

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

**ESTRATÉGIA DE ENRIQUECIMENTO PARA
MÉTODOS BASEADOS NA PARTIÇÃO DA
UNIDADE**

Hudson Cleiton Reis Pereira

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia de Estruturas.

Orientador: Prof. Felício Bruzzi Barros

Coorientador: Prof. Roque Luiz da Silva Pitangueira

Belo Horizonte
Dezembro de 2015

P436e Pereira, Hudson Cleiton Reis.
Estratégia de enriquecimento para métodos baseados na partição da unidade
[manuscrito] / Hudson Cleiton Reis Pereira. - 2015.
xi, 90 f., enc.: il.

Orientador: Felício Bruzzi Barros.
Coorientador: Roque Luiz da Silva Pitangueira.

Dissertação (mestrado) Universidade Federal de Minas Gerais,
Escola de Engenharia.

Bibliografia: f. 85-90.

1. Engenharia de estruturas - Teses. 2. Computação em nuvem - Teses.
3. Lagrange, Funções de - Teses. 4. Método dos elementos finitos - Teses.
5. Galerkin, Métodos de - Teses. I. Barros, Felício Bruzzi. II. Pitangueira, Roque
Luiz da Silva. III. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia.
IV. Título.

CDU: 624(043)

Agradecimentos

Sem sombra de dúvidas, o andamento deste trabalho não foi fruto de um número reduzido de pessoas. Ele contou com a contribuição de várias, seja de forma direta ou indireta. O difícil é falar aqui de todas estas pessoas, mas vou tentar ser breve e resumir e peço desculpas caso omita alguém.

À Sarah, por ter sido importante não só nesta jornada, mas pelo companheirismo, amor e simplicidade ao longo de todos estes anos.

À minha mãe por todo apoio e compreensão e a meu pai pela amizade.

Ao professor Felício Barros que foi mais do que um orientador. Agradeço a ele por toda a dedicação, empenho e competência com que dirigiu este trabalho. Também ao professor Roque Pitangueira, que independentemente da coorientação foi importante não só pelo incansável apoio mas também por ter me apresentado aos métodos numéricos.

Aos professores Ramon Silva e Samuel Penna pelo suporte ao longo de todo o mestrado.

Ao Breno Faria pela assistência em relação aos métodos numéricos, principalmente em relação ao EFG.

Aos professores e funcionários do departamento de Engenharia de Estruturas, principalmente aqueles com quem tive o prazer e a oportunidade de conviver, os professores Fernando Amorim, Gilson Queiroz, Gabriel Ribeiro, e as funcionárias Inês e Fátima.

À professora Rita de Cássia Alvarenga da UFV, por ter sido minha inspiração em relação à engenharia de estruturas.

Aos professores Paulo Sérgio Barbosa e José Luiz Rangel da UFV pela amizade e motivação.

Aos demais professores do Departamento de Engenharia Civil da UFV por todo o apoio ao longo de minha graduação.

Ao pessoal da Exata Engenharia, com quem pude aprender muito e pelo breve, mas prazeroso momento que convivemos e trabalhamos juntos, o Dourado, a Kelly, o Josef, o Hernane, a Cátia, o Adimael e a Sônia.

Ao pessoal da SEMAD, Gisele, Suhêrda, Marcelo e Newton pelos anos de luta

e companherismo e ao Claret pela amizade e por todo o suporte que me concedeu durante meu período de mestrado.

Aos colegas e amigos do IFMG Santa Luzia, por todo apoio e companherismo.

Aos amigos com que sempre contei, André, Washignton, Cleidson, Marcos, Antônio, Thiago, por terem sido importantes em algum momento da minha vida.

Ao pessoal do projeto INSANE.

Resumo

Pereira, H. C. R., 2015. Estratégia de Enriquecimento para Métodos Baseados na Partição da Unidade. Dissertação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.

O método *hp*-Cloud é um método sem malha cuja principal característica é a possibilidade de enriquecimento das funções de forma, visando a construção da aproximação do problema que se quer representar. De forma similar ao Método dos Elementos Finitos Generalizados, o método *hp*-Cloud enriquece a Partição da Unidade, obtida pelo método dos mínimos quadrados móveis, que é a base para a construção das funções de forma do método *Element-Free Galerkin*. O interesse pelos métodos sem malha deve-se à característica principal de independência de malha, tornando-os mais eficientes e mais precisos em certas situações particulares. Partindo deste conceito, este trabalho mostra um estudo voltado à estratégia de enriquecimento, utilizando Programação Orientada a Objetos, válida para qualquer método de Partição da Unidade. Usando a plataforma INSANE, e nela a já existente implementação do método *Element-Free Galerkin*, são apresentados neste trabalho os principais conceitos relativos à estratégia em estudo, assim como as alterações e inclusões de novos códigos de programação no INSANE, voltados para a análise linear de estruturas.

O trabalho apresenta os resultados numéricos para algumas aplicações, avaliando a convergência e comparando os resultados com outros métodos mais conhecidos como o Método dos Elementos Finitos Generalizados e o próprio *Element-Free Galerkin*. O estudo também verifica a influência de parâmetros como tamanho do

domínio de suporte, grau dos polinômios das funções de base, enriquecimento intrínseco e extrínseco e fator de penalidade.

Palavras-Chave: *hp*-Cloud, métodos sem malha, Multiplicadores de Lagrange, Penalidade.

Abstract

Pereira, H. C. R., 2015. Enrichment Strategy for Partition of Unity based methods, Federal University of Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brazil.

The *hp*-Cloud is a meshless method that present as its main feature the ability to enrich the shape functions of the approximated problem. Working similarly to the Generalized Finite Element Method, the *hp*-Cloud operates through of enrichment of the Partition of Unity, obtained by the Least Square Method, which is the basis of the *Element-Free Galerkin Method*. Appeal of the meshless methods is the mesh independence behavior, making them more efficient and more accurate in some special situations. Based on this concept, this work tackle aspects of the implementation of the enrichment strategy , using Object Oriented Programming, and valid for any Partition of Unity Method. Using INSANE platform and the existing implementation of the *Element-Free Galerkin*, it presented the main concepts relating to the *hp*-Cloud Method, as well as changes and extensions of INSANE, focusing in linear structural analysis.

The work presents the numerical results for two-dimension Elasticity problems, evaluating their convergence and comparing them with other methods such as the Generalized Finite Element Method and *Element-Free Galerkin*. The study also checks the behavior of the method related to parameters like influence domain size, degree of the polynomials basis, refinement h , p and the strategy of applying the boundary conditions.

Keywords: *hp*-Cloud, meshless methods, Lagrange Multipliers, Penalty.

Lista de Figuras

1.1	Discretização de um domínio bidimensional usando MEF e métodos sem malha	3
2.1	Representação de um corpo sólido	9
2.2	Representação do domínio de suporte no \mathbb{R}^2	12
2.3	Triângulo de Pascal para domínios bidimensionais	13
2.4	Tetraédro de Pascal para domínios tridimensionais	14
2.5	Função aproximadora $\tilde{u}(\mathbf{x})$ e parâmetros de deslocamento \hat{u}_j na aproximação usando MQM.	15
2.6	Funções de ponderação do tipo <i>Spline</i> cúbica, <i>Spline</i> quártica e exponencial com constante $\beta = 0,3$	19
2.7	Derivada primeira das funções de ponderação do tipo <i>Spline</i> cúbica, <i>Spline</i> quártica e exponencial com constante $\beta = 0,3$	20
3.1	Representação das alterações no INSANE	39
3.2	Representação do núcleo numérico do INSANE	40
3.3	Diagrama de classes para <i>Persistence</i>	42
3.4	Classes que implementam a interface <i>Assembler</i> a partir da classe <i>FemAssembler</i>	43
3.5	<i>Solution</i>	45
3.6	<i>Model</i>	46
3.7	Classe <i>ProblemDriver</i>	47
3.8	Classe <i>AnalysisModel</i>	48
3.9	Classe <i>MfreeShape</i>	49
3.10	Classes derivadas de <i>ParametricElement</i> para os métodos sem malha	50
4.1	Viga submetida à forças nas extremidades	52
4.2	Discretização I	54

4.3	Discretização II	54
4.4	Discretização III	54
4.5	Discretização IV	55
4.6	Gráfico da norma do erro da energia de deformação pelo número de graus de liberdade, para $p = 1$ e domínio de suporte igual a R_{max} . . .	57
4.7	Gráfico da norma do erro da energia de deformação pelo número de nós, para $p = 1$ e domínio de suporte igual a R_{max}	58
4.8	Gráfico da norma do erro da energia de deformação pelo número de graus de liberdade, para $p = 1$ e domínio de suporte igual a $2R_{max}$. . .	59
4.9	Gráfico da norma do erro da energia de deformação pelo número de graus de liberdade, para o enriquecimento $p = 1$, $p = 2$ e domínio de suporte $R = R_{max} = 25,00$	63
4.10	Gráfico da norma do erro da energia de deformação pelo valor do expoente do parâmetro de penalidade.	67
4.11	Chapa com orifício em estado plano de deformação	67
4.12	Discretização da chapa para o refinamento h	68
4.13	Gráfico de convergência para o refinamento h	69
4.14	Gráfico de convergência para o enriquecimento extrínseco	72
4.15	Chapa com trinca submetida a esforços de tração	73
4.16	Discretização do modelo da chapa com trinca analisado neste estudo.	74
4.17	Discretização do modelo da chapa com trinca usando acoplamento com o MEF.	76
4.18	Campo de deslocamento vertical do modelo da chapa com trinca usando acoplamento com o MEF.	78

Lista de Tabelas

4.1	Erro da energia de deformação para o refinamento h para o método dos multiplicadores de Lagrange, considerando aproximação linear ($p = 1$) e domínio de suporte igual à maior distância entre nós adjacentes ($R = R_{max}$)	56
4.2	Erro da energia de deformação para o refinamento h para o método da penalidade, considerando aproximação linear ($p = 1$) e domínio de suporte igual à maior distância entre nós adjacentes ($R = R_{max}$) . . .	56
4.3	Erro da energia de deformação para o refinamento h para o método dos multiplicadores de Lagrange, considerando aproximação linear ($p = 1$) e domínio de suporte igual $2R_{max}$	58
4.4	Erro da energia de deformação para o refinamento h para o método da penalidade, considerando aproximação linear ($p = 1$) e domínio de suporte igual $2R_{max}$	59
4.5	Erro da energia de deformação para o enriquecimento extrínseco, considerando a discretização II (15 nós) e domínio de suporte $R = R_{max} = 25,00$	60
4.6	Erro da energia de deformação para o enriquecimento extrínseco, usando o MEFM com 8 elementos Lagrangeanos de aproximação linear	61
4.7	Deslocamento horizontal (u) e deslocamento vertical (v) na posição $x = 100$ e $y = 0$ para o enriquecimento extrínseco, considerando a discretização II e domínio de suporte $R = R_{max} = 25,00$	61
4.8	Energia de deformação para avaliação com enriquecimento k e p , para domínio de suporte $R = 2R_{max} = 50,00$ e discretização II	64
4.9	Energia de deformação para avaliação do domínio de suporte para a discretização IV, enriquecimento $p = 1$ e funções de Shepard	65

4.10	Energia de deformação para avaliação do parâmetro de penalidade para a discretização II, enriquecimento $p = 1$ e funções de Shepard . .	66
4.11	Energia de deformação e norma do erro para o problema da chapa com orifício em refinamento h usando multiplicadores de Lagrange . .	69
4.12	Energia de deformação e norma do erro para o problema da chapa com orifício em enriquecimento extrínseco com hp -Cloud usando multiplicadores de Lagrange	71
4.13	Energia de deformação para avaliação de problema com singularidade, comparando enriquecimento polinomial e de trinca, usando elemento finito de aproximação linear para o MEEG e funções de base linear para o hp -Cloud	75
4.14	Norma do erro da energia de deformação para avaliação de problema com singularidade, comparando enriquecimento polinomial e de trinca, usando elemento finito de aproximação linear para o MEEG e funções de base linear para o hp -Cloud	75
4.15	Norma do erro da energia de deformação para avaliação de problema com singularidade comparando o hp -Cloud acoplado ao MEF e o MEEG	77

Lista de Abreviaturas e Siglas

MM	Método sem Malha
MEF	Método dos Elementos Finitos
MEFG	Método dos Elementos Finitos Generalizados
MMQM	Método dos Mínimos Quadrados Móveis
EFG	<i>Element Free Galerkin</i>
UFMG	Universidade Federal de Minas Gerais
SPH	<i>Smoothed Particle Hydrodynamics</i>
DEM	<i>Diffuse Element Method</i>
RKPM	<i>Reproducing Kernel Particle Method</i>
MLPG	<i>Meshless Local Petrov-Galerkin</i>
PIM	<i>Point Interpolation Method</i>
PU	Partição da Unidade
PVC	Problema de Valor de Contorno

Sumário

Agradecimentos	i
Resumo	iii
Abstract	v
Lista de Figuras	vii
Lista de Tabelas	viii
Lista de Abreviaturas e Siglas	ix
Sumário	1
1 Introdução	2
1.1 Visão geral sobre os métodos sem malha	4
1.2 Objetivos	6
1.2.1 Objetivo geral	6
1.2.2 Objetivos específicos	7
1.3 Organização do texto	7
2 Fundamentos	8
2.1 Componentes de tensões e deformações	8
2.2 Relações constitutivas	10
2.3 Forma fraca em mecânica dos sólidos	11
2.4 Aproximação pelo método <i>hp</i> -Cloud	11
2.4.1 O Método dos Mínimos Quadrados Móveis	12
2.4.2 Funções de Shepard	21
2.4.3 Propriedades das funções de forma	22
2.5 Família de funções do método <i>hp</i> -Cloud	23
2.6 Imposição de condições de contorno	26
2.6.1 O método dos multiplicadores de Lagrange	27
2.6.2 O método da penalidade	31
2.6.3 Acoplamento com o MEF	33
2.7 Integração numérica	35

2.7.1	Quadratura de Gauss-Legendre	36
3	Implementação do <i>hp</i>-Cloud no sistema INSANE	38
3.0.2	Visão geral do INSANE	39
3.0.3	Implementação do <i>hp</i> -Cloud	41
4	Análise Numérica	51
4.1	Viga em balanço sob flexão simples	51
4.1.1	Estudo de convergência usando refinamento h	53
4.1.2	Estudo de convergência usando enriquecimento extrínseco	59
4.1.3	Influência do tamanho do domínio de suporte	64
4.1.4	Influência do valor do parâmetro de penalidade	65
4.2	Chapa com orifício em estado plano de deformação	66
4.2.1	Refinamento h	67
4.2.2	Enriquecimento extrínseco	70
4.3	Chapa com Trinca em Modo I de Abertura	72
4.3.1	Enriquecimento com singularidade	72
4.3.2	Acoplamento com o MEF	75
5	Conclusão	79
	Referências Bibliográficas	83

Capítulo 1

Introdução

Os métodos sem malha experimentaram um substancial desenvolvimento a partir do início da década de 1990, embora metodologias com estas características já fossem estudadas desde a década de 1930 (Liu e Gu (2005)).

O interesse no desenvolvimento dos métodos sem malha foi essencialmente motivado pela limitação do Método dos Elementos Finitos (MEF) na análise de certos tipos de problemas, dentre os quais podem ser citados aqueles que exigem contínua reformulação da malha como no caso de crescimento de trinca com caminho arbitrário.

A principal característica dos métodos sem malha é que o domínio é discretamente representado por um conjunto de nós em seu interior e sobre o seu contorno, como apresentado na Fig. (1.1), onde se compara a discretização usando MEF e usando métodos sem malha para um domínio bidimensional. A continuidade do domínio é garantida por um suporte local, comumente chamado de domínio de suporte. Cada um dos domínios de suporte está vinculado a um nó e está associado a uma função de peso, também chamada de função de ponderação. Esta função de ponderação possui características de suporte compacto, ou seja, possui valores não nulos dentro do domínio de suporte e valores nulos fora dele. Cada domínio de suporte deve conter uma quantidade de nós com uma determinada distribuição, que seja capaz de contribuir para se construir a aproximação local do problema.

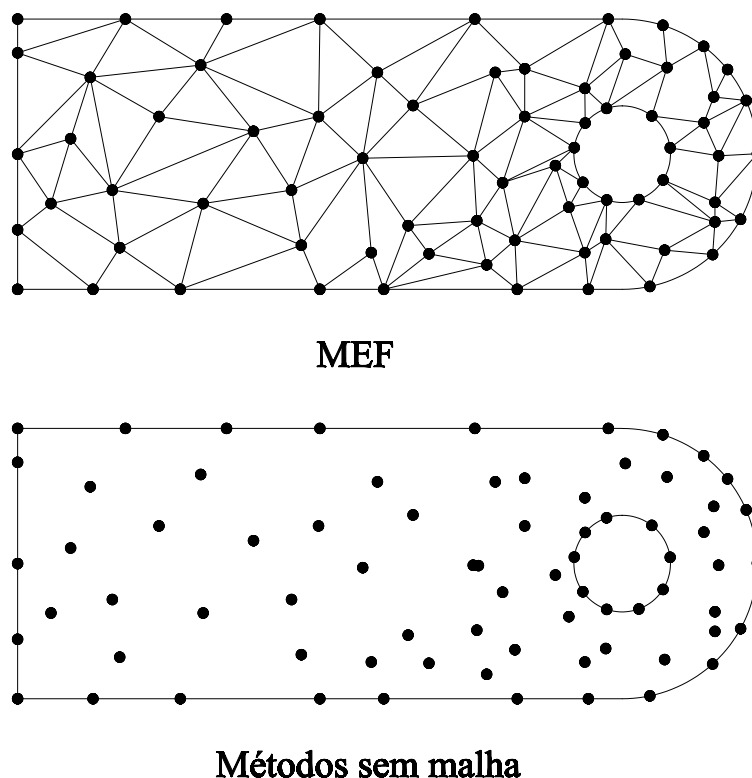


Figura 1.1: Discretização de um domínio bidimensional usando MEF e métodos sem malha

Este trabalho tem como enfoque o método *hp* Cloud (Duarte e Oden (1995), Duarte e Oden (1996)), um método sem malha baseado na formulação variacional fraca de Galerkin, onde as funções de forma são construídas a partir do Método dos Mínimos Quadrados Móveis (MMQM). Uma das características deste método é a capacidade de representar uma aproximação através do enriquecimento das funções de forma, usando determinados tipos de funções que sejam adequadas ao problema.

Para implementação computacional do método *hp*-Cloud contou-se com o auxílio da plataforma INSANE (*Interactive Structural Analysis Environment*), um ambiente computacional construído em linguagem JAVA sob o paradigma de programação orientada a objetos, inicialmente concebido para se trabalhar com pesquisas relacionadas ao MEF. A utilização do INSANE trouxe diversas vantagens, tendo em

vista que exclui a necessidade da implementação de algoritmos para a solução de sistemas de equações ou integração numérica, por exemplo. Isto porque a programação orientada a objetos permite o reaproveitamento de classes preexistentes. Outra vantagem é o fato de os métodos sem malha já terem sido introduzidos no sistema INSANE com os trabalhos de Silva (2012) e Faria (2014). Os autores trabalharam com o método sem malha Element-Free Galerkin (EFG) (Belytschko et al. (1994)), que também adota o MMQM para a construção das funções de forma. De fato, o método *hp*-Cloud parte do aprimoramento das funções de forma do EFG, através de funções enriquecimento, que podem ser polinomiais ou não.

Apesar dos métodos sem malha apresentarem vantagens importantes em relação ao MEF, várias questões ainda precisam ser resolvidas para que eles se tornem eficientemente competitivos em relação a outros tipos de métodos numéricos. As principais desvantagens dos métodos sem malha estão relacionadas à eficiência computacional, à integração numérica e, para os métodos que não possuem a propriedade do delta de Kronecker, à imposição das condições de contorno essenciais.

1.1 Visão geral sobre os métodos sem malha

Os métodos sem malha surgiram como uma alternativa para a solução de problemas de valor de contorno (PVC). Dentre alguns métodos sem malha bem conhecidos pode-se destacar o SPH (*Smoothed Particle Hydrodynamics*), desenvolvido a partir dos trabalhos de Lucy (1977) e de Gingold e Monaghan (1977). O SPH surgiu inicialmente com o objetivo de se modelar fenômenos astrofísicos. A metodologia foi então delineada para a análise de problemas como condução de calor, dinâmica de fluidos e fenômenos relacionados a sólidos elásticos e análise de fraturas. O Método das Partículas Reprodutoras de Núcleo, ou RKPM (*Reproducing Kernel Particle Method*) (Liu et al. (1995)) foi apresentado como uma melhoria para o SPH, onde os autores propuseram uma função de correção para as funções de núcleo deste último.

Nayroles et al. (1992) introduziram uma nova categoria de método sem malha, a qual ficou conhecida como DEM (*Diffuse Element Method*), ou Método dos Elementos Difusos. Estes autores substituíram a interpolação Lagrangeana do MEF por uma função de mínimos quadrados ponderados e, assim como no MEF, a aproximação era construída como uma combinação linear de funções de base. Uma característica importante é que, neste método, não era necessariamente observada a propriedade de interpolação das funções de forma, como ocorria no MEF, apesar de ter sido assumida pelos autores.

A evolução do Método dos Elementos Difusos veio com Belytschko et al. (1994), com um método que ficou conhecido como *Element-Free Galerkin* (EFG), onde os autores verificaram considerável melhoria de precisão no método com o uso de multiplicadores de Lagrange para assegurar as condições de contorno essenciais, com a adoção de espaços de quadratura de alta ordem, usando uma célula de base, com o objetivo de dar suporte à integração numérica e com a inclusão de certos termos nas derivadas das funções de aproximação originalmente omitidos. Em seu trabalho, Belytschko et al. (1994) identificaram que as funções de forma usadas por Nayroles et al. (1992) no DEM, eram as funções de Mínimos Quadrados Móveis idealizadas por Lancaster e Salkauskas (1981), Gordon e Wixom (1978) e McLain (1974).

Alguns aspectos do EFG, como o fato de se constituírem uma Partição da Unidade (PU), foram explorados por Duarte e Oden (1995) para a construção de espaços de aproximação, através do enriquecimento das funções de forma. Este novo método, chamado *hp*-Cloud, explorava a característica de reprodutibilidade garantida pela PU. Uma particularidade deste método é que não era imperativo que o enriquecimento fosse constituído de funções polinomiais, de tal forma que poderiam ser utilizados quaisquer outros tipos de funções. Outro atributo é a possibilidade de uso das funções de Shepard (Shepard (1968)) na composição das funções de forma,

além do fato de que cada nó poderia ser enriquecido individualmente. A possibilidade do enriquecimento da PU tornou-se um prolífero campo de estudos. Dentre os trabalhos relacionados, podem ser citados o Método dos Elementos Finitos de Partição da Unidade (Melenk e Babuška (1996), Babuška e Melenk (1997)), o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG)(Oden et al. (1998), Strouboulis et al. (2000)), e o Método dos Elementos de Contorno Generalizados de Galerkin (Nicolazzi et al. (2005)).

Outro método sem malha popular é o *Meshless Local Petrov-Galerkin* (MLPG) (Atulri e Zhu (1998)), onde também são utilizadas as funções do MMQM na obtenção das funções de forma. Este método não necessita de uma malha global para a construção das funções de aproximação, tal como para a integração. Devido a isso, os autores o denominam de método sem malha verdadeiro. Apesar disso, a falta de simetria no sistema de equações aumenta de forma considerável o custo computacional do método.

O *Point Interpolation Method* (PIM) , desenvolvido a partir dos trabalhos de Liu e Gu (2001), é um método sem malha que utiliza interpolações na construção das funções de forma. Desta maneira, este método possui a propriedade do delta de Kronecker, diferentemente dos métodos que utilizam o MMQM.

Outros métodos sem malha podem ser encontrados na literatura, alguns nascem como a combinação de conceitos já existentes em outros métodos, outros surgem com novas características. Para uma visão um pouco mais aprofundada sobre alguns dos principais métodos sem malha, recomenda-se os trabalhos de Liu (2010) e de Chen et al. (2006).

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo geral

Embora o MEF seja, atualmente, a ferramenta numérica mais empregada na solução de problemas de mecânica dos sólidos, outras técnicas, como a dos Métodos sem Malha podem se mostrar mais vantajosas em vários tipos de problemas. Assim, seguindo esta linha de pensamento, esta dissertação teve o objetivo de estudar o método sem malha *hp*-Cloud e incluí-lo no ambiente computacional INSANE (*IN*teractive *S*tructural *A*nalysis *E*nvironment).

1.2.2 Objetivos específicos

Os objetivos específicos deste trabalho foram:

1. Efetuar a implementação computacional do método *hp*-Cloud no sistema INSANE;
2. Demonstrar as vantagens do enriquecimento da Partição da Unidade;
3. Realizar testes numéricos e compará-los com os resultados de outros métodos, com o EFG e o MEFG;
4. Realizar estudo envolvendo o emprego de algumas técnicas de imposição de condições de contorno essenciais.

1.3 Organização do texto

O texto desta dissertação possui cinco capítulos, além desta introdução, e está organizado da forma descrita na sequência.

O Capítulo 2 apresenta os conceitos básicos do *hp*-Cloud, partindo da equação da forma fraca até a montagem do sistema matricial. O capítulo 3 descreve a implementação computacional no sistema INSANE, representado através do uso de

diagramas UML's. O capítulo 4 apresenta as simulações numéricas que validam a implementação computacional. O capítulo 5 relata as conclusões e as considerações finais deste trabalho.

Capítulo 2

Fundamentos

Neste capítulo, as equações básicas da mecânica do contínuo serão resumidamente apresentadas, com o objetivo de servir de referência para os capítulos posteriores. A formulação variacional fraca, da qual o método sem malha apresentado neste trabalho deriva, é mostrada na sequência. Um tratamento mais completo sobre mecânica do contínuo pode ser encontrado nos trabalhos de Timoshenko e Goodier (1951), Borelli et al. (2011) e Saad (2005).

2.1 Componentes de tensões e deformações

Para um sólido elástico tridimensional submetido à forças externas (Fig. 2.1), as tensões às quais o mesmo fica submetido pode ser representado pelo tensor de tensões de Cauchy,

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

O tensor de tensões de Cauchy pode ser representado da seguinte forma,

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \left\{ \sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{xz} \quad \sigma_{xy} \right\} \quad (2.2)$$

O vetor da Eq. (2.2) possui apenas seis das nove componentes da Eq. (2.1), tendo em vista que $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$, $\sigma_{zy} = \sigma_{yz}$ e $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$.

De forma análoga, o tensor de deformações \mathbf{E} também pode ser reduzido a um

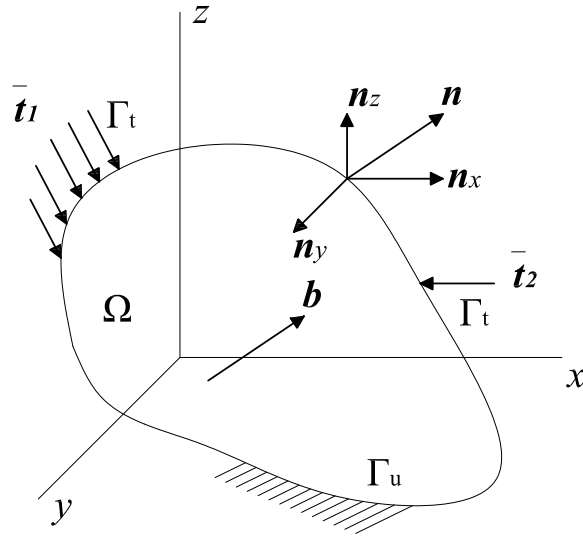


Figura 2.1: Representação de um corpo sólido

vetor,

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \left\{ \varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{xy} \right\} \quad (2.3)$$

A relação entre a deformação e o deslocamento pode ser dada por

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u} \quad (2.4)$$

onde,

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

sendo u , v e w o deslocamento nas direções x , y e z , respectivamente e \mathbf{L} , o operador diferencial, dado por

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

2.2 Relações constitutivas

A relação entre as tensões e as deformações de um corpo sólido é dada pelas equações constitutivas, também conhecidas como lei de Hooke generalizada. Assim, esta relação pode ser representada matricialmente como

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.7)$$

Considerando um material elástico e isotrópico, a matriz constitutiva \mathbf{D} possui a seguinte forma,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ D_{12} & D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ D_{12} & D_{12} & D_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{D_{11}-D_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{D_{11}-D_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{D_{11}-D_{12}}{2} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

onde,

$$D_{11} = \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad (2.9)$$

e,

$$D_{12} = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad (2.10)$$

Nas Eq. (2.9) e (2.10), E é o módulo de elasticidade e ν o coeficiente de poisson do material.

Para problemas bidimensionais, a matriz mostrada na Eq. (2.8) pode ser reduzida. Assim, para estado plano de tensões, ela possui a forma

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

E, para estado plano de deformações, a forma

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

2.3 Forma fraca em mecânica dos sólidos

Considere o corpo mostrado na Fig. 2.1 com um domínio Ω e um contorno Γ . O corpo está submetido à forças externas $\bar{\mathbf{t}}$ aplicadas sobre o contorno natural, ou de Neumann, Γ_t . O deslocamento do corpo fica restrito pelas condições de contorno essenciais, ou de Dirichlet, Γ_u . O funcional de energia para este problema, supondo condições de contorno essenciais homogênea, é dado por

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (2.13)$$

Na Eq. (2.13), \mathbf{b} representa as forças de corpo, \mathbf{u} representa o campo de deslocamento e $\dot{\mathbf{u}}$ sua derivada primeira em relação ao tempo. Ainda, ρ representa a massa específica do corpo.

Este funcional deve ser minimizado, assim, invocando a condição de estacionariedade, tem-se:

$$\delta \Pi = \delta \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \right] = 0 \quad (2.14)$$

onde δ é o operador que representa variação.

A solução da Eq. (2.14), ou seja, para o princípio da mínima energia potencial total com $\delta \Pi = 0$ no caso estático, resulta:

$$- \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma = 0 \quad (2.15)$$

A Eq. (2.15) é conhecida como forma fraca de Galerkin.

2.4 Aproximação pelo método *hp*-Cloud

O método *hp*-Cloud utiliza as funções de Mínimos Quadrados Móveis para a obtenção da aproximação, em contraste com as funções lagrangeanas utilizadas no MEF. A discretização do método é feita inteiramente através da distribuição de nós no domínio do problema e sobre seu contorno, logo, não há a necessidade da

construção de uma malha para a discretização do domínio. Como será demonstrado posteriormente, caso o método de integração numérica seja através da quadratura de Gauss, existe a necessidade de criação de célula de base com o objetivo de dar suporte à integração. Como não ocorrem conectividades fixas entre os nós, conforme Duarte (1995), o método ainda pode ser considerado sem malha. Um domínio local, chamado de domínio de suporte, irá garantir a continuidade do problema através de sobreposições mútuas. Em geral, este domínio de suporte pode ser radial ou tensorial e deve englobar vários nós ¹, conforme ilustrado pela Fig.2.2 para o caso bidimensional.

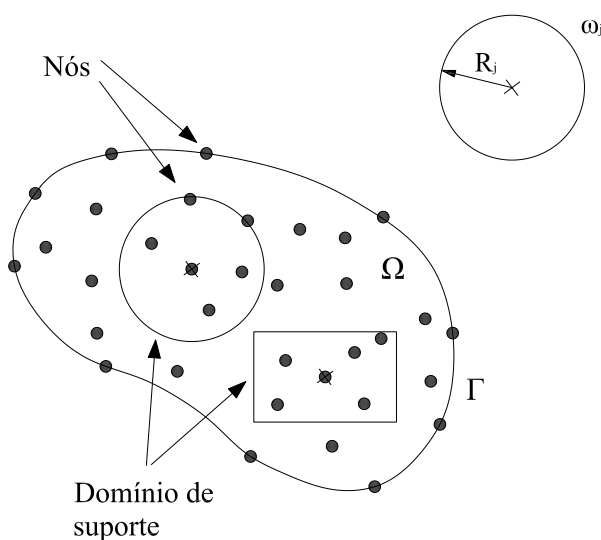


Figura 2.2: Representação do domínio de suporte no \mathbb{R}^2

2.4.1 O Método dos Mínimos Quadrados Móveis

Para o Método dos Mínimos Quadrados Móveis, suponha uma função escalar contínua $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^d$, para $d = 1, 2, 3$. Para esta construção, deseja-se aproximar uma função na qual há um conjunto de valores $Q_N = \{u\}_i^N$ em N pontos nodais, de tal forma que x_i pertença ao domínio fechado $\bar{\Omega}$, ou seja, considerando

¹No caso de enriquecimento intrínseco, a cobertura do domínio de suporte depende do grau do polinômio que se deseja representar usando o MMQM, conforme exposto na Seção 2.4.1

todos os pontos em seu interior e sobre seu contorno. A aproximação local $\tilde{u}(x)$ é construída em cada coordenada x do domínio, com o emprego de um subconjunto de $n(x) \leq N$ pontos vizinhos $Q_{n(x)} \subset Q_N$. Esta aproximação pode então ser expressa na forma de uma combinação linear de funções de base, geralmente polinomiais $\mathbf{P} = \{p_{i=1}^m(x)\}$, ($m \leq n(x)$), sendo m o número de monômios das funções de base, conforme a Eq. (2.16).

$$u(\mathbf{x}) \approx \tilde{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m p_i(\mathbf{x}) a_i(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad (2.16)$$

As funções de base \mathbf{P} , com m funções linearmente independentes, geralmente são constituídas de um conjunto de monômios \mathbf{P}_k , construídos sobre o triângulo de Pascal para o caso bidimensional (Fig. 2.3) ou tetraédro de Pascal para o caso tridimensional (Fig. 2.4).

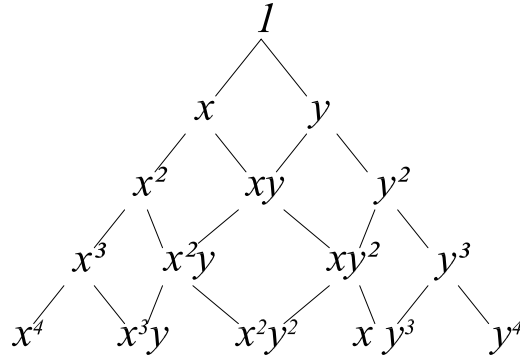


Figura 2.3: Triângulo de Pascal para domínios bidimensionais

Na Eq. (2.16), $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ é o vetor de coeficientes dado por

$$\mathbf{a}^T(\mathbf{x}) = [a_1(\mathbf{x}) \ a_2(\mathbf{x}) \ \dots \ a_m(\mathbf{x})] \quad (2.17)$$

sendo que o vetor de coeficientes $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ é dado em função de \mathbf{x} .

De maneira geral, as funções de base possuem as seguintes propriedades (Lancaster e Salkauskas (1981)):

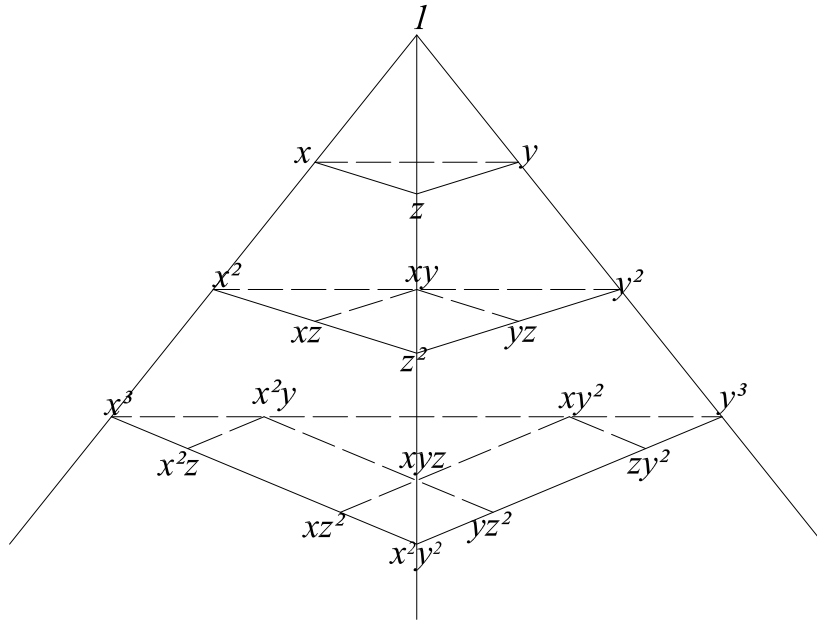


Figura 2.4: Tetraédro de Pascal para domínios tridimensionais

1. $p_1(\mathbf{x}) \equiv 1$
2. $p_i(\mathbf{x}) \in C^b(\Omega)$, $i = 1, \dots, m$ (onde, para qualquer inteiro não negativo b , o espaço $C^b(\Omega)$ é definido como o conjunto de todas as funções, as quais, junto com suas derivadas de ordem até b , são contínuas sobre o domínio, Ω).
3. $\{p_i(\mathbf{x})\}_{i=1}^m$ são linearmente independentes sobre algum grupo m (pontos nodais pertencentes ao domínio de suporte) de N pontos dados em um domínio fechado $\bar{\Omega}$.

Assim, a título de ilustração, utilizando funções de base polinomial, tem-se, para o caso unidimensional,

$$\mathbf{P}_k^T = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix}, \text{ base linear} \quad (2.18)$$

$$\mathbf{P}_k^T = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \end{bmatrix}, \text{ base quadrática} \quad (2.19)$$

para o caso bidimensional,

$$\mathbf{P}_k^T = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy \end{bmatrix}, \text{ base bilinear} \quad (2.20)$$

$$\mathbf{P}_k^T = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & x^2 & y^2 \end{bmatrix}, \text{ base biquadrática} \quad (2.21)$$

e para o caso tridimensional,

$$\mathbf{P}_k^T = \begin{bmatrix} 1 & x & y & z & xy & xz & yz \end{bmatrix}, \text{ base trilinear} \quad (2.22)$$

$$\mathbf{P}_k^T = \begin{bmatrix} 1 & x & y & z & xy & xz & yz & x^2 & y^2 & z^2 \end{bmatrix}, \text{ base triquadrática} \quad (2.23)$$

O vetor de coeficientes $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ da Eq. (2.16) é determinado através da minimização do funcional

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n(\mathbf{x})} W_j(\mathbf{x}) \{ \mathbf{P}^T(\mathbf{x}_j) \mathbf{a}(\mathbf{x}) - \hat{u}_j \}^2 \quad (2.24)$$

onde $n(\mathbf{x})$ é o número de nós no domínio de suporte de \mathbf{x} para o qual a função de ponderação $W_j(\mathbf{x}) = W(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}) \neq 0$, e \hat{u}_j é o parâmetro de deslocamento nodal em $\mathbf{x} = \mathbf{x}_j$, obtidos com a solução do sistema de equações, conforme será mostrado posteriormente. Em geral, a função aproximadora $\tilde{u}(\mathbf{x})$ (Eq. 2.16) não passa pelos pontos nodais e os parâmetros de deslocamento \hat{u}_j não pertencem à curva definida pela função aproximadora, conforme ilustrado na Fig 2.5 para o caso unidimensional.

Fazendo

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{a}} = 0 \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} [\mathbf{P}\mathbf{a} - \hat{\mathbf{u}}]^T \mathbf{W} [\mathbf{P}\mathbf{a} - \hat{\mathbf{u}}] = 0 \quad (2.26)$$

Resolvendo a Eq. (2.26), encontra-se

$$\mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{P} \mathbf{a} = \mathbf{P}^T \mathbf{W} \hat{\mathbf{u}} \quad (2.27)$$

As matrizes podem então ser agrupadas da seguinte maneira:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{P} = \sum_{i=1}^{n(\mathbf{x})} W_i(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_i) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) \quad (2.28)$$

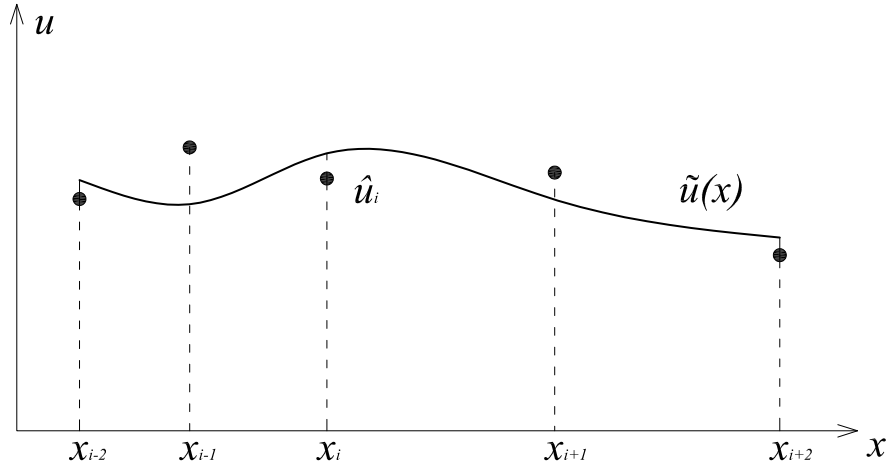


Figura 2.5: Função aproximadora $\tilde{u}(\mathbf{x})$ e parâmetros de deslocamento \hat{u}_j na aproximação usando MQM.

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T \mathbf{W} = \sum_{i=1}^{n(\mathbf{x})} W_i(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_i) \quad (2.29)$$

A Eq. (2.27) torna-se

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{u}} \quad (2.30)$$

então

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{u}} \quad (2.31)$$

Uma vez isolado o vetor $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ (Eq. 2.31), este pode ser substituído na Eq. (2.16).

Assim encontra-se:

$$u(\mathbf{x}) \approx \tilde{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{\Phi}^T(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{u}} = \sum_{j=1}^n \phi_j(\mathbf{x}) \hat{u}_j \quad (2.32)$$

onde

$$\mathbf{\Phi}^T(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \quad (2.33)$$

ou em notação indicial

$$\phi_j(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m p_i(\mathbf{x}) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x})]_{ij} \quad (2.34)$$

$\phi_j(\mathbf{x})$ é a função de forma obtida a partir da aproximação pelo Método dos Mínimos Quadrados Móveis, associada ao ponto nodal \mathbf{x}_j . Observa-se que a existência de

$\phi_j(\mathbf{x})$ está condicionada à não singularidade da matriz $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, conhecida como matriz de momentos. Este quesito é atendido nos casos em que o número de nós ($n(\mathbf{x})$) dentro do domínio de suporte seja muito maior que o número de monômios (m) das funções de base, o que garante que esta matriz seja bem condicionada². Apesar disso, Liu e Gu (2005) afirmam que não há um valor teórico para esta escolha, de tal forma que isto deve ser determinado através de experimentos numéricos.

As derivadas parciais das funções de forma $\phi_j(\mathbf{x})$ podem ser obtidas pela Regra da Cadeia. Sendo assim, a derivada primeira apresentada por Belytschko et al. (1994) como correção dos trabalhos de Nayroles et al. (1992) é dada por:

$$\phi_{j,k} = \sum_{i=1}^m [p_{i,k}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})_{ij} + p_i(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_{,k} + \mathbf{A}_{,k}^{-1}\mathbf{B})_{ij}] \quad (2.35)$$

Pode-se observar que a classe de funções $\{\phi_j\}_{j=1}^N$, consistindo de N nuvens ω_j , centradas nos pontos x_j , para $j=1, \dots, N$, atendem em parte à definição de Partição da Unidade (PU) de Duarte e Oden (1996):

1. $\phi_j \in C_0^s(\omega_j)$, $s \geq 0$ $j = 1, \dots, N$
2. $\sum_{j=1}^N \phi_j(\mathbf{x}) = 1$, $\forall \mathbf{x} \in \Omega$

O que significa que além das funções de forma satisfazerem as exigências de continuidade do problema, a soma dos valores das funções $\phi_j(\mathbf{x})$, calculadas em cada ponto \mathbf{x} , deve ser igual a um. Com isso, pode-se garantir a reprodutibilidade da solução à medida que se aumenta o número de pontos nodais x_j da discretização. Adicionalmente à estas características, as funções de forma devem possuir suporte compacto, ou seja, devem ser nulas fora do domínio de suporte.

Uma vez que $\mathbf{P} \in C^s(\omega_j)$ e $W_j(\mathbf{x}) \in C_0^l(\omega_j)$, as funções de forma terão a seguinte característica:

$$\phi_j(\mathbf{x}) \in C_0^{\min(s,l)}(\omega_j) \quad (2.36)$$

²excetuando-se casos degenerados.

Em outras palavras, supondo que as funções de base do conjunto \mathbf{P} sejam definidas por monômios, ocorrerá que $\mathbf{P} \in C^\infty$. Por consequência, tendo em vista que $W_j(\mathbf{x}) \in C_0^l(\omega_j)$, implicará que as funções de forma pertencerão ao espaço $C_0^l(\omega_j)$. Isso define a regularidade das funções de aproximação tanto em relação à regularidade das funções de ponderação W_j , quanto em relação ao grau de aproximação polinomial do conjunto \mathbf{P}_k (Nicolazzi et al. (2005)). A Eq. (2.36) é provada por Duarte e Oden (1995).

Importante notar que as funções de forma construídas a partir do Método dos Mínimos Quadrados Móveis não possuem a propriedade do Delta de Kronecker, ou seja, as funções obtidas são curvas ou superfícies suaves, não passando através de suas coordenadas nodais, ao contrário do que ocorre no MEF. Portanto, estas funções não constituem uma interpolação, ou seja, o método é não-interpolante. Neste caso ocorre apenas uma aproximação.

2.4.1.1 Funções de Ponderação

As funções de ponderação têm o objetivo de minimizar as distâncias entre a função exata e a função aproximada. Esta função atua de forma a assumir um valor máximo no ponto onde se pretender obter um menor erro. A distribuição das funções de ponderação se dá ao longo do domínio e cada uma delas pode estar associada a um nó ou a um ponto de coordenada específica diferente da coordenada nodal. Por outro lado, cada função de ponderação está associada ao domínio de suporte, de tal forma que apenas os n pontos nodais dentro do domínio de suporte contribuirão para a construção das funções de forma. Assim, a função de ponderação W_j , também conhecida com função de peso, possui valores não nulos apenas na vizinhança ω_j do ponto \mathbf{x}_j , onde ω_j representa o domínio de suporte do ponto \mathbf{x}_j (Fig. 2.2), limitada

por uma região de raio R_j^3 , ou seja:

$$\omega_j = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\| \leq R_j\} \quad (2.37)$$

A função de ponderação $W_j(\mathbf{x})$ pertence ao espaço $C_0^l(\omega_j)$, ou seja, ao espaço de funções contínuas com suporte compacto até a ordem l . Em outras palavras, a função $W_j(\mathbf{x})$ é l vezes continuamente diferenciável e possui valor igual a zero fora da nuvem para a função e suas l derivadas. De acordo com Liu e Gu (2005), as funções de ponderação devem possuir valores maiores que zero dentro do domínio de suporte, devem ser nulas fora dele, devem decrescer de forma monótonica a partir da região de interesse e devem ser suficientemente suaves, principalmente sobre o contorno da nuvem. Sendo assim, é comum a utilização de funções do tipo *Splines* ou exponenciais (Fig. 2.6), como por exemplo as funções do tipo *Spline* cúbica,

$$W_j(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4r_j^2 + 4r_j^3, & \text{se } r_j \leq 0,5 \\ \frac{4}{3} - 4r_j + 4r_j^2 - \frac{4}{3}r_j^3, & \text{se } 0,5 < r_j \leq 1 \\ 0, & \text{se } r_j > 1 \end{cases} \quad (2.38)$$

spline quártica,

$$W_j(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 - 6r_j^2 + 8r_j^3 - 3r_j^4, & \text{se } r_j < 1 \\ 0, & \text{se } r_j \geq 1 \end{cases} \quad (2.39)$$

e exponencial,

$$W_j(\mathbf{x}) = \begin{cases} \exp^{-(r_j/\beta)^2}, & \text{se } r_j < 1 \\ 0, & \text{se } r_j \geq 1 \end{cases} \quad (2.40)$$

onde β é uma constante e

$$r_j = \frac{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}\|}{R_j} \quad (2.41)$$

A Fig. 2.6 apresenta os gráficos dessas três funções de ponderação e a Fig. 2.7 mostra suas derivadas primeira.

³Isso ocorre para domínio de suporte radial. Caso o domínio de suporte seja tensorial, o raio R_j deve ser substituído pelas respectivas dimensões do retângulo.

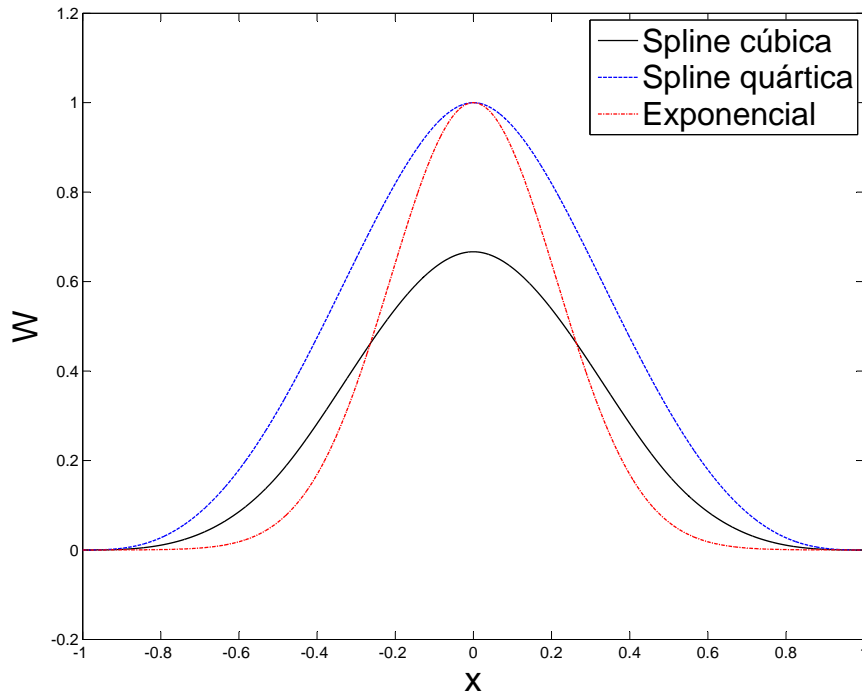


Figura 2.6: Funções de ponderação do tipo *Spline* cúbica, *Spline* quártica e exponencial com constante $\beta = 0,3$.

O raio do domínio de suporte R_j pode ser obtido da maneira adotada por Dolbow e Belytschko (1998), na qual se admite um fator de escala c_j multiplicado pela distância entre os nós, ou seja:

$$R_j = R_{max}c_j \quad (2.42)$$

onde c_j é um parâmetro de escala adimensional, tendo sido adotado entre 2 e 4 por estes autores para problemas de análise estática, e R_{max} é a distância entre dois nós adjacentes. Apesar disso, Liu e Gu (2005) afirmam que o valor do parâmetro de escala deve ser pré-determinado antes da análise, e usualmente é estabelecido levando-se em conta experimentos numéricos de problemas de referência que já possuem solução. Caso o domínio de suporte seja tensorial no \mathbb{R}^2 , por exemplo, constituído de um retângulo de área ab , R_j é substituído por a ou b , conforme a respectiva direção analisada. Portanto, para domínios de suporte tensoriais, o valor R_j é igual

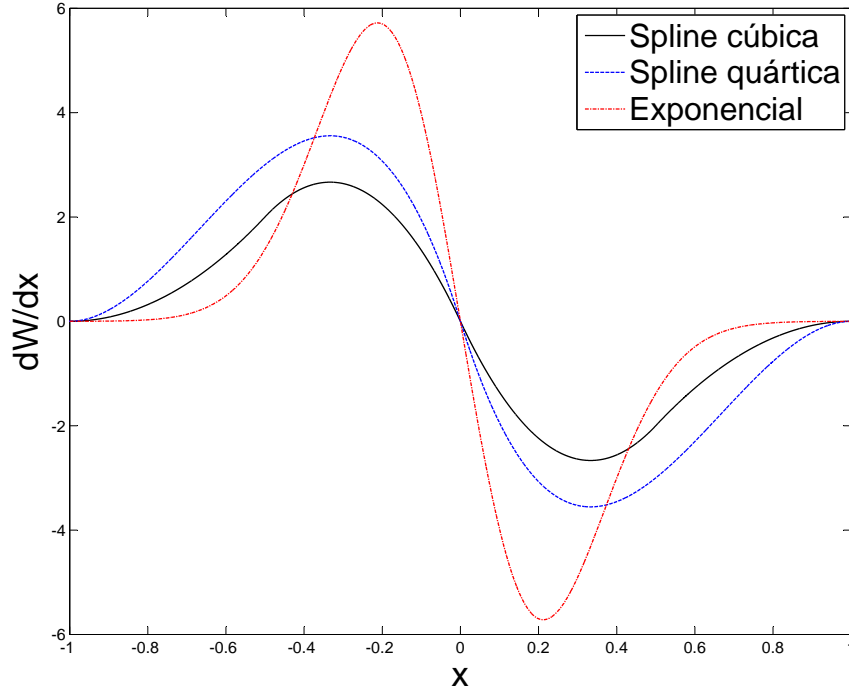


Figura 2.7: Derivada primeira das funções de ponderação do tipo *Spline* cúbica, *Spline* quártica e exponencial com constante $\beta = 0,3$.

à base ou à altura do retângulo.

2.4.2 Funções de Shepard

Considerando o caso particular em que $\mathbf{P}^T = P_0 = \{1\}$, a Eq. (2.28) e os elementos da matriz $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ da Eq. (2.29) tornam-se, respectivamente:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n W_i(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}) \quad (2.43)$$

$$\mathbf{B}_j = W_j(\mathbf{x}) = W_j(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}) \quad (2.44)$$

e as funções de forma (Eq. 2.34) passam a ser

$$\phi_j(\mathbf{x}) = \frac{W_j(\mathbf{x}_j - \mathbf{x})}{\sum_{i=1}^n W_i(\mathbf{x}_i - \mathbf{x})} \quad (2.45)$$

A Eq. (2.45) é conhecida como Funções de Shepard (Shepard (1968)). Apesar

destas funções representarem de modo exato apenas funções constantes⁴, elas permitem que se dispense o cálculo da inversa da matriz $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, o que resulta em menor custo computacional, assim como anula a possibilidade de singularidade desta matriz. Além do mais, Duarte e Oden (1996) provaram que a taxa de convergência não depende apenas da ordem dos polinômios do grupo \mathbf{P}_k .⁵ Neste caso, a representação de polinômios de graus maiores fica por conta do enriquecimento extrínseco.

2.4.3 Propriedades das funções de forma

Consistência

Considere $\tilde{u}(\mathbf{x})$ uma aproximação para $u(\mathbf{x})$, dada por:

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = \sum_i^n p_i(\mathbf{x})u_i, \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.46)$$

sendo n o número de nós no domínio, p as funções de base e u_i o parâmetro nodal associado ao i -ésimo nó. A consistência da função de forma é a habilidade da mesma em reproduzir a ordem completa do polinômio. Assim, se a ordem do monômio da função de base é k , a função de forma possui consistência C^k .

Para o caso bidimensional por exemplo, dado que $\mathbf{x} = [x, y]$, a consistência linear é satisfeita se são verificadas as seguintes igualdades

$$\sum_{i=1}^n p_i(\mathbf{x}) = 1 \quad (2.47)$$

$$\sum_{i=1}^n p_i(\mathbf{x})x_i = x \quad (2.48)$$

$$\sum_{i=1}^n p_i(\mathbf{x})y_i = y \quad (2.49)$$

⁴Não obstante à esta afirmação, pode-se perceber pelos resultados do Cap. 4 que ao se comparar o hp -Cloud com MEFM para um dado valor de p nota-se que as funções racionais do MMQM podem representar algo além de simplesmente monômios, tendo em vista os bons resultados obtidos.

⁵Lembrando que índice k denota o grau das funções de base usadas na construção das funções de forma, ou seja, se referindo ao enriquecimento intrínseco.

As condições de consistência de ordem k são dadas por

$$\sum_{i=1}^n p_i^c(\mathbf{x}) x_i^c = x_i^c, \quad 0 \leq c \leq k, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.50)$$

Reprodutibilidade

Embora haja certa similaridade com a consistência, Liu (2002) separa ambos os conceitos. O autor considera reprodução como a capacidade em reproduzir funções que estão nas funções de base. Em contrapartida, consistência enfatiza a reprodutibilidade da ordem completa do polinômio. Como afirmado pelo autor, as funções do MMQM podem reproduzir exatamente qualquer função que aparece na base.

Partição da Unidade

Como já dito anteriormente, as funções de forma do MMQM constituem uma Partição da Unidade:

$$\sum_{i=1}^n \phi_i(\mathbf{x}) = 1 \quad (2.51)$$

Esta propriedade é essencial para que se atendam os critérios de convergência à medida em que o problema é refinado (Barros e Proença (2000)).

Falta da propriedade do delta de Kronecker

Esta é uma importante característica inerente às funções do MMQM e que não irá permitir que as condições de contorno essenciais sejam impostas de forma direta. Como consequência, é necessário recorrer a métodos alternativos para contornar este problema. Neste trabalho serão estudadas duas metodologias, os multiplicadores de Lagrange e o método da penalidade. Além do mais, será demonstrado outra técnica de imposição de condições de contorno, que é o acoplamento com o MEF.

2.5 Família de funções do método *hp*-Cloud

As funções de Shepard (Eq. 2.45) podem reproduzir constantes, mas em geral, não possuem a capacidade de representar polinômios de primeiro grau ou maiores. As funções do método *hp*-Cloud são obtidas pela multiplicação da PU por funções

que possuam boa capacidade de aproximação, como funções polinomiais, harmônicas, exponenciais, trigonométricas, etc. (Duarte (1996)), de tal forma que as funções de aproximação do *hp*-Cloud passem a ter a capacidade de representar, através de combinação linear, polinômios de qualquer grau ⁶.

Os possíveis tipos de aprimoramento para este método numérico podem ser classificados como refinamento *h*, enriquecimento intrínseco e enriquecimento extrínseco, ou seja:

Refinamento h: consiste na adição de nós ao modelo. Pode ocorrer sem ou com o aumento do raio do domínio de suporte, ou mesmo com sua diminuição. Embora isso possa melhorar a precisão do modelo por um lado, por outro pode aumentar consideravelmente o custo computacional. De acordo com Chen et al. (2006), o melhor tipo de refinamento *h* parece ser aquele no qual novos nós são adicionados, mas o raio do domínio de suporte destes novos nós é menor que o raio dos nós inicialmente empregados. Com isso, melhora-se a precisão dos resultados, onde estes novos nós foram introduzidos, e a um custo computacional menor.

Enriquecimento intrínseco k: consiste em se aumentar a ordem do polinômio. Para o Método dos Mínimos Quadrados Móveis, como feito por Belytschko et al. (1994) no EFG, isso é feito aumentando-se a ordem dos monômios das funções de base \mathbf{P}_k . Em certas situações também é aumentado o raio do domínio de suporte, com o objetivo de se garantir a não-singularidade da matriz $\mathbf{A}(\mathbf{x})$.

Enriquecimento extrínseco p: trata da melhoria da aproximação com o uso de funções de enriquecimento. Para um problema com comportamento polinomial, isto é feito multiplicando-se a PU por monômios. Este tipo de enriquecimento consegue, assim, representar o polinômio da solução analítica do problema com grande precisão.

Para este objetivo, considera-se a introdução de uma categoria de funções de

⁶Ressaltando, a título de exemplo, que o enriquecimento seja polinomial.

base \mathbf{P}_p ⁷, denotando uma nova classe de polinômios de grau menor ou igual a p , de tal forma que $k < p$. Uma possibilidade para a construção de \mathbf{P}_p é utilizar também o mesmo conjunto de monômios definidos na Seção 2.4.1. A família de funções, para enriquecimento polinomial, pode ser então definida por:

$$\mathfrak{F}_N^{k,p} = \{\{\phi_j^k(\mathbf{x})\} \cup \{\phi_j^k L_i(\mathbf{x})\} : 1 \leq j \leq N; 0 \leq i \leq m\} \quad (2.52)$$

onde N é o número de nuvens, m é o número de monômios associado à base P_p , $L_i(\mathbf{x})$ são as funções de enriquecimento extrínseco que podem ser dadas por $L_i^r(\mathbf{x})$, $L_i^{rs}(\mathbf{x})$ ou $L_i^{rst}(\mathbf{x})$ caso o problema seja dado no \mathbb{R}^1 , \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 , respectivamente. Assim, $L_i^r(\mathbf{x}) = L^r(x)$, $L_i^{rs}(\mathbf{x}) = L^r(x)L^s(y)$ e $L_i^{rst}(\mathbf{x}) = L^r(x)L^s(y)L^t(z)$, para $0 \leq r, s, t \leq p$.

A Eq. (2.52) evidencia a adição hierárquica de elementos ao grupo $\{\phi_j^k(\mathbf{x})\}_{j=1}^N$, de tal forma que este grupo represente, através de combinação linear, polinômios de grau p .⁸

Duarte e Oden (1996) provam que, se as funções da Partição da Unidade $\{\phi_j^k\}_{j=1}^N$ forem linearmente independentes no \mathbb{R}^d , então as funções da família $\mathfrak{F}_N^{k,p}$ também o serão.

Observa-se que a família de funções do método, tanto para o EFG quanto para o hp -Cloud, gerada pelo Método dos Mínimos Quadrados Móveis, não são funções polinomiais. Apesar disso ela tem a capacidade de reproduzir, através de combinação linear, polinômios de qualquer ordem.

A aproximação para a função $u(\mathbf{x})$ (Eq. 2.32), com o enriquecimento extrínseco, pode então ser dada por:

$$u(\mathbf{x}) \approx \tilde{u}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \phi_j(\mathbf{x}) \left\{ \hat{u}_j + \sum_{i=1}^m L_i(\mathbf{x}) b_{ji} \right\} \quad (2.53)$$

⁷O índice p denota o grau das funções de enriquecimento extrínseco.

⁸A adição hierárquica implica que o conjunto de monômios P_k contenha o conjunto de monômios P_{k-1} .

onde L_i é o elemento genérico das funções de base \mathbf{P}_p , b_{ji} são constantes introduzidas devido ao enriquecimento hierárquico e \hat{u}_j são os parâmetros de deslocamento conforme Seção 2.4.1.

Cabe observar que o enriquecimento não precisa ser formado por funções exclusivamente polinomiais. Nesta caso, generalizando a Eq. (2.52), tem-se:

$$\mathfrak{F}_N^{k,p} = \{\{\phi_j^k(\mathbf{x})\} \cup \{\phi_j^k L_{ji}(\mathbf{x})\} : 1 \leq j \leq N; 0 \leq i \leq m_j\} \quad (2.54)$$

onde L_{ji} representar qualquer tipo de função que se deseja aproximar e que forme uma base de funções em números de m_j .

2.6 Imposição de condições de contorno

Em mecânica dos sólidos, o equilíbrio de um corpo no \mathbb{R}^3 , submetido a condições de carregamento e deslocamento inicial, pode ser representado pelo seguinte conjunto de equações diferenciais parciais:

$$\nabla \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \text{ em } \Omega \quad (2.55)$$

sendo as condições de contorno dadas por:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}}, \text{ sobre } \Gamma_t \quad (2.56)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}, \text{ sobre } \Gamma_u \quad (2.57)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ representa o tensor de tesões, \mathbf{b} representa as forças de corpo, \mathbf{n} representa o vetor normal unitário sobre o contorno e apontando para fora, $\bar{\mathbf{t}}$ representa as forças prescritas por unidade de área sobre o contorno de Neumann Γ_t e $\bar{\mathbf{u}}$ os deslocamentos prescritos sobre o contorno de Dirichlet Γ_u .

Conforme citado anteriormente, as funções de forma obtidas através do MMQM não possuem a propriedade do delta de Kronecker:

$$\phi_i(\mathbf{x}_i) \neq \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (2.58)$$

Esta característica implica que as condições de contorno essenciais não podem ser impostas de forma direta como ocorre no MEF e ainda, são obtidas apenas de forma aproximada. Neste caso, é necessário recorrer a algum método alternativo. Dois métodos muito utilizados para este fim e que serão apresentados a seguir, são o método dos multiplicadores de Lagrange e o método da Penalidade, os quais atuam sobre a forma fraca de Galerkin. Outra forma de impor as condições de contorno essenciais nos métodos sem malha é o acoplamento com o MEF. Esta técnica também é ilustrada na sequência.

2.6.1 O método dos multiplicadores de Lagrange

Uma das características que diferencia o EFG do Método dos Elementos Difusos é a utilização do método dos multiplicadores de Lagrange para a imposição das condições de contorno essenciais, conforme o trabalho de Belytschko et al. (1994). Para os métodos sem malha não-interpolantes, um termo relacionado aos multiplicadores de Lagrange deve ser adicionado à equação de equilíbrio na forma fraca, (Eq. 2.15):

$$\int_{\Gamma_u} \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})d\Gamma \quad (2.59)$$

sendo $\boldsymbol{\lambda}$ o vetor de mutiplicadores de Lagrange.

Desta forma, a Eq. (2.15) é reescrita como

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta \mathbf{u}^T \boldsymbol{\lambda} d\Gamma = 0 \quad (2.60)$$

O multiplicador de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$ irá cumprir o papel de aproximar a igualdade $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$, garantindo, de maneira aproximada, a imposição da condição de contorno essencial. Este multiplicador de Lagrange é uma função incógnita de \mathbf{x} que deve ser calculada ao longo do contorno essencial que define as restrições do problema. Elas geralmente são interpoladas usando os valores nodais sobre este contorno. Para

problemas bidimensionais, define-se,

$$\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} \lambda_u \\ \lambda_v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & \cdots & N_{n\lambda} & 0 \\ 0 & N_1 & \cdots & 0 & N_{n\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{u1} \\ \lambda_{v1} \\ \vdots \\ \lambda_{un\lambda} \\ \lambda_{vn\lambda} \end{bmatrix} = \mathbf{N}\boldsymbol{\lambda} \quad (2.61)$$

onde N_i são as funções de forma interpolantes do i -ésimo nó sobre o contorno de Dirichlet, tais como as usadas no MEF, $n\lambda$ é o número de nós usados na construção deste sistema, e $\boldsymbol{\lambda}$ é o vetor que define o número de multiplicadores de Lagrange sobre os nós do contorno. Matricialmente, a Eq. (2.61) pode ser escrita como

$$\boldsymbol{\lambda} = \sum_i^{n\lambda} \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_{ui} \\ \lambda_{vi} \end{Bmatrix} = \sum_i^{n\lambda} \mathbf{N}_i \boldsymbol{\lambda}_i \quad (2.62)$$

Em geral, as funções de forma \mathbf{N} podem ser dadas, para uma coordenada s ao longo do contorno de Dirichlet, por

$$N_k^n(s) = \frac{\prod_{i=0}^n (s - s_i)}{\prod_{i=0}^k (s_k - s_i)} \text{ para } i \neq k \quad (2.63)$$

Para o caso de interpolação linear, $n = 1$, nos pontos $s = s_0$ e $s = s_1$, tem-se as seguintes funções

$$N_0(s) = \frac{s - s_1}{s_0 - s_1} \quad (2.64)$$

$$N_1(s) = \frac{s - s_0}{s_1 - s_0} \quad (2.65)$$

Portanto, para o caso linear, as funções de forma serão dadas por funções lineares unindo nós adjacentes.

A aproximação local para o método hp -Cloud, a qual irá considerar os nós dentro do domínio de suporte, é dada no domínio bidimensional por

$$\mathbf{u}^r = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (2.66)$$

e será representada matricialmente como

$$\mathbf{u}^r = \left[\begin{array}{cccc} [\phi L]_1 & [\phi L]_2 & \dots & [\phi L]_n \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} u \\ v \\ b \end{array} \right\}_1 \\ \left\{ \begin{array}{c} u \\ v \\ b \end{array} \right\}_2 \\ \vdots \\ \left\{ \begin{array}{c} u \\ v \\ b \end{array} \right\}_n \end{array} \right\} \quad (2.67)$$

sendo

$$[\phi L]_j = \left[\begin{array}{cccccc} \phi_j & 0 & \phi_j L_{j1} & 0 & \dots & \phi_j L_{jm_j} & 0 \\ 0 & \phi_j & 0 & \phi_j L_{j1} & \dots & 0 & \phi_j L_{jm_j} \end{array} \right] \quad (2.68)$$

ou equivalentemente,

$$\mathbf{u}^r = \sum_i^n \boldsymbol{\varphi}_i \mathbf{u}_i \quad (2.69)$$

Na Eq. (2.67), ϕ_i são as funções de forma do MMQM, L_j são funções de enriquecimento até a ordem p , u_i e v_i são parâmetros de deslocamento relacionados às direções x e y , respectivamente, b_j são constantes introduzidas pelo enriquecimento hierárquico.

As deformações são obtidas da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \sum_i^n \boldsymbol{\varphi}_i \mathbf{u}_i = \sum_i^n \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc} \phi_i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \phi_i & \dots & \phi_i L_p \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_i \\ v_i \\ \vdots \\ b_{jp} \end{array} \right\} = \sum_i^n \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i \quad (2.70)$$

onde

$$\mathbf{B}_i = \left[\begin{array}{cc} \varphi_{i,x} & 0 \\ 0 & \varphi_{i,y} \\ \varphi_{i,y} & \varphi_{i,x} \end{array} \right] \quad (2.71)$$

onde $\varphi_{i,x}$ e $\varphi_{i,y}$ representam as derivadas das funções de forma enriquecidas, em relação às direções x e y , respectivamente. Ao substituir as Eq. (2.70), (2.69) e (2.62) na Eq. (2.60), tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta \left[\sum_i^n \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i \right]^T \mathbf{D} \left[\sum_j^n \mathbf{B}_j \mathbf{u}_j \right] d\Omega + \\ - \int_{\Omega} \delta \left[\sum_i^n \varphi_i \mathbf{u}_i \right]^T \mathbf{b} - \int_{\Gamma_t} \delta \left[\sum_i^n \varphi_i \mathbf{u}_i \right]^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \\ - \int_{\Gamma_u} \delta \boldsymbol{\lambda}^T \left[\sum_i^n \varphi_i (\mathbf{u}_i - \bar{\mathbf{u}}) \right] d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta \left[\sum_i^n \varphi_i \mathbf{u}_i \right]^T \boldsymbol{\lambda} d\Gamma = 0 \quad (2.72) \end{aligned}$$

Agrupando a Eq. (2.72) na forma matricial após a aplicação do teorema fundamental do cálculo variacional, conforme pode ser acompanhado no trabalho de Liu e Gu (2005), obtém-se o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} \quad (2.73)$$

sendo os elementos da matriz de rigidez \mathbf{K} global dados por

$$\mathbf{K}_{ij} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j d\Omega \quad (2.74)$$

\mathbf{G} a matriz global formada pela união dos elementos \mathbf{G}_{ij}

$$\mathbf{G}_{ij} = - \int_{\Gamma_u} \mathbf{N}_i^T \varphi_j d\Gamma \quad (2.75)$$

\mathbf{F} , o vetor de forças formado pelos elementos \mathbf{F}_i

$$\mathbf{F}_i = \int_{\Omega} \varphi_i^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \varphi_i^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (2.76)$$

e vetor \mathbf{q} formado pelos elementos \mathbf{q}_i

$$\mathbf{q}_i = \int_{\Gamma_u} \mathbf{N}_i \bar{\mathbf{u}} d\Gamma \quad (2.77)$$

Na Eq. (2.73), \mathbf{U} é o vetor de parâmetros de deslocamento formados pela composição dos elementos do vetor \mathbf{u}_i e $\boldsymbol{\lambda}$ é o vetor dos multiplicadores de Lagrange.

Ambos são calculados na resolução do referido sistema de equações. Importante observar que os valores de \mathbf{U} obtidos através da Eq. (2.73) não são os valores do deslocamento nodal, os quais devem ser calculados conforme apresentado pela Eq. (2.69).

O método dos Multiplicadores de Lagrange consegue impor as condições de contorno essenciais com grande precisão. Apesar disso, devido ao aumento dos zeros na diagonal principal, a matriz deixa de ser positiva-definida, embora ela ainda permaneça simétrica. Como consequência o custo computacional para a solução do sistema de equações também é aumentado, o que é uma desvantagem, tendo em vista que o custo computacional dos métodos sem malha para a construção da matriz de rigidez é, em geral, maior que o custo computacional de outros métodos como o MEF, sendo esta uma característica inerente aos métodos sem malha, principalmente devido à maneira da composição das funções de forma e do número de nós envolvidos pelo domínio de suporte.

2.6.2 O método da penalidade

Analogamente ao que foi feito usando o método dos multiplicadores de Lagrange, a equação da forma fraca de Galerkin recebe um termo adicional que irá assegurar as condições de contorno essenciais. Logo a Eq. (2.15) torna-se:

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta \frac{1}{2} (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})^T \boldsymbol{\alpha} (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma = 0 \quad (2.78)$$

Matricialmente, a Eq. (2.78) pode ser agrupada da seguinte maneira,

$$[\mathbf{K} + \mathbf{K}^\alpha] \mathbf{U} = \mathbf{F} + \mathbf{F}^\alpha \quad (2.79)$$

sendo \mathbf{K} a matriz de rigidez global obtida agrupando-se os termos \mathbf{K}_{ij} , conforme a Eq. (2.74), \mathbf{U} é o vetor de parâmetros de deslocamentos nodais obtidos com o cálculo do sistema de equações apresentado na Eq. (2.79) e \mathbf{F} é o vetor de forças

externas, conforme dado pela Eq. (2.76). \mathbf{K}^α é a matriz de fatores de penalidade, obtida de acordo o agrupamento dos elementos \mathbf{K}_{ij}^α :

$$\mathbf{K}_{ij}^\alpha = \int_{\Gamma_u} \varphi_i \boldsymbol{\alpha} \varphi_j d\Gamma \quad (2.80)$$

O vetor de forças de penalidade \mathbf{F}^α é dado por

$$\mathbf{F}_i^\alpha = \int_{\Gamma_u} \varphi_i^T \boldsymbol{\alpha} \bar{\mathbf{u}} d\Gamma \quad (2.81)$$

A matriz de parâmetros de penalidade fica definida por

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix} \text{ tal que } S_i = \begin{cases} 1 & \text{se } u_i \text{ é prescrito sobre } \Gamma_u \\ 0 & \text{se } u_i \text{ não é prescrito sobre } \Gamma_u \end{cases} \quad i = 1, 2. \quad (2.82)$$

O parâmetro de penalidade α é, em geral, uma constante positiva de grande valor numérico. Liu (2010) sugere que este valor seja adotado entre 10^4 e 10^{13} vezes o máximo valor do elemento da diagonal da matriz de rigidez do problema, ou ainda, entre 10^5 e 10^8 vezes o módulo de elasticidade (Módulo de Young) do corpo analisado. Já Zhu e Atluri (1998) consideram o uso de fatores de penalidade entre 10^3 e 10^7 vezes o Módulo de Young. O ideal para a maioria dos métodos sem malha é que se efetuem os testes e os compare com problemas similares que possuem solução analítica.

O método da penalidade não assegura de forma exata as restrições de contorno de Dirichlet. Em um primeiro momento poderia se pensar que quanto maior o parâmetro de penalidade, maior a precisão do modelo numérico. Entretanto valores muito altos de α frequentemente ocasionam problemas numéricos, interferindo no condicionamento da matriz de rigidez (Zhu e Atluri (1998)). Outra característica importante é que, em geral, o método da penalidade retorna valores menos precisos dos que os encontrados com o método dos multiplicadores de Lagrange (Liu e Gu (2005)). Apesar disso, observando que o fator de penalidade atua apenas nas posições dos graus de liberdade prescritos, o tamanho da matriz de rigidez não é

alterado, pois, não são criadas novas incógnitas, além da mesma permanecer simétrica e positiva definida, o que torna o custo computacional menor se comparado com os multiplicadores de Lagrange. Um estudo compreensivo sobre o método da penalidade pode ser encontrado no trabalho de Carey et al. (1982).

2.6.3 Acoplamento com o MEF

O acoplamento com o MEF é uma metodologia de imposição das condições de contorno essenciais que considera a aplicação do MEF sobre o contorno, aproveitando a propriedade do delta de Kronecker das funções deste método numérico. Foi proposto a partir dos trabalhos de Belytschko et al. (1995), Huerta e Fernández-Méndez (2000), Fernández-Méndez e Huerta (2004) e Huerta et al. (2004).

A aproximação via métodos sem malha acoplado ao MEF é dada por,

$$u(\mathbf{x}) \simeq u^h(\mathbf{x}) + u^\rho(\mathbf{x}) \quad (2.83)$$

onde $u^h(\mathbf{x})$ é a parcela relacionada ao MEF e $u^\rho(\mathbf{x})$ é a parcela relacionada ao método sem malha e são dadas respectivamente por,

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I^h} u(\mathbf{x}_i) N_i^h(\mathbf{x}) \quad (2.84)$$

$$u^\rho(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I^\rho} u(\mathbf{x}_i) \varphi_i^\rho(\mathbf{x}) \quad (2.85)$$

sendo φ_i^ρ as funções de forma enriquecidas no caso do *hp*-Cloud. O domínio Ω é assumido como sendo a união de dois subdomínios não-disjuntos, ou seja $\Omega = \Omega^h \cup \Omega^\rho$. Um conjunto de nós $\{\mathbf{x}_i\}_{i \in I^h}$, associados às funções de forma do MEF, e um conjunto $\{\mathbf{x}_j\}_{j \in I^\rho}$, associados às funções de forma do método sem malha são definidos na aproximação. O subdomínio Ω^h onde as funções de forma $N_i^h(\mathbf{x})$ tem influência, é dado por

$$\Omega^h = \{x \in \Omega \mid \exists i \in I^h, N_i^h(\mathbf{x}) \neq 0\} \quad (2.86)$$

E o subdomínio Ω^ρ , onde pelo menos uma função de forma $\varphi_i^\rho(\mathbf{x})$ seja não nula, é dado por,

$$\Omega^\rho = \{x \in \Omega | \exists j \in I^\rho, \varphi_j^\rho(\mathbf{x}) \neq 0\} \quad (2.87)$$

Nas equações acima, I^h e I^ρ são os conjuntos de índices dos nós, na vizinhança de \mathbf{x} , nos domínios Ω^h e Ω^ρ , respectivamente. Além disso, a seguinte condição é verificada:

$$I^\rho = \{j \text{ tal que } |\mathbf{x}_j - \mathbf{x}| \leq R_j\} \quad (2.88)$$

Resumidamente, nesta aproximação, ocorrerá três regiões distintas sobre o domínio. Na região onde apenas elementos finitos estão presentes, será herdada a interpolação do MEF. Na região onde apenas as funções de métodos sem malha estão presentes, será herdada a aproximação via métodos sem malha. Já na região de sobreposição, que ocorre geralmente na interface MEF - método sem malha, haverá atuação tanto do MEF quanto do método sem malha. Nesta região, a aproximação é dada por:

$$u(\mathbf{x}) \simeq \tilde{u}(\mathbf{x}) = u^h(\mathbf{x}) + u^\rho(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I^h} u(\mathbf{x}_i) N_i^h(\mathbf{x}) + \sum_{j \in I^\rho} u(\mathbf{x}_j) \tilde{\varphi}_j^\rho(\mathbf{x}) \quad (2.89)$$

sendo $\tilde{\varphi}_j^\rho(\mathbf{x})$ a função de forma do método sem malha levando em conta o acoplamento com as funções de forma de elementos finitos. De acordo com Fernández-Méndez e Huerta (2004), a aproximação dada pela Eq. (2.89) é continua sobre o domínio se o grau de todos os polinômios das aproximação pelos métodos sem malha forem menores ou igual à base de elementos finitos. Além disso, o domínio de suporte nodal deve abranger a área na qual os elementos finitos não tenham uma base de interpolação completa.

A forma fraca de Galerkin para o problema com acoplamento é também obtida conforme Eq. (2.15):

$$\int_{\Omega} \delta(\mathbf{L}\mathbf{u})^T (\mathbf{D}\mathbf{L}\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}^T \bar{t} d\Gamma = 0 \quad (2.90)$$

onde, na Eq. (2.90), \mathbf{L} é o operador diferencial para o caso bidimensional. Após alguma manipulação algébrica, que pode ser acompanhada através do trabalho de Silva (2012), obtém se a seguinte matriz de rigidez:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^{\rho\rho} + \mathbf{K}^{\rho h} + \mathbf{K}^{h\rho} + \mathbf{K}^{hh} \quad (2.91)$$

$$\mathbf{K}^{\rho\rho} = \sum_{r \in I^\rho} \sum_{s \in I^\rho} \mathbf{K}_{rs} \text{ onde } \mathbf{K}_{rs} = \int_{\Omega} (\mathbf{B}_r^\rho)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_s^\rho d\Omega \quad (2.92)$$

$$\mathbf{K}^{h\rho} = \sum_{i \in I^h} \sum_{r \in I^\rho} \mathbf{K}_{ir} \text{ onde } \mathbf{K}_{ir} = \int_{\Omega} (\mathbf{B}_i^h)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_r^\rho d\Omega \quad (2.93)$$

$$\mathbf{K}^{\rho h} = \sum_{s \in I^\rho} \sum_{j \in I^h} \mathbf{K}_{sj} \text{ onde } \mathbf{K}_{sj} = \int_{\Omega} (\mathbf{B}_s^\rho)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j^h d\Omega \quad (2.94)$$

$$\mathbf{K}^{hh} = \sum_{i \in I^h} \sum_{j \in I^h} \mathbf{K}_{ij} \text{ onde } \mathbf{K}_{ij} = \int_{\Omega} (\mathbf{B}_i^h)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j^h d\Omega \quad (2.95)$$

sendo

$$\mathbf{B}_i^h = \begin{bmatrix} N_{i,x}^h & 0 \\ 0 & N_{i,y}^h \\ N_{i,y}^h & N_{i,x}^h \end{bmatrix} \quad (2.96)$$

$$\mathbf{B}_i^\rho = \begin{bmatrix} \varphi_{i,x}^\rho & 0 \\ 0 & \varphi_{i,y}^\rho \\ \varphi_{i,y}^\rho & \varphi_{i,x}^\rho \end{bmatrix} \quad (2.97)$$

Para a implementação do *hp*-Cloud no INSANE optou-se por não relacionar o acoplamento às condições de contorno naturais. Sendo assim, o vetor de forças, para forças de superfície, é dado por,

$$\mathbf{F}_i = \int_{\Gamma_t} \varphi \bar{t} d\Gamma \quad (2.98)$$

2.7 Integração numérica

Uma das grandes dificuldades de se trabalhar com os métodos sem malha consiste em efetuar a integração numérica de forma precisa e eficiente. Conforme reconhecido por Babuška et al. (2009), a integração numérica para os métodos sem malha representa um desafio muito maior que para o MEF. De acordo com Belinha (2014), é importante estabelecer para cada tipo de aproximação via método sem malha, a relação ótima entre o número de nós e a densidade de pontos na célula de integração, tanto na ocasião da mudança de procedimento na construção das funções de forma quanto na alteração do tamanho do domínio de suporte. Neste trabalho optou-se pelo esquema de quadratura de Gauss, tendo em vista ser, atualmente, uma das técnicas mais difundidas para a integração dos métodos sem malha.

2.7.1 Quadratura de Gauss-Legendre

Embora a quadratura de Gauss seja bem difundida na comunidade dos métodos sem malha, ela apresenta alguns contratempos. Para Dolbow e Belytschko (1999) existem duas fontes distintas de erros de integração numérica usando quadratura de Gauss nos métodos sem malha: (1) as funções de forma dos métodos sem malha não são polinomiais e (2) seus suportes locais não se alinham com os domínios de integração. O mesmo não ocorre para o MEF, onde a malha ou célula de integração coincide com a malha do elemento finito, além do fato de suas funções de forma serem polinomiais. Embora o MMQM possua a capacidade de representar polinômios, suas funções são racionais, o que dificulta a obtenção de valores da aproximação com boa precisão, ao contrário do que ocorre com funções polinomiais. Sendo assim, em geral a integração numérica dos métodos sem malha exige uma ordem de quadratura muito maior que a necessária para o MEF, no sentido de se obter precisão com a mesma ordem de grandeza.

Para a realização da integração numérica dos métodos sem malha, usando quadratura de Gauss, é necessária a criação de células de base. Para problemas bidimensionais, é comum a utilização de células de base retangulares ou triangulares. Para Liu e Gu (2005), células de base triangulares são mais adequadas a problemas com geometria complexa.

A integração numérica de uma função $F(x)$, definida no domínio Ω , pode ser expressa por:

$$\int_{\Omega} F(x) d\Omega = \sum_{i=1}^{n_g} \hat{w}_i F(x_i) \quad (2.99)$$

onde \hat{w}_i é o peso do ponto de integração x_i , e n_g é o número de pontos de integração. Diferentemente do que ocorre com o MEF, onde os valores geralmente são calculados usando-se coordenadas naturais para diversos tipos de famílias de elementos, as coordenadas x_i são, para os métodos sem malha, as coordenadas físicas do problema. Dolbow e Belytschko (1999) sugerem para o EFG que as células de integração sejam distribuídas de acordo com o domínio de suporte. Se por um lado esta metodologia melhora a precisão do modelo numérico, por outro aumenta o custo computacional. Outra metodologia interessante e que tem chamado a atenção de muitos pesquisadores é o esquema de integração nodal e estabilizada (SCNI) (Beissel e Belytschko (1996), Chen et al. (2001), Chen et al. (2002)). Apesar disso, Belinha (2014) afirma que esta técnica de integração numérica, além de aumentar o custo computacional do modelo, não é capaz de alcançar a mesma precisão ou a mesma taxa de convergência que o esquema de quadratura Gaussiana. Estudos no sentido de avaliar o comportamento do EFG frente ao SCNI foram desenvolvidos por Faria (2014).

Uma explicação mais detalhada sobre o esquema da quadratura de Gauss-Legendre pode ser encontrado em Bathe (1996).

Capítulo 3

Implementação do *hp*-Cloud no sistema INSANE

Este capítulo trata da implementação computacional do método *hp*-Cloud no sistema INSANE (*IN*teractive *Str*uctural *AN*alysis *EN*vironment). Para ilustrar o desenvolvimento do código e sua relação com o projeto já existente, foram utilizados diagramas UML (*Un*ified *Mo*deling *La*nguage), que é uma forma de padronização na modelagem de programas Orientados a Objetos, sendo a representação gráfica de um conjunto de elementos do sistema (Silva (2001)).

O INSANE é uma plataforma computacional desenvolvida no Departamento de Engenharia de Estruturas (DEEs) da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) com o objetivo de servir como ambiente de desenvolvimento das pesquisas relacionadas aos métodos numéricos. Tendo em vista que o INSANE é implementado sob o paradigma de Programação Orientada a Objetos (POO), utilizando linguagem Java, o sistema possui grande flexibilidade na implementação de novas classes ou métodos. Além do mais, a biblioteca de métodos numéricos existentes e o grande número de algoritmos já implantados facilitam a inclusão de novos recursos e o trabalho de modelagem com outros métodos.

O INSANE possui três principais aplicações: pré-processador, processador e pós-processador. O pré e o pós-processador são aplicações gráficas que permitem a representação do modelo e a visualização dos resultados. O processador é o núcleo

numérico do INSANE, o qual é responsável pela montagem e solução do modelo numérico. É na parte de processamento que se concentra, basicamente, a maioria das alterações feitas no INSANE, na ocasião da inclusão de um novo método numérico.

Atualmente, o INSANE possui implementações de diversos métodos numéricos, como o MEF, o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), o Método dos Elementos de Contorno (MEC), o Element-Free Galerkin (EFG) e, agora, como implementado neste trabalho, o *hp*-Cloud.

Assim, ao longo deste capítulo discute-se as alterações que foram necessárias para a inclusão do método *hp*-Cloud, o que foi feito sem a necessidade da criação de um grande número de classes ou métodos. Sendo este um grande atrativo e uma vantagem na utilização do INSANE. Logo, com o objetivo evidenciar as alterações, optou-se por usar a legenda de cores apresentada na Fig. 3.1. Assim, as classes inalteradas serão exibidas em branco, as alteradas em amarelo e as classes novas em verde. Ressalta-se que, além disso, grande parte das novas classes nasceram como adaptações de outras classes já existentes.

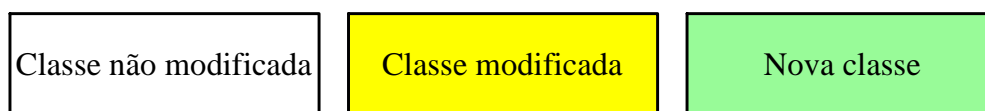


Figura 3.1: Representação das alterações no INSANE

3.0.2 Visão geral do INSANE

O processador do INSANE compõe-se de classes abstratas e interfaces que por meio do mecanismo de herança, permitem a reutilização dos códigos pré-existentes no programa. Assim, uma classe abstrata obrigará que a classe herdeira implemente

todos os métodos abstratos definidos. As interfaces trabalham com herança múltipla, de tal forma que mais de uma interface pode definir os métodos que a classe herdeira irá implementar (Santos (2003)). Assim, a estrutura do INSANE é formada pelas interfaces *Assembler*, *Model*, *Persistence* e pela classe abstrata *Solution*. Estas classes podem ser visualizadas nos diagramas UML presentes na Fig. 3.2.

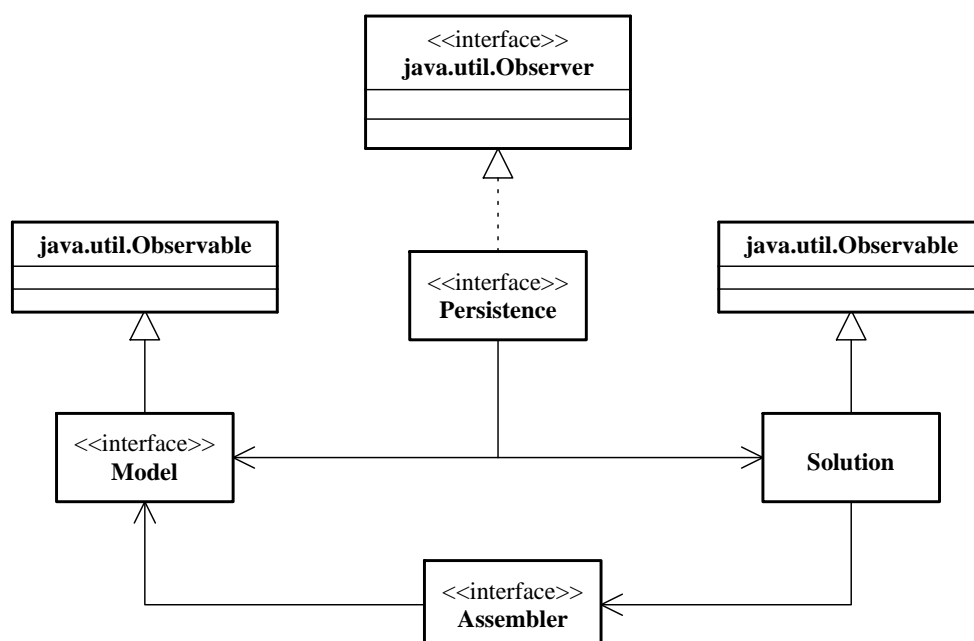


Figura 3.2: Representação do núcleo numérico do INSANE

A interface *Assembler* é a responsável pela montagem do modelo discreto. Este sistema pode ser representado pela equação:

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\mathbf{X} = \mathbf{D} \quad (3.1)$$

onde \mathbf{X} é o vetor de variáveis de estado, $\ddot{\mathbf{X}}$ e $\dot{\mathbf{X}}$ são a derivada segunda e a derivada primeira das variáveis de estado, respectivamente, em relação ao tempo. \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C}

são as matrizes de coeficientes e \mathbf{D} é o vetor de termos independentes.

A classe abstrata *Solution* é a responsável pela solução, no INSANE, da Eq. (3.1). Esta classe possui as informações pertinentes para a obtenção dos resultados do problema numérico.

A classe abstrata *Model* contém as informações do método numérico e os dados do modelo discreto. Esta classe retornará as informações do modelo para que a classe *Assembler* monte o sistema de equações.

Model e *Solution* se comunicam com a interface *Persistence*, a qual é responsável pela interpretação dos dados de entrada, assim como repassar as informações dos dados de saída para que possam servir para outras tarefas, na ocasião de serem observadas alterações no estado do modelo discreto.

3.0.3 Implementação do *hp-Cloud*

Esta seção apresenta as principais classes que foram alteradas ou criadas para a inclusão do método *hp-Cloud*. A sequência será dividida conforme as interfaces e classe abstrata do núcleo numérico (Fig. 3.2), *Persistence*, *Model*, *Assembler* e *Solution*.

3.0.3.1 Interface *Persistence*

Conforme Fig. 3.2, o processo de observações das alterações acontece conforme o padrão de projetos *Observer-Observable*. Assim, quando um objeto denominado *observador* é criado ele passa a pertencer à lista de observadores dos objetos denominados *observados*. Neste caso, a tarefa do observador é incumbida à interface *Persistence*, enquanto que os objetos observados consistem da classe abstrata *Solution* e da interface *Model*. A interface *Persistence* também será a responsável por receber os dados de entrada através de arquivos XML, que irá tratar da preservação dos dados do ambiente INSANE. Outras informações sobre como o INSANE

trabalha com estes dados podem ser encontrado em Fonseca (2008).

Com o intuito de registrar os dados referentes à análise pelo método *hp-Cloud* e que são adicionais àqueles do EFG (enriquecimento, por exemplo), foi necessário alterar a classe *PersistenceAsXML*, a qual implementa a interface *Persistence*. Os dados são lidos do arquivo XML e são armazenados e transmitidos para o modelo numérico, como mostra a Fig. 3.3, preenchendo os dados necessários na classe *Model*.

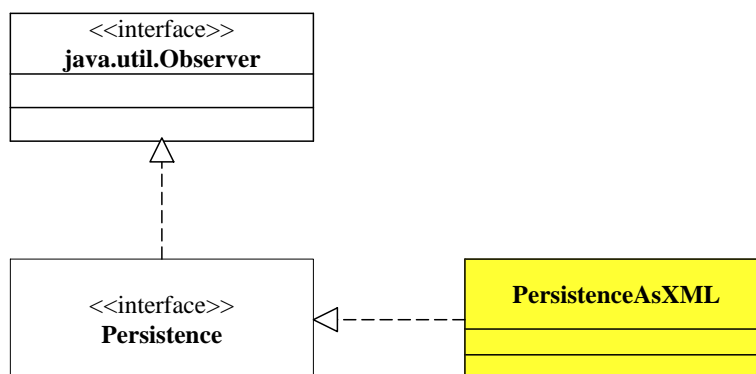


Figura 3.3: Diagrama de classes para *Persistence*

3.0.3.2 Interface *Assembler*

Conforme citado anteriormente, a interface *Assembler* é aquela que possui os métodos necessários para a composição do sistema matricial dado pela Eq. (3.1). A interface *Assembler* é implementada pela classe denominada *FemAssembler*. Com o objetivo de tirar o máximo proveito do sistema INSANE, Silva (2012) partiu do pressuposto de que uma célula de integração pode ser representada como um elemento finito. Assim, a classe *MfreeAssembler* do EFG é uma extensão da classe *FemAssembler*, assim como a classe *MfreeModel* é uma extensão da classe *FemModel*. Seguindo

a mesma linha de raciocínio, criou-se uma classe chamada *HpCloudAssembler* que trabalha como extensão da classe *MfreeAssembler*. A Fig. 3.4 mostra as classes que implementam a interface *Assembler* a partir da classe *FemAssembler*.

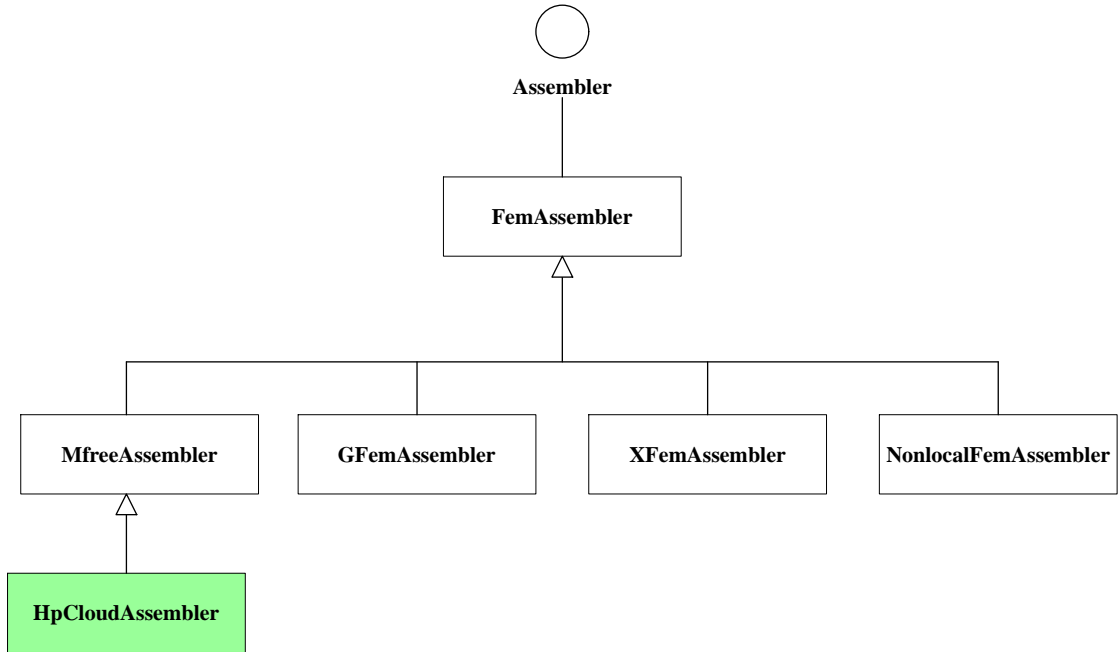


Figura 3.4: Classes que implementam a interface *Assembler* a partir da classe *FemAssembler*

Assim, na análise estática, a Eq. (3.1), usando o método dos multiplicadores de Lagrange torna-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_u \\ \mathbf{\Lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_p \\ \mathbf{Q}_{lm} \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

que é a representação adotada para a Eq. (2.73), sendo \mathbf{C} a matriz de rigidez do modelo, \mathbf{G} a matriz que leva em conta a interpolação Lagrangeana para assegurar as condições de contorno essenciais, \mathbf{X}_u o vetor de parâmetros de deslocamentos nodais, $\mathbf{\Lambda}$ o vetor de multiplicadores de Lagrange, \mathbf{R}_p o vetor de forças prescritas calculadas levando em conta as funções de forma do MMQM e \mathbf{Q}_{lm} o vetor que leva em conta a interpolação dos deslocamento prescritos.

Caso a solução seja através do método da penalidade, o sistema matricial em regime estático é dado por:

$$[\mathbf{C} + \mathbf{C}^p] \{\mathbf{X}\} = \{\mathbf{F} + \mathbf{F}^p\} \quad (3.3)$$

que é a representação adotada para a Eq. (2.79), sendo \mathbf{C} a matriz de rigidez, \mathbf{C}^p a matriz de fatores de penalidade, \mathbf{X} o vetor de parâmetros de deslocamentos nodais, \mathbf{F} o vetor de forças prescritas e \mathbf{F}^p o vetor que leva em conta a penalidade devido aos deslocamentos prescritos.

3.0.3.3 Classe abstrata *Solution*

A classe *Solution* é a responsável pela solução do sistema apresentado pela Eq. (3.1). A classe *SteadyState* implementa a solução para o caso estático linear. Tendo como atributo a classe *LinearEquationSystem* e a interface *Assembler*, o sistema de equações lineares montado por *Assembler* é solucionado pela *LinearEquationSystem* (Fig. 3.5). A implementação do *hp-Cloud* aproveitou integralmente as alterações introduzidos para o EFG, conforme pode ser constatado ap se verificar o trabalho de Silva (2012).

3.0.3.4 Interface *Model*

A interface *Model* é responsável por representar o modelo discreto do problema. Uma classe denominada *HpCloudModel* foi criada com o objetivo de representar o modelo do *hp-Cloud*. Ela herda da classe *MfreeModel* uma lista de campos nodais (*mfNodes*), uma lista de células de integração (*mfElements*), uma lista de domínios de suporte (*influenceDomain*), funções de forma do MMQM (*mfShape*) e uma lista de segmentos para definição dos domínios de suporte (*listOfSegments*). A classe *MfreeModel*, por sua vez, estende a classe *FemModel*, como exemplificado na Fig. 3.6. A classe *HpCloudModel* possui como atributo uma lista de variáveis do tipo

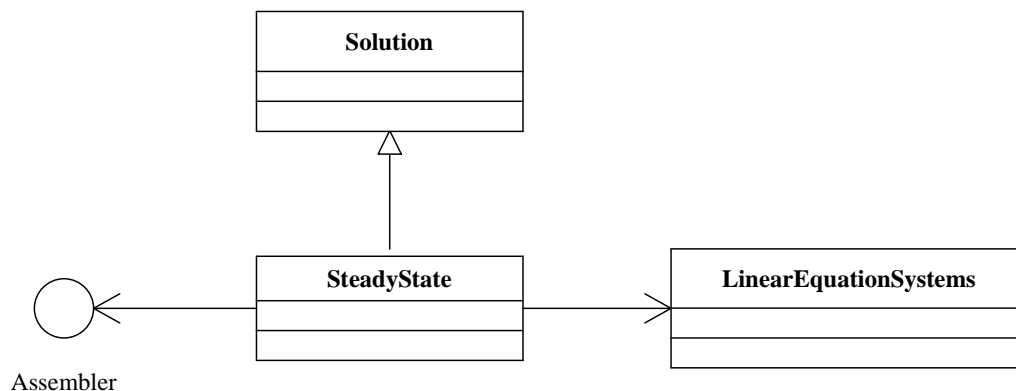


Figura 3.5: *Solution*

EnrichmentType. Tal atributo é usado para a descrição das funções enriquecedoras que serão multiplicadas pela Partição da Unidade com o objetivo de fornecer à aproximação o comportamento da função que se deseja representar através do enriquecimento polinomial ou de outro tipo, conforme Eq. (2.53).

3.0.3.5 Classe abstrata *ProblemDriver*

O objetivo da classe abstrata *ProblemDriver* é a de repassar para a interface *Assembler* os dados para a montagem do sistema de equações. Estes dados são, por exemplo, os valores a serem alocados na matriz de rigidez do problema, calculada por alguma classe derivada. Neste trabalho foi implementada uma classe denominada *HpCloudParametric*, derivada da classe abstrata *SolidMech*, que por sua vez é derivada da classe abstrata *ProblemDriver*. A classe *hpCloudParametric* trabalha de forma análoga à classe *MfreeParametric*, com a diferença de que leva em conta os graus de liberdade adicionais por ocasião do enriquecimento extrínseco (Fig. 3.7).

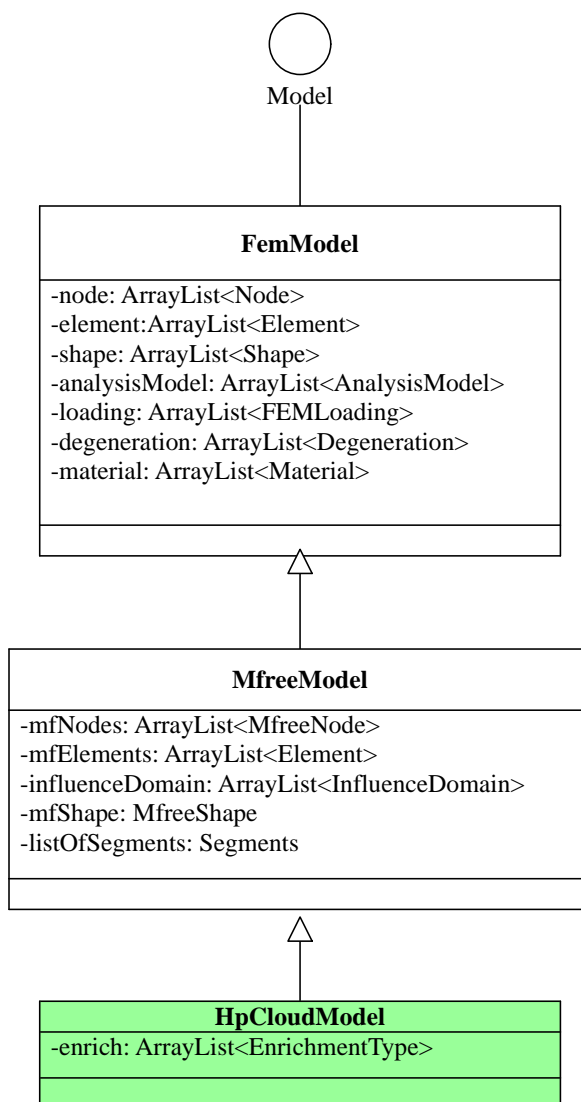


Figura 3.6: *Model*

3.0.3.6 Classe abstrata *AnalysisModel*

A classe abstrata *AnalysisModel* é a responsável pela definição do modelo matemático. Na implementação, trabalhou-se com os modelos matemáticos de estado plano de tensão e estado plano de deformação. Os graus de liberdade do enriquecimento foram o motivo para a criação das classes *HpCloudPlaneStress*, derivada da classe *PlaneStressMfree* e da classe *HpCloudPlaneStrain*, derivada da classe *PlaneStrainMfree* (Fig. 3.8).

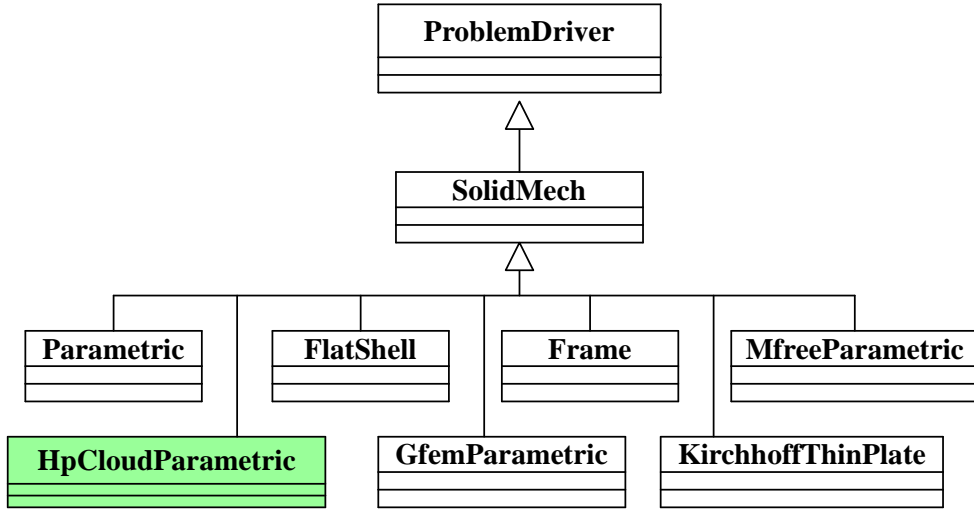


Figura 3.7: Classe *ProblemDriver*

3.0.3.7 Classes que definem as funções de enriquecimento

As funções de forma do MMQM são calculadas com o auxílio da classe abstrata *MfreeShape*. Problemas bidimensionais por exemplo, utilizam os métodos presentes na classe *MlsShape2D*, a qual é uma extensão de *MfreeShape*. Após o cálculo das funções de forma, são efetuados os enriquecimentos, de acordo com as informações passadas ao método no momento da definição do enriquecimento dos graus de liberdade. O tipo de enriquecimento é definido pela classe abstrata *EnrichmentType* usada na declaração da lista de objetos da classe *HpCloudModel*, conforme seção 3.0.3.4 e implementado de forma análoga ao trabalho desenvolvido por Alves (2012), na concepção do MEFM no INSANE. Esta classe então armazena e manipula as informações relacionadas ao enriquecimento nodal. Assim, as funções $\{L_{ij}(\mathbf{x})\}_{i=1}^q$ sendo polinomiais, o monômio $\{L_{ij}(\mathbf{x})\}_{i=1}^q$ a partir do segundo termo, dado que o primeiro é unitário, ou seja, $L_{j1}(\mathbf{x}) = 1$, possui a seguinte forma:

$$\{L_{ij}(\mathbf{x})\}_{i=2}^q = \left\{ \left(\frac{x - x_j}{h_j} \right)^{\alpha_i} \cdot \left(\frac{y - y_j}{h_j} \right)^{\beta_i} \cdot \left(\frac{z - z_j}{h_j} \right)^{\gamma_i} \right\}_{i=2}^q \quad (3.4)$$

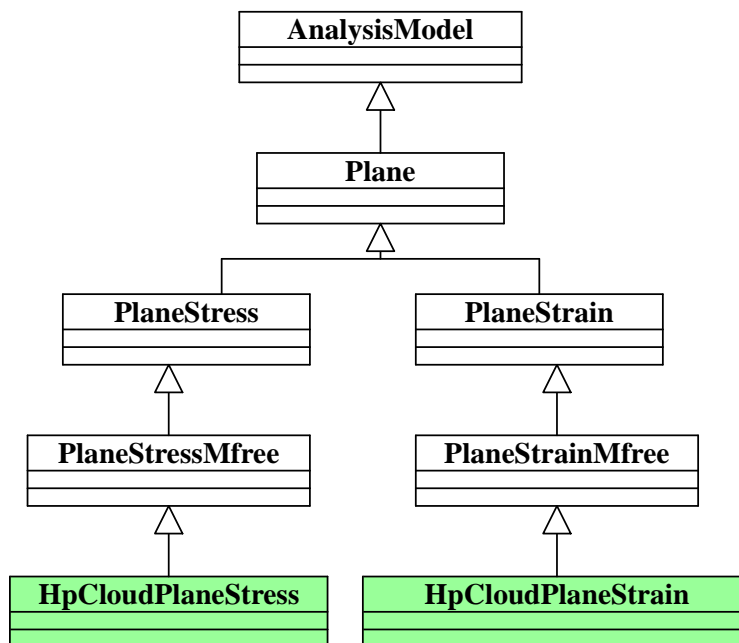


Figura 3.8: Classe *AnalysisModel*

sendo a constante h_j um parâmetro de escala que pode ser associado ao tamanho do domínio de suporte, com o objetivo de minimizar erros de arredondamento, assim como a subtração pelas coordenadas da posição do nó, conforme recomendam Duarte et al. (2000). Os expoentes α_i , β_i e γ_i são valores relativos aos graus do polinômio do enriquecimento, para as direções x , y e z , respectivamente. Assim como acontece no INSANE para o GFEM, cada nó pode possuir uma lista de objetos da classe *EnrichmentType*. Isso permite que cada nó possa ser enriquecido com diferentes funções de enriquecimento. De forma análoga, o mesmo ocorre com o tamanho do domínio de suporte. Assim, os nós podem possuir domínios de suporte de tamanhos diferentes uns dos outros.

Para o enriquecimento com singularidade implementado por Alves (2012), na qual as funções tem o objetivo de representar campos de tensões em regiões de

singularidade nas estruturas, para o modo I de abertura, as equações que descrevem este comportamento são dadas por Szabo e Babuška (1991):

$$u_x(r, \theta) = \frac{A_1}{2G} r^{\lambda_1} \{[\kappa - Q_1(\lambda_1 + 1)] \cos \lambda_1 \theta - \lambda_1 \cos(\lambda_1 - 2)\theta\} \quad (3.5)$$

$$u_y(r, \theta) = \frac{A_1}{2G} r^{\lambda_1} \{[\kappa - Q_1(\lambda_1 + 1)] \sin \lambda_1 \theta - \lambda_1 \sin(\lambda_1 - 2)\theta\} \quad (3.6)$$

Para estado plano de deformações,

$$\kappa = 3 - 4\nu \quad (3.7)$$

e para estado plano de tensões,

$$\kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \quad (3.8)$$

sendo ν o coeficiente de Poisson. Os valores de λ_1 e Q_1 são obtidos conforme o trabalho de Szabo e Babuška (1991). A classe que retorna as funções de forma enriquecidas é a *HpCloudEnrichedShape* que é derivada da classe abstrata *MfreeShape*. Ela possui variável do tipo *MfreeShape*, uma vez que as funções de forma do MMQM também devem estar disponíveis nesta etapa para que o enriquecimento seja concluído (Fig 3.9).

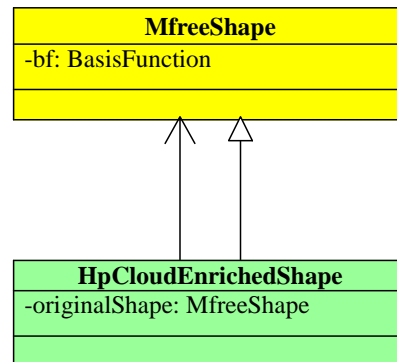


Figura 3.9: Classe *MfreeShape*

3.0.3.8 Classes que definem as células de integração

Como discutido anteriormente, a célula de integração do *hp*-Cloud também se comporta como um elemento finito. Para esta aplicação, criou-se dois tipos de células de integração para problemas bidimensionais, uma denominada *HpQuadrilateralCell* e outra *TriangularCell* (Fig 3.10). Estas classes foram criadas devido à necessidade de sobreposição de alguns métodos, principalmente por causa da diferença do número de graus de liberdade entre o *hp*-Cloud e o EFG. As classes que definem as células de integração do *hp*-Cloud, possuem uma variável denominada *parametricElement*. Assim, elas, além de derivarem da classe abstrata *ParametricElement*, possuem variável do tipo *ParametricElement* que atua como um elemento paramétrico do MEF. Isso se faz necessário devido às informações que devem ser passadas ao método no momento do enriquecimento da PU (Fig. 3.10).

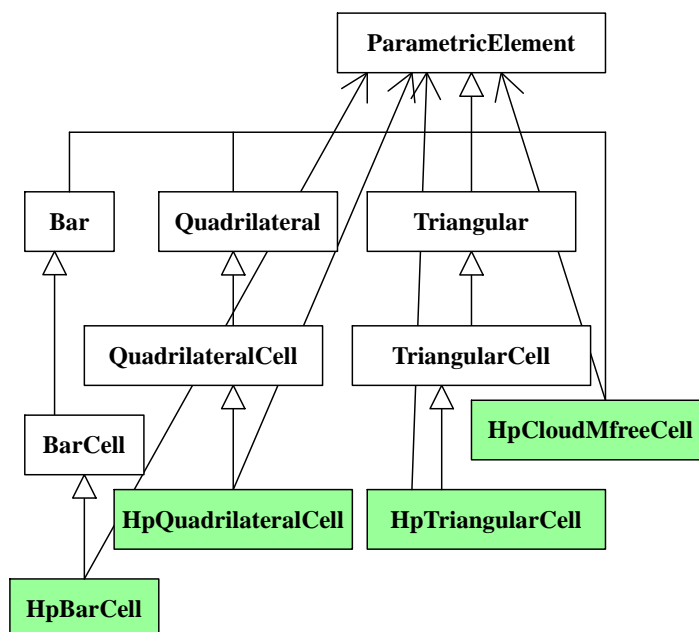


Figura 3.10: Classes derivadas de *ParametricElement* para os métodos sem malha

Capítulo 4

Análise Numérica

Este capítulo aborda simulações numéricas usando o método *hp*-Cloud no sistema INSANE. Nele são apresentados os testes realizados em problemas de Mecânica dos Sólidos, onde são analisados os resultados obtidos através da variação de alguns parâmetros deste método. Além do mais, estes resultados são confrontados com aqueles obtidos usando o EFG ou o MEFG. Em geral, os métodos sem malha possuem uma variedade de parâmetros que podem ser alterados e que irão influenciar no resultado final. Portanto, neste capítulo será verificada a influência da escolha de alguns destes parâmetros como domínio de suporte ou método de imposição das condições de contorno essenciais usando penalidade, multiplicadores de Lagrange ou acoplamento com o MEF. Além do mais, é apresentado o estudo de convergência nas condições de refinamento h e enriquecimento p .

4.1 Viga em balanço sob flexão simples

Esta seção trabalha com a análise do problema de uma viga em estado plano de tensão, submetida à forças em suas extremidades, como mostrado na Fig. 4.1. Este problema é apresentado no trabalho de Lee e Bathe (1993) e possui os seguintes valores e propriedades, em unidades consistentes:

- Comprimento $L = 100,0$

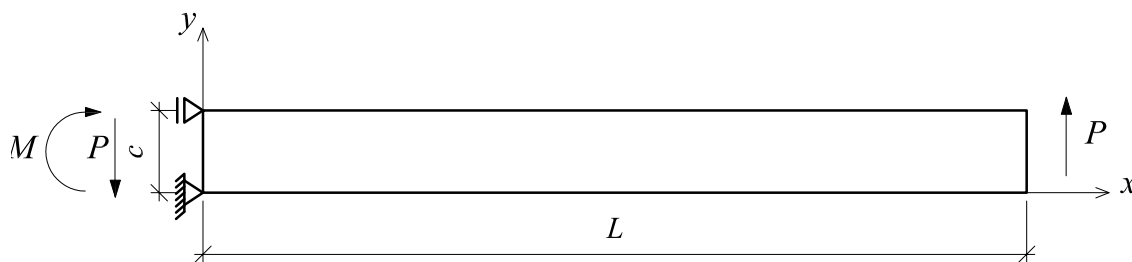


Figura 4.1: Viga submetida às forças nas extremidades

- Altura $c = 10,0$
- Módulo de elasticidade $E = 1,0 \cdot 10^7$
- Espessura $t = 1,0$

O problema apresentado é submetido a uma força P com distribuição parabólica, da seguinte forma:

$$P = \frac{120y}{L} - \frac{120y^2}{cL} \quad (4.1)$$

Impõe-se também as reações de apoio, aplicando-se na posição $x = 0$ as reações de cisalhamento de valor $-P$ e as reações de flexão de valor:

$$M = \frac{240y}{c} - 120 \quad (4.2)$$

Como observado por Barros (2002), os vínculos introduzidos servirão apenas para eliminar os movimentos de corpo-rígido, sendo que a estrutura encontra-se auto-equilibrada. Além do mais, o comportamento dos apoios mostrados na Fig. 4.1 não são reproduzidos pelo método dos multiplicadores de Lagrange ou da penalidade, sendo que os mesmos são mostrados na figura apenas a título de ilustração.

Em Lee e Bathe (1993) também são encontradas as soluções analíticas para este problema, logo, o deslocamento horizontal é dado por:

$$u = \frac{1}{E} \left(\frac{120}{cL} x^2 y - \frac{92}{cL} y^3 - \frac{60}{L} x^2 - \frac{240}{c} xy + \frac{138}{L} y^2 + 120x - \frac{46c}{L} y \right) \quad (4.3)$$

o deslocamento vertical, dado por:

$$v = \frac{1}{E} \left(-\frac{40}{cL} x^3 - \frac{36}{cL} xy^2 + \frac{120}{c} x^2 + \frac{36}{L} xy + \frac{36}{c} y^2 + \frac{46c}{L} x - 36y \right) \quad (4.4)$$

As tensões normais ao longo da direção x são dadas por:

$$\sigma_{xx} = \frac{240}{cL} xy - \frac{120}{L} x - \frac{240}{c} y + 120 \quad (4.5)$$

E as tensões normais ao longo da direção y por:

$$\sigma_{yy} = 0 \quad (4.6)$$

e as tensões de cisalhamento por

$$\tau_{xy} = -\frac{120}{cL} y^2 + \frac{120}{L} y \quad (4.7)$$

As equações apresentadas acima são válidas para $0 \leq x \leq L$ e $0 \leq y \leq c$.

4.1.1 Estudo de convergência usando refinamento h

Para este estudo avaliou-se o comportamento do hp -Cloud frente ao refinamento h , ou seja aumentando-se o número de graus de liberdade do problema pelo aumento do número de nós, variando-se, conforme a exigência da aproximação, o tamanho do domínio de suporte. Nesta análise utilizou-se as funções de Shepard e enriquecimento linear obtido a partir da seguinte base polinomial:

$$\mathbf{P}_{p=1} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Com o enriquecimento dado pela Eq. (4.8), as funções de forma são definidas, conforme Eq. (3.4), como:

$$\boldsymbol{\varphi}_j^T = \begin{bmatrix} \phi_j & 0 & \frac{x-x_j}{h_j} \phi_j & 0 & \frac{y-y_j}{h_j} \phi_j & 0 & \frac{x-x_j}{h_j} \frac{y-y_j}{h_j} \phi_j & 0 \\ 0 & \phi_j & 0 & \frac{x-x_j}{h_j} \phi_j & 0 & \frac{y-y_j}{h_j} \phi_j & 0 & \frac{x-x_j}{h_j} \frac{y-y_j}{h_j} \phi_j \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

onde o valor adotado para h_j é igual ao tamanho do domínio de suporte, correspondente à maior distância entre dois nós adjacentes. Conforme pode ser visto nas Fig. 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5, a discretização I é composta de 6 nós, a discretização II por 15 nós, a discretização III por 45 e a discretização IV por 153 nós, todos regularmente espaçados. Assim, os domínios de suporte, adotados aqui como tensoriais, possuem valores de R , respectivamente, iguais a 50, 25, 12,5 e 6,25¹.

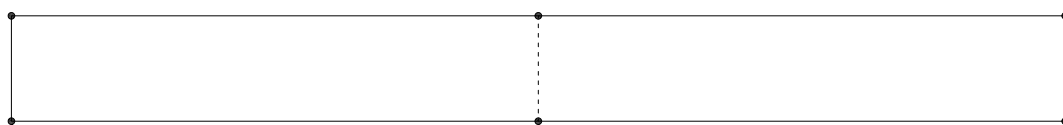


Figura 4.2: Discretização I

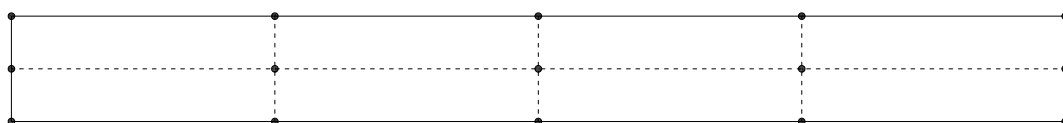


Figura 4.3: Discretização II

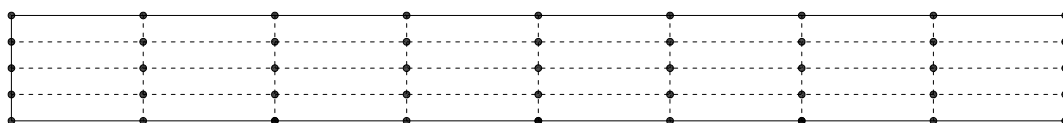


Figura 4.4: Discretização III

Como a integração numérica para este problema é dada por quadratura de Gauss, cada célula de integração será limitada por um conjunto de 4 nós, conforme ilustrado nas respectivas figuras, logo a discretização I terá 2 células de integração, a discretização II terá 8 células de integração, discretização III terá 32 células de integração e a discretização IV terá 128 células de integração. Conforme já comentado, em geral

¹Lembrando que para domínios de suporte tensoriais o valor R equivale à medida da base do retângulo.

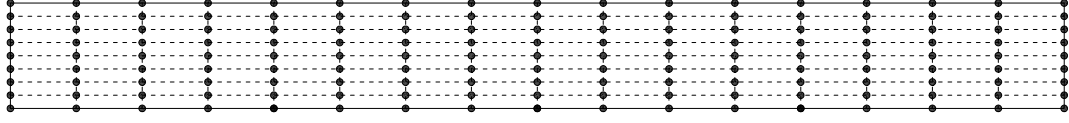


Figura 4.5: Discretização IV

os métodos sem malha necessitam de um grande número de pontos de integração para a obtenção de soluções precisas, como ocorre no caso das funções de forma racionais construídas usando o MMQM. Assim, como o interesse nesta primeira análise é o estudo de convergência h , utilizou-se uma quadratura de 25×25 pontos de integração por célula. O objetivo é minimizar ao máximo a influência da integração numérica.

As funções de ponderação utilizadas são do tipo *Spline* cúbica (Eq. 2.38). Para o método da penalidade o valor do parâmetro utilizado é de 1×10^{15} .

A convergência do refinamento h é verificada através da norma do erro relativo da energia de deformação dado por:

$$e\% = 100 \frac{\sqrt{\mathcal{U}_{ex} - \mathcal{U}_{ap}}}{\sqrt{\mathcal{U}_{ex}}} \quad (4.10)$$

sendo \mathcal{U}_{ex} a energia de deformação de referência, obtida a partir da solução analítica para este problema, e \mathcal{U}_{ap} o valor da energia de deformação da aproximação numérica. A taxa de convergência é tomada como sendo o coeficiente angular da reta formada por todos os pontos pertencentes à curva em análise, obtidas por meio de regressão linear.

As Tab. 4.1 e 4.2, mostradas na sequência, apresentam os valores das energias de deformação para as discretizações I, II, III e IV, assim como o erro relativo obtido usando o método da penalidade e o método dos multiplicadores de Lagrange para a imposição das condições de contorno essenciais. Paralelamente, estes dados são confrontados com os obtidos com o EFG usando a plataforma INSANE, nas mesmas condições de tamanho de domínio de suporte, valor do parâmetro de penalidade,

funções de ponderação, e grau de representação polinomial. Uma característica inerente ao EFG e que deve ser observada na montagem do modelo é a necessidade de se prevenir a singularidade da matriz de momentos (Eq. 2.30). Assim, o tamanho do domínio de suporte usado no EFG, em geral, deve ser maior que o mínimo valor necessário usado para o hp -Cloud construído com funções de Shepard (Eq. 2.45). Portanto, tentou-se manter os domínios de suporte pequenos, mas respeitando-se um número mínimo de nós a serem cobertos pelos mesmos. Assim, para o EFG, foi adicionado um valor igual a 0,01 ao domínio de suporte, logo, para o EFG, $R = R + 0,01$.

Tabela 4.1: Erro da energia de deformação para o refinamento h para o método dos multiplicadores de Lagrange, considerando aproximação linear ($p = 1$) e domínio de suporte igual à maior distância entre nós adjacentes ($R = R_{max}$)

Discret.	hp -Cloud			EFG		
	\mathcal{U}_{ap}	e (%)	R	\mathcal{U}_{ap}	e (%)	R
I	0,029567	79,6	50,00	0,001719	98,9	50,01
II	0,042489	68,8	25,00	0,036883	73,7	25,01
III	0,058814	52,0	12,50	0,050038	61,6	12,51
IV	0,072136	32,5	6,25	0,070137	36,1	6,26
$\mathcal{U}_{ex} = 0,080624$						

Tabela 4.2: Erro da energia de deformação para o refinamento h para o método da penalidade, considerando aproximação linear ($p = 1$) e domínio de suporte igual à maior distância entre nós adjacentes ($R = R_{max}$)

Discret.	hp -Cloud			EFG		
	\mathcal{U}_{ap}	e (%)	R	\mathcal{U}_{ap}	e (%)	R
I	0,030696	78,7	50,00	0,007520	95,2	50,01
II	0,042897	68,4	25,00	0,037004	73,6	25,01
III	0,058939	51,9	12,50	0,050739	60,8	12,51
IV	0,072149	32,4	6,25	0,070180	36,0	6,26
$\mathcal{U}_{ex} = 0,080624$						

As Tab. 4.1 e 4.2 mostram a energia de deformação do problema da viga empregando-se os métodos hp -Cloud e EFG, assim como o erro calculado pela Eq. (4.10). Para estes casos, foram considerados domínio de suporte tensorial igual à maior distância entre nós adjacentes, dada por $R = R_{max}$, e aproximação linear

usando polinômio completo, como mostrado pela Eq. (4.8), tanto para o enriquecimento do *hp*-Cloud quanto para a base polinomial do EFG. Estes dados são apresentados nos gráficos das Fig. 4.6 e 4.7 em função do número de graus de liberdade e em função do número de nós do modelo, respectivamente. Tendo em vista que o enriquecimento extrínseco das funções de forma acrescenta graus de liberdade extras ao problema, observa-se melhor aproximação concebida pelo EFG quando se verifica a norma do erro da energia de deformação pelo número de graus de liberdade (Fig. 4.6). Em contrapartida, a aproximação do *hp*-Cloud torna-se melhor quando comparada com o número de nós (Fig. 4.7). Os graus de liberdade extras do *hp*-Cloud são as variáveis que irão definir a aproximação. Ao se observar os gráficos mostrados

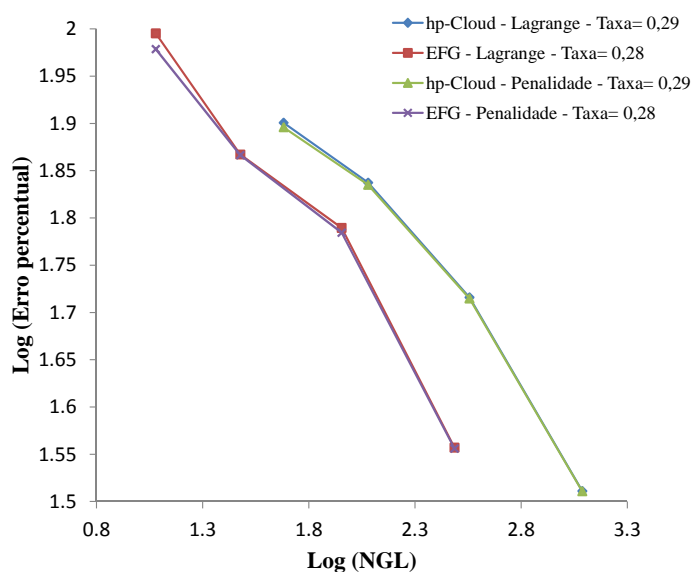


Figura 4.6: Gráfico da norma do erro da energia de deformação pelo número de graus de liberdade, para $p = 1$ e domínio de suporte igual a R_{max} .

nas Fig. 4.6 e 4.7, nota-se a similaridade no comportamento de ambos os métodos de imposição das condições de contorno (multiplicadores de Lagrange e penalidade). Sabendo, entretanto, que a precisão da aproximação é dependente do valor do parâmetro de penalidade adotado, será verificado na Seção 4.1.4, a influência que este fator tem na análise deste problema da viga.

Outro parâmetro que também pode influenciar na precisão da aproximação é o

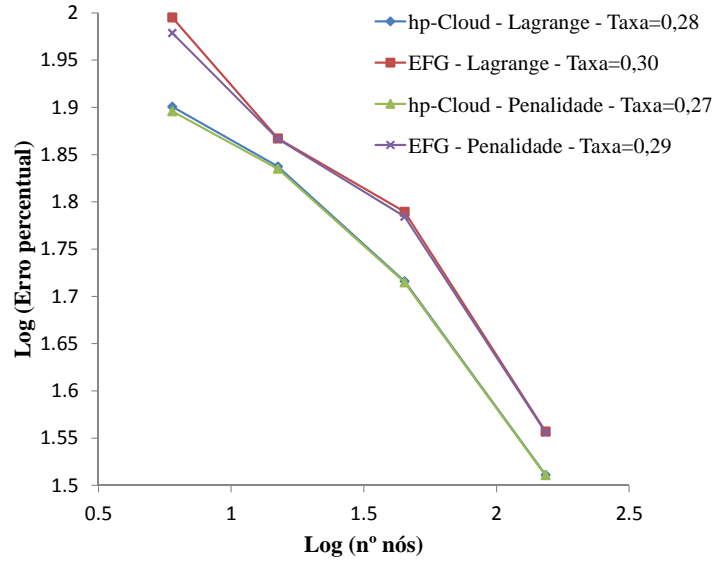


Figura 4.7: Gráfico da norma do erro da energia de deformação pelo número de nós, para $p = 1$ e domínio de suporte igual a R_{max} .

tamanho do domínio de suporte. Objetivando mostrar como é importante a escolha de um domínio de suporte adequado, os valores de erro da energia de deformação são novamente reproduzidos, porém o domínio de suporte é aumentado para $R = 2R_{max}$, ou seja, duas vezes a maior distância entre dois nós adjacentes. Com este valor de domínio de suporte, não é mais necessário a soma de 0,01 no valor de R para o EFG. Os resultados obtidos são apresentados nas Tab. 4.3 e 4.4 e no gráfico da Fig. 4.8.

Tabela 4.3: Erro da energia de deformação para o refinamento h para o método dos multiplicadores de Lagrange, considerando aproximação linear ($p = 1$) e domínio de suporte igual $2R_{max}$

Discret.	hp -Cloud			EFG		
	\mathcal{U}_{ap}	e (%)	R	\mathcal{U}_{ap}	e (%)	R
I	0,079422	12,2	100,00	0,027174	81,4	100,00
II	0,080241	6,9	50,00	0,066321	41,1	50,00
III	0,080614	1,1	25,00	0,078270	17,1	25,00
IV	0,080623	0,4	12,50	0,080372	5,6	12,50
$\mathcal{U}_{ex} = 0,080624$						

Ao se observar as Tabelas (4.3) e (4.4), nota-se como o erro da energia de deformação pode ser consideravelmente reduzido apenas com a escolha do tamanho do domínio de suporte. Estes dados são exibidos no gráfico da Fig. 4.8, onde o

Tabela 4.4: Erro da energia de deformação para o refinamento h para o método da penalidade, considerando aproximação linear ($p = 1$) e domínio de suporte igual $2R_{max}$

Discret.	hp -Cloud			EFG		
	\mathcal{U}_{ap}	e (%)	R	\mathcal{U}_{ap}	e (%)	R
I	0,079530	11,7	100,00	0,027813	80,9	100,00
II	0,080479	4,2	50,00	0,070458	35,5	50,00
III	0,080615	1,1	25,00	0,078714	15,4	25,00
IV	0,080623	0,4	12,50	0,080335	6,0	12,50

$\mathcal{U}_{ex} = 0,080624$

comportamento do hp -Cloud e do EFG são plotados em função do número de graus de liberdade. Constata-se que para um domínio de suporte igual a $2R_{max}$, a convergência do hp -Cloud melhora em relação ao EFG, nas condições apresentadas. A influência do tamanho do domínio de suporte para o hp -Cloud será discutida na Seção (4.1.3).

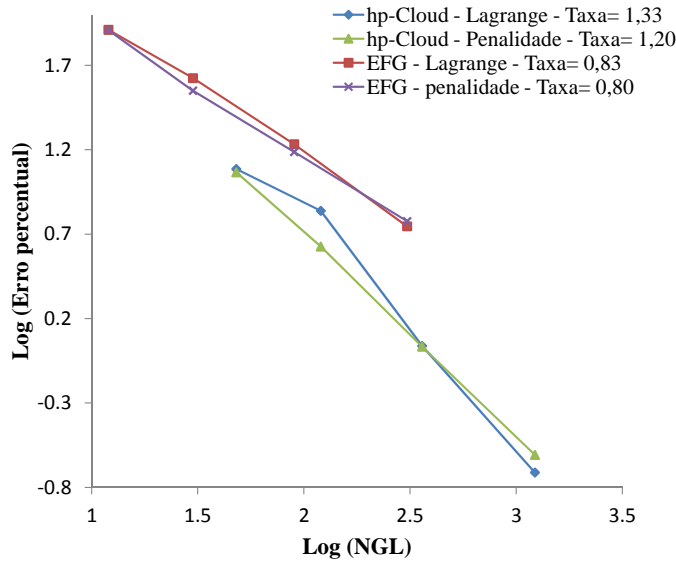


Figura 4.8: Gráfico da norma do erro da energia de deformação pelo número de graus de liberdade, para $p = 1$ e domínio de suporte igual a $2R_{max}$.

4.1.2 Estudo de convergência usando enriquecimento extrínseco

Para avaliação da convergência usando enriquecimento extrínseco, adotou-se a discretização II, apresentada na Fig 4.3. O enriquecimento extrínseco lida com o

aumento do grau da função que se deseja representar através do enriquecimento da PU. Para o exemplo proposto, a função é polinomial. Como a solução analítica do problema para o deslocamento, conforme mostram as Eq. (4.3) e (4.4), é um polinômio de ordem máxima igual a 3, espera-se que ao enriquecer o método com polinômio de terceiro grau, se atinja esta solução. Para esta avaliação, utilizou-se funções de Shepard na construção das funções de forma, domínio de suporte igual a $R = R_{max} = 25,00$, função de peso do tipo *Spline* cúbica e, impondo-se as condições de contorno de Dirichlet com o método da penalidade, adotou-se um fator igual a 1×10^{15} . A Tab. 4.5, apresenta a norma do erro da energia de deformação para enriquecimento com $p = 1$, $p = 2$ e $p = 3$. As funções de enriquecimento são obtidas, conforme Eq. (3.4), empregando-se as bases de monômios apresentadas nas Eq. (4.11), (4.12) e (4.13) abaixo:

$$\mathbf{P}_{p=1} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$$\mathbf{P}_{p=2} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & y^2 & xy & x^2y & xy^2 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$\mathbf{P}_{p=3} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & y^2 & xy & x^2y & xy^2 & x^3 & y^3 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Tabela 4.5: Erro da energia de deformação para o enriquecimento extrínseco, considerando a discretização II (15 nós) e domínio de suporte $R = R_{max} = 25,00$

Enriq.	Reprodução	\mathcal{U}_{ap}		e (%)	
		Lagrange	Penalidade	Lagrange	Penalidade
$p = 1$	$P = 1$	0,042489	0,042898	68,8	68,4
$p = 2$	$P = 2$	0,080613	0,080623	1,2	0,4
$p = 3$	$P = 3$	0,080624	0,080624	0,0	0,0
$\mathcal{U}_{ex} = 0,080624$					

A Tab. 4.6 mostra os resultados deste problema usando o MEFM. Como na discretização foram utilizados 8 elementos finitos de aproximação linear, bastava efetuar o enriquecimento quadrático para a obtenção da solução de referência, uma

vez que esta combinação resulta em polinômio de terceiro grau. As bases de monômios usadas no enriquecimento do MEFM foram:

$$\mathbf{P}_{p=1} = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$\mathbf{P}_{p=2} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & y^2 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Além disso, a quadratura de Gauss usada na integração numérica do MEFM foi de 10×10 pontos por elemento e as condições de contorno foram impostas de forma direta.

Tabela 4.6: Erro da energia de deformação para o enriquecimento extrínseco, usando o MEFM com 8 elementos Lagrangeanos de aproximação linear

Enriq.	Reprodução	\mathcal{U}_{ap}	e (%)
$p = 0$	$P = 1$	0,023488	84,2
$p = 1$	$P = 2$	0,080204	7,2
$p = 2$	$P = 3$	0,080624	0,0
$\mathcal{U}_{ex} = 0,080624$			

Tabela 4.7: Deslocamento horizontal (u) e deslocamento vertical (v) na posição $x = 100$ e $y = 0$ para o enriquecimento extrínseco, considerando a discretização II e domínio de suporte $R = R_{max} = 25,00$

Enriq.	u		v	
	Lagrange	Penalidade	Lagrange	Penalidade
$p = 1$	$2,926 \times 10^{-4}$	$2,910 \times 10^{-4}$	$4,151 \times 10^{-3}$	$4,117 \times 10^{-3}$
$p = 2$	$5,999 \times 10^{-4}$	$5,999 \times 10^{-4}$	$8,046 \times 10^{-3}$	$8,046 \times 10^{-3}$
$p = 3$	$6,000 \times 10^{-4}$	$6,000 \times 10^{-4}$	$8,046 \times 10^{-3}$	$8,046 \times 10^{-3}$
$u_{ex} = 6,000 \times 10^{-4}$				
$v_{ex} = 8,046 \times 10^{-3}$				

Nas Tab. 4.5 e 4.6, há uma coluna chamada "Reprodução", onde estão expressos os graus dos polinômios que estão sendo representados. Assim, os valores, nesta coluna, possuem as seguintes correspondências: $P = 1$ reproduz um polinômio linear, $P = 2$ reproduz um polinômio quadrático e $P = 3$ reproduz um polinômio cúbico.

Conforme constatado através dos dados da Tab. 4.5, o erro da energia de deformação diminui com o enriquecimento extrínseco, à medida em que ocorre o aumento

do grau do polinômio da aproximação. Isso se confirma tanto na utilização do método dos multiplicadores de Lagrange quanto no método da penalidade. Assim, para o enriquecimento $p = 3$, a solução analítica é atingida². Os deslocamentos horizontal (u) e vertical (v) na posição $x = 100$ e $y = 0$ são mostrados na Tab. 4.7 e o gráfico da norma do erro da energia de deformação pelo número de graus de liberdade, mostrado na Fig. 4.9. Neste gráfico percebe-se uma convergência mais rápida usando o hp -Cloud que o MEFG³.

O enriquecimento extrínseco das funções de forma necessariamente aumenta o número de graus de liberdade do modelo. Assim, para a discretização de 15 nós (Fig. 4.3), o problema possui 120 graus de liberdade para $p = 1$ (Eq. 4.11), 240 graus de liberdade para $p = 2$ (Eq.4.12) e 300 graus de liberdade para $p = 3$ (Eq. 4.13). Com o aumento do número de graus de liberdade, aumenta-se o tamanho da matriz de rigidez, o custo computacional, em geral, é consideravelmente aumentado devido a isto.

4.1.2.1 Influência do grau do polinômio das funções de base e do enriquecimento da PU

Para o hp -Cloud, o aprimoramento da qualidade da função de aproximação $\phi_j^k L_i(\mathbf{x})$ (da Eq. 2.52) também pode ser obtido a partir da combinação entre o aumento do grau do polinômio das funções de base do MMQM e o aumento do grau do polinômio do enriquecimento das funções de forma. Denotando por enriquecimento intrínseco o primeiro e por enriquecimento extrínseco o segundo, conforme exposto na seção 2.5, realizou-se testes com a discretização II (15 nós), variando os valores de k (intrínseco) e p (extrínseco). Para os valores $k = 0$, as funções de base são representadas por uma função constante $\mathbf{P}_{k=0} = [1]$, ou seja, funções de forma

²Como as funções de forma do MMQM são racionais, em geral pode-se esperar um pequeno erro de aproximação numérica. Para os dados apresentados nas tabelas, os erros percentuais foram arredondados com uma casa decimal

³Os valores que representam polinômio de terceiro grau ($P = 3$) não estão plotados por resultarem em erro=0,0.

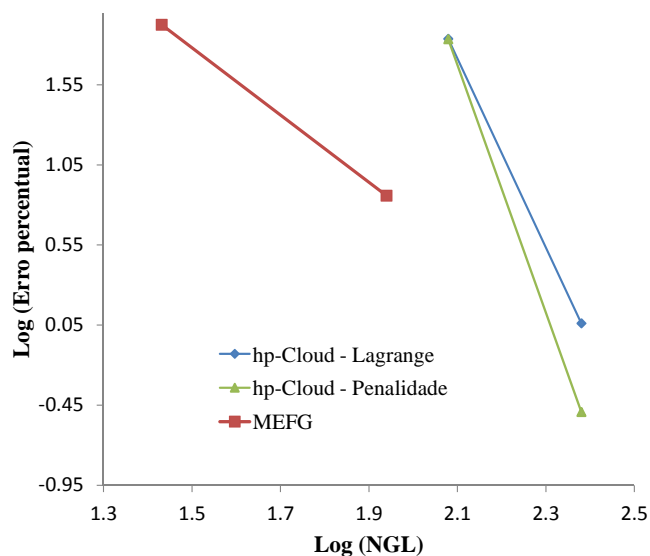


Figura 4.9: Gráfico da norma do erro da energia de deformação pelo número de graus de liberdade, para o enriquecimento $p = 1$, $p = 2$ e domínio de suporte $R = R_{max} = 25,00$.

do tipo Shepard. Assim, as combinações foram as seguintes:

1. $k = 0$, $p = 1$
2. $k = 0$, $p = 2$
3. $k = 0$, $p = 3$
4. $k = 1$, $p = 1$
5. $k = 1$, $p = 2$
6. $k = 2$, $p = 1$

Para este estudo foram utilizadas funções de peso *Spline* cúbica, fator de penalidade igual a 1×10^{15} , domínio de suporte igual a $2R_{max}$.

A Tab 4.8 apresenta os dados da energia de deformação e a norma do erro para as combinações do refinamento $p = k$ e enriquecimento p . Percebe-se que a combinação para $k = 2$ e $p = 1$ não reproduz tão bem o polinômio de grau 3 da aproximação, se comparadas com as outras combinações. Isso poderia ser esperado pelo fato das

Tabela 4.8: Energia de deformação para avaliação com enriquecimento k e p , para domínio de suporte $R = 2R_{max} = 50,00$ e discretização II

Enriq.	\mathcal{U}_{ap}		$e(\%)$	
	Lagrange	Penalidade	Lagrange	Penalidade
$k = 0, p = 1$	0,080241	0,080479	6,9	4,2
$k = 0, p = 2$	0,080624	0,080624	0,0	0,0
$k = 0, p = 3$	0,080624	0,080624	0,0	0,0
$k = 1, p = 1$	0,080590	0,080604	2,1	1,6
$k = 1, p = 2$	0,080624	0,080622	0,0	0,5
$k = 2, p = 1$	0,080496	0,080608	4,0	1,4
$\mathcal{U}_{ex} = 0,080624$				

funções do MMQM serem racionais. Pode-se notar ainda que o uso das funções de Shepard resulta nas melhores aproximações para o exemplo proposto, reafirmando a demonstração de Duarte e Oden (1996), na qual os mesmos apresentam as funções de Shepard como sendo, possivelmente, as melhores propostas para a construção da PU para o *hp*-Cloud.

4.1.3 Influência do tamanho do domínio de suporte

Como exibido na Seção (4.1.1), o tamanho do domínio de suporte pode interferir nos resultados da aproximação. Para o EFG há uma questão adicional em que o número de nós dentro do domínio de suporte deve ser tal que não ocasione a singularidade da matriz de momentos, o que não ocorre com *hp*-Cloud ao se utilizar as funções de Shepard. Para verificar como o tamanho do domínio de suporte pode atuar na precisão, foram feitos testes usando a discretização IV (153 nós), e com o tamanho do domínio de suporte igual a R_{max} , $1,5R_{max}$, $2R_{max}$, $3R_{max}$ e $4R_{max}$, sendo $R_{max} = 6,25$. Para esta análise usou-se enriquecimento linear (Eq. 4.8), funções de peso do tipo *Spline* cúbica, parâmetro de penalidade igual a 1×10^{15} e funções de Shepard. A Tab. 4.9 mostra os resultados da energia de deformação para a situação proposta.

Os resultados apresentados na Tab. 4.9 parecem confirmar o sugerido em Dolbow e Belytschko (1998), onde os autores recomendam a utilização de um valor de

Tabela 4.9: Energia de deformação para avaliação do domínio de suporte para a discretização IV, enriquecimento $p = 1$ e funções de Shepard

Domínio de influência	\mathcal{U}_{ap}		$e(\%)$	
	Lagrange	Penalidade	Lagrange	Penalidade
R_{max}	0,072136	0,072149	32,5	32,4
$1,5R_{max}$	0,078848	0,078853	14,8	14,8
$2R_{max}$	0,080624	0,080624	0,0	0,0
$3R_{max}$	0,080611	0,080611	1,3	1,3
$4R_{max}$	0,080624	0,080624	0,0	0,0
$5R_{max}$	0,080622	0,080622	0,5	0,5
$\mathcal{U}_{ex} = 0,080624$				

domínio de suporte de duas a quatro vezes a maior distância entre nós adjacentes. Para este problema, nota-se que o menor erro é obtido com o domínio de suporte igual a $4R_{max}$.

4.1.4 Influência do valor do parâmetro de penalidade

O valor do parâmetro de penalidade é outra variável que influencia na precisão dos métodos sem malha. Para este estudo, utilizou-se os valores de α igual a 10^8 , 10^9 , 10^{10} , 10^{11} , 10^{12} , 10^{13} , 10^{14} , 10^{15} , 10^{16} , 10^{17} , 10^{18} , 10^{19} e 10^{20} . Sendo o módulo de elasticidade (E) do exemplo igual a 10^7 , os testes foram formados considerando a margem sugerida por Liu (2010) ($10^5 E \leq \alpha \leq 10^8 E$), além de alguns valores menores e outros maiores para fins de comparação. Os parâmetros usados nesta análise foram, funções de peso *Spline* cúbica, domínio de suporte $R = 2R_{max} = 50,00$, enriquecimento $p = 1$ e funções de Shepard. Todos os testes foram feitos com a discretização II (15 nós).

Como apresentado na Tab. 4.10, o erro da energia de deformação tende a aumentar para o valor de $\alpha = 1 \times 10^{16}$, caindo novamente para $\alpha = 1 \times 10^{20}$. Para valores menores, o erro permanece praticamente constante em uma grande faixa de valores de α , inclusive para o intervalo $10^5 E \leq \alpha \leq 10^8 E$, estando de acordo com o sugerido por Liu (2010). O gráfico da Fig. 4.10, esboça esta constatação.

Tabela 4.10: Energia de deformação para avaliação do parâmetro de penalidade para a discretização II, enriquecimento $p = 1$ e funções de Shepard

α	\mathcal{U}_{ap}	$e(\%)$
1×10^{20}	0,080534	3,3
1×10^{19}	0,080098	8,1
1×10^{18}	0,080450	4,7
1×10^{17}	0,804778	4,3
1×10^{16}	0,804784	4,3
1×10^{15}	0,804794	4,2
1×10^{14}	0,804794	4,2
1×10^{13}	0,804794	4,2
1×10^{12}	0,804794	4,2
1×10^{11}	0,804794	4,2
1×10^{10}	0,804794	4,2
1×10^9	0,804794	4,2
1×10^8	0,804794	4,2
$\mathcal{U}_{ex} = 0,080624$		

4.2 Chapa com orifício em estado plano de deformação

Esta seção apresenta o problema de uma chapa com orifício em estado plano de deformação, com a geometria mostrada na Fig. 4.11. Devido à dupla simetria, apenas um quarto da chapa é analisado, conforme pode ser observado pela linha tracejada na figura. Esta simetria é garantida pela imposição das condições de contorno essenciais aplicadas nesta região.

As propriedades desta estrutura, em unidades consistentes, são:

1. Módulo de elasticidade $E = 1,0 \times 10^3$
2. Coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$
3. $\sigma = 1,0$

A solução de referência para este problema foi obtida usando o software ANSYS, com 14749 elementos finitos de aproximação quadrática, totalizando 89476 graus de

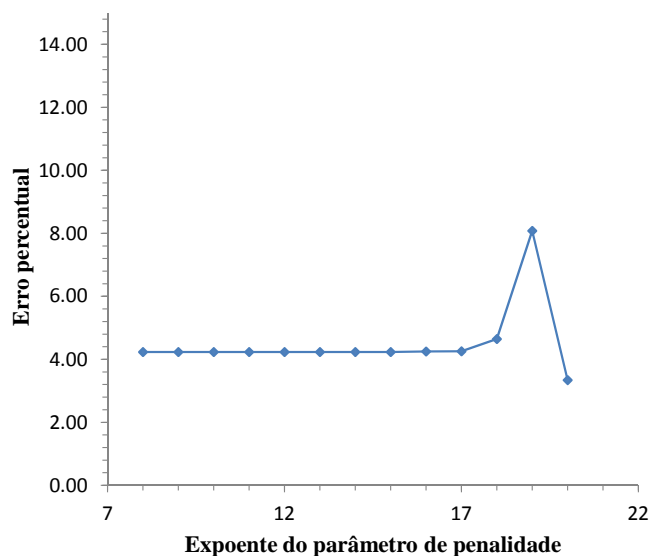


Figura 4.10: Gráfico da norma do erro da energia de deformação pelo valor do expoente do parâmetro de penalidade.

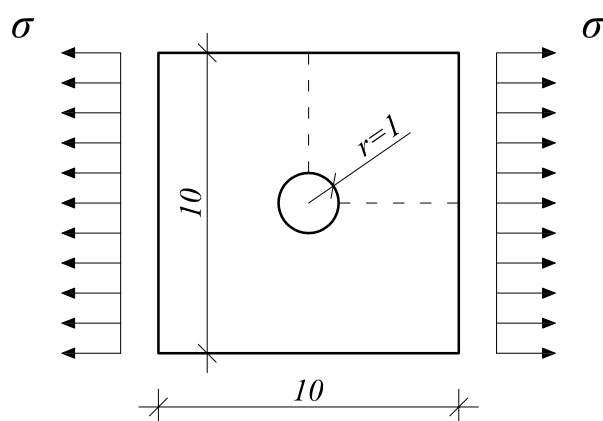


Figura 4.11: Chapa com orifício em estado plano de deformação

liberdade. Assim, a energia de deformação encontrada foi de 0,0125799151. O erro é avaliado através da norma da energia de deformação, conforme Eq. (4.10).

4.2.1 Refinamento h

Os testes para o refinamento h foram feitos usando-se as discretizações apresentadas na Fig. 4.12, sendo a discretização I com 6 nós, a discretização II com 15 nós e a discretização III com 45 nós. O método de imposição de condições de contorno essenciais usado foi o método dos multiplicadores de Lagrange. As células de

integração estão representadas nessa figura por meio das linhas tracejadas⁴.

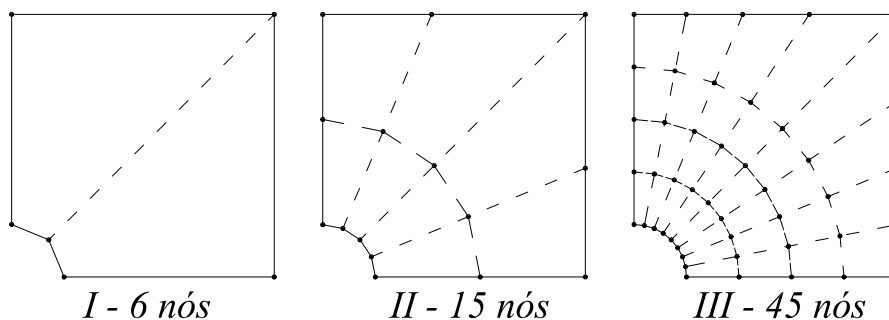


Figura 4.12: Discretização da chapa para o refinamento h

Os testes com o hp -Cloud foram realizados usando funções de Shepard (funções de base constante) e funções de peso do tipo *Spline* quártica. Em relação ao domínio de suporte, decidiu-se por mantê-lo constante, igual a $5,0001 \times 5,0001$,⁵ durante o refinamento, de tal forma que todos os nós contribuem para a aproximação de um determinado ponto. As funções de enriquecimento utilizadas foram $P_{p=1} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy \end{bmatrix}$ e a quadratura de Gauss foi de 25×25 pontos. De forma análoga, os testes feitos com o EFG levaram em conta apenas representação polinomial linear, além dos mesmos parâmetros de domínio de suporte, método de imposição das condições de contorno essenciais e número de pontos de Gauss usados no hp -Cloud. A taxa de convergência foi calculada da mesma forma que para o problema da viga submetida à flexão simples, ou seja, usando regressão linear considerando todos os pontos da curva.

A Tab. 4.11 apresenta os valores das energias de deformação, assim como as respectivas normas e a Fig. 4.13 mostra o gráfico de convergência.

⁴As células de integração quadrilaterais são limitadas por um conjunto de 4 nós. Isto é devido à uma limitação atual do INSANE.

⁵Testes preliminares apresentaram melhores resultados com *Spline* quártica que com *Spline* cúbica para este problema da chapa com orifício, assim como o uso de domínio de suporte de $5,0001 \times 5,0001$ ao invés de $5,0000 \times 5,0000$.

Tabela 4.11: Energia de deformação e norma do erro para o problema da chapa com orifício em refinamento h usando multiplicadores de Lagrange

Discretização	\mathcal{U}_{ap}		e (%)	
	hp -Cloud	EFG	hp -Cloud	EFG
I	0,01245833	0,01171560	9,8	26,2
II	0,01250338	0,01193367	7,8	22,6
III	0,01256263	0,01231400	3,7	14,5

$\mathcal{U}_{ex} = 0,01257991$

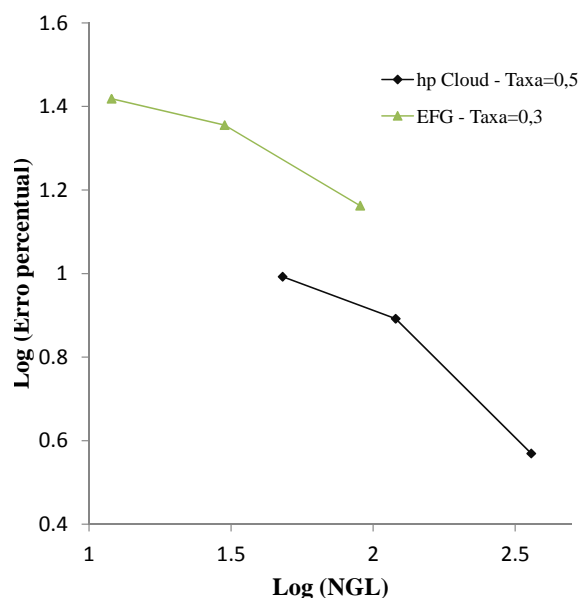


Figura 4.13: Gráfico de convergência para o refinamento h

Ao se utilizar polinômios com aproximação linear para o enriquecimento intrínseco, os resultados da convergência h para o hp -Cloud, em termos de taxa, são similares aos obtidos usando o MEF com aproximação linear (Szabo e Babuška (1991)). Pode-se notar ainda que esta taxa de convergência foi um pouco superior à do EFG. Deve-se perceber que uma discretização com poucos graus de liberdade não deveria reproduzir de forma precisa o comportamento da chapa devido à suavidade do orifício que não é adequadamente representada por segmentos de reta. Ainda assim, o erro obtido não foi proeminente.

4.2.2 Enriquecimento extrínseco

Para o estudo do enriquecimento extrínseco do modelo da chapa com orifício, optou-se por utilizar a discretização II (15 nós). O estudo foi feito usando-se funções de Shepard e enriquecimento do primeiro ao quinto grau conforme Eq. (3.4) e empregando-se as seguintes bases para o enriquecimento.

Enriquecimento linear:

$$P_{p=1} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Enriquecimento quadrático:

$$P_{p=2} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^2y & xy^2 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Enriquecimento de terceiro grau:

$$P_{p=3} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^2y & xy^2 & x^3 & y^3 & x^3y & xy^3 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Enriquecimento de quarto grau:

$$P_{p=4} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^2y & xy^2 & x^3 & y^3 & x^3y & xy^3 & x^4 & y^4 & x^4y & xy^4 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Enriquecimento de quinto grau:

$$P_{p=5} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^2y & xy^2 & x^3 & y^3 & x^3y & xy^3 \\ x^4 & y^4 & x^3y^2 & x^2y^3 & x^4y & xy^4 & x^5 & y^5 & x^5y & xy^5 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Estes resultados são comparados com o MEFM, enriquecidos com polinômios até o quarto grau, usando as seguintes bases polinomiais:

$$P_{p=1} = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

$$P_{p=2} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & y^2 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

$$P_{p=3} = \left[1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad y^2 \quad x^3 \quad y^3 \right] \quad (4.23)$$

$$P_{p=4} = \left[1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad y^2 \quad x^3 \quad y^3 \quad x^4 \quad y^4 \right] \quad (4.24)$$

Nota-se que as funções de enriquecimento utilizadas no *hp*-Cloud são diferentes das funções utilizadas no MEFG. Isso se deve ao fato de que utilizou-se funções de Shepard para o *hp*-Cloud e elementos finitos Lagrangeanos com representação linear para o MEFG. Esta combinação fornece o mesmo grau de representação polinomial para ambos os métodos.

Para o MEFG, adotou-se quadratura de Gauss de 10×10 pontos por elemento e as condições de contorno essenciais foram impostas de forma direta.

Tabela 4.12: Energia de deformação e norma do erro para o problema da chapa com orifício em enriquecimento extrínseco com *hp*-Cloud usando multiplicadores de Lagrange

Reprodução	<i>hp</i> -Cloud			MEFG		
	Enriq.	\mathcal{U}_{ap}	$e(\%)$	Enriq.	\mathcal{U}_{ap}	$e(\%)$
$P = 1$	$p = 1$	0,01250338	7,8	$p = 0$	0,01230747	14,7
$P = 2$	$p = 2$	0,01255950	4,0	$p = 1$	0,01248652	8,6
$P = 3$	$p = 3$	0,01256877	3,0	$p = 2$	0,0125285	6,4
$P = 4$	$p = 4$	0,01257426	2,1	$p = 3$	0,01253955	5,7
$P = 5$	$p = 5$	0,01257894	0,9	$p = 4$	0,01254339	5,4
$\mathcal{U}_{ex} = 0,01257991$						

Os resultados deste estudo estão apresentados na Tab. 4.12 e no gráfico da Fig. 4.14, onde pode-se observar a taxa de convergência superior à do MEFG. Apesar disso, deve-se notar que o método *hp*-Cloud gera uma matriz de rigidez cheia, uma vez que o domínio de influência do exemplo apresentado engloba toda a chapa. Já o MEFG gera uma matriz de rigidez esparsa⁶.

⁶Caso o estudo fosse formado usando o EFG, a matriz gerada também seria cheia, devido às restrições do método conforme Seção 2.6.

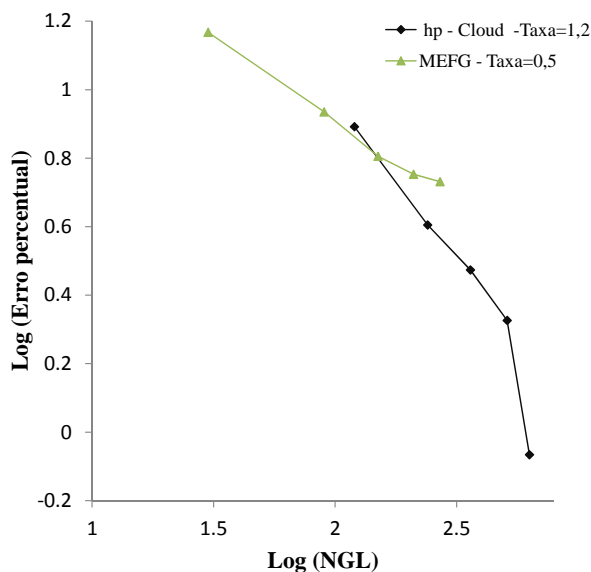


Figura 4.14: Gráfico de convergência para o enriquecimento extrínseco

4.3 Chapa com Trinca em Modo I de Abertura

4.3.1 Enriquecimento com singularidade

Esta seção verifica o problema de uma chapa com uma trinca em estado plano de tensão, submetida a esforços de tração, conforme apresentado na Fig. 4.15. Devido à simetria da estrutura, apenas metade da chapa é analisada. A Fig 4.16 mostra a discretização utilizada nos testes. O objetivo é verificar a função de enriquecimento de trinca em estruturas que possuem singularidade, sendo que os resultados são comparados com o MEFG em condições similares de refinamento h , enriquecimento p e número de graus de liberdade.

As características do modelo são, em unidades consistentes:

1. Tensão $\sigma = 1,0$ dada por uma força uniformemente distribuída $f_y = 0, 1$;
2. Módulo de Elasticidade $E = 1,0$;
3. Coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$;
4. Estrutura em estado plano de tensões.

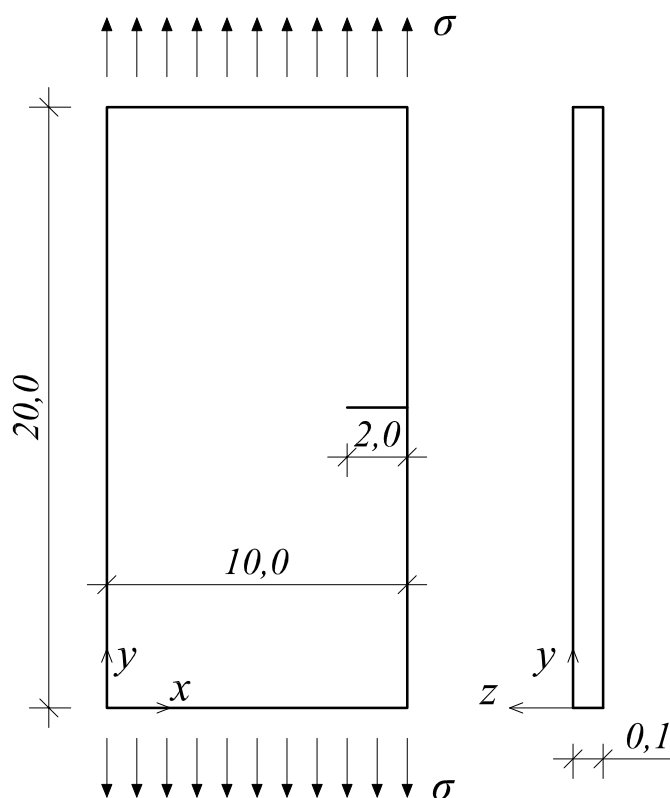


Figura 4.15: Chapa com trinca submetida a esforços de tração

A solução de referência deste problema foi obtida por Alves (2012) utilizando o software ANSYS, usando elementos finitos com malha de 12087 p -elementos quadrilaterais, considerando a simetria do problema e a partir da extrapolação para aproximações polinomiais de grau $p = 1, 2$ e 3 . O valor da energia de deformação encontrada pelo mesmo foi de 10,983267. Como neste trabalho o estudo é realizado usando metade da estrutura, a energia de deformação considerada é de 5,491634.

A discretização do problema foi feita através da distribuição regular de 36 nós ao longo da estrutura (Fig. 4.16). Para a construção da aproximação com o hp -Cloud, foram usadas funções de peso do tipo *Spline* quártica e domínio de suporte igual a $2,0001 \times 2,0001$.⁷ Mais uma vez, usou-se 25×25 pontos de Gauss com o objetivo de minimizar a influência da integração numérica. O parâmetro de penalidade adotado

⁷O valor de 2,0001 ao invés de 2,0000 é necessário para evitar problemas de insuficiência de suporte nodal, tendo em vista que as funções de base usadas nesta análise são funções lineares, ou seja $P_{k=1} = [1 \ x \ y \ xy]$.

foi de $1,0 \times 10^{10}$. As células de integração estão representadas pelas linhas tracejadas mostradas na Fig. 4.16.

Para a análise do problema usando o MEFG usou-se 25 elementos finitos quadrilaterais de aproximação linear e quadratura de Gauss igual a 7×7 . Tanto para o *hp*-Cloud quanto para o MEFG, foram feitos testes usando as seguintes bases, $P_{p=0} = [1]$, $P_{p=1} = [1 \ x \ y \ xy]$, $P_{p=2} = [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^2y \ xy^2]$ e $P_{p=3} = [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^2y \ xy^2 \ x^3 \ y^3 \ x^3y \ xy^3]$, de tal forma que a análise através de ambos os métodos tenha o mesmo número de graus de liberdade, embora não tenha o mesmo grau de reprodução polinomial.

Em contrapartida, na análise usando o enriquecimento de trinca foram utilizadas funções de base linear ($P_{k=1}$) para o *hp*-Cloud e elementos finitos de aproximação linear para o MEFG, função de enriquecimento de trinca apenas na ponta da trinca, ou seja, na coordenada $x = 8,0$ e $y = 0,0$ (Fig. 4.16) e funções de enriquecimento linear ($P_{p=1}$) nos demais nós. O enriquecimento de trinca é dado pelas Eq. (3.5) e (3.6), com parâmetros $\lambda_1 = 0,50000$ e $Q_1 = 0,333333$.

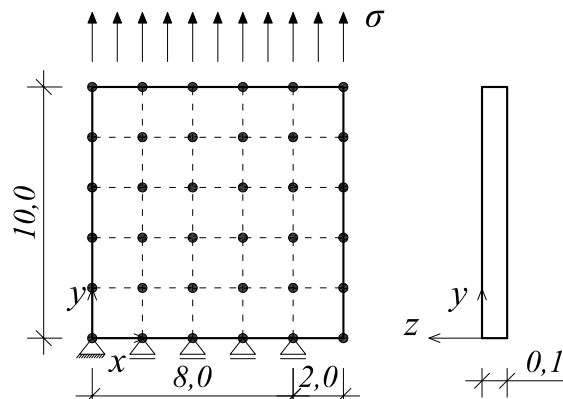


Figura 4.16: Discretização do modelo da chapa com trinca analisado neste estudo.

Os valores das energias de deformação, assim como as respectivas normas do erro, calculadas conforme Eq. (4.10), estão apresentadas nas Tab. 4.13 e 4.14, tanto para o MEFG quanto para o *hp*-Cloud. As condições de contorno essenciais para o método sem malha são asseguradas pelos métodos dos multiplicadores de Lagrange

e penalidade.

Tabela 4.13: Energia de deformação para avaliação de problema com singularidade, comparando enriquecimento polinomial e de trinca, usando elemento finito de aproximação linear para o MEFG e funções de base linear para o *hp*-Cloud

Enriq.	NGL	\mathcal{U}_{ap}		
		Lagrange	Penalidade	MEFG
$p = 0$	72	5,262601	5,275978	5,282331
$p = 1$	288	5,381256	5,385884	5,405462
$p = 2$	576	5,407882	5,414727	5,434285
$p = 3$	864	5,419492	5,409456	5,441524
<i>trinca</i>	284	5,490107	5,457218	5,484991
$\mathcal{U}_{ex} = 5,491634$				

Tabela 4.14: Norma do erro da energia de deformação para avaliação de problema com singularidade, comparando enriquecimento polinomial e de trinca, usando elemento finito de aproximação linear para o MEFG e funções de base linear para o *hp*-Cloud

Enriq.	$e(\%)$		
	Lagrange	Penalidade	MEFG
$p = 0$	20,4	19,8	19,5
$p = 1$	14,2	13,9	12,5
$p = 2$	12,4	11,8	10,2
$p = 3$	11,5	12,2	9,6
<i>trinca</i>	1,7	7,9	3,5
$\mathcal{U}_{ex} = 5,491634$			

Os resultados apresentados nas Tab. 4.13 e 4.14 mostram a capacidade do *hp*-Cloud em representar campos de tensões singulares quando se utiliza o enriquecimento de trinca. Nota-se uma aproximação bem melhor que para o caso da utilização de funções polinomiais, apesar da tendência do método em convergir com o aumento do grau do polinômio. Ainda, observa-se a superioridade do método dos multiplicadores de Lagrange em relação ao método da penalidade para o caso onde houve o enriquecimento com trinca.

4.3.2 Acoplamento com o MEF

O problema da chapa com trinca em modo I de abertura é agora solucionado utilizando o acoplamento com o MEF. O objetivo deste tópico é o de demonstrar o

funcionamento do *hp*-Cloud na utilização desta técnica de imposição das condições de contorno essenciais.

O refinamento da chapa é baseado no esquema de malha geométrica, usando refinamento *hp*, conforme definido em Szabo e Babuška (1991) e Babuška et al. (1997). Este refinamento tem por finalidade representar de forma adequada a singularidade, uma vez que na etapa atual de desenvolvimento do INSANE, não é possível enriquecer os nós de elementos finitos usados no acoplamento para o *hp*-Cloud. A

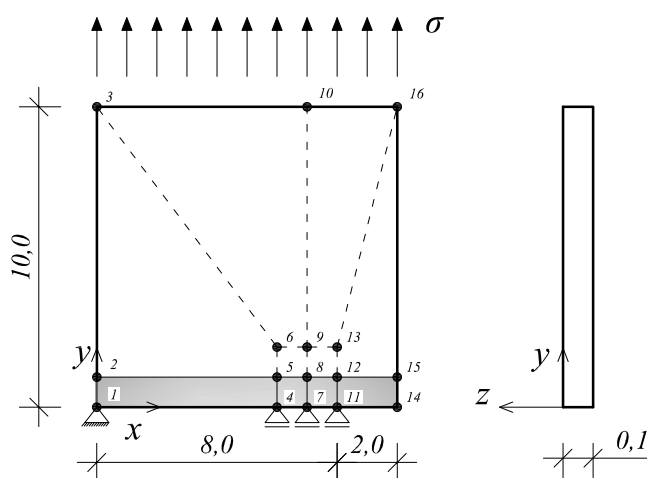


Figura 4.17: Discretização do modelo da chapa com trinca usando acoplamento com o MEF.

Fig. 4.17 mostra a discretização utilizada com taxa de redução próximo à trinca de 10%, a região hachurada é composta por elementos finitos. As linhas tracejadas representam os limites das células de integração para o método sem malha em estudo. As funções de base usadas no *hp*-Cloud foram de aproximação linear, ou seja $P_{k=1} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy \end{bmatrix}$. Tendo em vista que atualmente não é possível enriquecer os nós do elemento finito acoplado, os nós 1, 2, 4, 5, 7, 8, 11, 12, 14 e 15 não são enriquecidos. Os nós 3, 6, 9, 10, 13 e 16 são enriquecidos com funções $P_{p=1} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy \end{bmatrix}$. Para a comparação com o GFEM, a regra usada foi a mesma, tendo em vista que os elementos finitos usados foram quadrilaterais. Ainda, para o *hp*-Cloud, o domínio de suporte foi tensorial de $9,0001 \times 9,0001$, o número

de pontos de quadratura foi de 25×25 pontos por célula de integração e as funções de peso foram do tipo *Spline* quártica.

A Tab. 4.15 apresenta os resultados da energia de deformação e da norma do erro para a discretização apresentada.

Tabela 4.15: Norma do erro da energia de deformação para avaliação de problema com singularidade comparando o *hp*-Cloud acoplado ao MEF e o MEFG

NGL	Método	\mathcal{U}_{ap}	e (%)
68	<i>hp</i> -Cloud	5,481149	4,4
68	MEFG	5,314958	17,9

Nota-se que o *hp*-Cloud acoplado ao MEF, usando o esquema de malha geométrica, produziu bons resultados. Apesar disso, torna-se necessário efetuar um estudo de convergência com o objetivo de avaliar tais taxas. A finalidade deste tópico foi a de apresentar o funcionamento do *hp*-Cloud acoplado ao MEF, de forma que estudos complementares devam ser efetuados no futuro. A Fig. 4.18 apresenta o deslocamento vertical da chapa. Interessante observar nesta figura que as condições de contorno essenciais são asseguradas de forma exata, diferentemente do que ocorre ao se utilizar o método da penalidade ou multiplicadores de Lagrange.

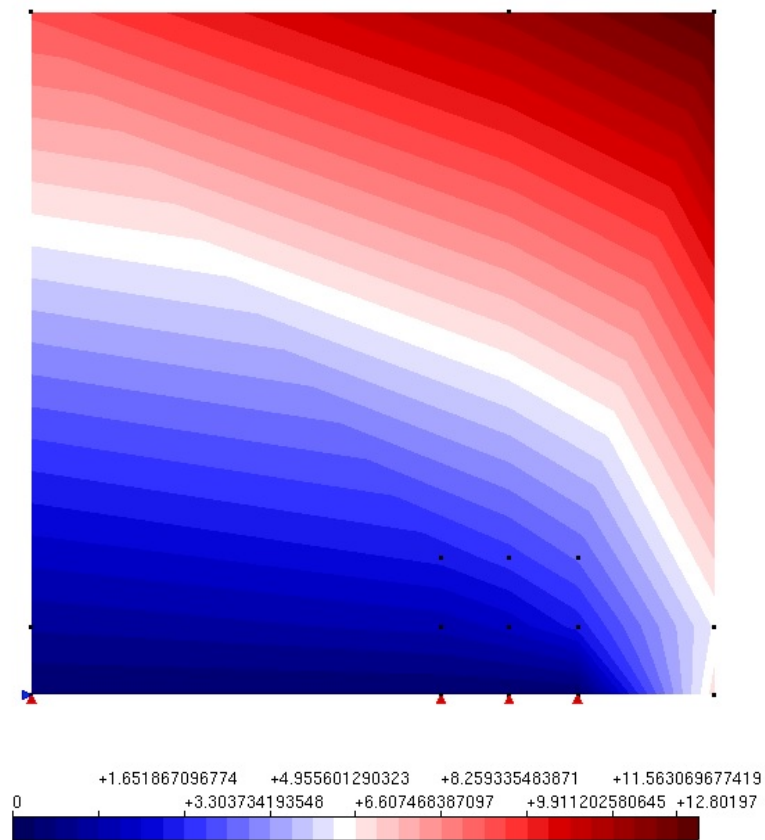


Figura 4.18: Campo de deslocamento vertical do modelo da chapa com trinca usando acoplamento com o MEF.

Capítulo 5

Conclusão

Este trabalho apresentou uma visão geral sobre o método sem malha *hp*-Cloud e a estratégia de implementação no ambiente INSANE. Fez-se um paralelo com outros métodos numéricos como o EFG e MEFM. Em determinadas ocasiões, comparou-se as metodologias de imposição das condições de contorno essenciais na solução de problemas de mecânica dos sólidos com comportamento elástico-linear. Parâmetros relevantes foram postos em análise, como o refinamento h , os enriquecimentos intrínsecos e extrínsecos, o tamanho do domínio de influência e o parâmetro de penalidade. A validação da implementação foi apresentada através da análise de alguns tipos de problemas com características diferentes, como o problema de uma viga com solução polinomial suave, o problema de uma chapa com orifício e com solução não polinomial suave e o problema de uma chapa com trinca cuja solução é não suave. Em geral, o *hp*-Cloud necessita de quadratura de alta ordem para a integração numérica. Os estudos foram feitos com um grande número de pontos de integração com o objetivo de minimizar a influência da quadratura de Gauss. Além do mais, o aumento do número de graus de liberdade do método eleva consideravelmente o custo computacional. Apesar disso, o *hp*-Cloud possui diversas vantagens como o enriquecimento independente dos nós, o fato de um mesmo problema poder ser aproximado com o auxílio de diferentes tipos de funções de enriquecimento como feito na Seção 4.3.1 para a chapa com trinca, além da independência direta do tamanho do domínio de

influência na aproximação ao se utilizar funções de Shepard (Como pode ser observado nas Seções 4.1.2 e 4.2.2). Na sequência são mostradas as principais conclusões a respeito do método.

O problema da viga com forças distribuídas nas extremidades possui a característica de ter campos de tensões suaves. Este problema foi solucionado levando-se em conta duas técnicas de imposição das condições de contorno, o método dos multiplicadores de Lagrange e o método da Penalidade. A solução deste problema permitiu as seguintes observações:

1. Refinamento h : foi formado a partir de 4 tipos de discretização, na qual a discretização anterior possuía sempre o dobro de espaçamento nodal da posterior. Utilizou-se para este estudo funções de Shepard e enriquecimento de aproximação linear. Para este refinamento, notou-se baixa taxa de convergência e norma do erro elevada para tamanho de domínio de influência igual ao espaçamento entre os nós, se comparado com o MEF no trabalho de Szabo e Babuška (1991). Conclusão semelhante foi obtida com EFG. Ao se dobrar o domínio de influência, os resultados foram consideravelmente melhorados e o hp -Cloud apresentou precisão melhor que o EFG, embora ambos tenham apresentado taxas de convergência próximas.
2. Enriquecimento extrínseco: Se mostrou bem mais eficaz na solução do problema, conseguindo-se reproduzir a solução analítica (que é de terceiro grau), com enriquecimento de aproximação cúbica e ainda utilizando domínio de influência igual ao espaçamento nodal. Para este enriquecimento observou-se alta taxa de convergência superiores ao EFG. Outra observação importante é que ao se utilizar as funções de Shepard, não se faz necessário aumentar o tamanho do domínio de influência, uma vez que a aproximação é reproduzida

pelo enriquecimento e não pelas funções de base, como ocorre com o EFG. Apesar das vantagens inerentes ao enriquecimento extrínseco, o método *hp*-Cloud paga o preço de se ter um sistema com problemas de condicionamento.

3. Combinação do aumento do grau das funções de base (enriquecimento intrínseco) e do enriquecimento da PU (enriquecimento extrínseco): Tendo em vista que as funções de forma do MMQM não são polinomiais, mas somente possuem a capacidade de representar polinômios (diferentemente do que ocorre para o MEFG), avaliou-se a combinação do aumento das funções de base com o enriquecimento da PU. A combinação $k+p$ apresentou pequeno erro da norma de energia quando a soma $k+p = 3$, ou seja, esta combinação permitia representar um polinômio de terceiro grau com boa precisão.
4. Domínio de influência: Notou-se o aumento da precisão com o aumento do domínio de influência, tendo em vista que mais nós contribuíam para a aproximação. Entretanto há um limite onde a solução começa a se deteriorar. Esta observação não é genérica e deve ser feita para cada tipo de problema.
5. Parâmetro de penalidade: os testes mostraram que para o *hp*-Cloud também são válidos os limites sugeridos por Liu (2010), que varia entre 10^5 e 10^8 vezes o módulo de elasticidade do material.

O problema da chapa com orifício apresenta uma solução não polinomial suave. Semelhantemente ao problema da viga com força de ponta, o enriquecimento extrínseco (p) mostrou-se mais eficaz que o refinamento h , com taxas de convergência superiores, sendo que praticamente se reproduziu a solução analítica com enriquecimento de quinto grau para a discretização de 15 nós (Fig. 4.14). Parte dos erros encontrados, especialmente para malhas com menor número de pontos, podem ser explicados pela curvatura do orifício que não é adequadamente representado por

segmentos de reta.

O problema da chapa com a trinca teve o objetivo de exibir o comportamento do *hp*-Cloud ao se utilizar o enriquecimento com singularidade, conforme definido em Alves (2012). Testes com enriquecimento polinomial, até o terceiro grau, foram feitos com o objetivo de comparação. Além do mais, os dados foram também comparados com os obtidos usando o MEF_G. Pode-se observar resultados semelhantes ao se utilizar o *hp*-Cloud e o MEF_G. Ainda, os resultados mostraram que, como esperado, o enriquecimento polinomial não é adequado na solução de problemas com singularidades, mas o enriquecimento de trinca mostrou-se eficaz.

Ainda, para o problema da chapa com trinca, implementou-se a técnica de acoplamento com o MEF. Este teste foi feito a título de ilustração, mostrando que o *hp*-Cloud também pode ser usado com esta metodologia de imposição de condições de contorno. Além do mais, esta técnica assegura de forma exata as condições de contorno essenciais, se estas forem lineares por partes, diferentemente do que ocorre com o método da penalidade ou multiplicadores de Lagrange. Há, no entanto, a necessidade de se verificar o comportamento do *hp*-Cloud, como a convergência, por exemplo, frente à esta técnica. Ainda, como recomendação para trabalhos futuros, existe uma série de fatores e tentativas de melhorias que podem ser exploradas, como o emprego da Integração Nodal Conforme e Estabilizada (SCNI) ou mesmo o acoplamento do *hp*-Cloud com o MEF_G, o que permitiria enriquecer os nós do contorno. Outros estudos, envolvendo problemas como não linearidade física e geométrica, além do estudo de sólidos tridimensionais, podem ser feitos.

Referências Bibliográficas

- Alves, P. D., 2012. Estratégia global-local aplicada ao método dos elementos finitos generalizados. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Atulri, S. N. e Zhu, T., 1998. ‘A new meshless petrov-galerkin (mlpg) approach in computational mechanics’. *Computational Mechanics*, vol. 22, pp. 1117–1127.
- Babuška, I., Banerjee, U., Osborn, J. E. e Zhang, Q., 2009. ‘Effect of numerical integration on meshless methods’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 198, pp. 2886–2897.
- Babuška, I. e Melenk, J. M., 1997. ‘The partition of unity method’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 40, pp. 727–758.
- Babuška, I., Strouboulis, T. e Copps, K., 1997. ‘hp optimization of finite element approximations: Analysis of the optimal mesh sequences in one dimension’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 150, pp. 89–108.
- Barros, F. B., 2002. Métodos sem malha e método dos elementos finitos generalizados em análise não-linear de estruturas. Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil.
- Barros, F. B. e Proença, S. P. B., 2000. ‘Aplicação de métodos sem malha na integração das equações da associação contínua entre parede e pórtico’. *Relatório Técnico. Escola de Engenharia de São Carlos. USP*, vol. 1, pp. 1–57.
- Bathe, K. J., 1996. *Finite Element Procedures*. Prentice-Hall, New Jersey.

- Beissel, S. e Belytschko, T., 1996. 'Nodal integration of the element-free galerkin method'. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139, pp. 49–74.
- Belinha, J., 2014. *Meshless methods in biomechanics - Bone tissue remodelling analysis*. Springer, Switzerland.
- Belytschko, T., Lu, Y. Y. e Gu, L., 1994. 'Element-free galerkin methods'. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 37, pp. 229–256.
- Belytschko, T., Organ, D. e Krongauz, Y., 1995. 'A couple finite element - element free galerkin method'. *Computational Mechanics*, vol. 17, pp. 186–195.
- Boresi, A. P., Chong, K. P. e Lee, J. D., 2011. *Elasticity in Engineering Mechanics*. John Wiley and Sons, New Jersey.
- Carey, G. F., Kabaila, A. e Utku, M., 1982. 'On the penalty methods for interelement constraints'. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 30, pp. 151–171.
- Chen, J.-S., Wu, C.-T., Yoon, S. e You, Y., 2001. 'A stabilized conforming nodal integration for galerkin mesh-free methods'. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 50, pp. 435–466.
- Chen, J.-S., Yoon, S. e Wu, C.-T., 2002. 'Non-linear version of stabilized conforming nodal integration for galerkin mesh-free methods'. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 53, pp. 2587–2615.
- Chen, Y., Lee, J. D. e Eskandarian, A., 2006. *Meshless Methods in Solid Mechanics*. Springer, New York.
- Dolbow, J. e Belytschko, T., 1998. 'An introduction to programming the meshless element free galerkin method'. *Archives of Computation Methods in Engineering*, vol. 5, pp. 207–241.

- Dolbow, J. e Belytschko, T., 1999. ‘Numerical integration of the galerkin weak form in meshfree methods’. *Computational Mechanics*, vol. 23, pp. 219–230.
- Duarte, C. A., 1995. ‘A review of some meshless methods to solve partial differential equations’. *Technical Report TICAM, Texas University, Austin*, vol. 06, pp. 1–37.
- Duarte, C. A., 1996. The hp-Cloud Method. Tese de Doutorado, University of Texas, Austin, Texas.
- Duarte, C. A., Babuška, I. e Oden, J. T., 2000. ‘The generalized finite element method for three-dimensional structural mechanics problems’. *Computers and Structures*, vol. 77, pp. 215–232.
- Duarte, C. A. e Oden, J. T., 1995. ‘H-p clouds - a meshless mehtods to solve boundary value problems’. *Technical Report TICAM, Texas University, Austin*, vol. 05, pp. 1–66.
- Duarte, C. A. e Oden, J. T., 1996. ‘H-p clouds - a hp meshless methods’. *Numerical Mehtods for Partial Differential Equations*, vol. 12, pp. 673–705.
- Faria, B. R. L., 2014. Element free galerkin: Integração nodal conforme e estabilizada (scni) com método da penalidade e multiplciadores de lagrange. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Fernández-Méndez, S. e Huerta, A., 2004. ‘Imposing essential boundary conditions in meshfree methods’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 193, pp. 1257–1275.
- Fonseca, F. T., 2008. Sistema computacional para análise dinâmica geometricamente não-linear através do método dos elementos finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Gingold, R. A. e Monaghan, J. J., 1977. ‘Smoothed particle hidrodynamics: Theory

- and application to non-spherical star'. *Mon. Not. R. astr. Soc.*, vol. 181, pp. 375–389.
- Gordon, W. J. e Wixom, J. A., 1978. 'Shepard's method of 'metric interpolation' to bivariate and multivariate interpolation'. *Mathematics of Computation*, vol. 32, pp. 253–264.
- Huerta, A. e Fernández-Méndez, S., 2000. 'Enrichment and coupling of the finite element method and meshless methods'. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 48, pp. 1615–1636.
- Huerta, A., Fernández-Méndez, S. e Liu, W., 2004. 'A comparison of two formulations to blend finite elements and mesh-free methods'. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 193, pp. 1105–1117.
- Lancaster, P. e Salkauskas, K., 1981. 'Surfaces generated by moving least square methods'. *Mathematics of Computation*, vol. 37, pp. 141–158.
- Lee, N.-S. e Bathe, K.-J., 1993. 'Effects of element distortions on the performance of isoparametric elements'. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 36, pp. 3553–3576.
- Liu, G. R., 2002. *Meshfree Methods - Moving Beyond the Finite Element Method*. CRC Press, Florida.
- Liu, G. R., 2010. *Meshfree Methods : Moving Beyond the Finite Element Method*. CRC Press, Taylor e Francis Group, New York.
- Liu, G. R. e Gu, Y. T., 2001. 'A point interpolation method for two-dimensional solids'. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 50, pp. 937–951.
- Liu, G. R. e Gu, Y. T., 2005. *An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming*. Springer, Dordrecht, Netherlands.

- Liu, W. K., Jun, S. e Zhang, Y. F., 1995. ‘Reproducing kernel particle methods’. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 20, pp. 1081–1106.
- Lucy, L. B., 1977. ‘A numerical approach to the testing of the fission hypothesis’. *The Astronomic Journal*, vol. 82, pp. 1014–1024.
- McLain, D. H., 1974. ‘Drawing contours from arbitrary data points’. *The Computer Journal*, vol. 17, pp. 318–324.
- Melenk, J. M. e Babuška, I., 1996. ‘The partition of unity finite element method: Basic theory and applications’. *Computer Methods in Applied Mechanics*, vol. 139, pp. 289–314.
- Nayroles, B., Touzot, G. e Villon, P., 1992. ‘Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse element’. *Computational Mechanics*, vol. 10, pp. 307–318.
- Nicolazzi, L. C., Barcellos, C. S., Fancello, E. A. e Duarte, C. A., 2005. ‘Generalized boundary element method for galerkin boundary integrals’. *Engineering Analysis with Boudary Elements*, vol. 29, pp. 494–510.
- Oden, J. T., Duarte, C. A. e Zienkiewickz, O. C., 1998. ‘A new cloud-based hp finite element method’. *Computer Methods in Applied Mechanics*, vol. 165, pp. 117–126.
- Saad, M. H., 2005. *Elasticity, theory, applications and numerics*. Elsevier, Massachusetts.
- Santos, R., 2003. *Introdução à programação orientada a objetos usando Java*. Campus, Rio de Janeiro, Brasil.
- Shepard, D., 1968. ‘A two dimensional interpolation function for irregularly-spaced data’. *Proceedings ACM National Conference*, vol. 1, pp. 517–524.

- Silva, D. M., 2001. *Guia de consulta rápida UML*. Novatec, São Paulo, Brasil.
- Silva, R. P., 2012. Análise Não-Linear de Estruturas de Concreto por meio do Método Element Free Galerkin. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Strouboulis, T., Babuška, I. e Copps, K., 2000. ‘The generalized finite element method: An example of its implementation and illustration of its performance’. *Computer Methods in Applied Mechanics*, vol. 47, pp. 1401–1417.
- Szabo, B. e Babuška, I., 1991. *Finite Element Analysis*. John Wiley and Sons, Inc., New York.
- Timoshenko, S. e Goodier, J. N., 1951. *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill Book Company, New York.
- Zhu, T. e Atluri, S. N., 1998. ‘A modified collocation method and a penalty formulation for enforcing the essential boundary conditions in the element free galerkin method’. *Computational Mechanics*, vol. 21, pp. 211–222.