ensaiaram um pórtico bi-engastado em escala reduzida, de um vão e um pavimento, sujeito a carga vertical aplicada no meio do vão da viga. Vecchio e Balopoulou (1990) realizaram um ensaio de um pórtico plano de concreto armado em escala real, de um vão e dois pavimentos, bi-engastado, com o objetivo de estudar alguns fatores que contribuem para o comportamento não linear destas estruturas. Vecchio e Emara

(1992) realizaram um ensaio de um pórtico plano de concreto armado em escala real, de um vão e dois pavimentos, bi-engastado, com o objetivo de estudar as deformações por cisalhamento em pórticos.

Dentre esses trabalhos, o pórtico ensaiado por Vecchio e Emara (1992) foi estudado numericamente neste exemplo utilizando os dois modelos apresentados. A geometria, carregamentos e armaduras são apresentados na Figura 5.55.

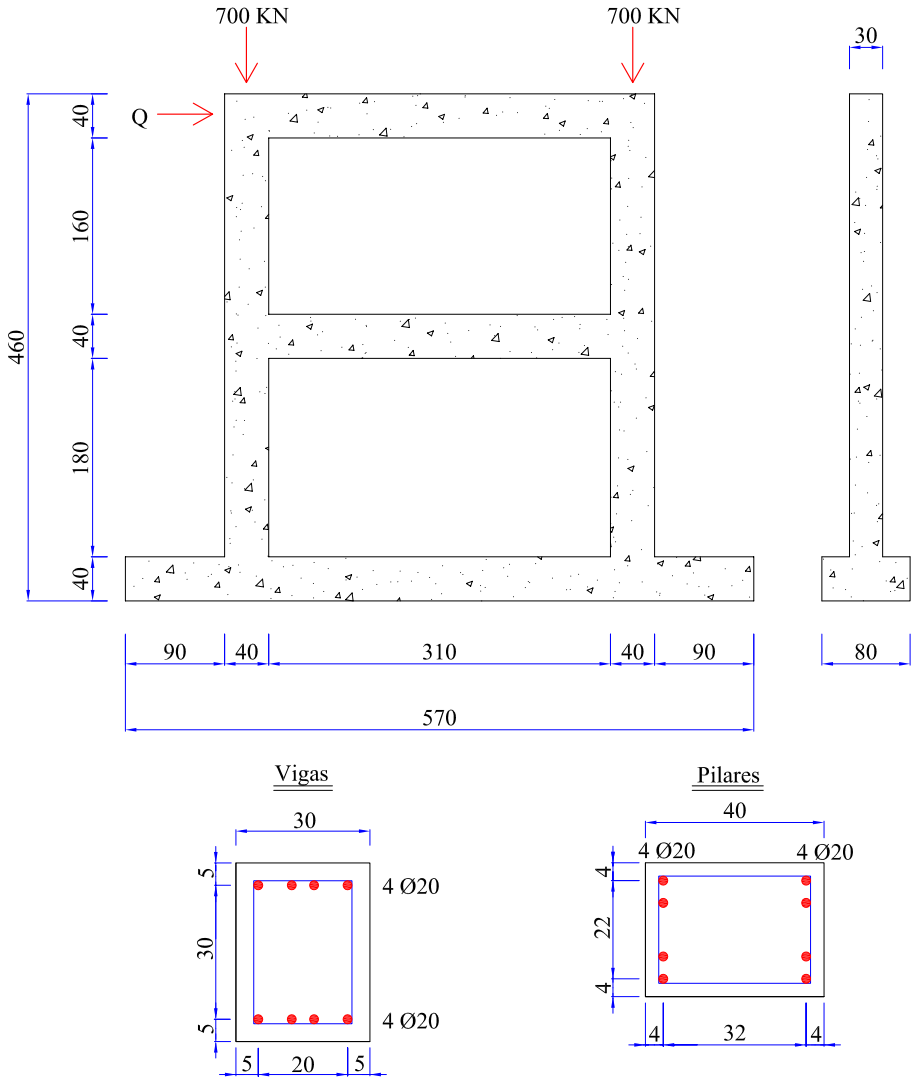


Figura 5.55: Detalhes da geometria, carregamento e armadura do pórtico.

No modelo de seção decomposta a seção transversal foi divida em quarenta camadas de concreto com espessura de 1 cm e oito áreas de aço de 3 cm^2 correspondente às barras da armadura de diâmetro 20 mm, conforme apresentado na Figura 5.56.

Considerou-se a lei proposta por Carreira e Chu (1985, 1986) para o concreto em compressão e tração. O aço foi considerado pela lei elastoplástica sem endurecimento. As propriedades dos materiais são apresentadas na Tabela 5.15.

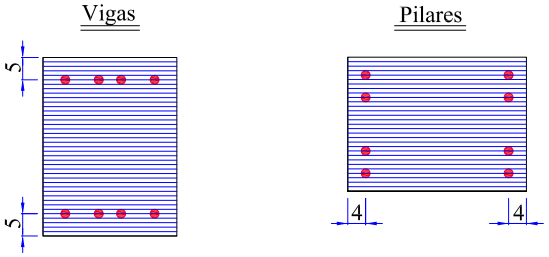


Figura 5.56: Seção transversal decomposta em camadas.

Tabela 5.15: Parâmetros das leis tensão-deformação.

Concreto	Aço
$E_0 = 23674MPa$	$E_s = 192.500MPa$
$f_c = 30MPa$	$f_y = 418MPa$
$f_t = 2,9MPa$	
$\varepsilon_c = 0,0025$	
$\varepsilon_t = 0,00015$	

Para o modelo de seção homogeneizada, foram obtidas relações tensão-deformação generalizada para a flexão, cisalhamento, tração e compressão utilizando o modelo numérico de seção decomposta, apresentadas na Figura (5.57).

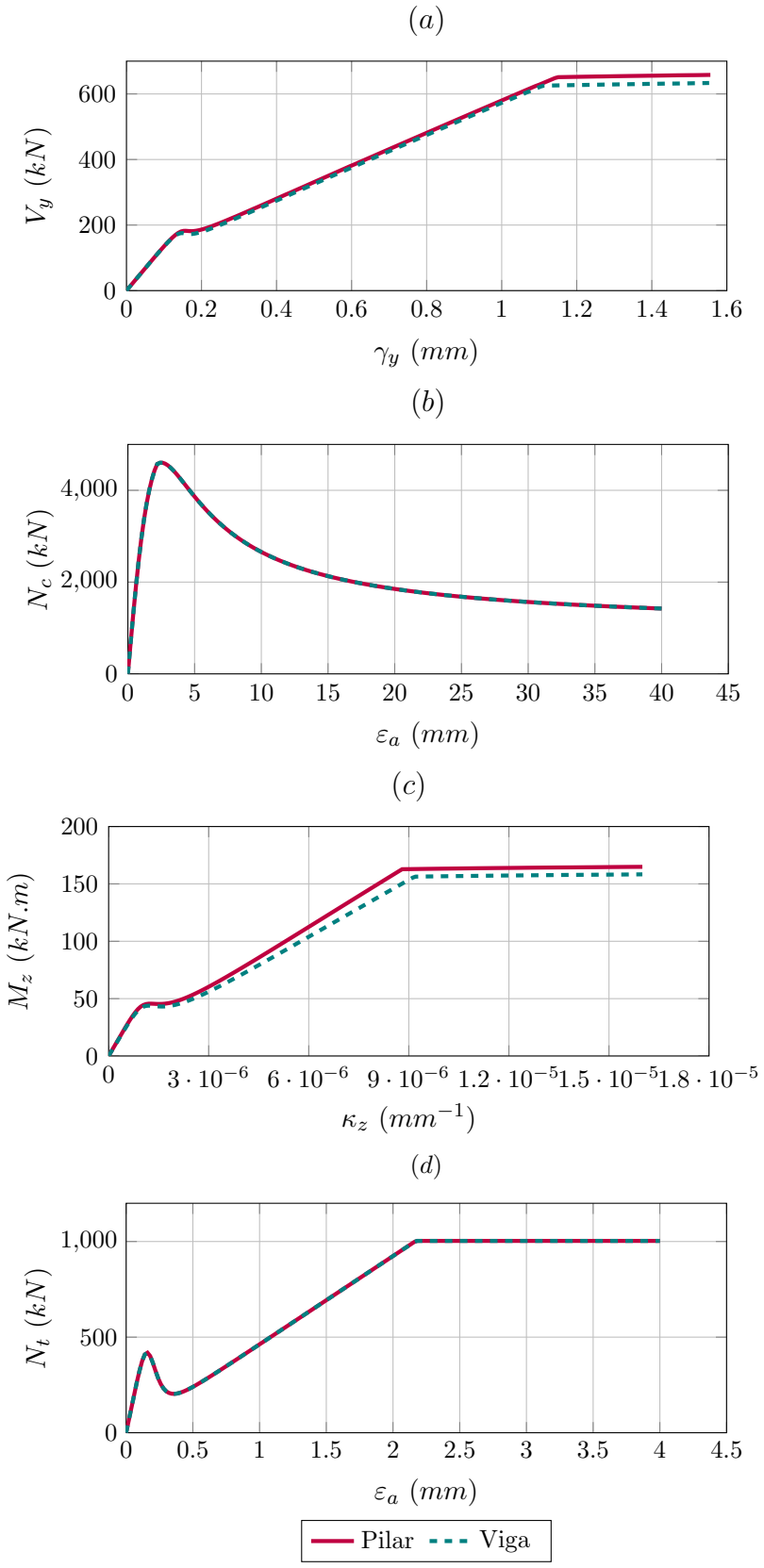


Figura 5.57: Relações tensão-deformação generalizada para para (a) cisalhamento, (b) compressão, (c) flexão e (d) tração.

Para a discretização segundo a Teoria de Timoshenko foram utilizados 32 elementos de 2 nós com integração reduzida (1 ponto de integração para cada elemento) para representar as vigas e pilares do pórtico, conforme apresentado na Figura 5.58. A mesma malha foi utilizada para os dois modelos.

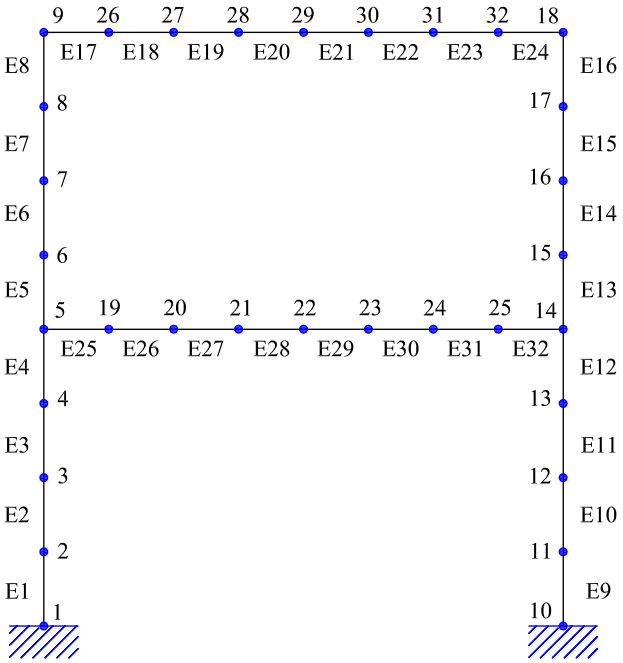


Figura 5.58: Malha de elementos Finitos.

Na análise não linear adotou-se o método de controle direto de deslocamento, com incremento de $7,5 \times 10^{-4}$ m no deslocamento horizontal do nó 9 uma tolerância para a convergência de 1×10^{-3} .

A Figura 5.59 apresenta as trajetórias de equilíbrio para o deslocamento horizontal no topo do pilar (nó 9). Os resultados experimentais são comparados com os resultados obtidos com o `INSANE` pelos dois modelos e os resultados numéricos obtidos por Güner (2011) que em seu trabalho apresentou um modelo não linear físico e geométrico para análise de modelos reticulados de estruturas de concreto armado. O modelo utilizado por Güner (2011) é baseado na decomposição da seção transversal em camadas e prescrição de leis tensão-deformação. O autor analisou o pórtico utilizando dois modelos, um que considera a não linearidade física e geométrica (NLFG)

e outro que leva em conta apenas a não linearidade física.

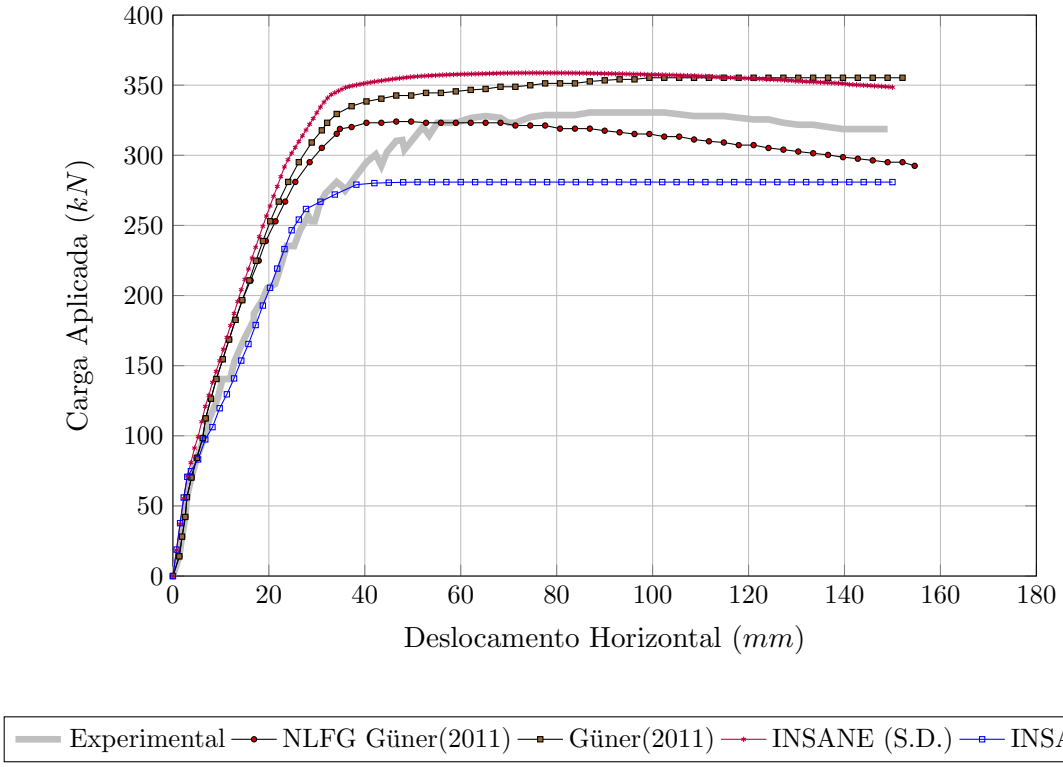


Figura 5.59: Trajetórias de Equilíbrio para o deslocamento horizontal do nó 9.

A partir da análise dos resultados observa-se que as curvas obtidas numericamente apresentam um comportamento semelhante ao obtido experimentalmente.

No ramo ascendente (cargas de utilização) o uso do modelo com seção homogeneizada mostrou-se mais apropriado, visto que no modelo de seção decomposta a rigidez e a previsão de carga limite é superestimada. Além deste fator, o custo computacional reduzido é uma vantagem do primeiro modelo. Já para o estudo do comportamento na ruptura deve-se recorrer ao modelo de seção decomposta, que apresenta boa estimativa para o regime pós-crítico.

Com relação aos resultados obtidos por Güner (2011), observa-se que a consideração da não linearidade geométrica é pouco significativa no ramo ascendente, porém, no regime pós-crítico observa-se diferenças significativas entre os dois modelos. Vale ainda destacar que esses resultados são bastante próximos do resultado obtido com o `INSANE` para o modelo de seção decomposta, principalmente o modelo de Güner

(2011) que não considera a não linearidade geométrica.

Também vale destacar que um possível motivo para os modelos baseados na decomposição da seção apresentarem um comportamento mais rígido é a variação da posição da linha neutra, que no caso do `INSANE` não é atualizada.

Capítulo 6

Considerações Finais

Neste trabalho foi apresentada a formulação e implementação de um modelo fisicamente não linear baseado em relações tensão-deformação generalizada no sistema `INSANE`.

A formulação teórica detalhada no Capítulo 2 permite compreender a metodologia de análise baseada em leis tensão-deformação e decomposição da seção transversal e, através desta, como é possível evitar a integração das tensões ao longo da seção transversal utilizando modelos tensão-deformação generalizada.

Ao longo do texto foram feitas diversas comparações entre os dois modelos estudados neste trabalho, o que torna possível entender as vantagens e desvantagens de cada um deles. Dessa forma, no Capítulo 3 apresentou-se algumas das leis constitutivas para materiais, que são um dos principais itens para a análise baseada na decomposição da seção. Além dessas leis, foram apresentadas metodologias para a obtenção de relação tensão-deformação generalizada, dando ênfase ao caso da flexão, pois a não linearidade física é mais acentuada em elementos fletidos.

Outro assunto abordado no Capítulo 3 foi a solução de equações não lineares de equilíbrio, item este indispensável para o estudo aqui realizado. Foram apresentados dois métodos de controle: o método de controle de carga e o método de controle direto de deslocamentos. Embora o método de controle de carga seja um dos mais utilizados em virtude da sua simplicidade e do tipo de análise que comumente é feito, para os problemas que foram abordados aqui, com este método, não seria possível

descrever totalmente as trajetórias de equilíbrio dos problemas estudados, visto que em muitos deles ocorre aumento de deslocamentos com diminuição de carga, motivo pelo qual foi utilizado o método de controle direto de deslocamentos, método este que também foi abordado no Capítulo 3.

No capítulo de implementação computacional, além da apresentação da organização do núcleo numérico do `INSANE`, foram detalhadas as equações que permitem modelar o problema a ser resolvido, equações estas apresentadas também de forma simplificada para o caso da análise estática fisicamente não linear.

Apresentadas as bases teóricas dos problemas a serem analisados, no Capítulo 5 foram feitas simulações numéricas de problemas de estrutura de concreto armado que podem ser modeladas com elementos de pórtico plano.

As simulações numéricas foram divididas em duas partes. Na primeira, foi estudado, através de modelos que simulam estados elementares de solicitação, como os parâmetros dos materiais e a geometria das seções podem influenciar nas relações tensão-deformação generalizada. Foram estudados os casos de cisalhamento, flexão e esforço normal de tração e compressão. Dessa forma é possível compreender como cada parâmetro influencia em cada relação. Entendidos esses conceitos, foi possível realizar, na segunda parte, os estudos de caso de forma mais clara e objetiva.

Na primeira simulação foram comparadas as metodologias para obtenção das relações momento curvatura, conforme apresentado no item 3.2 do Capítulo 3.

As relações obtidas com base nos ensaios experimentais feitos por Farage (1995), através das medições das deformações no aço e no concreto e dos deslocamentos, quando comparados com relações numéricas e analíticas baseadas na NBR 6118 apresentaram resultados bastante próximos no ramo ascendente, Estádios I e II. Destaca-se que, como as peças em serviço estão em regiões intermediárias a esses estádios, o uso destas metodologias mostra-se aplicável em situações práticas.

As vigas estudadas por Álvares (1993), que apresentam as mesmas seções porém com diferentes taxas de armadura, foram analisadas com os dois modelos aqui

apresentados, destacando-se que a relação momento-curvatura foi obtida através da equação apresentada na NBR 6118, além de exemplificar uma aplicação do `INSANE` com base na equação da norma.

Foi possível analisar as diferenças entre os resultados numéricos e experimentais causadas pela simplificação adotada pela referida norma. Para o cálculo do momento de fissuração, que não considera a presença de armadura, à medida que a taxa de armadura da seção aumenta, os resultados preconizados na norma tendem a se distanciar da realidade.

Com o terceiro exemplo foi possível validar a metodologia apresentada para a obtenção das relações tensão-deformação generalizada para o cisalhamento e a flexão, visto que o modelo de seção homogeneizada, munido das relações obtidas numericamente, apresentou o mesmo resultado do modelo de seção decomposta. Vale ainda destacar neste exemplo, a eficiência do modelo unidimensional quando comparado a modelos mais complexos como os apresentados por Jarek et al. (2011).

Uma viga contínua, que foi estudada experimentalmente por Silva (1977), foi analisada no quarto exemplo com os modelos de seção decomposta e seção homogeneizada. Para o segundo caso, as relações de flexão e cisalhamento foram obtidas por modelos numéricos. Com relação ao modelo de seção decomposta, utilizou-se a lei proposta por Boone e Ingraffea (1987) para representar o concreto em tração. Como consequência, observou-se um comportamento para a relação de cisalhamento diferente do obtido quando se utilizou a lei proposta por Carreira e Chu (1986), diferenças estas que não foram significativas no resultado final. Outro aspecto observado neste exemplo é que, a hipótese adotada na formulação de que para seções aproximadamente simétricas pode-se considerar apenas os termos da diagonal da matriz constitutiva, adotando o momento estático (Equação 2.21) igual a zero, é válida pois os resultados numéricos obtidos são bastante semelhantes entre si. Ainda foi possível ilustrar a possibilidade de, em uma mesma estrutura, existir seções com configurações distintas de armadura.

Quanto ao exemplo em que foram modelados os pilares de Razvi e Saatciaglu (1989), foi possível exemplificar uma situação onde, através da lei para compressão obtida experimentalmente, modela-se um pórtico considerando o efeito do confinamento do concreto proporcionado pelos estribos. Além disso, foi possível validar a utilização de modelos mistos, que utilizam seção decomposta e seção homogeneizada na análise de um pórtico plano.

No último exemplo foi modelado um pórtico plano. Neste exemplo, verificou-se que os modelos baseados na decomposição da seção apresentaram um comportamento mais rígido, possivelmente provocado pela variação da posição da linha neutra, que no caso do `INSANE` não é atualizada, aspecto este que deve ser investigado em trabalhos futuros.

Com as simulações numéricas realizadas foi possível exemplificar as diversas possibilidades de aplicação do modelo implementado. A entrada de dados feita a partir de um conjunto de pontos discretos torna possível e viável vários tipos de análises sem a necessidade de implementar um novo modelo constitutivo. Conforme apresentado nos estudos de caso, pode-se utilizar relações obtidas por modelos numéricos, resultados experimentais e métodos analíticos.

Nos modelos em que são usadas relações obtidas numericamente tem-se a vantagem do ganho computacional e a mesma precisão de um modelo mais sofisticado. Para as relações obtidas com resultados experimentais tem-se a possibilidade de reproduzir numericamente experimentos de laboratório, com possibilidades de: (1) obtenção de informações de difícil medição na prática; (2) análise de modelos com condições de carregamento e restrições diversas e (3) estudo de diferentes modelos estruturais. Já para a modelagem com relações obtidas analiticamente pode-se realizar análises baseadas em normas técnicas.

Como sugestões para trabalhos futuros propõe-se: o desenvolvimento e implementação de modelos constitutivos baseados em relações tensões-deformações generalizada para outros elementos, como placas e cascas; uma implementação que

permita representar relações tensão-deformação pontuais por um conjunto de pontos discretos, assim como feito para o modelo de seção homogeneizada apresentado neste trabalho; e o aprimoramento do modelo baseado na decomposição da seção transversal com a atualização da posição da linha neutra a cada etapa de carregamento.

Com relação à modelagem de estruturas de concreto, propõe-se o estudo de modelos numéricos para a obtenção de relações generalizadas para a torção, que uma vez validado, permitirá a implementação de outros modelos específicos como grelha e pórtico espacial.

Outro aspecto a ser investigado em trabalhos futuros, com relação aos modelos de seção homogeneizada, é a verificação da simplificação adotada, que considera o momento estático igual a zero, em seções de concreto fortemente assimétricas.

Referências Bibliográficas

ACI318, 2002. 'Aci committee 318: building code requirementes for structural concrete (aci 318-02) and commentary (aci 318r-02)'. *AMERICAN CONCRETE INSTITUTE, Farmington Hills, Michigan*, p. 443.

Barboza, A. S. R., 1992. Contribuição à análise estrutural de sistemas lajes-vigas de concreto armado mediante analogia de grelhas. Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil.

Batoz, J. L. e Dhat, G., 1979. 'Incremental displacement algorithms for nonlinear problems'. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 14, pp. 1262–1267.

Boone, T. e Ingraffea, A. R., 1987. 'Simulation of the fracture process at rock interfaces'. *Proceedings of the fourth international conference in Numerical Methods in fracture Mechanics*, pp. 255–265.

Branson, D. E., 1968. 'Procedures for computing deflections'. *ACI Journal*, vol. 65(9), pp. 730–742.

Carreira, D. J. e Chu, K., 1985. 'Stress-strain relationship for plain concrete in compression'. *ACI Journal*, vol. 82, pp. 797–804.

Carreira, D. J. e Chu, K., 1986. 'Stress-strain relationship for reinforced concrete in tension'. *ACI Journal*, vol. 83, pp. 21–28.

Carvalho, R. C., 1994. Análise Não-Linear de Pavimentos de Edifícios de Concreto

através da Analogia de Grelha. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil.

Carvalho, R. C. e Figueiredo Filho, J. R., 2007. *Cálculo e Detalhamento de Estruturas Usuais de Concreto Armado*. 3 edn, UFSCar.

CEB, 1991. 'Ceb-fip model code 1990 - final draft'. *Bulletin D'Information*, pp. 203–205.

Farage, M. C. R., 1995. Influência da resistência do concreto na ductilidade de vigas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil.

Fonseca, F. T., 2008. Sistema computacional para análise dinâmica geometricamente não-linear através do método dos elementos finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.

Fonseca, M. T., 2006. Aplicação orientada a objetos para análise fisicamente não-linear com modelos reticulados de seções transversais compostas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.

Fuina, J. S., 2004. Métodos de controle de deformações para análise não-linear de estruturas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil.

Fuina, J. S., 2009. Formulações de Modelos Constitutivos de Microplanos para Contínuos Generalizados. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.

Galgoul, N. S., 1979. 'Dimensionamento de seção qualquer à flexão composta'. *Revista Estrutura*, vol. 86, pp. 99–112.

Ghali, A. e Favre, R., 1986. *Concrete structures: stresses and deformations*. Chapman e Hall.

Güner, S., 2011. Performance Assessment of Shear-Critical Reinforced Concrete Plane Frames. Tese de Doutorado, University of Toronto.

Hibbeler, 2004. *Resistência dos Materiais*. 5 edn, Pearson Prentice Hall.

Jarek, A., do R. Marconcin, L., de Souza, L. A. F., Machado, R. D. e de Lacerda, L. A., 2011. 'Numerical modeling combined with experimental analysis of simply supported reinforced concrete beam monitored with fiber optic sensors'. *XXXII Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, (1).

Khuntia, M. e Ghosh, S. K., 2004. 'Flexural stiffness of reinforced concrete columns and beams: analytical approach'. *ACI Structural Journal. Title n. 101-S36*, pp. 350–363.

Leonhardt, F., 1971. *Construções de concreto: verificação da capacidade de utilização*. Editora Interciência.

Álvares, M. d. S., 1993. Estudo de um modelo de dano para o concreto: Formulação, identificação paramétrica e aplicação com o emprego do método dos elementos finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo.

Mazars, J., 1984. Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non lineaire et à la rupture du béton de structure. Tese de Doutorado, Université Paris 6.

NBR6118, 2014. *Projeto e Estruturas de Concreto Armado*. Associação Brasileira de Normas Técnicas - ABNT.

Penna, S. S., 2011. Formulação Multipotencial para Modelos de Degradação Elástica: Unificação Teórica, Proposta de Novo Modelo, Implementação Computacional e Modelagem de Estruturas de Concreto. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.

Razvi, S. R. e Saatciaglu, M., 1989. 'Confinement of reinforced concrete columns with welded wire fabric'. *ACI Structural Journal*, vol. 89, pp. 615–623.

Read, J. B., 1965. *Testing to Destruction of Full-Size Portal Frames*. Cement and Concrete Association.

Romero, L. M., Miguel, P. F. e Cano, J. J., 2002. 'A parallel procedure for non-linear analysis of reinforced concrete three-dimensional frames'. *Computers and Structures*, vol. 80, pp. 1337–1350.

Seixas, M. P., 2003. Análise de pilares esbeltos de concreto armado confinados através do método dos elementos finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil.

Sfakianakis, M. G., 2001. 'Biaxial bending with axial force of reinforced, composite and repaired concrete sections of arbitrary shape by fiber model and computer graphics'. *Advances in Engineering Software*, vol. 33, pp. 227–242.

Silva, P. J. C. A. e., 1977. Redistribuição de momentos fletores em estruturas hiperestáticas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Vecchio, F. J. e Balopoulou, S., 1990. 'On the nonlinear behavior of reinforced concrete frames'. *Canadian Journal of Civil Engineering*, vol. 17, pp. 698–704.

Vecchio, F. J. e Emara, M. B., 1992. 'Shear deformations in reinforced concrete frames'. *ACI Structural Journal*, vol. 89, pp. 46–56.

Wilby, C. B. e Bandit, T., 1967. 'In-elastic behaviour of rc single-bay portal frames'. *Civil Engineering and Public Works Review*, vol. 62, pp. 331–336.

Yang, Y. B. e Shieh, M. S., 1990. 'Solution method for nonlinear problems with multiple critical points'. *AIAA Journal*, vol. 28, pp. 2110–2116.