

**AMBIENTE TEÓRICO-COMPUTACIONAL UNIFICADO PARA
MODELOS CONSTITUTIVOS:
INCLUSÃO DE MODELO DE MICROPLANOS**

Anderson Renato Vobornik Wolenski

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

**AMBIENTE TEÓRICO-COMPUTACIONAL UNIFICADO PARA
MODELOS CONSTITUTIVOS:
INCLUSÃO DE MODELO DE MICROPLANOS**

Anderson Renato Vobornik Wolenski

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de “Mestre em Engenharia de Estruturas”.

Prof. Dr. Roque Luiz da Silva Pitangueira
PROPEEs - UFMG (Orientador)

Prof. Dr. Samuel Silva Penna
DEES - UFMG (Co-Orientador)

Prof. Dr. Felício Bruzzi Barros
PROPEEs - UFMG

Prof. Dr. Roberto Dalledone Machado
UFPR-PR

Belo Horizonte

Março de 2013

Foram seis dias de um esforço extremo, de resistência, de perseverança. E algumas perguntas passaram pela minha cabeça o tempo todo. Por que as pessoas desafiam seus limites? Por que se arriscam em um ambiente tão hostil? Por que enfrentam tantas adversidades voluntariamente? Não é por algum prêmio, por troféu ou medalha. É pela convicção que, apesar de tudo, sempre vale a pena seguir em frente. Apesar de todas as dificuldades, não desistir jamais. Foi isto o que o deserto ensinou a mim e a essas pessoas, uma lição para o resto da vida.

Clayton Conservani.

Índice

Índice	ii
Lista de Tabelas	vi
Lista de Figuras	xii
Lista de Símbolos	xiii
Lista de Abreviaturas e Siglas	xvi
Resumo	xviii
Abstract	xix
Agradecimentos	xx
1 Introdução	1
1.1 Objetivos	3
1.1.1 Objetivos Gerais	3
1.1.2 Objetivos Específicos	3
1.2 Organização do Texto	4
2 Modelos Constitutivos de Microplanos	5
2.1 Histórico dos Modelos de Microplanos	5
2.2 Bases dos Modelos de Microplanos	12
3 Modelo de Microplanos com Deformação Equivalente	15
3.1 Restrição Cinemática	16
3.2 Relações Constitutivas nos Microplanos	19
3.3 Aplicação das Leis Termodinâmicas	20
4 Inclusão dos Modelos de Microplanos no Ambiente Unificado	25
4.1 Ambiente Unificado para Modelos Constitutivos	25
4.2 Modelo de Microplanos segundo o Ambiente Unificado para Modelos Constitutivos	28
4.3 Definição das Funções de Evolução de Dano	30

4.3.1	Função de Dano Exponencial	30
4.3.2	Função de Dano Polinomial	32
4.3.3	Funções de Dano com Variação Linear	33
4.4	Deformação Equivalente nos Microplanos	34
4.4.1	Definição de Simo e Ju (1987)	35
4.4.2	Definições de Ju (1989)	36
4.4.3	Definições de Lemaitre (1984)	36
4.4.4	Definição segundo de Vree et al. (1995)	37
5	Implementações Computacionais	38
5.1	Síntese do Núcleo Numérico do INSANE	39
5.2	Análise Estática Fisicamente Não Linear	41
5.3	Implementação dos Modelos de Microplanos	46
5.3.1	Classe abstrata <code>Material</code>	53
5.3.2	Classe abstrata <code>Degeneration</code>	55
5.3.3	Classe abstrata <code>AnalysisModel</code>	60
6	Simulações Numéricas	63
6.1	Ajuste de Parâmetros	64
6.2	Dependência de Malha	76
6.3	Aproximação do Tensor Constitutivo	84
6.3.1	Tração Uniaxial Direta	84
6.3.2	Flexão em Três Pontos	85
6.3.3	Flexão em Quatro Pontos	88
6.4	Comparações com Resultados Numéricos e Experimentais	90
6.4.1	Chapa com Furo Submetida à Tração	91
6.4.2	Painel em L	95
6.4.3	Flexão em Três Pontos	99
6.4.4	Viga de Concreto Armado submetida à flexão em três pontos .	106
6.4.5	Viga de concreto armado submetida à flexão em quatro pontos	110
7	Considerações Finais	116
7.1	Conclusões	117
7.1.1	Deformação Equivalente e Funções de Dano	117
7.1.2	Dependência de Malha	118
7.1.3	Aproximação do Tensor Constitutivo	119
7.1.4	Comparações com Resultados Numéricos e Experimentais . . .	119
7.2	Sugestões para Trabalhos Futuros	120
7.2.1	Outros Modelos de Microplanos	120
7.2.2	Modelos de Microplanos Não Locais	121
7.2.3	Outros Métodos Numéricos	122
7.2.4	Outros Modelos de Análise	122
	Referências Bibliográficas	123

A	Organização Tensorial para os Modelos de Microplanos	134
A.1	Tensor Identidade	134
A.2	Tensor Unitário Simétrico	135
A.3	Parcela Volumétrica do Tensor Simétrico	135
A.4	Parcela Desviadora do Tensor Simétrico	136
A.5	Tensor de Projeção Volumétrico	136
A.6	Tensor de Projeção Desviador	137
B	Obtenção dos Parâmetros de Dano	138
C	Integração Numérica	140
D	Condições de Carregamento, Descarregamento e Recarregamento	143
E	Histórico do Sistema INSANE e a Organização do Núcleo Numérico	149
E.1	Contexto Histórico do Sistema INSANE	149
E.2	Detalhamento do Núcleo Numérico do INSANE	150
E.2.1	Interface <code>Assembler</code>	150
E.2.2	Classe Abstrata <code>Solution</code>	151
E.2.3	Classe Abstrata <code>Model</code>	153

Lista de Tabelas

6.1	Parâmetros do material simulado em Leukart e Ramm (2006) para dano Exponencial e todas as medidas de deformação equivalente.	65
6.2	Parâmetros do material simulado em Leukart e Ramm (2006) para dano Polinomial e todas as medidas de deformação equivalente.	65
6.3	Parâmetros do material simulado em Leukart e Ramm (2006) para dano Linear e todas as medidas de deformação equivalente.	66
6.4	Parâmetros do material simulado em Leukart e Ramm (2006) para dano Bilinear e todas as medidas de deformação equivalente.	66
6.5	Parâmetros do material simulado em Leukart e Ramm (2006) para dano Exponencial e todas as medidas de deformação equivalente.	77
6.6	Parâmetros para simulação da chapa com furo proposta por Leukart e Ramm (2003) para diferentes medidas de deformação e função de dano exponencial.	92
6.7	Parâmetros do material ensaiado por Winkler et al. (2004).	96
6.8	Parâmetros para simulação do painel de Winkler et al. (2004) para diferentes medidas de deformação e distintas funções de dano.	96
6.9	Parâmetros do material utilizado por Petersson (1981) em ensaios experimentais para uma viga submetida à flexão em três pontos.	100
6.10	Parâmetros para simulação da viga de Petersson (1981) com uso de distintas medidas de deformação e dano exponencial, polinomial, linear e bilinear.	101
6.11	Dados do material ensaiado por Mazars e Pijaudier-Cabot (1989).	106
6.12	Parâmetros para simulação da viga de concreto armado proposta por Mazars e Pijaudier-Cabot (1989).	108
6.13	Parâmetros experimentais e numéricos utilizados nas vigas armadas ensaiadas por Álvares (1993).	111

6.14	Parâmetros para simulação da viga de Álvares (1993), com uso da medida proposta por de Vree et al. (1995) e distintas funções de dano.	112
C.1	Coordenadas e pesos para a integração numérica sobre uma semi-esfera com 21 pontos de integração	141
C.2	Coordenadas e pesos para a integração numérica sobre uma semi-esfera com 33 pontos de integração	142

Lista de Figuras

2.1	Associação de planos descontínuos com a microestrutura sólida do material concreto.	7
2.2	Decomposição da deformação ε em um microplano sobre uma esfera unitária (Ožbolt et al., 2001).	12
2.3	Esquema de funcionamento dos Modelos Constitutivos de Microplanos (Leukart, 2005).	13
2.4	Componentes das deformações normal e tangencial em cada microplano: decomposição V-D-T (Bažant e Prat, 1988a).	14
3.1	Componentes das deformações volumétrica e desviadora em cada microplano: decomposição V-D (Leukart, 2005).	17
4.1	Função de dano exponencial com variações para o parâmetro β^{mic}	31
4.2	Função de dano polinomial com variações para o parâmetro f_e	32
4.3	Função de dano linear com variações para o parâmetro κ_u^{mic}	33
4.4	Função de dano bilinear com variações para os parâmetros κ_{cr}^{mic} e f_{cr}^{mic}	34
5.1	Simbologia do diagrama em UML utilizada nesta dissertação.	39
5.2	Organização do núcleo numérico do sistema INSANE	39
5.3	Diagrama de classes para Persistence	40
5.4	Diagrama de classes do processo de solução incremental.	42
5.5	Interação entre classes para a obtenção da matriz de rigidez incremental de um problema fisicamente não linear.	44
5.6	Interação entre classes para a obtenção da matriz de rigidez incremental de um problema fisicamente não linear.	45
5.7	Interação entre classes para cálculo das tensões.	46
5.8	Diagrama de classes para ConstitutiveModel	48
5.9	Diagrama de classes para UnifiedConstitutiveModelFilter	49

5.10	Diagrama de classes para <code>MicroplaneConstitutiveModelFilter</code> . . .	50
5.11	Diagrama de classes para <code>EquivalentStrain</code>	51
5.12	Diagrama de classes para <code>VDSplitEqvStrain</code>	51
5.13	Interação entre classes para obtenção do tensor constitutivo tangente.	52
5.14	Diagrama de classes para <code>Material</code>	53
5.15	Diagrama de classes para <code>MicroplaneMaterial</code>	54
5.16	Diagrama de classes para <code>InelasticLaw</code>	54
5.17	Representação da degeneração do tipo <code>CrossSection</code>	56
5.18	Diagrama de classes para <code>Degeneration</code>	56
5.19	Diagrama de classes para <code>UnifiedMicroplaneDegeneration</code>	57
5.20	Diagrama de classes para <code>MaterialPoint</code>	58
5.21	Diagrama de classes para <code>MicroplaneMaterialPoint</code>	59
5.22	Representação do posicionamento dos microplanos centrados em cada ponto de integração.	60
5.23	Diagrama de classes para <code>AnalysisModel</code>	61
5.24	Detalhamento dos métodos para a classe <code>AnalysisModel</code>	61
5.25	Diagrama de classes para <code>ContinuousPointModel</code>	62
5.26	Diagrama de classes para <code>VDSplitPointModel</code>	62
6.1	Configurações geométricas, de cargas e de condições de contorno das malhas utilizadas para as simulações de: (a) tração, (b) compressão e (c) cisalhamento, puros.	65
6.2	Resultados de tração pura com uso de distintas funções de dano e das medidas de deformação equivalente segundo: (a) Ju (1989), (b) Simo e Ju (1987), (c) Lemaitre (1984) e (d) de Vree et al. (1995).	67
6.3	Resultados de tração pura com uso de todas as medidas de deformação e funções de dano: (a) exponencial, (b) polinomial, (c) linear e (d) bilinear.	68
6.4	Resultados de compressão pura com uso de distintas funções de dano e das medidas de deformação equivalente definidas em: (a) Ju (1989), (b) Simo e Ju (1987), (c) Lemaitre (1984) e (d) de Vree et al. (1995).	69
6.5	Resultados de compressão pura para todas as medidas de deformação e funções de dano: (a) exponencial, (b) polinomial, (c) linear e (d) bilinear.	70

6.6	Resultados de cisalhamento puro com diferentes funções de dano e medidas de deformação equivalente segundo: (a) Ju (1989), (b) Simo e Ju (1987), (c) Lemaitre (1984) e (d) de Vree et al. (1995).	71
6.7	Resultados de cisalhamento puro para todas as medidas de deformação e funções de dano: (a) exponencial, (b) polinomial, (c) linear e (d) bilinear.	72
6.8	Resultados para as simulações de tração e compressão com uso das medidas de deformação segundo Ju (1989), Simo e Ju (1987) e Lemaitre (1984) e dano bilinear.	74
6.9	Resultados para as simulações de tração e compressão com uso das medidas de deformação definidas em de Vree et al. (1995) e dano bilinear.	75
6.10	Resultados de tração pura com o refinamento da malha, para a aproximação elástica do tensor constitutivo e para as medidas segundo: (a) Ju (1989), (b) Simo e Ju (1987), (c) Lemaitre (1984) e de Vree et al. (1995).	78
6.11	Resultados de compressão pura com o refinamento da malha, para a aproximação elástica do tensor constitutivo e medidas propostas por: (a) Ju (1989), (b) Simo e Ju (1987), (c) Lemaitre (1984) e de Vree et al. (1995).	79
6.12	Resultados de cisalhamento puro com o refinamento da malha, para a aproximação elástica do tensor constitutivo e medidas segundo: (a) Ju (1989), (b) Simo e Ju (1987), (c) Lemaitre (1984) e de Vree et al. (1995).	80
6.13	Resultados de tração pura para malhas de 1, 4 e 16 elementos finitos, para a aproximação secante do tensor constitutivo e medidas segundo: (a) Ju (1989), (b) Simo e Ju (1987), (c) Lemaitre (1984) e de Vree et al. (1995).	81
6.14	Resultados de tração pura para malhas de 1, 4 e 16 elementos finitos, para a aproximação tangente do tensor constitutivo e medidas de deformação de: (a) Ju (1989), (b) Simo e Ju (1987), (c) Lemaitre (1984) e de Vree et al. (1995).	82

6.15	Resultados de tração pura para a malha de um elemento finito, com uso de distintas medidas de deformação e para o tensor constitutivo com aproximações: (a) elástica, (b) secante e (c) tangente.	85
6.16	Viga submetida à flexão em três pontos: geometria e malha de elementos finitos adotadas nas simulações.	86
6.17	Resultados das simulações de flexão em três pontos, para as distintas medidas de deformação e para as aproximações do tensor constitutivo: (a) elástica, (b) secante e (c) tangente.	87
6.18	Viga submetida à flexão em quatro pontos: geometria e malha de elementos finitos adotadas nas simulações.	88
6.19	Resultados das simulações da flexão em quatro pontos para as aproximações do tensor constitutivo: (a) elástica, (b) secante e (c) tangente.	89
6.20	Variação das deformações cisalhantes obtida com a medida de deformação equivalente segundo de Vree et al. (1995) e aproximação elástica do tensor constitutivo.	90
6.21	Chapa com furo submetida à tração: geometria e malha de elementos finitos utilizadas nas simulações numéricas.	91
6.22	Resultados para a chapa com furo proposta por Leukart e Ramm (2003), simuladas para distintas medidas de deformação, dano exponencial e aproximações: (a) elástica, (b) secante e (c) tangente para o tensor constitutivo.	93
6.23	Variação do dano para uma função exponencial e medida de deformação definida por de Vree et al. (1995), à direita, comparada ao resultado extraído do trabalho de Leukart (2005), à esquerda.	94
6.24	Painel em L : (a) geometria; (b) malha empregada nas simulações.	95
6.25	Resultados do painel em L para as medidas de Lemaitre (1984) e de Vree et al. (1995) com uso da função de dano exponencial.	97
6.26	Resultados para o painel em L para as medidas de Lemaitre (1984) e de Vree et al. (1995) com uso da função de dano polinomial.	97
6.27	Variação do dano para uma função exponencial e medida de deformação definida por Lemaitre (1984).	98
6.28	Variação do dano para uma função exponencial e medida de deformação segundo de Vree et al. (1995).	98

6.29	Padrão de dano observado por Winkler et al. (2004): (a) experimental; (b) numérico.	99
6.30	Flexão em três pontos: geometria e malha usadas nas simulações. . .	100
6.31	Simulações para a viga de Petersson (1981) para uma função de dano exponencial, diferentes medidas de deformação equivalente e para as aproximações do tensor constitutivo: (a) elástica, (b) secante e (c) tangente.	102
6.32	Simulações para a viga de Petersson (1981) para uma função de dano polinomial, diferentes medidas de deformação equivalente e para as aproximações do tensor constitutivo: (a) elástica, (b) secante e (c) tangente.	103
6.33	Simulações para a viga de Petersson (1981) para uma função de dano linear, diferentes medidas de deformação equivalente e para as aproximações do tensor constitutivo: (a) elástica, (b) secante e (c) tangente.	104
6.34	Simulações para a viga de Petersson (1981) para uma função de dano bilinear, diferentes medidas de deformação equivalente e para as aproximações do tensor constitutivo: (a) elástica, (b) secante e (c) tangente.	105
6.35	Viga de concreto armado submetida à flexão em três pontos estudada por Mazars e Pijaudier-Cabot (1989).	106
6.36	Viga de concreto armado submetida à flexão em três pontos: malha empregada nas simulações numéricas deste trabalho.	107
6.37	Simulações para diferentes aproximações do tensor constitutivo, comparadas com os resultados experimentais de Mazars e Pijaudier-Cabot (1989).	108
6.38	Comparativo do resultado experimental de Mazars e Pijaudier-Cabot (1989) com a simulação para uma aproximação tangente do tensor constitutivo.	109
6.39	Isofaixa de valores de dano para a simulação do Modelo de Microplanos com medida de deformação equivalente definida por de Vree et al. (1995) e função de dano exponencial.	109
6.40	Viga de concreto armado submetida à flexão em quatro pontos com taxas normalmente armadas e superarmadas estudadas por Álvares (1993).	110

6.41	Viga em concreto armado de Álvares (1993): malhas empregadas nas simulações numéricas com uso do Modelo de Microplanos.	111
6.42	Resultados para a viga superarmada proposta por Álvares (1993) comparados com as simulações para uma função de dano exponencial, medida segundo de Vree et al. (1995) e para as três aproximações do tensor constitutivo.	113
6.43	Resultados para a viga superarmada proposta por Álvares (1993) comparados com as simulações para distintas funções de dano e medida de deformação segundo de Vree et al. (1995).	114
6.44	Resultados para a viga normalmente armada proposta por Álvares (1993) comparado com as simulações para diferentes funções de dano e medida de deformação segundo de Vree et al. (1995).	115
6.45	Isofaixa de valores de dano para uma viga superarmada, simulada com a medida segundo de Vree et al. (1995) e função de dano exponencial.	115
B.1	Resultados de tração pura para a medida de de Vree et al. (1995) e todas as funções de dano, parametrizadas a partir do material simulado por Álvares (1993) para o Modelo de Mazars (1984).	139
C.1	Discretização espacial de uma esfera (Kuhl et al., 2001).	140
D.1	Regime de carregamento no domínio elástico.	145
D.2	Regime inelástico de carregamento com dano.	145
D.3	Regime de descarregamento.	146
D.4	Regime de recarregamento.	147
E.1	Diagrama de classe para <code>Assembler</code>	151
E.2	Diagrama de classe para <code>Solution</code>	152
E.3	Diagrama de classe para <code>IterativeStrategy</code>	152
E.4	Diagrama de classe para <code>Step</code>	153
E.5	Diagrama de classe para <code>Model</code>	154
E.6	Diagrama de classe para <code>ParametricElement</code>	154
E.7	Diagrama de classe para <code>ProblemDriver</code>	155

Lista de Símbolos

Na sequência, a organização da lista de símbolos é subdividida pelos capítulos em que as mesmas aparecem inicialmente.

Capítulo 2

Modelos Constitutivos de Microplanos

ν	Coeficiente de <i>Poisson</i>
\vec{n}	Componentes do vetor normal ao microplano
ε	Tensor de deformação macroscópico
ε^N	Parcela normal do tensor de deformação macroscópico
ε^V	Parcela volumétrica do tensor de deformação normal
ε^D	Parcela desviadora do tensor de deformação normal
ε^T	Parcela tangencial do tensor de deformação macroscópico

Capítulo 3

Modelo de Microplanos com Deformação Equivalente

t_j^ε	Vetor de deformação em cada microplano
ε_{ij}	Tensor de deformação macroscópico
n_i	Projeção do vetor normal à superfície de cada microplano
Δ^{sym}	Parcela simétrica do gradiente de deslocamentos
ε_{ij}^{vol}	Componentes do tensor de deformação volumétrico macroscópico
ε_{ij}^{dev}	Componentes do tensor de deformação desviador macroscópico
ε^V	Componente do tensor de deformação volumétrico nos microplanos
ε_p^D	Componentes do tensor de deformação desviador nos microplanos
\mathcal{I}_{ij}	Tensor identidade de segunda ordem de componentes δ_{ij}
\mathcal{V}_{ij}	Componentes do tensor de projeção volumétrico
\mathcal{D}_{pij}	Componentes do tensor de projeção desviador

\mathcal{I}_{ijkl}^{sym}	Componentes do tensor identidade simétrico de quarta ordem
\mathcal{I}_{ijkl}^{dev}	Componentes da Parcela desviadora do tensor identidade simétrico
\mathcal{I}_{ijkl}^{vol}	Componentes da Parcela volumétrica do tensor identidade simétrico
\mathcal{S}	Domínio da integral equivalente à metade superior da esfera unitária
d^{mic}	Função de evolução do dano nos microplanos
p	Vetor das variáveis internas
Ψ_0^{mic}	Energia livre elástica nos microplanos
Ψ_0^{vol}	Parcela volumétrica da energia livre elástica nos microplanos
Ψ_0^{dev}	Parcela desviadora da energia livre elástica nos microplanos
E_0^V	Módulo elástico volumétrico nos microplanos
E_0^D	Módulo elástico desviador nos microplanos
σ^V	Componente do tensor de tensão volumétrica nos microplanos
σ_p^D	Componentes do tensor de tensão desviadora nos microplanos
Ψ^{mic}	Energia livre nos microplanos para o caso inelástico
Ψ^{mac}	Energia livre macroscópica de <i>Helmholtz</i>
\mathbb{D}^{mac}	Energia de dissipação macroscópica
$\dot{\varepsilon}_{ij}$	Componentes do tensor de variação da taxa de deformações
$\dot{\Psi}^{mac}$	Taxa de variação da energia livre macroscópica
$\dot{\Psi}^{mic}$	Taxa de variação da energia livre nos microplanos
\mathbb{D}^{mic}	Energia de dissipação nos microplanos
σ_{ij}	Componentes do tensor de tensão macroscópico
E_{ijkl}^{el}	Componentes do tensor constitutivo elástico
E_{ijkl}^{sec}	Componentes do tensor constitutivo secante
E_{ijkl}^{tan}	Componentes do tensor constitutivo tangente
K^{mic}	Módulo volumétrico nos microplanos
G^{mic}	Módulo de cisalhamento nos microplanos
Y^{mic}	Taxa de liberação de energia nos microplanos
Φ^{mic}	Função de carregamento baseada na evolução do dano nos microplanos
η^{mic}	Medida de deformação equivalente nos microplanos
κ^{mic}	Variável histórica de carregamento

Capítulo 4

Inclusão dos Modelos de Microplanos no Ambiente Unificado

H_{nm}	Componentes do tensor pós-crítico
n_{nkl}	Componentes do tensor das direções das funções de carregamento
m_{mij}	Componentes do tensor das direções da degradação
M_{mijkl}	Componentes do tensor da direção da variação da rigidez
\mathcal{D}_*	Conjunto de variáveis de dano
\mathcal{M}_{m*}	Componentes do tensor que de direção da taxa de mudança do dano
α^{mic}	Máxima degradação possível do material para lei de dano exponencial
β^{mic}	Parâmetro que governa a forma do ramo pós-pico para lei exponencial
κ_0^{mic}	Valor limite para início de dano para leis exponencial, linear e bilinear
f_{eq}	Tensão equivalente relativa ao limite de resistência do material
E_0	Módulo de elasticidade inicial
s	Parâmetro para cálculo da função de dano polinomial
κ_{cr}^{mic}	Parâmetro que delimita um valor intermediário do dano bilinear
κ_u^{mic}	Parâmetro que determina o valor final do dano bilinear
f_0^{mic}	Valor da tensão limite do material para dano bilinear
f_{cr}^{mic}	Valor da tensão intermediária no trecho pós-pico para dano bilinear
f_u^{mic}	Valor da tensão ao final do trecho pós-pico para dano bilinear
η_{Simo}^{mic}	Deformação equivalente de Simo e Ju (1987)
η_{Ju}^{mic}	Deformação equivalente de Ju (1989)
$\eta_{Lemaitre}^{mic}$	Deformação equivalente de Lemaitre (1984)
η_{Vree}^{mic}	Deformação equivalente proposta por de Vree et al. (1995)
k_1, k_2	Parâmetros para cálculo da medida de deformação η_{Vree}^{mic}
r	Razão entre as resistências à tração e à compressão do material
δ_{ij}	Delta de <i>Kronecker</i>

Lista de Abreviaturas e Siglas

ASCE *American Society of Civil Engineers*

CILAMCE *Iberian Latin American Congress on Computational Methods*

COMPLAS *International Conference on Computational Plasticity*

DEES Departamento de Engenharia de Estruturas

FAPEMIG Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais

FAPEMAT Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Mato Grosso

FraMCoS *Conference on Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures*

PROPEEs Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas

PUC-Rio Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

SIMMEC Simpósio Mineiro de Mecânica Computacional

UFMG Universidade Federal de Minas Gerais

UNEMAT Universidade do Estado de Mato Grosso

WCCM *World Congress on Computational Mechanics*

FEMOOP *Finite Element Method - Object Oriented Program*

INSANE *INteractive Structural ANalysis Environment*

POO Paradigma Orientado a Objetos

MEC Método dos Elementos de Contorno

MEF	Método dos Elementos Finitos
MEFG	Método dos Elementos Finitos Generalizados
MSM	Métodos Sem Malha
UML	Unified Modeling Language
XML	<i>Extensible Markup Language</i>
CMOD	<i>Crack Mouth Opening Displacement</i>
CMSD	<i>Crack Mouth Sliding Displacement</i>
EPD	Estado Plano de Deformação
PTV	Princípio dos Trabalhos Virtuais
N-T	Decomposição Normal-Tangencial
V-D-T	Decomposição Volumétrica-Desviadora-Tangencial
V-D	Decomposição Volumétrica-Desviadora

Resumo

Wolenski, A. R. V., 2013. Ambiente Teórico-Computacional Unificado para Modelos Constitutivos: Inclusão de Modelo de Microplanos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.

O comportamento fisicamente não linear do concreto tem sido objeto de inúmeras pesquisas que buscam, por meio da formulação de novos modelos ou do melhoramento daqueles já existentes, representar o meio material de maneira mais próxima de sua realidade constitutiva. Neste cenário, esta dissertação investiga os modelos em que o comportamento do material é descrito segundo os denominados Modelos de Microplanos. Para tanto, empregou-se o sistema computacional *INSANE* (*INte-ractive Structural ANalysis Environment*), cujo núcleo numérico contém o Ambiente Teórico-Computacional Unificado para Modelos Constitutivos proposto em Penna (2011). Preservando o caráter genérico deste ambiente, o modelo de Leukart e Ramm (2006) foi nele incorporado, considerando quatro medidas de deformação equivalente, quatro funções de evolução de dano, além de três aproximações do tensor constitutivo incremental. O projeto de *software* da referida incorporação foi concebido de modo a possibilitar a inclusão futura de quaisquer Modelos de Microplanos. Simulações numéricas permitiram avaliar a adequação dos parâmetros do material, a estabilidade numérica do modelo e a proximidade dos resultados com ensaios experimentais disponíveis na literatura.

Palavras-Chave: Método dos Elementos Finitos, Análise Não Linear, Modelagem Constitutiva do Concreto, *INSANE*.

Abstract

Wolenski, A. R. V., 2013. Unified Theoretical-Computational Environment to Constitutive Models: Inclusion of Microplane Model. Dissertation, Federal University of Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brazil.

The physically nonlinear behavior of concrete has been object of many researches which aim, through the formulation of new models or the improvement of the existing ones, representing the material medium of the nearest manner of its constitutive reality. In this scenario, this dissertation investigates the models in which the material behavior is described according to the called Microplane Models. To achieve it, the INSANE (INteractive Structural ANalysis Environment) system, whose numerical core contains the Unified Theoretical-Computational Environment to Constitutive Models proposal by Penna (2011), has been used. Preserving the generic nature of this environment, the model of Leukart and Ramm (2006) has been incorporated on it, considering four equivalent strains, four damage evolution laws, as well as three incremental constitutive tensor approximations. The software project of this incorporation has been conceived in order to enable the future inclusion of any Microplane Models. Numerical simulations allowed evaluating the adequacy of the material parameters, the numerical stability of the model and the proximity of the results with experimental tests available in the literature.

Keywords: Finite Element Method, Nonlinear Analysis, Concrete Constitutive Modeling, INSANE.

Agradecimentos

Inicialmente agradeço a Deus pelos dons da sabedoria e da paciência, imprescindíveis para conclusão de mais uma etapa nesta longa vida acadêmica.

À minha família pelos ensinamentos de vida.

Ao Professor Pitangueira, R. L. S, pela sabedoria, coragem e dedicação demonstradas durante a orientação deste trabalho e, sobretudo, pela inspiração e confiança transmitidas, tanto nos momentos de felicidade quanto nos instantes de fraqueza.

Ao Professor Penna, S. S., pelo profissionalismo e dedicação demonstradas no decorrer da co-orientação desta dissertação de mestrado.

Aos professores do PROPEEs pelos ensinamentos acadêmicos compartilhados.

Aos profissionais do DEES e PROPEEs, pela prestatividade e dedicação em suas atividades. Em especial, a Maria Inês, Patrícia, Fátima e Iracema, exemplos de dedicação pelo trabalho que desempenham na UFMG.

Aos amigos de longa data, que acompanharam minha caminhada durante os ciclos básicos do ensino fundamental e médio.

Aos companheiros de INSANE, que se tornaram fonte de energia para continuar nessa batalha acadêmica.

Aos amigos de pós-graduação, pelos diversos momentos de descontração e companheirismo, fontes de motivação durante a realização deste trabalho. Em especial, aos amigos Monteiro, A. e Silvestre, S., pela partilha em estudos incansáveis em tantos finais de semana na UFMG.

A UNEMAT e FAPEMAT pelo apoio durante a graduação.

A FAPEMIG pelo apoio financeiro durante a vigência da bolsa de Mestrado.

Capítulo 1

Introdução

O comportamento estrutural, sob o ponto de vista constitutivo, tem sido objeto de inúmeras pesquisas motivadas pelo crescente avanço da mecânica computacional. Dentre estas, podem-se encontrar problemas ligados à dependência geometricamente não linear, ou seja, a rigidez sofre influência de um elevado estado de deformação, mesmo que este não influencie o comportamento do material e, ainda, problemas ligados a não linearidade física, cuja resposta do material é dependente do estado de deformação a que é submetido.

No âmbito das estruturas em concreto, comumente são encontrados problemas de não linearidade física como, por exemplo, danos causados pela fissuração, esmagamento, fluência, retração, escoamento da armadura e perda de aderência aço-concreto, dentre outros fenômenos que, em virtude da evolução computacional dos últimos anos, estão sendo estudados dado o crescente avanço de métodos numéricos, que permitem lidar com problemas cada vez mais complexos.

Dentre tais métodos, o Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma ferramenta amplamente empregada nas mais diversas simulações numéricas, seja pela sua formulação disseminada e fortemente aceita no meio científico ou pelo seu histórico ligado a *softwares* de análise estrutural de uso consagrado no meio profissional.

No meio acadêmico, entretanto, a necessidade de avanço das pesquisas, na área de métodos numéricos e computacionais aplicados à engenharia, requer contínuas

alterações nos *softwares* para inclusão de novos recursos. Visando atender esta necessidade, um grupo de pesquisadores do Departamento de Engenharia de Estruturas (DEES) da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), vem desenvolvendo o sistema computacional *INSANE* (*INteractive Structural ANalysis Environment*).

O projeto *INSANE* nasceu do desejo de desenvolver um ambiente interativo de análise estrutural para utilização como recurso didático em disciplinas de graduação e pós-graduação em engenharia, assim como base para pesquisas na área de métodos numéricos. Desde o início, o desenvolvimento do *INSANE* baseia-se nas seguintes premissas fundamentais: facilidade de uso, código livre, utilização da linguagem *Java* e total separação entre o núcleo numérico e interfaces gráficas.

A atual versão do sistema é fruto de vários trabalhos contabilizados desde o ano de 2004, conforme abordado no Apêndice E. Tais trabalhos ampliaram o núcleo numérico do *INSANE* que, atualmente, possui diversos recursos, tais como: (1) extensa biblioteca de modelos de análise, modelos constitutivos e métodos para soluções de modelos não lineares; (2) modelos discretos do MEF, do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), do Método de Elementos de Contorno (MEC) e dos Métodos Sem Malhas (MSM); e, mais recentemente, (3) um Ambiente Teórico-Computacional Unificado para Modelos Constitutivos; entre outras funcionalidades.

Neste cenário, esta dissertação usa o MEF como método numérico para análise estrutural do concreto e o sistema *INSANE* como plataforma para implementações. A aplicação do MEF, para análise fisicamente não linear, requer: (1) o uso de técnicas de obtenção da resposta não linear da estrutura; e (2) a escolha de um modelo constitutivo adequado para o cálculo das tensões e da variação da rigidez estrutural.

Para o atendimento do primeiro requisito, empregaram-se métodos incrementais-iterativos que controlam uma ou mais variáveis do problema. Estes métodos são denominados Métodos de Controle da Análise Não Linear. Dentre os mais utilizados, destacam-se os métodos de controle de deslocamento (Batoz e Dhat, 1979), de controle de comprimento de arco (Ricks, 1972; Ramm, 1981; Crisfield, 1981, 1983) e de

controle de deslocamento generalizado (Yang e Shieh, 1990; Yang e S.R.Kuo, 1994). Todos esses métodos já estão disponíveis no sistema **INSANE**, conforme detalhado nos trabalhos de Fonseca (2006) e Fuina (2009).

Para o atendimento do segundo requisito, implementou-se, no **INSANE**, o Modelo de Microplanos desenvolvido por Leukart e Ramm (2006), segundo o Ambiente Teórico-Computacional para Modelos Constitutivos proposto em Penna (2011). Nesta dissertação, o modelo constitutivo em questão foi aperfeiçoado, do ponto de vista computacional, para considerar diferentes funções de evolução de dano, combinadas com medidas distintas de deformação equivalente.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivos Gerais

Objetivou-se incluir um Modelo de Microplanos no ambiente unificado para modelos constitutivos segundo Penna (2011) e implementá-lo no sistema **INSANE**. Optou-se pelo modelo proposto por Leukart e Ramm (2006) devido à generalidade de sua formulação, o que permitiu ampliá-lo para considerar diferentes funções de evolução de dano e diversas medidas de deformação equivalente.

1.1.2 Objetivos Específicos

Dentre os objetivos específicos desta dissertação, citam-se:

- (1) realizar simulações numéricas considerando combinações diversas que demonstrem as possibilidades no uso das distintas medidas de deformação equivalente, com as funções de dano existentes no **INSANE**, ajustando adequadamente os parâmetros das referidas medidas e funções para a caracterização de dado material;
- (2) avaliar a estabilidade do modelo implementado, investigando a dependência de malha, bem como diferentes aproximações do tensor constitutivo incremental;
- (3) comparar os resultados obtidos com o modelo implementado com resultados experimentais disponíveis na literatura.

1.2 Organização do Texto

Esta dissertação é organizada em sete capítulos e cinco apêndices. Além deste capítulo inicial, o Capítulo 2 apresenta um histórico da evolução dos Modelos Constitutivos de Microplanos e as bases para suas distintas formulações.

No Capítulo 3, apresenta-se a formulação do Modelo de Microplanos proposto por Leukart e Ramm (2006), com destaque para as equações representativas dos tensores constitutivos elástico, secante e tangente, usados para cálculo das tensões e para avaliação da rigidez estrutural.

No Capítulo 4, o modelo de Leukart e Ramm (2006) é formulado segundo o Ambiente Teórico-Computacional Unificado para Modelos Constitutivos definido em Penna (2011), enfatizando-se as equações que permitem calcular as tensões e os tensores constitutivos envolvidos, além das diferentes medidas de deformação equivalente e funções de evolução de dano, acrescentadas ao modelo.

O Capítulo 5 expõe o projeto orientado a objetos da implementação, com o intuito de detalhar as interfaces e classes criadas e/ou alteradas no núcleo numérico do sistema computacional *INSANE*.

O Capítulo 6 apresenta as simulações numéricas realizadas neste trabalho, demonstrando o atendimento dos objetivos específicos, com as conclusões deste trabalho expostas no Capítulo 7, juntamente com as propostas de trabalhos futuros oriundos da temática abordada.

Por fim, os apêndices expõem um complemento à dissertação. O Apêndice A apresenta os tensores usados na formulação e implementação do Modelo de Microplanos, já o Apêndice B compreende o processo para a obtenção dos parâmetros de dano usados durante as simulações numéricas. O Apêndice C trata da integração dos microplanos sob uma esfera e o Apêndice D apresenta as condições de carregamento, descarregamento e recarregamento baseadas nas condições de *Kuhn-Tucker*, enquanto o Apêndice E aborda um complemento ao núcleo numérico do *INSANE*.

Capítulo 2

Modelos Constitutivos de Microplanos

Os Modelos de Fissuração Distribuída contribuem efetivamente para a análise fisicamente não linear do concreto, quando o comportamento deste material é admitido ortotrópico. Todavia, é mais adequado admitir um comportamento anisotrópico, principalmente em virtude de sua característica intrínseca de desenvolver processos de microfissuração e, por consequência, exibir uma resposta ligada diretamente à degradação iniciada por estas microfissuras.

Assim, a complexidade em modelos tradicionais de fissuração distribuída dificulta a descrição deste comportamento, razão pela qual os Modelos de Microplanos podem servir como estratégia para descrever a anisotropia de materiais como o concreto.

Na sequência, apresentam-se uma revisão histórica sobre estes modelos e uma descrição das bases teóricas nas quais se fundamentam as formulações dos mesmos.

2.1 Histórico dos Modelos de Microplanos

As primeiras tentativas para caracterização do meio material em distintos planos de orientação surgiram dos estudos pioneiros de Mohr (1900) *apud* Leukart (2005), servindo como base teórica para a primeira aplicação prática para modelagem constitutiva anisotrópica desenvolvida por Taylor (1938) *apud* Bažant e Planas (1998), que propôs um novo modelo capaz de avaliar as tensões e deformações em planos de orientações arbitrários, restrito inicialmente a metais policristalinos.

Tal proposta preconizava que as tensões e deformações macroscópicas fossem obtidas pela resultante de todos os planos, por meio da imposição de condições estáticas e cinemáticas, relacionando as grandezas em macro e micro escalas.

Trabalhos subsequentes demonstraram que a proposta inicial de Taylor (1938) *apud* Bažant e Planas (1998) representava a plasticidade de metais de modo mais realista. Contudo, as limitações de recursos computacionais existentes naquela época dificultaram por mais de uma década a evolução e aplicação desta teoria. Apenas com o trabalho de Batdorf e Budianski (1949) *apud* Carol e Bažant (1997) vislumbrou-se o primeiro modelo para plasticidade de metais policristalinos, em que se admitia a ocorrência de plastificação em vários planos, definidos pela geometria da estrutura cristalina do material.

Muitos outros pesquisadores buscaram melhorar esta aproximação para materiais metálicos ou estenderam-a para outros materiais como solos e rochas. Contudo, a adaptação desta teoria para as estruturas de concreto ocorreu apenas anos mais tarde, oriunda da associação entre a estrutura sólida heterogênea do material – matriz cimentícia com agregados de diferentes faixas granulométricas – com a existência de vários planos de descontinuidades posicionados nas interfaces de seus grãos.

A referida associação é bastante pertinente, pois o surgimento e propagação das microfissuras em distintas orientações, que conduzem a uma resposta inelástica deste material, ocorrem geralmente nas interfaces entre a matriz cimentícia e os agregados, conforme ilustrado pela Figura 2.1.

Embora tal associação fosse compreendida em escala Microscópica, Bažant e Gambarova (1984) formularam um modelo sob uma hipótese em escala Mesoscópica. Os autores prescreveram o material com um comportamento constitutivo individual e independente em microplanos orientados em várias direções, buscando idealizar a associação entre a microestrutura do concreto sólido e a existência de planos preferenciais de falha observada na Figura 2.1.

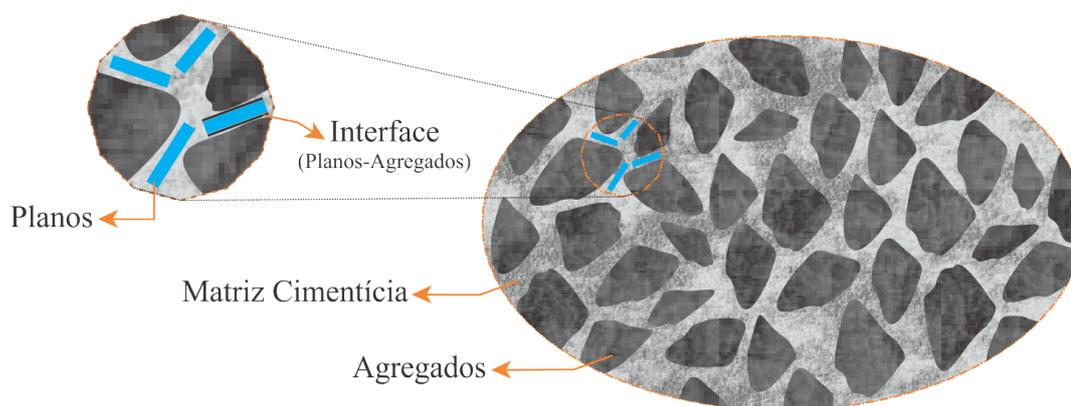


Figura 2.1: Associação de planos descontínuos com a microestrutura sólida do material concreto.

Bažant e Gambarova (1984) buscaram relacionar as tensões e deformações macroscópicas com as existentes nos microplanos, com intuito de representar uma resposta inelástica realista do material.

A partir desta formulação, idealizada para representar o comportamento de materiais parcialmente frágeis, o termo *Modelos de Microplanos* passa a ser adotado para representar modelos nos quais leis constitutivas são definidas em orientações arbitrárias do material, de modo a ampliar a aplicação das ideias de Taylor (1938) *apud* Bažant e Planas (1998), inicialmente restritas à plasticidade de metais.

Desde o trabalho pioneiro de Bažant e Gambarova (1984) até os estudos mais recentes, os Modelos de Microplanos evoluíram e passaram a ser classificados em três grupos distintos: os modelos de *Restrição Estática*, de *Restrição Cinemática* ou de *Restrição Mista*, conforme a natureza das variáveis macroscópicas decompostas sobre cada um dos microplanos.

Sendo assim, o modelo é dito de restrição estática se apenas tensões são decompostas nos microplanos. Para o caso em que há ocorrência somente de deformações no processo de decomposição dos microplanos, o mesmo é denominado de restrição cinemática. E por fim, para os casos onde são usadas tanto tensões como deformações para a decomposição das variáveis macroscópicas sob os microplanos, o modelo é dito de restrição mista.

Conforme a aludida classificação, o modelo pioneiro de Bažant e Gambarova (1984) é de restrição estática. Este trabalho foi revisto por Bažant e Oh (1985), que verificaram a incapacidade dos modelos de restrição estática em descrever trajetórias de equilíbrio pós-crítica em regime de amolecimento. Os autores alegaram ainda que o uso da restrição cinemática parece descrever melhor o que ocorre na microestrutura de materiais parcialmente frágeis, onde as tensões registradas geralmente são admitidas como não-uniformes.

Apesar da expressiva evolução dos primeiros modelos com restrição estática para os modelos formulados com restrição cinemática, estes ainda empregavam apenas a componente normal de deformação para a formulação do modelo, sendo desprezada a rigidez ao cisalhamento nos microplanos.

A ineficiência desta simplificação foi evidenciada durante as tentativas de modelagem de uma resposta para esforços em compressão, segundo Bažant e Prat (1988*a,b*), que, ao simular ensaios de compressão uniaxial, obtinham uma trajetória de equilíbrio pós-crítica na forma de *Snap-Back*, bem como restringiam o uso desta formulação para valores constantes do coeficiente de *Poisson*, $\nu = 0,25$.

Em meio à percepção destes problemas, Bažant e Prat (1988*a,b*) concluíram que era necessário incluir a componente cisalhante de deformação em cada microplano, através da decomposição das deformações em parcelas normal e tangencial (decomposição N-T). Contudo, ao introduzirem esta decomposição, o coeficiente de *Poisson* passou a ser limitado a uma faixa entre $-1 \leq \nu \leq 0,25$, o que impediria a generalização do modelo para materiais com $\nu > 0,25$.

Bažant e Prat (1988*a,b*) aventaram que o coeficiente de *Poisson* arbitrário, limitado entre $-1 \leq \nu \leq 0,5$, poderia ser obtido se, além da consideração da componente cisalhante de deformação, a deformação normal fosse decomposta em suas parcelas volumétrica e desviadora, denominada de decomposição V-D-T. Desde modo, surge um modelo incluindo uma decomposição V-D-T, bem como uma dependência entre a tensão cisalhante e os valores principais de tensão. Assim, o modelo deixa de

ser puramente cinemático na determinação das tensões nos microplanos e passa a utilizar uma determinação mista.

Desta forma, o modelo de restrição mista de Bažant e Prat (1988*a,b*) passa a ser capaz de representar as trajetórias de equilíbrio, inclusive para uma resposta pós-crítica, o que possibilitou a representação da curva de amolecimento do concreto.

Seguindo essa proposta de formulação de modelo de restrição mista, outros trabalhos foram concebidos ao combinar esta formulação com o conceito de dano não-local, por Bažant e Ožbolt (1990), e através de Ožbolt e Bažant (1992), que estenderam a formulação inicial para considerar o carregamento cíclico.

Tais modelos foram implementados com uso do Método dos Elementos Finitos (MEF), tentando-se demonstrar, por meio de simulações numéricas, a capacidade dos mesmos em representar a realidade dos fenômenos envolvidos. Contudo, tais trabalhos tinham como objetivo principal representar resultados experimentais, o que resultou em modelos pouco consistentes do ponto de vista teórico e numérico, tendo em vista, principalmente, a realidade computacional da época.

A ansiada consistência foi alcançada a partir da década de 1990 com a evolução dos modelos de Bažant e Ožbolt (1990) e Ožbolt e Bažant (1992), proposta por Carol et al. (1992), cuja teoria pela primeira vez foi apresentada usando apenas restrição cinemática, excluindo os modelos de restrição mista, com intuito de denotar a formulação final de maneira mais adequada às aplicações práticas. Tal modelo passou a ser denominado *Modelo Explícito de Microplanos*, representando tanto o comportamento do material em um único ponto quanto em um contexto estrutural.

Mesmo com o grande avanço existente entre o Modelo de Microplanos com restrição mista proposto por Bažant e Prat (1988*a,b*) e o modelo explícito definido por Carol et al. (1992), este último ainda apresentava inconsistências que foram observadas no trabalho de Ožbolt et al. (2001).

Estas inconsistências foram pesquisadas no trabalho de Silva (2001), que simulou ensaios de tração uniaxial e de tração com cisalhamento e obteve um comportamento

patológico em estado de tração dominante, manifestado por uma expansão lateral que não condiz com a realidade destes ensaios.

A solução de tais inconsistências foi inicialmente pesquisada por Ožbolt et al. (2001), que propuseram uma nova formulação incluindo uma relaxação na restrição cinemática adotada no trabalho de Carol et al. (1992), concebendo assim o modelo intitulado *Modelo de Microplanos com Relaxação Cinemática*. Este modelo emprega a restrição cinemática com componentes de deformação volumétrica, desviadora e tangencial nos microplanos (decomposição V-D-T), bem como leis constitutivas nos microplanos obtidas experimentalmente e o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) como processo de homogeneização.

Apesar da imposição de uma relaxação na restrição cinemática proporcionar importantes correções na proposição de Carol et al. (1992), o modelo de Ožbolt et al. (2001) ainda manteve a aplicação do PTV para equilíbrio energético, o que resultou na persistência de erros relativos ao não atendimento das leis termodinâmicas.

Segundo Carol (1996) e Fuina et al. (2011), os modelos que adotam o PTV como equivalência energética não satisfazem à segunda lei da termodinâmica em todas as situações de carregamento. Mais especificamente, Carol e Willam (1996) afirmam que a tensão desviadora no microplano não é definida consistentemente, levando a gerações e/ou dissipações de energia espúria e distorcendo a predição numérica sob algumas sequências de carregamento.

Visando sanar esta questão, Carol et al. (2001a) e Kuhl et al. (2001) propuseram uma nova formulação com uma estrutura teórica consistente com os princípios termodinâmicos ao incorporar o potencial de energia livre de *Helmholtz* em cada microplano, de modo que a energia livre macroscópica fosse obtida por meio da integral sobre as orientações de todos os microplanos. Tal estrutura possibilitou sua aplicação a diferentes comportamentos do material nos microplanos, incluindo elasticidade, dano e plasticidade, ou ainda uma combinação destes.

Esta incorporação do potencial de energia nos microplanos é tema recorrente nos

trabalhos de Bažant et al. (2000a), Bažant et al. (2000b), D’Addetta (2004), Carol et al. (2004), Bažant e Caner (2005), Leukart (2005), entre outros, cujas pesquisas utilizam a Teoria dos Microplanos para a formulação constitutiva.

Seguindo tal proposição, Leukart e Ramm (2002, 2003) e Ramm et al. (2003) adotaram pela primeira vez uma nova decomposição das deformações macroscópicas, dando sequência a nova formulação baseada em leis termodinâmicas. O denominado *Modelo de Microplanos com Deformação Equivalente* emprega as componentes de deformação volumétrica e desviadora nos microplanos (decomposição V-D), além de leis de evolução de dano nos microplanos escritas em função de deformações equivalentes e um processo termodinamicamente consistente para a homogeneização.

Dentre as vantagens apontadas por Leukart e Ramm (2003) para este modelo está o uso da decomposição V-D, cujas deformações macroscópicas são decompostas em componentes volumétrica e desviadora e projetadas em cada microplano, a fim de obter as componentes de tensão nos microplanos. Este processo permite obter a combinação das vantagens no uso das decomposições N-T e V-D-T.

Um aperfeiçoamento deste modelo, formulado por Leukart e Ramm (2006), objetivou definir uma relação direta com o uso de uma única variável de dano para representar a degradação do material, de modo a acoplar os efeitos volumétrico e desviador e descrever a evolução do dano na direção do mesmo.

Recentemente, Wu (2009) propôs um novo Modelo de Microplanos que é elucidado apenas em sua premissa teórica, não apresentando as hipóteses ligadas à implementação computacional. Maiores detalhes sobre esta proposição podem ser encontrados nos trabalhos de Wu e Li (2006, 2007, 2008).

Nota-se, a partir deste breve histórico acerca dos Modelos Constitutivos de Microplanos, que o surgimento, evolução e aplicação desta teoria é tema recente e recorrente, cujas pesquisas são constantemente revisadas e ampliadas tanto em seu contexto teórico quanto em seu aspecto computacional, sendo estas um indicativo da necessidade de novos estudos sobre esta temática, além de demonstrar o quão

abertos se encontram alguns pontos aqui tratados.

Sendo assim, apresenta-se, na sequência, a base geral adotada para as formulações dos Modelos de Microplanos, com aspectos centrais e fundamentais para generalização do ponto de vista teórico-computacional destes modelos.

2.2 Bases dos Modelos de Microplanos

As formulações dos Modelos de Microplanos seguem, de modo geral, três etapas principais: a projeção das deformações nos microplanos; a definição das leis constitutivas e o processo de homogeneização.

Admite-se o conhecimento das deformações macroscópicas em um ponto material e, sobre uma esfera de raio unitário centrada neste ponto, posiciona-se um conjunto de microplanos com direções normais a essa superfície esférica.

A Figura 2.2 ilustra o posicionamento dos microplanos em uma esfera e a decomposição da deformação ε em cada microplano.

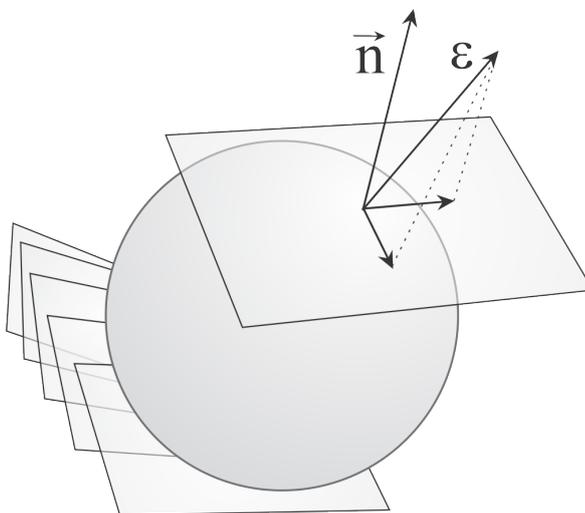


Figura 2.2: Decomposição da deformação ε em um microplano sobre uma esfera unitária (Ožbolt et al., 2001).

Deste modo, primeiramente é necessário projetar as deformações macroscópicas em cada microplano, decompondo-as em parcelas normal e tangencial, com possibilidades de dividir a componente normal em parcelas volumétrica e desviadora.

Uma vez definidas as deformações nos microplanos, conforme a decomposição empregada, o segundo passo consiste em assumir leis constitutivas, independentes entre si, para cada microplano e, a partir destas, obter as respectivas tensões.

Por fim, o último passo é obter as tensões macroscópicas a partir das tensões nos microplanos previamente calculadas, com base em um princípio de equivalência energética, seja este baseado no Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) ou em Leis Termodinâmicas.

No esquema mostrado na Figura 2.3, tem-se a síntese do funcionamento dos Modelos Constitutivos de Microplanos.

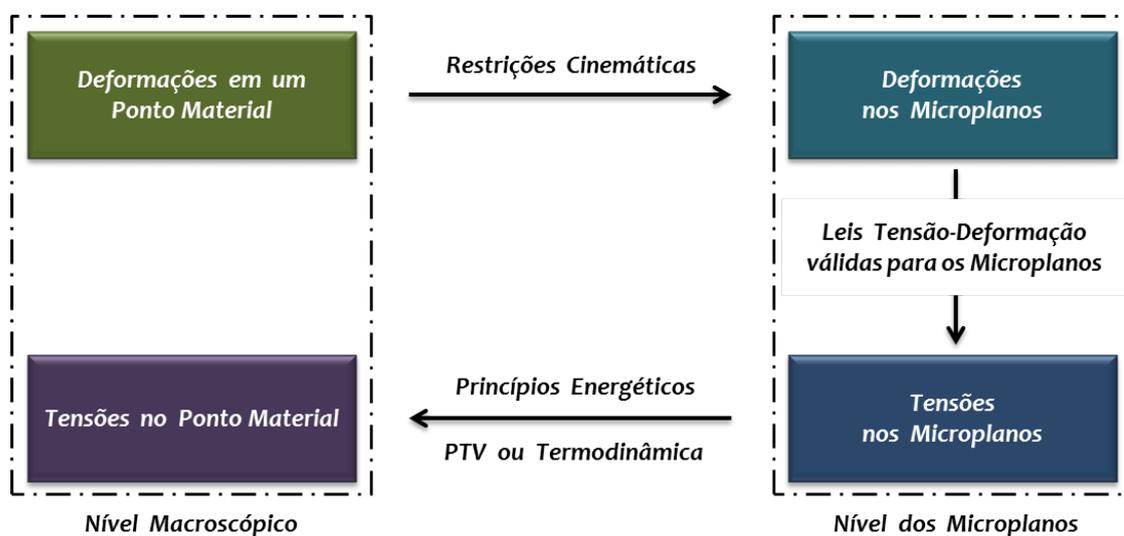


Figura 2.3: Esquema de funcionamento dos Modelos Constitutivos de Microplanos (Leukart, 2005).

Sendo assim, verifica-se no esquema da Figura 2.3 que a formulação para os Modelos de Microplanos envolve a definição da restrição cinemática, a obtenção das tensões em cada microplano e a aplicação do princípio de equivalência energética.

A título exemplificativo, a Figura 2.4 ilustra a decomposição das componentes do tensor de deformação, ε , para uma decomposição do tipo V-D-T, por meio da decomposição das parcelas normal (ε_N) e tangencial (ε_T), e a subsequente divisão da parcela normal nas parcelas volumétrica (ε_V) e desviadora (ε_D).

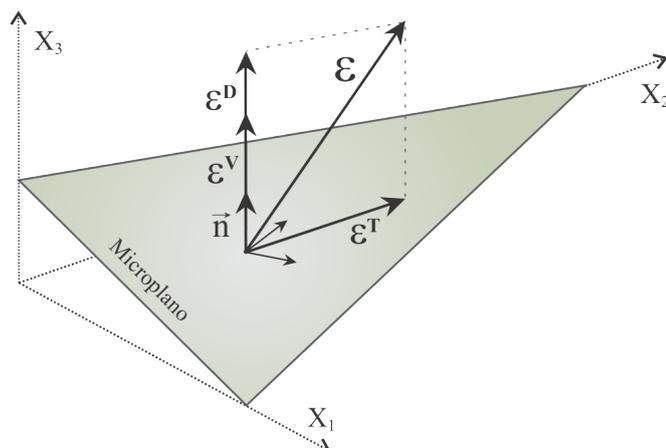


Figura 2.4: Componentes das deformações normal (volumétrica e desviadora) e tangencial em cada microplano: decomposição V-D-T (Bažant e Prat, 1988a).

Este tipo de decomposição foi empregada inicialmente por Bažant e Prat (1988a), como explanado na seção 2.1, inspirando muitos trabalhos subsequentes, como o modelo com relaxação cinemática proposto por Ožbolt et al. (2001), entre outros. Contudo, tais formulações ainda mantiveram as mesmas inconsistências observadas em modelos que utilizavam o PTV como princípio energético.

Correções para estas inconsistências foram conduzidas por Ramm et al. (2003), Leukart (2005) e Leukart e Ramm (2002, 2003), a partir da formulação baseada em leis termodinâmicas. A formulação de Leukart e Ramm (2006) será enfatizada no capítulo subsequente, com o objetivo de avaliar tal formulação segundo o Ambiente Unificado para modelos constitutivos proposto em Penna (2011).

Para maiores detalhes acerca dos passos para a formulação de Modelos Constitutivos de Microplanos em suas diferentes formas de decomposição do tensor de deformações, pode-se recorrer aos trabalhos de Bažant e Prat (1988a), Carol et al. (2001a), Ožbolt et al. (2001) e Leukart (2005).

Capítulo 3

Modelo de Microplanos com Deformação Equivalente

Leukart e Ramm (2006) desenvolveram um importante Modelo de Microplanos que difere dos demais em alguns pontos importantes. Primeiramente, este modelo emprega uma restrição cinemática com componentes de deformação volumétrica e desviadora nos microplanos, ou seja, usa uma decomposição V-D.

Outro ponto relevante refere-se ao emprego de uma única variável de dano que acopla os danos volumétrico e desviador nos microplanos, controlando a degradação a partir de funções de evolução de dano dependentes de uma única medida de deformação equivalente.

Em suma, a proposta de Leukart e Ramm (2006) pode ser compreendida, conforme esquema da Figura 2.3, a partir das principais etapas que se seguem:

- (1) Definição das Restrições Cinemáticas – consiste em obter o vetor de deformações em cada microplano;
- (2) Aplicação das Leis Constitutivas – consiste em definir as relações constitutivas nos microplanos ao assumir que o processo de dano é o principal mecanismo de dissipação que descreve a degradação nos pontos materiais; e
- (3) Imposição de Leis Termodinâmicas – consiste em admitir que a energia livre nos microplanos existe e sua integral sobre todos os microplanos é equivalente à energia livre macroscópica de *Helmholtz*.

Sendo assim, a proposição de Leukart e Ramm (2006) é apresentada na sequência,

podendo-se recorrer a maiores detalhes desta formulação nos trabalhos de Leukart e Ramm (2002, 2003) e Leukart (2005).

3.1 Restrição Cinemática

A hipótese básica da restrição cinemática consiste na obtenção das componentes do vetor de deformação, t_j^ε , em cada microplano, sendo este a projeção das componentes do tensor de deformação macroscópico, ε_{ij} , na direção da normal ao microplano. Assim, este vetor é dado por:

$$t_j^\varepsilon = \varepsilon_{ij} n_i, \quad (3.1)$$

em que n_i corresponde às componentes do vetor normal unitário de cada microplano. A decomposição das componentes do vetor de deformação t_j^ε é o ponto inicial para a caracterização dos diferentes Modelos de Microplanos.

A forma de decomposição de t_j^ε pode resultar em comportamentos distintos. De acordo com Leukart e Ramm (2002), a principal vantagem do emprego da decomposição V-D é que as respostas macroscópicas são diretamente refletidas no nível dos microplanos. Além disso, os autores argumentam que, para muitos materiais, os comportamentos volumétrico e desviador são completamente diferentes, não apenas em nível macroscópico, mas também em uma escala menor de observação, justificando assim a adoção da referida decomposição.

Outra justificativa apresentada por Leukart e Ramm (2003, 2006) para o uso da decomposição V-D é a capacidade da mesma de representar materiais com coeficiente de *Poisson* no intervalo compreendido entre $-1 \leq \nu \leq 0,5$.

Assim, para pequenas deformações, a decomposição aditiva do tensor t_j^ε é obtida a partir da parcela simétrica do gradiente de deslocamentos, Δ^{sym} , em que:

$$\varepsilon_{ij} = \Delta^{sym} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{vol} + \varepsilon_{ij}^{dev}, \quad (3.2)$$

sendo as deformações volumétrica e desviadora expressas, respectivamente, por:

$$\varepsilon_{ij}^{vol} = \frac{1}{3} [\varepsilon_{ij} \mathcal{I}_{ij}] \mathcal{I}_{ij} \quad e \quad \varepsilon_{ij}^{dev} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{vol}, \quad (3.3)$$

em que \mathcal{I}_{ij} é o tensor identidade de segunda ordem de componentes δ_{ij} , detalhado em todas suas componentes no Apêndice A.

As deformações volumétrica, ε^V , e desviadora, ε_p^D , são obtidas pelas projeções das parcelas de deformações macroscópicas ε_{ij}^{vol} e ε_{ij}^{dev} (equações 3.3) na direção dos mesmos, conforme ilustra a Figura 3.1.

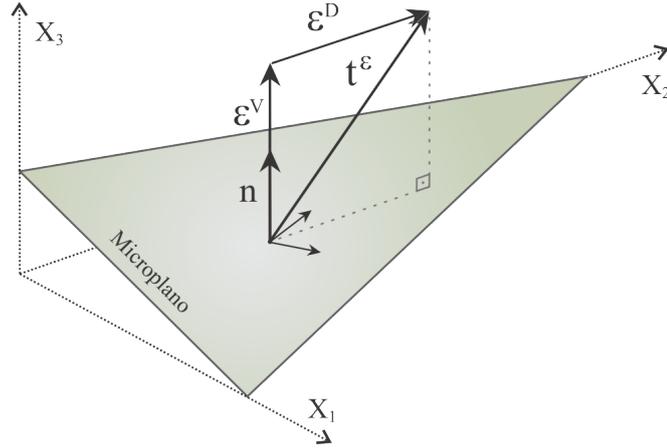


Figura 3.1: Componentes das deformações volumétrica e desviadora em cada microplano: decomposição V-D (Leukart, 2005).

Nota-se que a partir de uma única componente normal, n_i , é possível obter as parcelas de deformações ε^V e ε_p^D nos microplanos. Assim, tem-se que:

$$\begin{aligned}
 t_j^\varepsilon = \varepsilon_{ij} n_i &= [\varepsilon_{ij}^{vol} + \varepsilon_{ij}^{dev}] n_i \\
 &= \frac{1}{3} [\mathcal{I}_{ij} \varepsilon_{ij}] n_i + \varepsilon_{ij}^{dev} n_i \\
 &= \mathcal{V}_{ij} \varepsilon_{ij} n_i + \varepsilon_{ij}^{dev} n_i \\
 &= \varepsilon^V n_i + \varepsilon_j^D.
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Do desenvolvimento da equação (3.4), as componentes de deformação volumétrica e desviadora são expressas, respectivamente, pelas equações:

$$\varepsilon^V = \mathcal{V}_{ij} \varepsilon_{ij}, \tag{3.5}$$

e

$$\varepsilon_p^D = t_p^\varepsilon - \varepsilon^V n_p = \mathcal{D}_{pkl} \varepsilon_{kl}, \tag{3.6}$$

sendo \mathcal{V}_{ij} e \mathcal{D}_{pkl} as componentes dos tensores de projeção volumétrico e desviador, expressos, sequencialmente, pelas equações:

$$\mathcal{V}_{ij} = \frac{1}{3} \mathcal{I}_{ij} , \quad (3.7)$$

e

$$\mathcal{D}_{pkl} = n_i \mathcal{I}_{ijkl}^{sym} - \frac{1}{3} n_i \mathcal{I}_{ij} \mathcal{I}_{kl} = n_i \mathcal{I}_{ijkl}^{dev} = \mathcal{D}_{jkl} , \quad (3.8)$$

em que \mathcal{I}_{ijkl}^{sym} é o tensor de quarta ordem de componentes $\frac{[\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}]}{2}$, tendo \mathcal{I}_{ijkl}^{dev} e \mathcal{I}_{ijkl}^{vol} , respectivamente, como suas parcelas desviadora e volumétrica, dadas por:

$$\mathcal{I}_{ijkl}^{dev} = \mathcal{I}_{ijkl}^{sym} - \mathcal{I}_{ijkl}^{vol} , \quad (3.9)$$

e

$$\mathcal{I}_{ijkl}^{vol} = \frac{1}{3} \mathcal{I}_{ij} \mathcal{I}_{kl} , \quad (3.10)$$

cujos tensores acima apresentados são expandidos em todas suas componentes no decorrer do Apêndice A.

Pode-se obter em Kanatani (1984) e Lubarda e Krajcinovic (1993) as propriedades de integração analítica dos produtos de quarta ordem dos tensores de projeção volumétrico e desviador, cujas componentes são escritas, respectivamente, na forma:

$$\frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} [\mathcal{V}_{ij} \mathcal{V}_{kl}] d\mathcal{S} = \mathcal{I}_{ijkl}^{vol} , \quad (3.11)$$

e

$$\frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} [\mathcal{D}_{pij} \mathcal{D}_{pkl}] d\mathcal{S} = \mathcal{I}_{ijkl}^{dev} , \quad (3.12)$$

onde o domínio de integração \mathcal{S} é a superfície de uma esfera de raio unitário.

Em adição, o primeiro invariante da deformação macroscópica e o segundo invariante da deformação desviadora macroscópica podem ser expressos em termos das componentes de deformações ε^V e ε_p^D , para uma decomposição V-D, ou seja:

$$I_1 = \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \varepsilon^V d\mathcal{S} = 3\varepsilon^V \quad e \quad 2J_2 = \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \varepsilon_p^D \varepsilon_p^D d\mathcal{S} . \quad (3.13)$$

Estes invariantes são importantes na definição das medidas de deformação equivalente abordadas ao final do Capítulo 4.

3.2 Relações Constitutivas nos Microplanos

A obtenção das relações constitutivas nos microplanos é fundamentada no trabalho de Carol et al. (2001a). Admite-se que o processo de dano do material é o principal mecanismo de dissipação capaz de descrever a degradação progressiva das propriedades mecânicas nos microplanos e, para isto, utiliza-se de uma formulação genérica termodinamicamente consistente.

A introdução de dois parâmetros de dano independentes permite incorporar as leis de dano nas formulações de microplanos. Nos trabalhos de Kuhl e Ramm (2000), Kuhl et al. (1998) e Leukart e Ramm (2003) são encontradas formulações de microplanos pertencentes a esta classe de modelos, nas quais diferentes variáveis de dano são consideradas. Assim, é possível controlar de maneira independente a degradação da rigidez volumétrica e desviadora nos microplanos.

Porém, do ponto de vista físico, um desacoplamento volumétrico-desviador (V-D) não parece razoável para uma modelagem de meios parcialmente frágeis e heterogêneos. Por este motivo, adota-se, para a formulação de Leukart e Ramm (2006), um único parâmetro de evolução de dano nos microplanos, denotado por d^{mic} , e uma única medida de deformação equivalente. Assim, o vetor das variáveis internas pode ser identificado como $p = \{d^{mic}\}$.

Desta maneira, a partir de leis constitutivas para um modelo de elasticidade linear isotrópico, são inicialmente inseridos parâmetros de elasticidade nos microplanos, determinados em termos das constantes de elasticidade macroscópica. Assim, como os materiais elásticos são completamente não dissipativos e possuem deformações reversíveis, nenhuma variável interna precisa ser considerada.

Logo, a energia livre elástica nos microplanos, Ψ_0^{mic} , é denotada como uma função quadrática em nível microscópico, que é aditivamente decomposta na parcela volumétrica, Ψ_0^{vol} , e na parcela desviadora, Ψ_0^{dev} , assim:

$$\Psi_0^{mic} = \Psi_0^{vol}(\varepsilon^V) + \Psi_0^{dev}(\varepsilon_p^D) = \frac{1}{2}\varepsilon^V E_0^V \varepsilon^V + \frac{1}{2}\varepsilon_p^D E_0^D \varepsilon_p^D, \quad (3.14)$$

onde os parâmetros elásticos E_0^V e E_0^D são, respectivamente, os módulos volumétrico e desviador nos microplanos.

Uma vez definida a energia livre elástica nos microplanos, Ψ_0^{mic} , obtêm-se as parcelas volumétrica e desviadora das tensões nos microplanos, a partir da associação com as componentes correspondentes de deformações ε^V e ε_p^D , ou seja:

$$\sigma^V = \frac{\partial \Psi_0^{mic}}{\partial \varepsilon^V} = E_0^V \varepsilon^V, \quad (3.15)$$

e

$$\sigma_p^D = \frac{\partial \Psi_0^{mic}}{\partial \varepsilon_p^D} = E_0^D \varepsilon_p^D. \quad (3.16)$$

Assim, o vetor das tensões nos microplanos é dado pelas parcelas σ^V e σ_p^D , sendo esta última composta pelas componentes normal e tangencial, em contraste com outras aproximações, como as decomposições N-T e V-D-T.

3.3 Aplicação das Leis Termodinâmicas

A base para a formulação termodinamicamente consistente é a admissão de que a energia livre nos microplanos, Ψ^{mic} , existe e que sua integral sobre todos os microplanos é equivalente à energia livre macroscópica de *Helmholtz*, denotada por Ψ^{mac} e expressa pela equação:

$$\Psi^{mac} = \frac{3}{4\pi} \int_S \Psi^{mic} dS. \quad (3.17)$$

Assim, a partir do modelo de dano contínuo de Carol et al. (2001a), que descreve a degradação progressiva das propriedades mecânicas do material nos microplanos, a energia livre nos microplanos, Ψ^{mic} , pode ser definida em termos da energia livre elástica, Ψ_0^{mic} , reduzida pelo fator de integridade, $[1 - d^{mic}]$, ou seja:

$$\Psi^{mic}(\varepsilon^V, \varepsilon_p^D, d^{mic}) = [1 - d^{mic}] \Psi_0^{mic}. \quad (3.18)$$

Definida a energia Ψ^{mic} , pode-se definir a versão macroscópica do tensor de tensão, σ_{ij} , ao considerar a desigualdade macroscópica de *Clausius-Duhem* para o

caso isotérmico, em que a energia de dissipação macroscópica \mathbb{D}^{mac} é expressa por:

$$\mathbb{D}^{mac} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\Psi}^{mac} \geq 0, \quad (3.19)$$

sendo $\dot{\varepsilon}_{ij}$ a taxa de deformações e $\dot{\Psi}^{mac}$ a taxa de energia livre macroscópica.

Ao empregar as equações das restrições cinemáticas, dadas pelas equações (3.5) e (3.6), a taxa de energia livre nos microplanos pode ser escrita como:

$$\dot{\Psi}^{mic} = [\mathcal{V}_{ij} \sigma^V + \mathcal{D}_{pij} \sigma_p^D] \dot{\varepsilon}_{ij} - \mathbb{D}^{mic}, \quad (3.20)$$

sendo \mathbb{D}^{mic} a energia de dissipação nos microplanos, definida por:

$$\mathbb{D}^{mic} = -\frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial p} \dot{p}, \quad (3.21)$$

em que \dot{p} indica a taxa de variação do vetor das variáveis internas.

Substituindo a equação (3.20) na equação (3.17), obtém-se a equação da taxa de energia livre macroscópica, $\dot{\Psi}^{mac}$, que é escrita na forma:

$$\dot{\Psi}^{mac} = \left(\frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} [\mathcal{V}_{ij} \sigma^V + \mathcal{D}_{pij} \sigma_p^D] d\mathcal{S} \right) \dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \mathbb{D}^{mic} d\mathcal{S}. \quad (3.22)$$

Finalmente, a versão macroscópica da desigualdade de *Clausius-Duhem* resulta na definição das componentes do tensor de tensão macroscópico, σ_{ij} , em termos das componentes de tensão nos microplanos, expresso por:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi^{mac}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} [\mathcal{V}_{ij} \sigma^V + \mathcal{D}_{pij} \sigma_p^D] d\mathcal{S}. \quad (3.23)$$

Ao empregar a equação (3.23) em conjunto com as equações das restrições cinemáticas, dadas pelas equações (3.5) e (3.6), e comparar a equação resultante com a relação tensão-deformação para o caso linear elástico, pode-se identificar as componentes do tensor constitutivo elástico, E_{ijkl}^{el} , em termos das quantidades nos microplanos, expresso pela equação:

$$E_{ijkl}^{el} = \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} [E_0^V \mathcal{V}_{ij} \mathcal{V}_{kl} + \mathcal{D}_{pij} E_0^D \mathcal{D}_{pkl}] d\mathcal{S}. \quad (3.24)$$

Assumindo que os módulos elásticos nos microplanos (E_0^V e E_0^D) são independentes da orientação dos mesmos, pode-se reescrever a equação (3.24) em termos das

integrais analíticas dos produtos dos tensores de projeção volumétrico e desviador, dadas pelas equações (3.11) e (3.12). Assim, tem-se simplificadaamente:

$$E_{ijkl}^{el} = K^{mic} \mathcal{I}_{ijkl}^{vol} + 2G^{mic} \mathcal{I}_{ijkl}^{dev}, \quad (3.25)$$

onde:

$$E_0^V = K^{mic} \quad e \quad E_0^D = 2G^{mic}, \quad (3.26)$$

sendo K^{mic} e G^{mic} os módulos volumétrico e de cisalhamento nos microplanos, respectivamente, que podem ser diretamente relacionados com o primeiro e segundo parâmetros de *Lamé* para os diferentes modelos de análise, sejam estes EPD, EPT, Axissimétrico e Sólido.

Ao definir os módulos nos microplanos (equação 3.26), pode-se reescrever as parcelas das tensões nos microplanos como quantidades termodinamicamente conjugadas às componentes correspondentes de deformação, sendo as parcelas volumétrica e desviadora dadas, respectivamente, por:

$$\sigma^V = \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \varepsilon^V} = [1 - d^{mic}] K^{mic} \varepsilon^V, \quad (3.27)$$

e

$$\sigma_p^D = \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \varepsilon_p^D} = 2 [1 - d^{mic}] G^{mic} \varepsilon_p^D. \quad (3.28)$$

Já para a obtenção das componentes do tensor constitutivo secante, E_{ijkl}^{sec} , a desigualdade macroscópica de *Clausius-Duhem*, dada pela expressão (3.19), deve satisfazer à desigualdade da dissipação macroscópica, em que:

$$\mathbb{D}^{mac} = \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \mathbb{D}^{mic} d\mathcal{S} \geq 0, \quad (3.29)$$

de modo que a dissipação de energia nos microplanos seja positiva, ou seja:

$$\mathbb{D}^{mic} \geq 0. \quad (3.30)$$

Esta exigência é mais forte do que aquela imposta pela equação (3.29) e, por isto, representa uma condição suficiente para que se cumpra a segunda lei da termodinâmica. Logo, a equação (3.20) pode ser interpretada como a versão da desigualdade

de *Clausius-Duhem* em nível dos microplanos, de modo que:

$$\mathbb{D}^{mic} = (\sigma^V \dot{\varepsilon}^V + \sigma_p^D \dot{\varepsilon}_p^D) - \dot{\Psi}^{mic} \geq 0. \quad (3.31)$$

Assim, pode-se reescrever o tensor de tensão macroscópico, conjugado termodinamicamente ao tensor de deformação macroscópico, a partir das tensões nos microplanos, denotadas pelas equações (3.27) e (3.28), e pelo uso das restrições cinemáticas, definidas nas equações (3.5) e (3.6). Sendo assim, tem-se:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi^{mac}}{\partial \varepsilon_{ij}} = E_{ijkl}^{sec} \varepsilon_{kl}, \quad (3.32)$$

sendo E_{ijkl}^{sec} as componentes do tensor constitutivo secante, em que:

$$E_{ijkl}^{sec} = \frac{3}{4\pi} \int_S [1 - d^{mic}] [K^{mic} \mathcal{V}_{ij} \mathcal{V}_{kl} + 2G^{mic} \mathcal{D}_{pij} \mathcal{D}_{pkl}] dS. \quad (3.33)$$

Por fim, faz-se necessário definir as equações para as componentes do tensor constitutivo tangente, E_{ijkl}^{tan} , e o estado do dano, d^{mic} . Assim, por meio das equações (3.21) e (3.30), pode-se definir a densidade da taxa de liberação de energia, Y^{mic} , ao assumir que o vetor das variáveis internas p e sua taxa de variação \dot{p} dependem de uma única variável de dano, ou seja, $\dot{p} = \{\dot{d}^{mic}\}$:

$$\mathbb{D}^{mic} = -\frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial d^{mic}} \dot{d}^{mic} = Y^{mic} \dot{d}^{mic} \geq 0. \quad (3.34)$$

De acordo com Leukart e Ramm (2006), Y^{mic} possui a função de controlar a propagação das microfissuras, sendo compreendida como a energia local necessária para a iniciação, propagação ou coalescência das microfissuras.

Por intermédio das equações (3.14), (3.18) e (3.26), pode-se obter:

$$Y^{mic} := -\frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial d^{mic}} = \Psi_0^{mic} = K^{mic} (\varepsilon^V)^2 + 2G^{mic} \varepsilon_p^D \varepsilon_p^D. \quad (3.35)$$

A evolução do carregamento é caracterizado pela função Φ^{mic} , que representa a equação da superfície que contorna o regime elástico e induz um acoplamento volumétrico-desviador no regime inelástico. Assim, tem-se:

$$\Phi^{mic} = \eta^{mic} - \kappa^{mic} (d^{mic}) \leq 0, \quad (3.36)$$

onde η^{mic} representa a medida de deformação equivalente e $\kappa^{mic}(d^{mic})$ denota a variável histórica do dano, obtida pela condição expressa na forma:

$$\kappa^{mic}(d^{mic}) = \underset{-\infty < t < \tau}{max} [\eta^{mic}(t), \kappa_0^{mic}], \quad (3.37)$$

onde κ_0^{mic} é o valor inicial de κ^{mic} , sendo este o máximo valor da deformação equivalente obtida em cada passo (t) ao longo do histórico de carregamento.

O critério de carregamento-descarregamento e a condição de consistência são definidos pelas condições de *Kuhn-Tucker*:

$$\Phi^{mic} \leq 0, \quad \dot{\kappa}^{mic} \geq 0, \quad \Phi^{mic} \dot{\kappa}^{mic} = 0 \quad e \quad \dot{\Phi}^{mic} \kappa^{mic} = 0, \quad (3.38)$$

que são apresentadas detalhadamente no Apêndice D.

Por fim, as componentes do tensor constitutivo tangente, E_{ijkl}^{tan} , de modo a linearizar a equação (3.32), são expressas por:

$$E_{ijkl}^{tan} = E_{ijkl}^{sec} - \frac{3}{4\pi} \int_S \frac{\partial d^{mic}}{\partial \kappa^{mic}} \left[\frac{\mathcal{V}_{ij} \sigma^V + \mathcal{D}_{pij} \sigma_p^D}{[1 - d^{mic}]} \right] \left[\frac{\partial \eta^{mic}}{\partial \varepsilon_V} \mathcal{V}_{kl} + \frac{\partial \eta^{mic}}{\partial \varepsilon_p^D} \mathcal{D}_{pkl} \right] dS. \quad (3.39)$$

Uma vez definidos os tensores elástico, secante e tangente, além das condições de carregamento-descarregamento, é preciso definir as medidas de deformação equivalente, η^{mic} , bem como as funções de evolução de dano, d^{mic} .

Estas medidas e funções serão discutidas e apresentadas no Capítulo 4, após a descrição da inclusão do modelo aqui detalhado no Ambiente Unificado para modelos constitutivos segundo Penna (2011). Esta opção se justifica pelo anseio de realizar a aludida inclusão preservando a generalidade do modelo, tornando-o válido para quaisquer medidas de deformação equivalente e funções de evolução de dano.

Capítulo 4

Inclusão dos Modelos de Microplanos no Ambiente Unificado

Nesse capítulo é apresentada a formulação do Modelo de Microplanos proposto em Leukart e Ramm (2006) segundo a estrutura teórica unificada para modelos constitutivos proposta em Penna (2011).

4.1 Ambiente Unificado para Modelos Constitutivos

Muitas proposições para modelagem constitutiva de estruturas de concreto foram desenvolvidas ao longo das últimas décadas, com o objetivo central de propiciar modelos mais adequados ao comportamento real do concreto.

De acordo com Penna (2011), o desenvolvimento de um grande número de modelos, sejam estes elastoplásticos ou de degradação elástica, motivou tentativas de unificação, para que as várias descrições do comportamento do material fossem representadas em uma mesma estrutura teórica.

Dentre as tentativas mais conhecidas, destacam-se as abordadas por de Borst (1987), Carol et al. (1994), Rizzi (1995), Carol e Willam (1996), de Borst (1999), Armero e Oller (2000*a,b*), Hansen et al. (2001) e Carol et al. (2001b). Todas estas tentativas foram analisadas em Penna (2011), com apontamentos das vantagens e

limitações de tais abordagens.

Com base em sua análise, Penna (2011) concluiu que tais trabalhos careciam de uma abordagem numérica-computacional adequada a métodos consagrados, como o Método dos Elementos Finitos (MEF), além de verificar a inexistência de modelos formulados com uso de múltiplas funções de carregamento.

Diante destas limitações, Penna (2011) propôs uma expansão da estrutura teórica desenvolvida por Carol et al. (1994), capaz de contemplar vários modelos constitutivos, sejam estes elastoplásticos ou de degradação elástica, isotrópico, ortotrópico ou anisotrópico, com formulações baseadas em uma ou várias funções de carregamento.

O Capítulo 3 da tese de Penna (2011) detalha a estrutura teórica proposta, denominada como Ambiente Teórico-Computacional Unificado para Modelos Constitutivos. Esta estrutura permite a inclusão de modelos constitutivos diversos, sejam estes formulados com base em deformações ou tensões, variáveis de dano e grandezas termodinâmicas, para uma ou para múltiplas superfícies de carregamento.

Sendo assim, para a inclusão de modelos baseados em deformação, é necessário definir as grandezas de um conjunto de equações. Primeiramente, a principal característica dos modelos de degradação elástica é a existência de uma relação total entre tensões e deformações, dada na forma:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}^{sec} \varepsilon_{kl} , \quad (4.1)$$

além de uma relação direta para descrever as componentes do tensor constitutivo tangente, E_{ijkl}^{tan} , em que:

$$E_{ijkl}^{tan} = E_{ijkl}^{sec} + \frac{1}{H_{nm}} m_{mij} n_{nkl} , \quad (4.2)$$

sendo E_{ijkl}^{sec} representativo das componentes do tensor constitutivo secante.

Para as demais parcelas que compõe E_{ijkl}^{tan} , é preciso explicitar os componentes do tensor dos módulos pós-crítico, H_{nm} , expresso por:

$$H_{nm} = - \left. \frac{\partial F_n}{\partial p_m} \right|_{\varepsilon} . \quad (4.3)$$

Já a relação que define as componentes do tensor das direções das funções de carregamento, n_{nkl} , é expressa na forma:

$$n_{nkl} = \left. \frac{\partial F_n}{\partial \varepsilon_{kl}} \right|_p . \quad (4.4)$$

E por fim, as duas relações necessárias para a definição das componentes do tensor das direções da degradação, m_{mij} , em que:

$$m_{mij} = M_{mijkl} \varepsilon_{kl} , \quad (4.5)$$

sendo M_{mijkl} definido como os componentes do tensor das direções de variação da rigidez, obtida pela Regra da Degradação Generalizada, expressa na forma:

$$M_{mijkl} = \frac{\partial E_{ijkl}^{sec}}{\partial \mathcal{D}_*} \mathcal{M}_{m_*} , \quad (4.6)$$

onde \mathcal{D}_* define o conjunto de variáveis de dano e \mathcal{M}_{m_*} é a variável que denota a direção da taxa de mudança da evolução do dano.

A partir deste conjunto de equações, modelos baseados em deformação podem ser inseridos no Ambiente Unificado para modelos constitutivos proposto em Penna (2011), sejam estes com uma ou múltiplas funções de carregamento. O autor apresenta em seu trabalho formulações de diversos modelos implementados e validados no âmbito do MEF, segundo este ambiente.

Logo, a ampliação da biblioteca de modelos constitutivos, mediante inclusão dos Modelos de Microplanos, pautou-se em todos os aspectos teóricos e computacionais para modelagem constitutivas já existentes no sistema INSANE e validado através do trabalho desenvolvido em Penna (2011).

Assim, a fim de avaliar a expansão deste ambiente no âmbito dos Modelos Constitutivos de Microplanos, optou-se pela inclusão do modelo proposto por Leukart e Ramm (2006), apresentado no Capítulo 3, e formulado a seguir em termos da estrutura teórica unificada.

4.2 Modelo de Microplanos segundo o Ambiente Unificado para Modelos Constitutivos

O modelo de Leukart e Ramm (2006) é definido em termos das componentes do tensor de deformação ε_{kl} , tendo como critério controlador a função de evolução de dano d^{mic} , dependente da variável histórica k^{mic} . Sendo assim, a partir da função de carregamento Φ^{mic} , pode-se obter a função capaz de controlar o endurecimento ou amolecimento durante o processo de degradação do meio material, definida em sua forma mais geral pelas componentes do tensor H_{nm} , expresso na equação (4.3).

Para o Modelo de Microplanos em questão, que possui uma única função de carregamento e uma única variável interna, a expressão para H_{nm} se reduz a um tensor de ordem zero, na forma:

$$H = - \left. \frac{\partial F}{\partial p} \right|_{\varepsilon}. \quad (4.7)$$

Logo, a derivação da função de carregamento Φ^{mic} , expressa na equação (3.36), leva à obtenção do tensor pós-crítico H , expresso por:

$$H = - \frac{\partial \Phi^{mic}}{\partial d^{mic}} = - \frac{\partial \Phi^{mic}}{\partial \kappa^{mic}} \frac{\partial \kappa^{mic}}{\partial d^{mic}} = \frac{\partial \kappa^{mic}}{\partial d^{mic}}. \quad (4.8)$$

Outro parâmetro necessário à formulação unificada é o tensor das direções da função de carregamento no domínio das deformações, capaz de captar a forma de evolução do carregamento, sendo expresso, em sua forma mais geral, por n_{nkl} . Para o modelo em questão, que possui somente uma função de carregamento, as componentes deste tensor se reduz à equação:

$$n_{kl} = \left. \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{kl}} \right|_p. \quad (4.9)$$

Assim, a derivada da função de carregamento Φ^{mic} em relação as componentes do tensor de deformação ε_{kl} , leva à equação:

$$n_{kl} = \frac{\partial \Phi^{mic}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \Phi^{mic}}{\partial \eta^{mic}} \frac{\partial \eta^{mic}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \eta^{mic}}{\partial \varepsilon_{kl}}. \quad (4.10)$$

Sabe-se, porém, que ε_{kl} é definido pelas parcelas aditivas das deformações volumétrica (ε^V) e desviadora (ε_p^D), o que leva a reescrever a equação (4.10) na forma:

$$n_{kl} = \frac{\partial \eta^{mic}}{\partial \varepsilon^V} \frac{\partial \varepsilon^V}{\partial \varepsilon_{kl}} + \frac{\partial \eta^{mic}}{\partial \varepsilon_p^D} \frac{\partial \varepsilon_p^D}{\partial \varepsilon_{kl}}. \quad (4.11)$$

Logo, ao determinar as derivadas das parcelas ε^V e ε_p^D , expressas, respectivamente, pelas equações (3.5) e (3.6), e substituí-las na equação (4.11), obtêm-se as componentes do tensor das direções da função de carregamento, n_{kl} , em que:

$$n_{kl} = \frac{\partial \eta^{mic}}{\partial \varepsilon^V} \mathcal{V}_{ij} + \frac{\partial \eta^{mic}}{\partial \varepsilon_p^D} \mathcal{D}_{pkl}. \quad (4.12)$$

Por fim, é necessário obter o parâmetro que governa as direções da degradação no domínio das deformações, denotado pelas componentes do tensor m_{mij} . Novamente, para o modelo em questão, que possui somente uma variável interna, tem-se:

$$m_{ij} = M_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (4.13)$$

sendo M_{ijkl} responsável pela direção da variação da rigidez, obtido através da Regra da Degradação Generalizada, que prediz a seguinte equação:

$$M_{ijkl} = \frac{\partial E_{ijkl}^{sec}}{\partial \mathcal{D}_*} \mathcal{M}_*, \quad (4.14)$$

em que \mathcal{D}_* é o conjunto de variáveis de dano e \mathcal{M}_* é a variável que define a direção da taxa de mudança do dano.

Assim, para o Modelo de Microplanos tratado neste trabalho, sabe-se que o vetor das variáveis internas, p , se resume a uma única variável, ou seja, $\mathcal{D}_* = d^{mic}$. E ainda, para o nível dos microplanos, o dano é considerado isotrópico, conduzindo a $\mathcal{M}_* = 1$. Logo, a equação (4.14) é reduzida na forma:

$$m_{ij} = \frac{\partial E_{ijkl}^{sec}}{\partial d^{mic}} \varepsilon_{kl}. \quad (4.15)$$

Ressalta-se que a consideração de isotropia nos microplanos não elimina o caráter anisotrópico do modelo, uma vez que a heterogeneidade é garantida pela soma das degradações nas diferentes direções de todos os microplanos.

Assim, ao derivar E_{ijkl}^{sec} , (equação 3.33), em relação a ε_{kl} a partir das parcelas aditivas da decomposição V-D, dadas nas equações (3.5) e (3.6), obtém-se:

$$m_{ij} = - [K^{mic} \mathcal{V}_{ij} \varepsilon^V + 2G^{mic} \mathcal{D}_{pij} \varepsilon_p^D]. \quad (4.16)$$

Finalmente, as componentes do tensor m_{ij} é expresso em termos das tensões nos microplanos, ao adotar as equações (3.27) e (3.28) para reescrever a equação (4.16) na forma:

$$m_{ij} = - \left[\frac{\mathcal{V}_{ij} \sigma^V + \mathcal{D}_{pij} \sigma_p^D}{[1 - d^{mic}]} \right]. \quad (4.17)$$

Portanto, ao empregar as equações (4.8), (4.12) e (4.17), pode-se escrever a equação do tensor tangente denotado em termos da teoria unificada proposta em Penna (2011), expressa na equação (4.2) e novamente escrita a seguir:

$$E_{ijkl}^{tan} = E_{ijkl}^{sec} + \frac{1}{H} m_{ij} n_{kl}. \quad (4.18)$$

Uma vez definido o Modelo de Microplanos em termos da teoria unificada para modelos constitutivos, é preciso definir as funções de evolução de dano (d^{mic}) e as medidas de deformação equivalente (η^{mic}).

4.3 Definição das Funções de Evolução de Dano

A degradação do meio material é descrita por intermédio das funções de evolução de dano, expressas por d^{mic} . Dentre as funções que compõe a biblioteca de modelos constitutivos do sistema INSANE, optou-se pelo emprego das funções polinomial, linear, bilinear e, especialmente, exponencial, em virtude de seu uso frequente para análise fisicamente não linear de estruturas de concreto.

4.3.1 Função de Dano Exponencial

Para um dano progressivo e exponencialmente crescente, pode-se assumir a seguinte função, baseada no trabalho de Peerlings et al. (1996):

$$d^{mic} = 1 - \frac{\kappa_0^{mic}}{\kappa^{mic}} \left\{ 1 - \alpha^{mic} + \alpha^{mic} e^{[\beta^{mic}(\kappa_0^{mic} - \kappa^{mic})]} \right\}. \quad (4.19)$$

Consequentemente, é preciso definir três parâmetros adicionais para o material, sendo β^{mic} o parâmetro que governa a forma do ramo descendente, α^{mic} a variável que representa a máxima degradação possível do material e κ_0^{mic} o valor da deformação equivalente que determina o início do processo de dano.

A Figura 4.1 apresenta a relação entre $d^{mic} \times \kappa^{mic}$ e a evolução do dano diante do crescimento da variável histórica κ^{mic} , adotando como parâmetros: $\alpha^{mic} = 0.960$, $\kappa_0^{mic} = 0.005$ e distintos valores de β^{mic} .

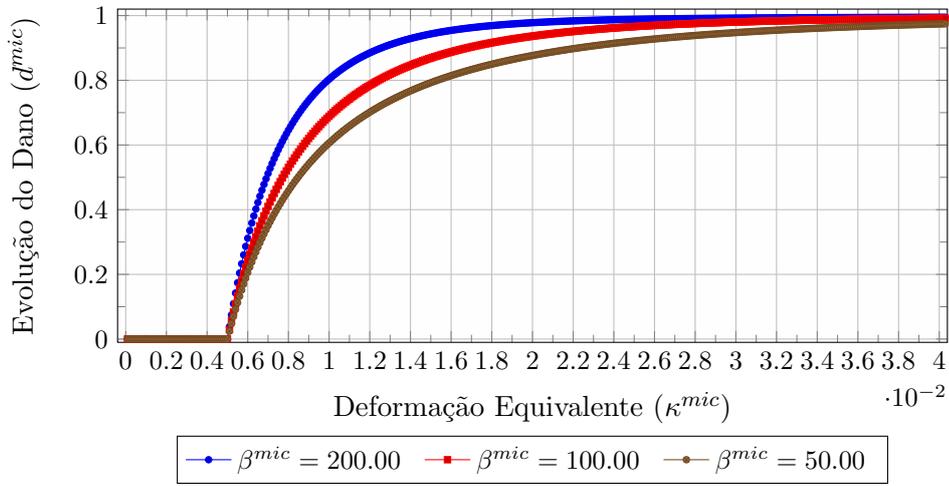


Figura 4.1: Função de dano exponencial com variações para o parâmetro β^{mic} .

O dano somente se inicia quando a variável histórica κ^{mic} atinge o valor de κ_0^{mic} , e quando $\kappa^{mic} \rightarrow \infty$, o dano tende ao valor máximo de 1. Verifica-se que o parâmetro β^{mic} determina a taxa de crescimento do dano, sendo que a elevação de seu valor resulta em um crescimento mais rápido do dano e, em consequência, reflete em uma resposta mais frágil do material. Também é necessária a obtenção da derivada de d^{mic} em relação à variável histórica κ^{mic} , que resulta na expressão:

$$\frac{\partial d^{mic}}{\partial \kappa^{mic}} = \frac{\kappa_0^{mic}}{(\kappa^{mic})^2} \left\{ 1 + \alpha^{mic} \left[((1 + \beta^{mic} \kappa^{mic}) e^{[\beta^{mic}(\kappa_0^{mic} - \kappa^{mic})]}) - 1 \right] \right\}. \quad (4.20)$$

Sendo assim, a inversa da equação (4.20) resulta na obtenção do tensor H , necessário para o cálculo das componentes do tensor tangente, E_{ijkl}^{tan} .

4.3.2 Função de Dano Polinomial

Baseada no trabalho de Carreira e Chu (1985), que descreveram uma relação tensão-deformação usando uma função polinomial e partindo de dados experimentais, a função de evolução de dano polinomial pode ser expressa por:

$$d^{mic} = 1 - \left(\frac{1}{E_0 \kappa^{mic}} \frac{\frac{s f_e \kappa^{mic}}{\kappa_0^{mic}}}{s - 1 + \left(\frac{\kappa^{mic}}{\kappa_0^{mic}} \right)^s} \right), \quad (4.21)$$

em que:

$$s = \frac{1}{1 - \left(\frac{f_e}{E_0 \kappa_0^{mic}} \right)} \rightarrow \kappa_0^{mic} > \frac{f_e}{E_0}, \quad (4.22)$$

sendo f_e a tensão equivalente relativa ao limite de resistência do material e E_0 o módulo linear elástico.

Já a sua derivada em relação à variável histórica κ^{mic} é expressa por:

$$\frac{\partial d^{mic}}{\partial \kappa^{mic}} = \frac{s^2 f_e \left(\frac{\kappa^{mic}}{\kappa_0^{mic}} \right)^{s-1}}{E_0 (\kappa_0^{mic})^2 \left[s - 1 + \left(\frac{\kappa^{mic}}{\kappa_0^{mic}} \right)^s \right]}. \quad (4.23)$$

A Figura 4.2 apresenta a relação entre $d^{mic} \times \kappa^{mic}$ e a evolução do dano diante do crescimento da variável histórica κ^{mic} , adotando como parâmetros: $E_0 = 35000$, $\kappa_0^{mic} = 0.005$ e diferentes valores para f_e .

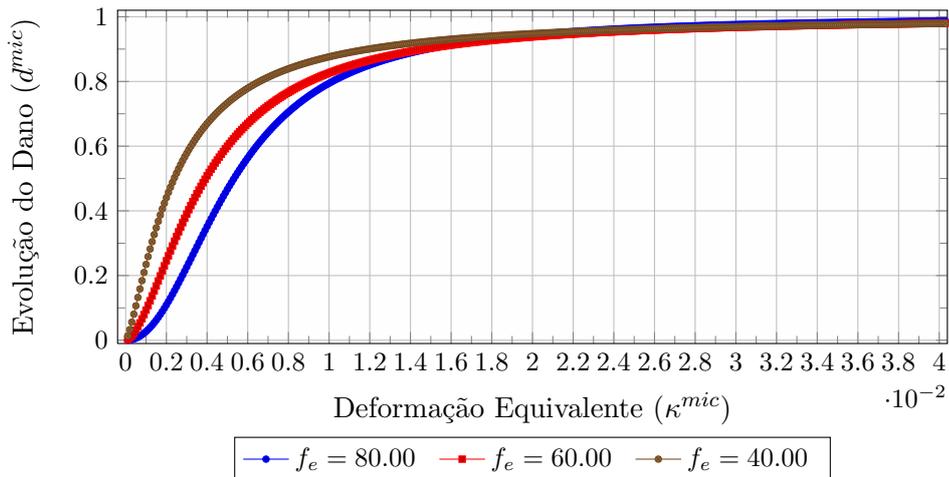


Figura 4.2: Função de dano polinomial com variações para o parâmetro f_e .

Verifica-se que esta função possui uma evolução de dano contínuo, em que κ_0^{mic} delimita o limite elástico sem, contudo, delimitar o trecho linear da trajetória.

4.3.3 Funções de Dano com Variação Linear

As funções de dano com variação linear possuem várias formas, definidas por distintos parâmetros, tais como a energia de fratura ou limites de tensão e deformação.

Os limites de deformação são utilizados para a seguinte função linear:

$$d^{mic} = \frac{\kappa_u^{mic}}{\kappa_u^{mic} - \kappa_0^{mic}} \left(1 - \frac{\kappa_0^{mic}}{\kappa^{mic}} \right). \quad (4.24)$$

Sua derivada em relação a variável histórica κ^{mic} é expressa por:

$$\frac{\partial d^{mic}}{\partial \kappa^{mic}} = \frac{\kappa_u^{mic}}{\kappa_u^{mic} - \kappa_0^{mic}} \frac{\kappa_0^{mic}}{\kappa^{mic}}. \quad (4.25)$$

A Figura 4.3 apresenta a relação entre $d^{mic} \times \kappa^{mic}$ e a evolução do dano diante do crescimento da variável histórica κ^{mic} , adotando como parâmetros o valor de $\kappa_0^{mic} = 0.005$ e diferentes valores para κ_u^{mic} .

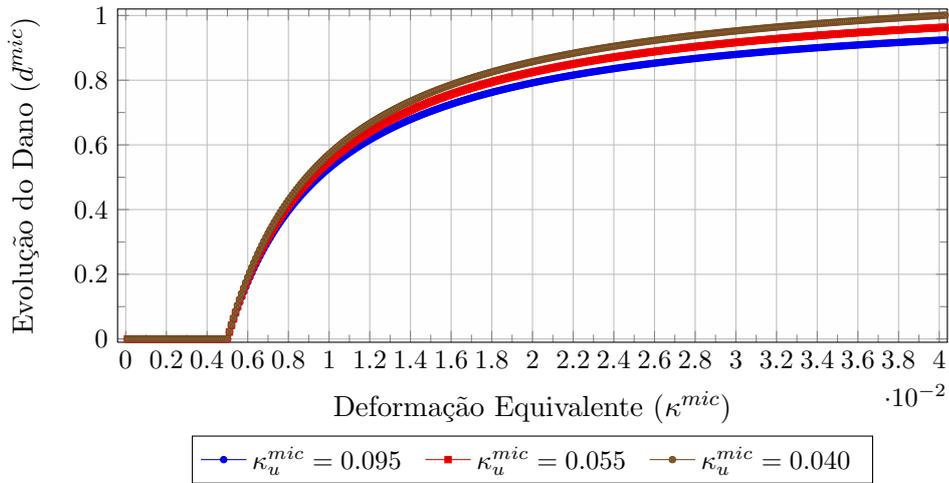


Figura 4.3: Função de dano linear com variações para o parâmetro κ_u^{mic} .

Assim, como observado para a função exponencial, a evolução do dano linear somente se inicia quando a variável histórica κ^{mic} atingir o valor de κ_0^{mic} .

A composição da variação do dano por trechos lineares resulta em uma função de dano bilinear, com o uso de limites de tensão e deformação para definir sua trajetória. Para o primeiro trecho, tem-se:

$$d^{mic} = 1 - \frac{f_{cr}^{mic} - f_0^{mic}}{\kappa_{cr}^{mic} - \kappa_0^{mic}} \frac{1}{E_{eq}} + \frac{f_0^{mic}}{E_{eq} \kappa^{mic}} + \frac{f_{cr}^{mic} - f_0^{mic}}{\kappa_{cr}^{mic} - \kappa_0^{mic}} \frac{\kappa_{cr}^{mic}}{E_{eq} \kappa^{mic}} \quad (4.26)$$

Já a sua derivada em relação à variável histórica κ^{mic} , neste trecho, é dada por:

$$\frac{\partial d^{mic}}{\partial \kappa^{mic}} = \frac{f_{cr}^{mic} - f_0^{mic}}{\kappa_{cr}^{mic} - \kappa_0^{mic}}. \quad (4.27)$$

E seu segundo trecho pode ser expresso como:

$$d^{mic} = 1 - \frac{f_u^{mic} - f_{cr}^{mic}}{\kappa_u^{mic} - \kappa_{cr}^{mic}} \frac{1}{E_{eq}} + \frac{f_{cr}^{mic}}{E_{eq} \kappa^{mic}} + \frac{f_u^{mic} - f_{cr}^{mic}}{\kappa_u^{mic} - \kappa_{cr}^{mic}} \frac{\kappa_u^{mic}}{E_{eq} \kappa^{mic}}. \quad (4.28)$$

Enquanto a sua derivada em relação a variável histórica κ^{mic} , é dada por:

$$\frac{\partial d^{mic}}{\partial \kappa^{mic}} = \frac{f_u^{mic} - f_{cr}^{mic}}{\kappa_u^{mic} - \kappa_{cr}^{mic}}. \quad (4.29)$$

A Figura 4.4 apresenta a relação entre $d^{mic} \times \kappa^{mic}$ e a evolução do dano diante do crescimento da variável histórica κ^{mic} , adotando como parâmetros: $\kappa_0^{mic} = 0.005$, $f_0^{mic} = 15.00$, $\kappa_u^{mic} = 0.90$, $f_u^{mic} = 0.00$ e valores distintos para κ_{cr}^{mic} e f_{cr}^{mic} .

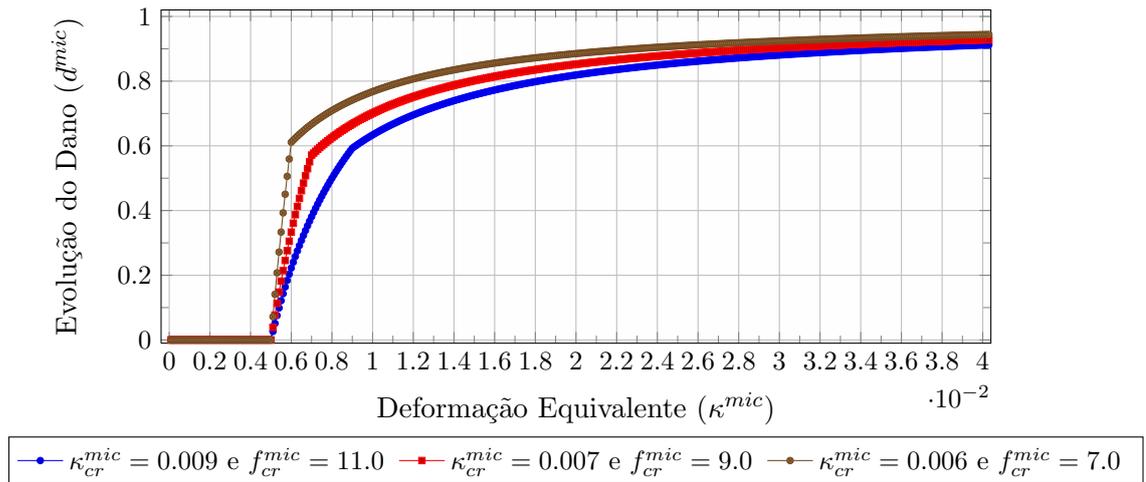


Figura 4.4: Função de dano bilinear com variações para os parâmetros κ_{cr}^{mic} e f_{cr}^{mic} .

Verifica-se também para a função bilinear que a evolução do dano somente se inicia quando a variável histórica κ^{mic} atinge o valor de κ_0^{mic} no primeiro trecho da trajetória e, após atingir o valor de κ_{cr}^{mic} , o segundo trecho é iniciado com uma mudança na inclinação da trajetória de equilíbrio.

4.4 Deformação Equivalente nos Microplanos

Nos *Modelos de Microplanos com Deformação Equivalente*, o crescimento do dano possui relação direta com o desenvolvimento da deformação por meio da medida

escalar intitulada deformação equivalente.

Para uma definição adequada das medidas de deformação equivalente nos microplanos, são feitas algumas comparações com o modelo de dano escalar macroscópico, segundo Leukart e Ramm (2003). Assim, o comportamento em cada microplano pode ser interpretado fisicamente e definido de modo mais racional.

A seguir são descritas quatro medidas de deformação equivalente, η^{mic} , formuladas em termos de ε_{kl} , decomposto na forma V-D.

4.4.1 Definição de Simo e Ju (1987)

Simo e Ju (1987) propuseram uma deformação equivalente a partir da taxa de liberação de energia elástica, Y^{mic} , (equação 3.35), cuja função é controlar a propagação das microfissuras. Esta definição é obtida, para o nível macroscópico, por:

$$\eta_{Simo}^{mac} = \sqrt{\varepsilon_{ij} E_0 \varepsilon_{ij}} . \quad (4.30)$$

Com base nesta proposição, Leukart e Ramm (2006) reescrevem esta medida de deformação equivalente para os microplanos no seguinte formato:

$$\eta_{Simo}^{mic} = \sqrt{3K^{mic}(\varepsilon^V)^2 + 6G^{mic}\varepsilon_p^D\varepsilon_p^D} . \quad (4.31)$$

Por fim, é necessário, diante da generalização proposta para as medidas de deformação equivalente, apresentar as derivadas de η_{Simo}^{mic} em relação às parcelas de deformação volumétrica (ε^V) e desviadora (ε_p^D), expressas por:

$$\frac{\partial \eta_{Simo}^{mic}}{\partial \varepsilon^V} = \frac{3K^{mic}\varepsilon^V}{\sqrt{3K^{mic}(\varepsilon^V)^2 + 6G^{mic}\varepsilon_p^D\varepsilon_p^D}} = \frac{3K^{mic}\varepsilon^V}{\eta_{Simo}^{mic}} \quad (4.32)$$

e

$$\frac{\partial \eta_{Simo}^{mic}}{\partial \varepsilon_p^D} = \frac{6G^{mic}\varepsilon_p^D}{\sqrt{3K^{mic}(\varepsilon^V)^2 + 6G^{mic}\varepsilon_p^D\varepsilon_p^D}} = \frac{6G^{mic}\varepsilon_p^D}{\eta_{Simo}^{mic}} . \quad (4.33)$$

Logo, as equações (4.32) e (4.33) são usadas na equação (4.12) para obtenção das componentes do tensor tangente E_{ijkl}^{tan} , expressas pela equação (4.18).

4.4.2 Definições de Ju (1989)

Como variação da proposição desenvolvida por Simo e Ju (1987), a medida de deformação equivalente de Ju (1989) também admite uma superfície de carregamento simétrica, sendo incapaz de diferenciar o comportamento do dano quando submetidos à tração e compressão.

Tal medida de deformação equivalente é escrita no nível macroscópico como:

$$\eta_{Ju}^{mac} = \sqrt{\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}E_0\varepsilon_{ij}} . \quad (4.34)$$

Do mesmo modo, Leukart e Ramm (2006) reescreve esta medida, para o nível dos microplanos, pela seguinte equação na forma:

$$\eta_{Ju}^{mic} = \sqrt{\frac{3}{2}K^{mic}(\varepsilon^V)^2 + 3G^{mic}\varepsilon_p^D\varepsilon_p^D} \quad (4.35)$$

Por fim, as derivadas de η_{Ju}^{mic} em relação às parcelas ε^V e ε_p^D são dadas por:

$$\frac{\partial\eta_{Ju}^{mic}}{\partial\varepsilon^V} = \frac{\frac{3}{2}K^{mic}\varepsilon^V}{\eta_{Ju}^{mic}} \quad e \quad \frac{\partial\eta_{Ju}^{mic}}{\partial\varepsilon_p^D} = \frac{3G^{mic}\varepsilon_p^D}{\eta_{Ju}^{mic}} , \quad (4.36)$$

Logo, as equações (4.36) são usadas no cálculo das componentes do tensor E_{ijkl}^{tan} .

4.4.3 Definições de Lemaitre (1984)

Lemaitre (1984) propôs uma medida de deformação que também admite superfícies de carregamento simétricas. Tal medida de deformação equivalente é descrita, para o nível macroscópico, na forma:

$$\eta_{Lemaitre}^{mac} = \sqrt{\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}} . \quad (4.37)$$

Assim, Leukart e Ramm (2006) reescrevem tal medida, para o nível dos microplanos, pela equação:

$$\eta_{Lemaitre}^{mic} = \sqrt{27(\varepsilon^V)^2 + 6\varepsilon_p^D\varepsilon_p^D} . \quad (4.38)$$

Por fim, as derivadas de $\eta_{Lemaitre}^{mic}$ em relação às parcelas ε^V e ε_p^D são dadas por:

$$\frac{\partial\eta_{Lemaitre}^{mic}}{\partial\varepsilon^V} = \frac{27\varepsilon^V}{\eta_{Lemaitre}^{mic}} \quad e \quad \frac{\partial\eta_{Lemaitre}^{mic}}{\partial\varepsilon_p^D} = \frac{6\varepsilon_p^D}{\eta_{Lemaitre}^{mic}} . \quad (4.39)$$

Logo, as equações (4.39) são usadas no cálculo de E_{ijkl}^{tan} .

4.4.4 Definição segundo de Vree et al. (1995)

As medidas de deformação equivalente anteriores, particularmente denotam um mesmo comportamento do dano sob carregamentos de tração e compressão. Evidentemente, para materiais parcialmente frágeis e heterogêneos, como o concreto, este fato não é coerente, uma vez que as microfissuras no concreto crescem, principalmente, sob tensões de tração, ressaltando a importância da influência da tração na definição da deformação equivalente (Fuina, 2009).

Alternativamente, para a deformação segundo o critério de *von Mises Modificado*, de Vree et al. (1995) propõem o uso de superfícies de carregamento elípticas, expressa para o nível macroscópico na forma:

$$\eta_{Vree}^{mac} = k_0 I_1 + \sqrt{k_1^2 I_1^2 + k_2 J_2}, \quad (4.40)$$

onde os parâmetros I_1 e J_2 são os invariantes de deformação dados na equação 3.13.

Assim, Leukart e Ramm (2006) reescrevem tal medida de deformação equivalente, para o nível dos microplanos, como:

$$\eta_{Vree}^{mic} = 3k_1 \varepsilon^V + \sqrt{(3k_1 \varepsilon^V)^2 + \frac{3}{2} k_2 \varepsilon_p^D \varepsilon_p^D}, \quad (4.41)$$

onde os parâmetros k_1 e k_2 são descritos por:

$$k_1 = \frac{r-1}{2r(1-2\nu)} \quad e \quad k_2 = \frac{3}{r(1+\nu)^2}, \quad (4.42)$$

sendo r a razão entre as resistências à tração e à compressão do material.

As derivadas de η_{Vree}^{mic} em relação às parcelas ε^V e ε_p^D são expressas por:

$$\frac{\partial \eta_{Vree}^{mic}}{\partial \varepsilon^V} = 3k_1 + \frac{3(k_1)^2 \varepsilon^V}{\sqrt{(k_1 \varepsilon^V)^2 + \frac{k_2 \varepsilon_p^D \varepsilon_p^D}{6}}} \quad (4.43)$$

e

$$\frac{\partial \eta_{Vree}^{mic}}{\partial \varepsilon_p^D} = \frac{3k_2 \varepsilon_p^D}{2\sqrt{(3k_1 \varepsilon^V)^2 + \frac{3k_2 \varepsilon_p^D \varepsilon_p^D}{2}}}. \quad (4.44)$$

Sendo assim, as equações (4.43) e (4.44) são empregadas para cálculo das componentes do tensor, E_{ijkl}^{tan} , expressas pela equação (4.18).

Capítulo 5

Implementações Computacionais

As implementações computacionais foram realizadas no sistema computacional *INSANE*, com base na formulação apresentada nos Capítulos 3 e 4. O uso deste sistema proporciona algumas vantagens, dentre elas a sua ampla biblioteca, composta por vários módulos que permitem implementações independentes e simultâneas, realizadas por todos os pesquisadores envolvidos em seu desenvolvimento.

Para tanto, existe uma constante preocupação em conceber as implementações no mais alto nível de generalização, permitindo futuras ampliações sem a necessidade de grandes alterações do código pré-existente.

O sistema *INSANE* é composto, em síntese, por aplicações gráficas interativas para pré-processamento e pós-processamento, além de um núcleo numérico para processamento com implementações de modelos numéricos e técnicas de soluções apropriadas. Estas aplicações são implementadas de acordo com o paradigma de Programação Orientada a Objetos (POO). O uso desta metodologia permite uma melhor manutenção e expansão do programa, o que facilita implementações em um ambiente em constante desenvolvimento.

Aliado a este aspecto, o uso da linguagem *Java* propicia ganhos em função do desenvolvimento de um software independente de sistema operacional, característica esta de grande atratividade para um sistema de código aberto como o *INSANE*.

Neste capítulo são mostrados os módulos do núcleo numérico do *INSANE* que possuem, direta ou indiretamente, relações com as implementações deste trabalho.

Para isto, empregaram-se diagramas UML (*Unified Modeling Language*), entendidas como uma linguagem gráfica usada para padronizar a modelagem de sistemas orientados a objetos (Fowler e Scott, 2000; Lee e Tepfenhart, 2001).

Na Figura 5.1 visualiza-se a simbologia adotada para exposição das contribuições deste trabalho. A representação em branco indica classes não modificadas, em amarelo as classes modificadas e em verde as novas classes implementadas.



Figura 5.1: Simbologia do diagrama em UML utilizada nesta dissertação.

Além disto, são apresentados diagramas de interação entre classes, construídos nesta dissertação a fim de possibilitar uma melhor clareza do núcleo numérico do sistema computacional INSANE.

5.1 Síntese do Núcleo Numérico do INSANE

O núcleo numérico do sistema INSANE é formado por interfaces e classes capazes de representar as abstrações necessárias à resolução numérica de diferentes modelos de análise estrutural. A aplicação central que representa este núcleo, dita *Processador*, depende das relações existentes entre as classes abstratas *Solution* e *Model* e as interfaces *Assembler* e *Persistence*, ilustradas no diagrama de interação entre classes da Figura 5.2.

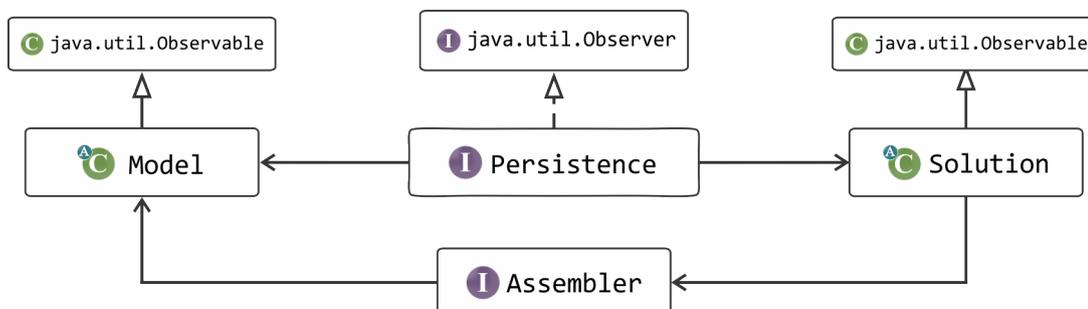


Figura 5.2: Organização do núcleo numérico do sistema INSANE.

A interface `Assembler` é a responsável por montar as matrizes e vetores do sistema matricial de segunda ordem conforme o problema a ser resolvido:

$$\mathbf{A} \ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{B} \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{C} \mathbf{X} = \mathbf{D}, \quad (5.1)$$

sendo \mathbf{X} o vetor de variáveis de estado do problema; $\dot{\mathbf{X}}$ e $\ddot{\mathbf{X}}$ os vetores, respectivamente, com a primeira e segunda variação temporal das variáveis de estado; \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} as matrizes dos coeficientes, que podem ou não depender das variáveis de estado e suas derivadas e, por fim, \mathbf{D} o vetor com os termos independentes deste sistema.

A classe abstrata `Solution` é responsável pelo processo de solução, pois possui os recursos necessários para a resolução da Equação (5.1), seja esta composta por um sistema de equações lineares ou não lineares.

Já a interface `Model` é implementada por classes capazes de representar diferentes modelos discretos. Cada uma destas classes possuem, por sua vez, os dados relativos ao modelo discreto de análise e fornece para `Assembler` todas as informações necessárias para montar a equação do modelo a ser resolvido por `Solution`.

A interface `Persistence` se comunica com `Model` e `Solution`, sendo responsável pelo tratamento dos dados de entrada e pela persistência dos dados de saída. Esta persistência é realizada por meio de arquivos *XML* (*eXtensible Markup Language*), que possibilitam a criação de dados estruturados com base em arquivo texto.

Na Figura 5.3 é apresentada a hierarquia da interface `Persistence`, que é implementada pela classe `PersistenceAsXML`, modificada a fim de persistir a entrada e a saída de dados referentes as implementações desta dissertação, sempre que observada alguma alteração no estado dos modelos.

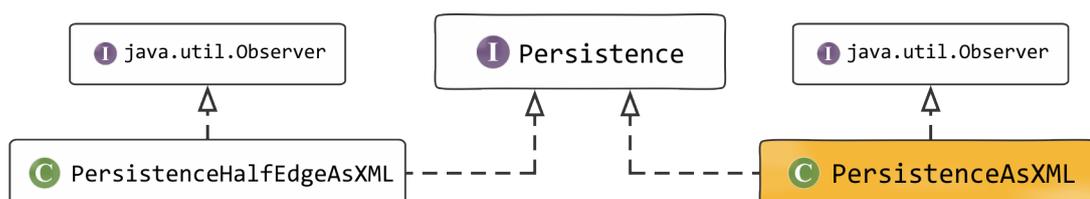


Figura 5.3: Diagrama de classes para `Persistence`.

Este processo de observação de alterações ocorre segundo o padrão de projeto **Observer**, entendido como um mecanismo de propagação de mudanças existente no núcleo numérico do **INSANE**, conforme ilustra a Figura 5.2. A consistência e a comunicação entre o objeto observador **PersistenceAsXML**, que implementa a interface `java.util.Observer`, e os componentes observados **Solution** e **Model**, que estendem a classe `java.util.Observable`, são garantidas, pois quando alguma mudança ocorre no estado do objeto observado, um mecanismo é disparado e se encarrega de notificar os objetos observadores para se atualizarem.

Na sequência, o núcleo numérico do **INSANE** será detalhado com ênfase nos aspectos relativos à análise fisicamente não linear, tendo como base o Ambiente Unificado, visando a inserção das classes necessárias para inclusão dos Modelos de Microplanos.

O detalhamento das classes que constituem este núcleo numérico é encontrado no Apêndice E.

5.2 Análise Estática Fisicamente Não Linear

Na mecânica dos sólidos computacional, o sistema de equações (5.1) se reduz, no caso estático, para:

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{D}, \quad (5.2)$$

sendo **C** a matriz de rigidez global, **X** o vetor de deslocamentos nodais e **D** o vetor de forças nodais do modelo. Se a análise é fisicamente não linear, a matriz **C** depende dos deslocamentos **X**. Neste caso, as raízes da Equação (5.2) são obtidas por meio de um processo incremental iterativo, sendo o sistema de equações reescrito como:

$$\mathbf{K} \cdot \delta\mathbf{U} = \delta\lambda \cdot \mathbf{P} + \mathbf{Q}, \quad (5.3)$$

onde **K** é a matriz de rigidez incremental, $\delta\mathbf{U}$ é o vetor de deslocamentos incrementais, $\delta\lambda$ é um incremento do fator de carga, **P** é o vetor de cargas de referência e **Q** é o vetor de cargas residuais do modelo, obtido pela diferença entre o vetor de cargas externas e o vetor de forças equivalentes às tensões internas **F**.

No MEF, a matriz \mathbf{K} e o vetor \mathbf{F} são montados a partir da contribuição de cada elemento finito. Tal processo se baseia em duas operações fundamentais:

$$\mathbf{K}^e = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV \quad e \quad \mathbf{F}^e = \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV, \quad (5.4)$$

em que \mathbf{K}^e é a matriz de rigidez, \mathbf{F}^e o vetor de cargas nodais equivalentes ao estado de tensão corrente, \mathbf{B} a matriz das relações deformação-deslocamento, \mathbf{E} a matriz constitutiva e $\boldsymbol{\sigma}$ as tensões do elemento finito, sendo todos integrados sobre um volume, V , de cada elemento.

No INSANE, o processo incremental iterativo é implementado no método `execute()` da classe `StaticEquilibriumPath`, derivada da classe `Solution`, conforme observado na Figura 5.4.

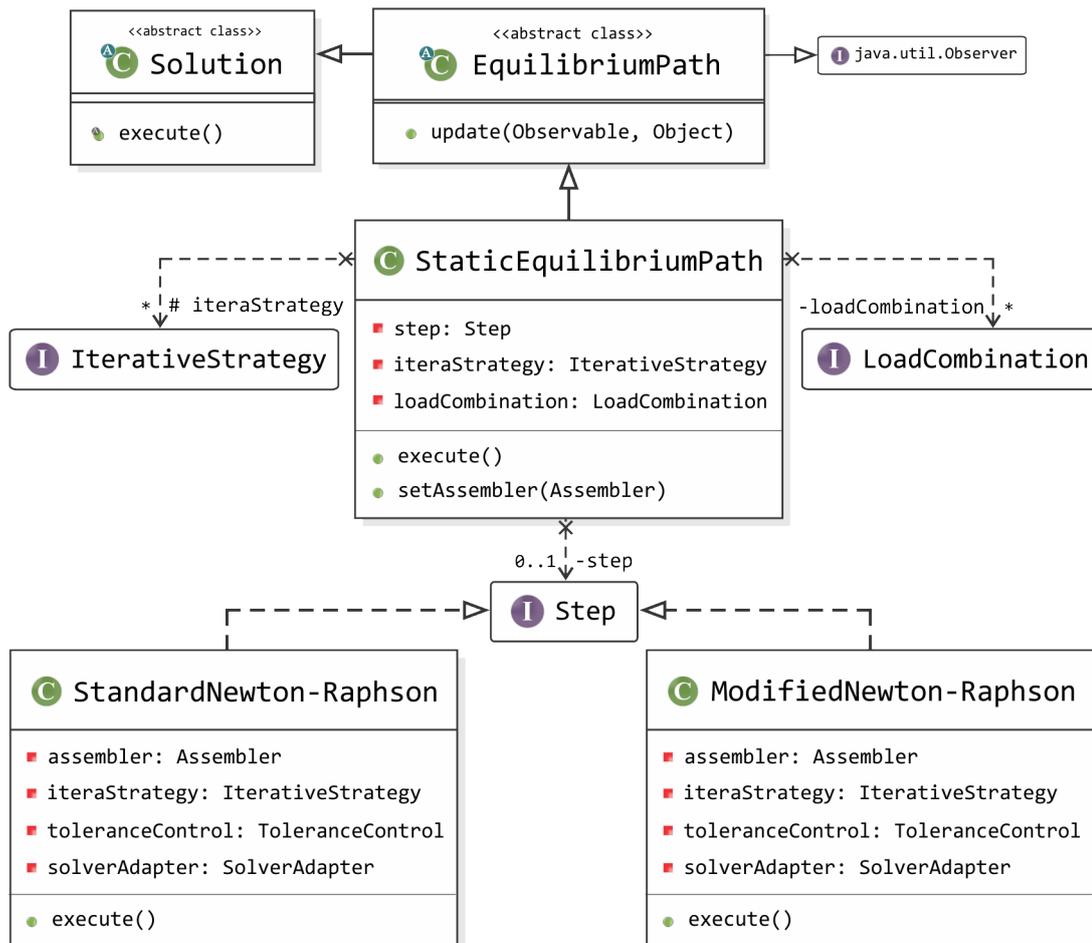


Figura 5.4: Diagrama de classes do processo de solução incremental.

Verifica-se, por meio do mecanismo de composição, que a classe `StaticEquilibriumPath` é auxiliada pela classe `Step`, cujas classes derivadas, `StandardNewtonRaphson` e `ModifiedNewtonRaphson`, implementam o método `execute()`, contendo, respectivamente, as versões padrão e modificada do Método de *Newton-Raphson*.

A sequência de atividades dos métodos `execute()`, segue o processo de solução do algoritmo genérico proposto por Yang e Shieh (1990), incluído no sistema `INSANE` por meio dos trabalhos de Fonseca (2006, 2008), Fuina (2004) e Penna (2011), tendo seu início na montagem da matriz de rigidez incremental.

Assim, conforme mostra a Figura 5.5, a matriz de rigidez é requisitada à classe `FemAssembler`, herdeira de `Assembler`, através dos métodos `getIncrementalCuu()`, `getTotalCuu()` ou `getCuu()`, respectivamente, para as aproximações tangente, secante ou elástica do tensor constitutivo.

Para a aproximação tangente, por exemplo, o método `getIncrementalCuu()` percorre os elementos finitos do modelo e, ao acessar cada um deles, evoca o método `getIncrementalC()` da classe `Element`, auxiliado pela classe `ProblemDriver`, que especifica a natureza do problema para uma análise fisicamente não linear e acessa o método `getIncrementalC()` da classe `PhysicallyNonLinear`, capaz de integrar a matriz de rigidez para cada elemento (Equação 5.4). Analogamente, o mesmo processo é observado para as aproximações secante ou elástica do tensor constitutivo.

Assim, a matriz de rigidez de cada elemento é devolvida para a classe `Assembler` após a avaliação do processo de degradação do material, obtido pelo tensor constitutivo, E , calculado em cada ponto de integração. No `INSANE`, cada ponto de integração é um objeto da classe `Degeneration`.

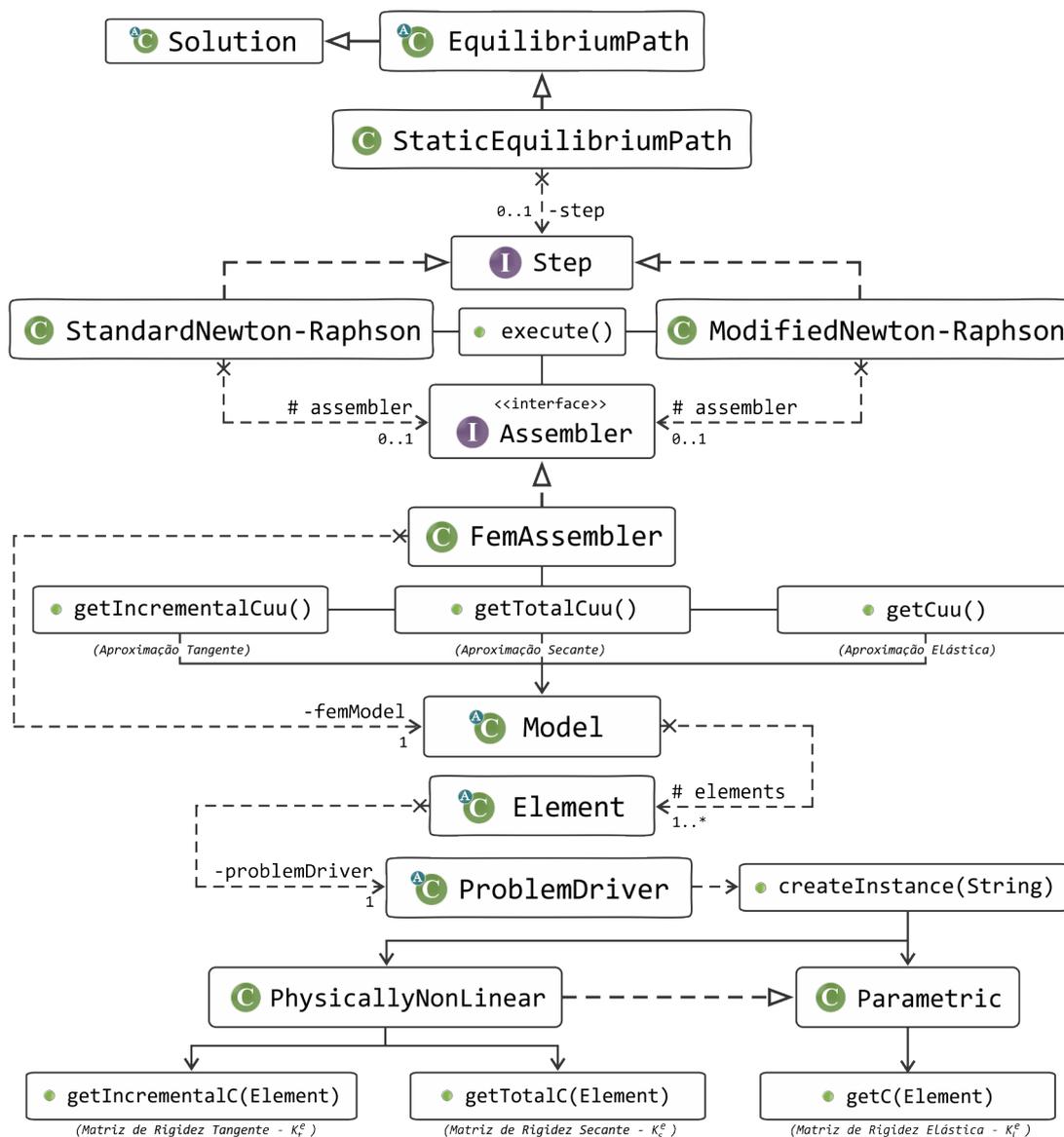


Figura 5.5: Interação entre classes para a obtenção da matriz de rigidez incremental de um problema fisicamente não linear.

Como ilustra o diagrama da Figura 5.6, a classe *Degeneration* possui informações das propriedades geométricas do ponto de integração, do modelo de análise, do modelo constitutivo e dos pontos materiais que o ponto de integração representa, além de dois objetos do tipo *HashMap*, fundamentais para a análise fisicamente não linear, pois guardam as variáveis constitutivas correntes e históricas. Assim, para a avaliação do tensor constitutivo, E , esses dois objetos são passados como parâmetros

para os métodos $mountCt()$, $mountCs()$ ou $mountC()$, da interface `ConstitutiveModel`, para a montagem do tensor constitutivo de cada degeneração, aproximada por sua forma tangente, secante ou elástica, respectivamente.

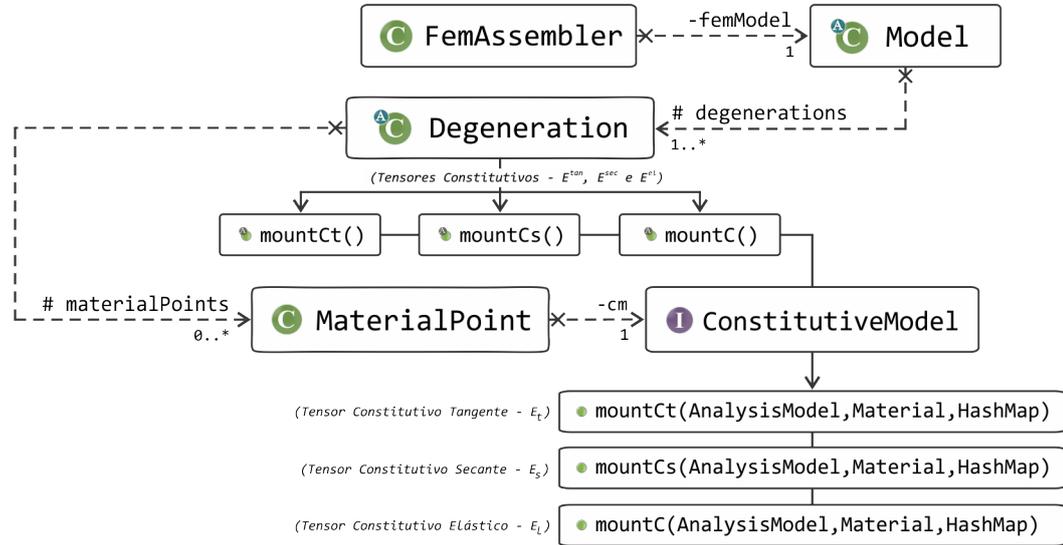


Figura 5.6: Interação entre classes para a obtenção da matriz de rigidez incremental de um problema fisicamente não linear.

Uma vez obtido o tensor constitutivo necessário para a obtenção da matriz de rigidez incremental, os deslocamentos devidos à carga de referência, P , e às cargas residuais, Q , podem ser calculados. Na sequência, com os deslocamentos obtidos, pode-se calcular o fator de carga, $\delta\lambda$, e as variáveis do processo de solução (fator de carga total, cargas incrementais, cargas residuais e deslocamentos nodais) podem ser atualizadas. Logo, a convergência do processo iterativo, a partir da condição de equilíbrio entre as forças internas e externas, pode ser verificada.

O procedimento para o cálculo das forças equivalentes às tensões internas é semelhante ao acima descrito para a obtenção da matriz de rigidez incremental e pode ser observado nas Figuras 5.5 e 5.6.

Conforme ilustra a Figura 5.7, para a integração numérica do vetor de cargas nodais equivalentes ao estado de tensão corrente de cada elemento, F^e , (Equação 5.4), o estado de tensão corrente é obtido em cada degeneração (ponto de integração). Para tanto, os objetos *HashMap*, que possui as variáveis históricas, são passados

como parâmetros para o método `mountDualInternalVariableVector()`, da interface `ConstitutiveModel`, para a montagem do vetor de tensões de cada degeneração.

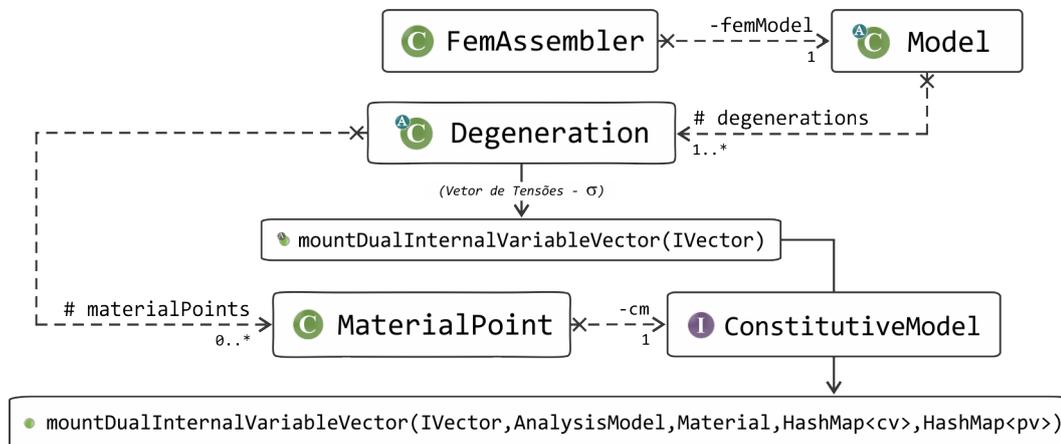


Figura 5.7: Interação entre classes para cálculo das tensões.

5.3 Implementação dos Modelos de Microplanos

Verifica-se que o uso das interfaces e classes que compõem o núcleo numérico do INSANE, conforme descrito anteriormente, propicia algumas vantagens. Entre estas inclui-se o tratamento geral de entidades dependentes entre si, tais como função de forma, elemento finito, ponto de integração, modelo de análise e modelo constitutivo, o que possibilita novas implementações com maior facilidade.

O elemento finito é uma entidade abstrata que se auxilia, por meio do mecanismo de composição, das seguintes classes: (1) `Shape`, representativa das diversas funções de aproximação; (2) `AnalysisModel`, que representa os diversos modelos de análise; (3) `Degeneration`, representativa dos pontos internos dos elementos, dos diversos casos de degeneração da geometria e da avaliação das tensões; (4) `ProblemDriver`, que representa os diferentes problemas e suas formulações; (5) `ConstitutiveModel`, representativa dos distintos modelos constitutivos para avaliação de problemas fisicamente não lineares.

A interface `ConstitutiveModel` é especialmente importante para a implementação do Ambiente Teórico-Computacional desenvolvido por Penna (2011). Esta classe

encapsula as atividades do modelo constitutivo, ou seja, uma vez que as informações dos elementos – formato da integração, dados dos pontos materiais, propriedades físicas do meio e do tipo de análise – são transmitidos para o modelo constitutivo, este pode realizar todas as operações necessárias ao cálculo do operador constitutivo e das forças internas, sem se remeter diretamente aos elementos finitos, aos pontos de integração e, inclusive, ao modelo discreto, seja este do MEF ou de outras formulações, tais como o MEFG, MEC ou MSM.

A independência do modelo constitutivo pode ser observada nos diagramas das Figuras 5.6 e 5.7. Estes diagramas destacam as duas principais atividades da interface `ConstitutiveModel`: cálculo dos tensores constitutivos com aproximações tangente, secante ou elástica (Figura 5.6) e o cálculo do vetor de tensões (Figura 5.7). Nos dois casos, os dados da degeneração são conduzidos para o modelo constitutivo, que calcula as grandezas no respectivo ponto de integração.

A implementação do Ambiente Unificado realizado em (Penna, 2011) se beneficiou desta organização adequando as classes e interfaces `ConstitutiveModel`, `Material`, `Degeneration`, `AnalysisModel` e `ConstitutivePointModel`.

As implementações realizadas no trabalho de Penna (2011) mudaram a forma de funcionamento do modelo constitutivo no contexto das implementações computacionais. Até então, cada modelo era implementado em uma classe herdeira direta de `ConstitutiveModel` e as atribuições de generalização eram limitadas ao próprio modelo constitutivo, que delegava ao modelo de análise as definições dos tensores de rigidez, fazendo com que o modelo de análise tivesse que ser adaptado para cada novo modelo constitutivo inserido no sistema.

A partir do trabalho de Penna (2011), o modelo constitutivo passou a ser formado por funções potenciais e seus respectivos gradientes, que resultam em um conjunto de operações tensoriais capazes de lidar com os tensores constitutivos, os gradientes das funções e as condições de carregamento e descarregamento. Assim, as operações da estrutura teórica unificada e as particularidades de cada modelo são atribuídas a um

conjunto de classes, que respondem pelas parcelas que compõem as operações comuns e generalizam o uso do modelo de análise, evitando sua constante refatoração.

Estas classes foram denominadas *Filters*. As implementações são tais que cada *Filter* contém as informações do respectivo modelo constitutivo que ele quer representar e as hipóteses do modelo de análise. Cada *Filter* trata o modelo constitutivo no formato tensorial, de modo que o modelo de análise forneça as componentes de cada tensor (rigidez, tensão e deformação) necessárias para sua montagem.

A Figura 5.8 apresenta a herança de classes de `ConstitutiveModel`. Observa-se que o modelo constitutivo geral, `UnifiedConstitutiveModel`, apresenta duas especializações: as classes `UCMSingleLoadingFunction` e `UCMMultipleLoadingFunction`, que particularizam as formulações com uma função de carregamento e com múltiplas funções de carregamento, respectivamente. O diagrama com a herança completa desta classe é apresentado no trabalho de Penna (2011).

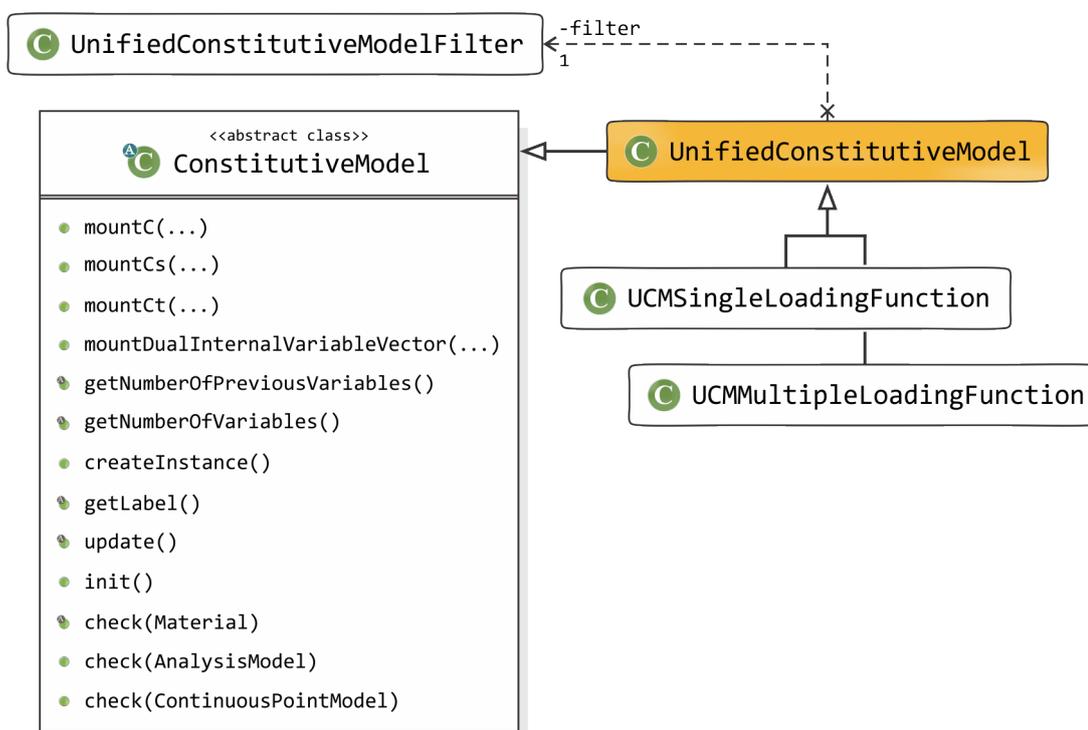


Figura 5.8: Diagrama de classes para `ConstitutiveModel`.

A Figura 5.8 também elucidada que a classe `UnifiedConstitutiveModel` possui uma instância de `UnifiedConstitutiveModelFilter`, entendida como a superclasse

do conjunto de classes que formam a camada *Filter*.

A Figura 5.9 apresenta a herança de `UnifiedConstitutiveModelFilter`, com destaque para a classe criada neste trabalho, necessária para a representação geral dos Modelos de Microplanos, intitulada `MicroplaneConstitutiveModelFilter`.

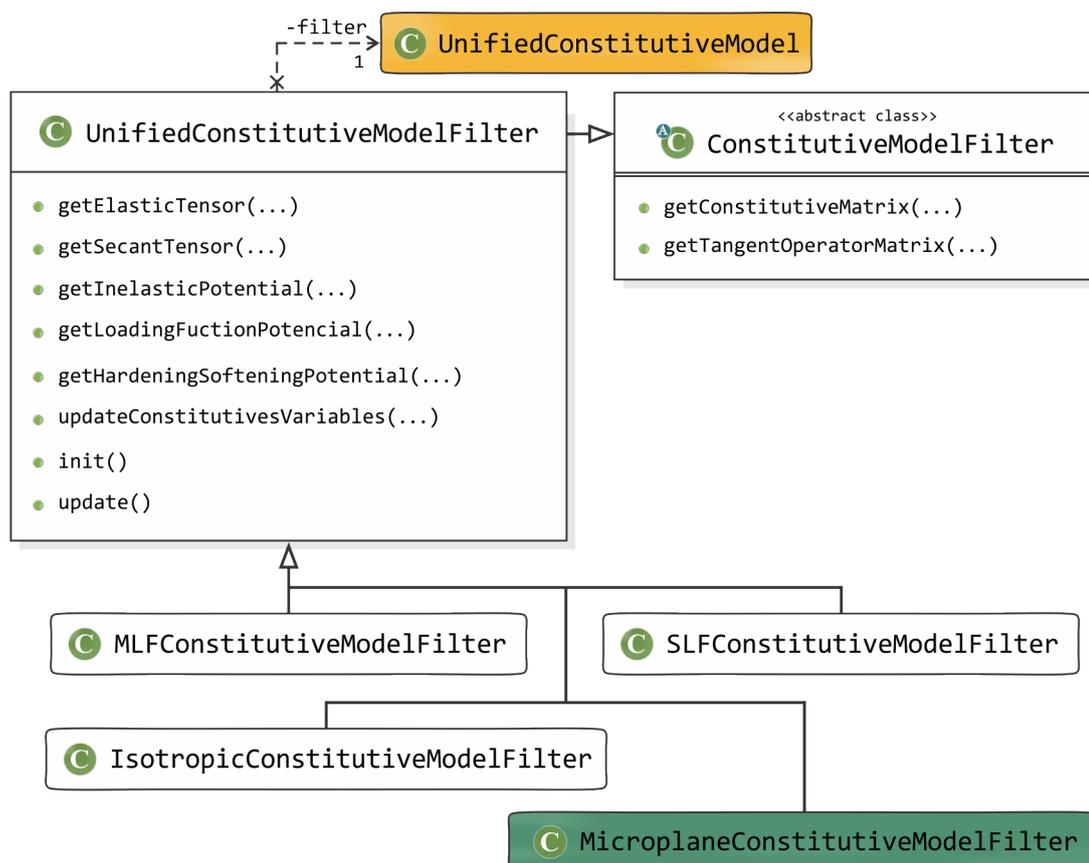


Figura 5.9: Diagrama de classes para `UnifiedConstitutiveModelFilter`.

O modelo constitutivo realiza todas as operações pertinentes à solução do modelo, delegando as especificidades de cada um aos respectivos *Filters*. Assim, operações genéricas, como a obtenção do tensor de rigidez elástico ($mountC(...)$) e do tensor de rigidez secante ($mountCs(...)$) e da atualização das variáveis constitutivas ($update(...)$), podem ser tratadas em classes gerais da herança (Ver Figura 5.8).

Tem-se ainda o cálculo das tensões pelo método $mountDualInternalVariable(...)$ e do operador tangente pelo método $mountCt(...)$. As tensões são obtidas pelo produto entre os tensores de rigidez secante e o de deformações. O operador tangente é obtido pela Equação (4.18). Estas atividades são implementadas com a ajuda de classes

especializadas: as superclasses de `ConstitutiveModel` solicitam ao respectivo *Filter* as parcelas que compõem as operações gerais da estrutura teórica unificada.

Para descrever a interação entre o modelo constitutivo e o respectivo *Filter*, apresenta-se na Figura 5.10 a hierarquia de classes para o modelo proposto por Leukart e Ramm (2006), representado pela classe `SLFMMLeukartRamm`. Como se observa, foram criadas superclasses que generalizam as possibilidades para implementação de quaisquer Modelos de Microplanos, subdividindo-os conforme a decomposição de deformações no ponto material, sejam estas decomposições N-T, V-D ou V-D-T, representadas pelas classes `NTSplitToMicroplaneModelFilter`, `VDSplitToMicroplaneModelFilter` e `VDTSplitToMicroplaneModelFilter`, respectivamente.

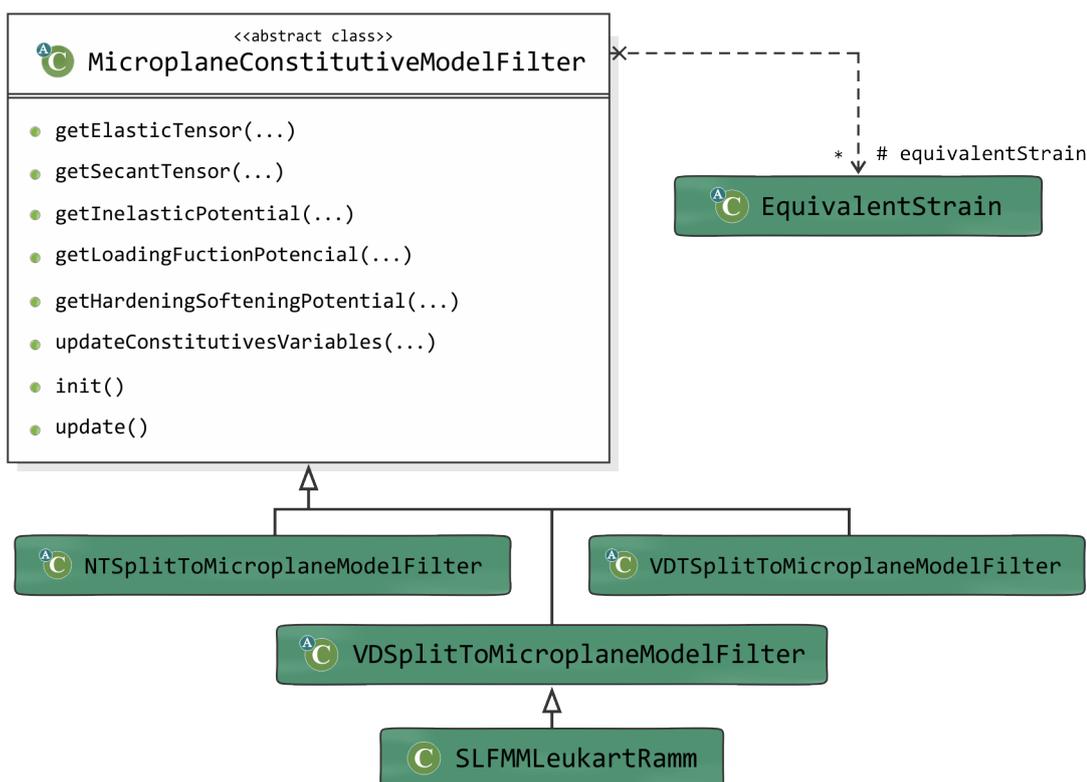


Figura 5.10: Diagrama de classes para `MicroplaneConstitutiveModelFilter`.

Verifica-se, ainda, a criação da classe `EquivalentStrain`, representativa das diferentes medidas de deformações equivalente. Conforme ilustra a Figura 5.11, foram implementados as medidas segundo: Ju (1989), Simo e Ju (1987), Lemaitre (1984) e de Vree et al. (1995), representadas pelas respectivas classes: `JuVDEquivStrain`,

SimoJuVDEquivStrain, LemaitreVDEquivStrain, VreeVDEquivStrain.

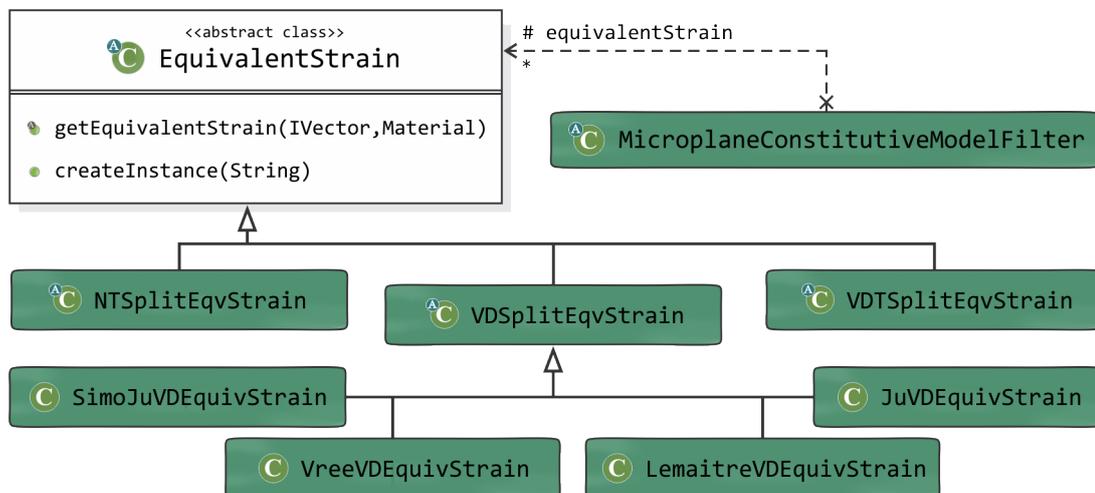


Figura 5.11: Diagrama de classes para EquivalentStrain.

Em destaque, são ilustrados na Figura 5.12 os métodos necessários ao cálculo da deformação equivalente e suas derivadas em relação às parcelas de deformação, volumétrica e desviadora, necessárias para a composição dos tensores requeridos pela classe SLFMMLeukartRamm para cada ponto material. A título ilustrativo, mostram-se os métodos e atributos das classes LemaitreVDEquivStrain e VreeVDEquivStrain, representativas das duas medidas de deformação equivalente usadas com maior frequência nas simulações deste trabalho.

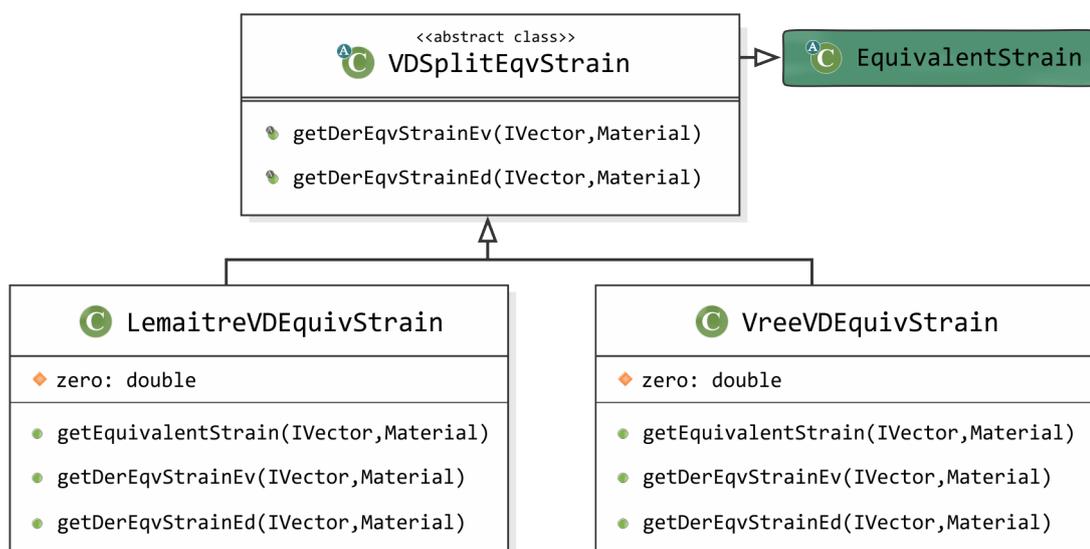


Figura 5.12: Diagrama de classes para VDSplitEqvStrain.

Na Figura 5.13, observa-se a relação da classe `UnifiedConstitutiveModel` com a classe `SLFMMLeukartRamm` a partir da obtenção dos componentes dos tensores secante (E_{ijkl}^{sec}), pós-crítico (H), de degradação (m_{ij}) e dos gradientes das funções de carregamento (n_{kl}), repassados via representação de cada ponto material pela classe `Degeneration`, a fim de obter os componentes do tensor constitutivo tangente (E_{ijkl}^{tan}). Tem-se ainda os métodos invocados pelo modelo constitutivo para o cálculo das tensões, com destaque para o método `updateConstitutivesVariables(...)`, que atualiza as variáveis constitutivas para o estado de deformações corrente para, em seguida, calcular as tensões.

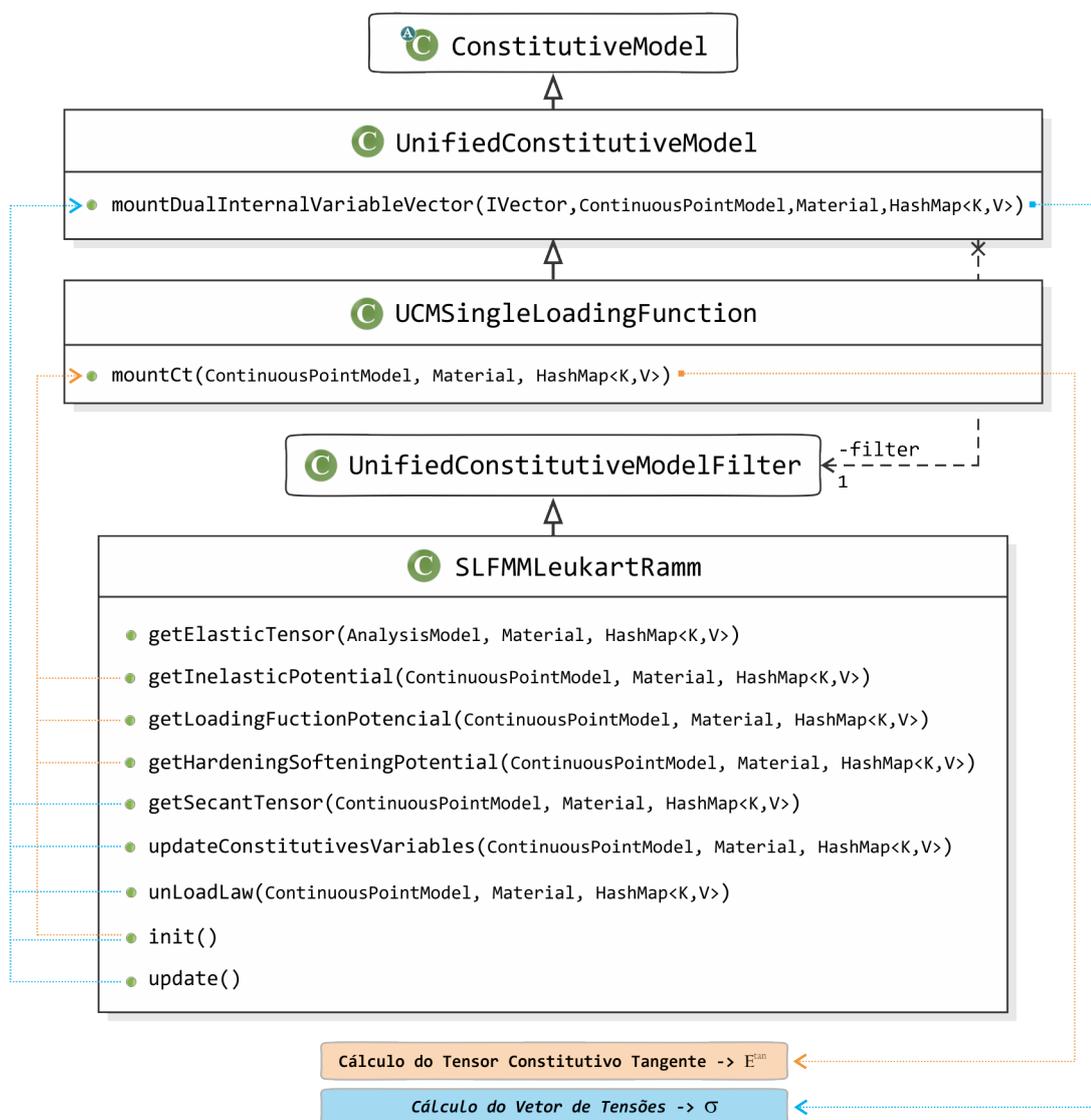


Figura 5.13: Interação entre classes para obtenção do tensor constitutivo tangente.

5.3.1 Classe abstrata Material

O pacote `MaterialMedia` possui interfaces e classes necessárias para representar, do modo mais genérico, a constituição física dos elementos finitos.

A interface `Material`, pertencente a este pacote, possui métodos para a obtenção das informações sobre as propriedades dos diferentes materiais, sejam elas propriedades secantes, tangentes ou de descarregamento. Os materiais são representados pelas classes que implementam a interface `Material`, tendo como atributos um identificador *label* e uma coleção do tipo `HashMap` com os valores necessários para caracterizar os distintos materiais.

Na Figura 5.14 é ilustrado o diagrama da classe `MicroplaneMaterial`, que implementa a classe abstrata `Material`, herdando seus atributos e particularizando sua representação para materiais empregados para os Modelos de Microplanos.

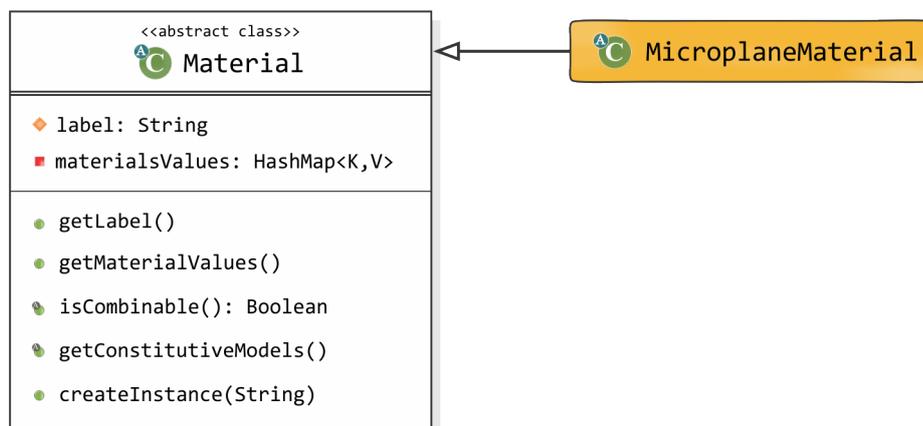


Figura 5.14: Diagrama de classes para `Material`.

O diagrama de classe para `MicroplaneMaterial` é detalhado na Figura 5.15. Esta classe implementa a interface `Hardenable` ao incorporar os métodos `getDamage(...)` e `getInelasticModulus(...)` responsáveis, respectivamente, pelos cálculos do dano d^{mic} e de sua derivada em relação à variável histórica κ^{mic} .

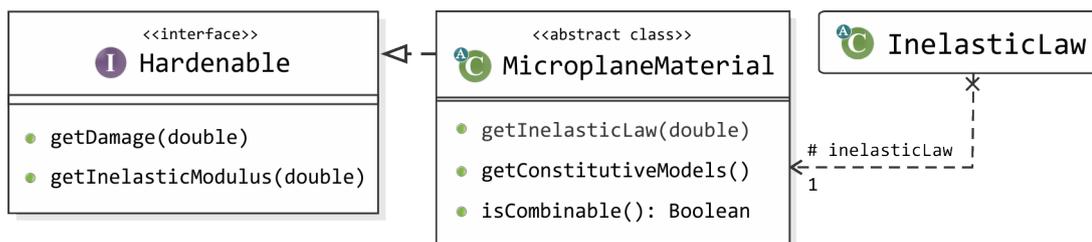


Figura 5.15: Diagrama de classes para `MicroplaneMaterial`.

A instância *inelasticLaw* permite o acesso da classe `MicroplaneMaterial` às diferentes funções de evolução de dano implementadas pela classe abstrata `InelasticLaw`. Na Figura 5.16 tem-se a hierarquia desta classe, com as funções de dano usadas nas simulações desta dissertação, sendo: exponencial, polinomial, linear e bilinear, representadas pelas respectivas classes: `DamageLawExponential`, `DamageLawContinuumPolynomial`, `DamageLawLinear` e `DamageLawBilinear`.

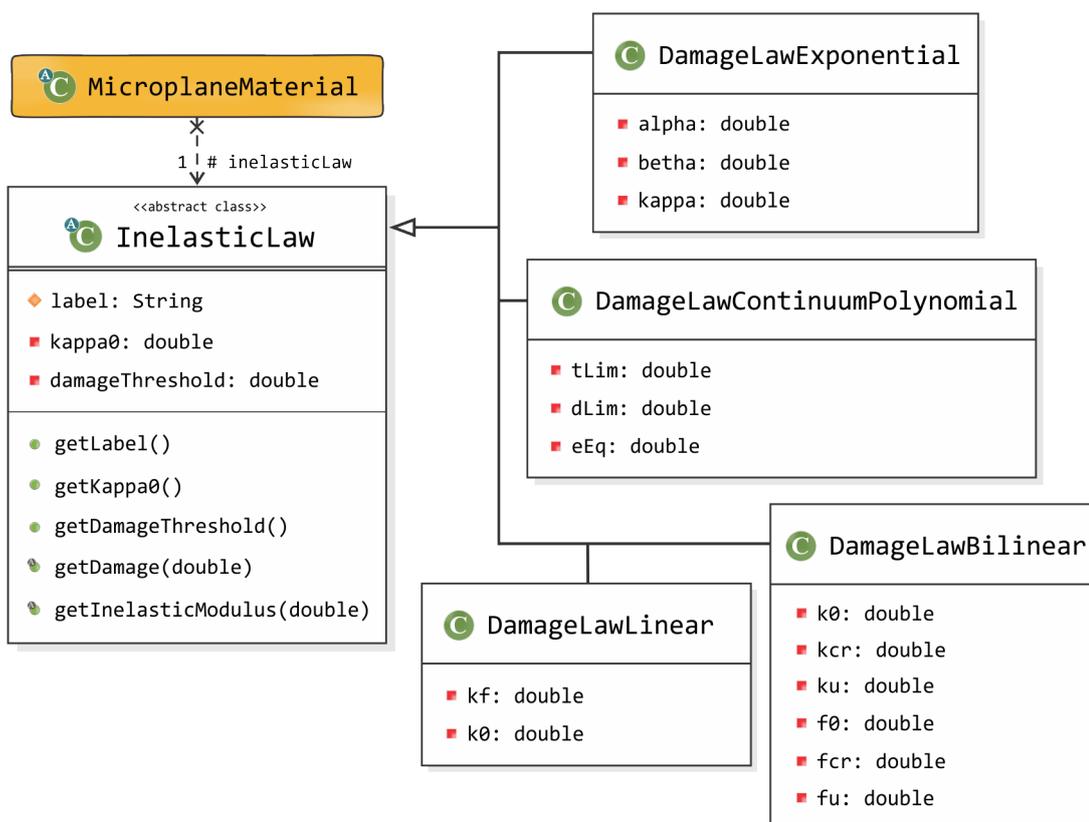


Figura 5.16: Diagrama de classes para `InelasticLaw`.

Nota-se que a classe `InelasticLaw` pode assumir diversas formas para a evolução do dano. As implementações destas funções são ilimitadas e independentes do material, o possibilita suas aplicações para os diferentes modelos constitutivos, cuja degradação seja descrita por leis de dano.

5.3.2 Classe abstrata `Degeneration`

A classe abstrata `Degeneration` representa a degeneração na geometria do elemento. As degenerações são compostas por um lista de pontos materiais e por atributos pertencentes à classe `Representation`, responsáveis pelo comportamento do conjunto de pontos materiais de uma degeneração, além de cumprir o papel de ponto de integração, por conter os atributos necessários à integração numérica.

Exemplifica-se a especialização da classe `Degeneration` com sua classe herdeira denominada `CrossSection`, que representa a degeneração causada pela discretização em elementos finitos unidimensionais que simplifica a geometria tridimensional em apenas uma linha, como ilustrado pela Figura 5.17. Perdem-se as informações sobre a seção transversal, principalmente se esta for de geometria composta.

Tais informações são, então, armazenadas na classe `CrossSection`, por meio de uma lista de pontos materiais que descrevem aproximadamente a geometria e a composição material da seção degenerada, permitindo que o modelo constitutivo dessa degeneração seja aproximado pelo somatório da contribuição de cada um dos pontos. Para cada ponto de integração do elemento há uma degeneração, o que permite aproximar o modelo constitutivo ao longo do elemento.

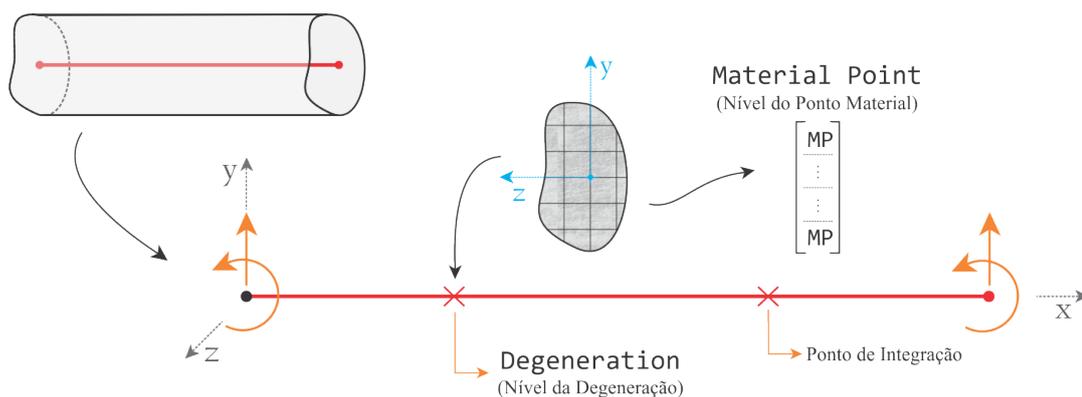


Figura 5.17: Representação da degeneração do tipo `CrossSection`.

Na Figura 5.18 é ilustrada a composição da classe `Degeneration`, com sua associação às classes `Representation` e `MaterialPoint`. É apresentada também sua classe herdeira denominada `UnifiedMicroplaneDegeneration`, concebida, por analogia com a classe `CrossSection`, para representar o conjunto de microplanos associados a um ponto material.

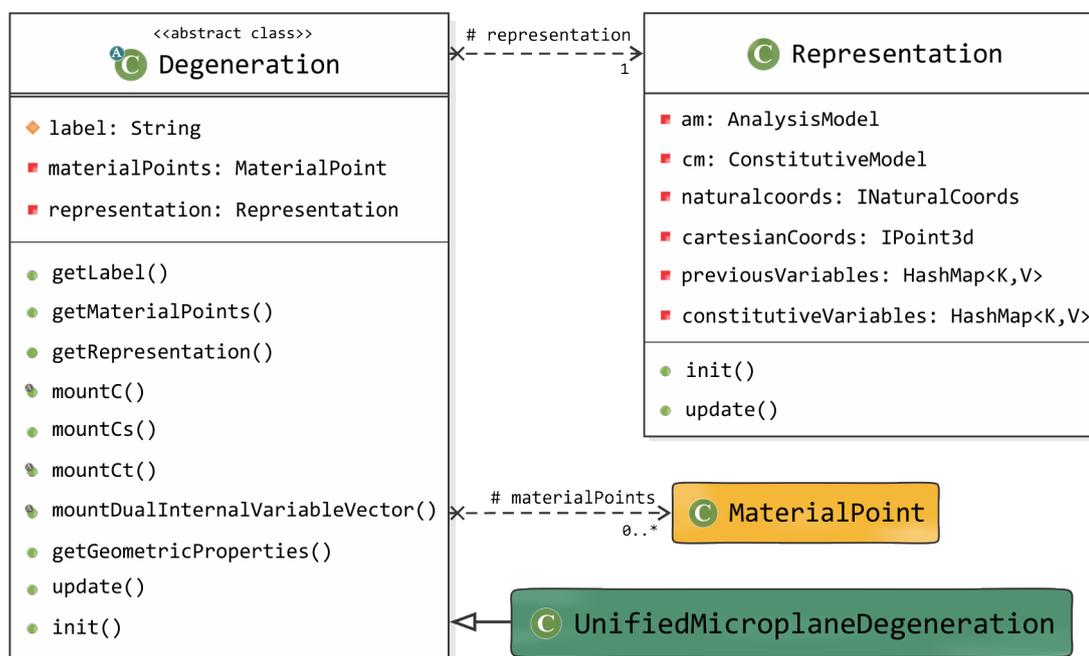


Figura 5.18: Diagrama de classes para `Degeneration`.

As degenerações associadas aos Modelos de Microplanos são representadas pela classe `UnifiedMicroplaneDegeneration`, que possui um conjunto de objetos do tipo `MicroplaneMaterialPoint` independentes do modelo adotado. Assim, cada

degeneração possui um conjunto de microplanos, cada qual com seu comportamento representado pelo ponto material, permitindo que as grandezas das degenerações sejam obtidas pelo somatório da contribuição de cada um dos microplanos.

A Figura 5.19 ilustra o diagrama da classe `UnifiedMicroplaneDegeneration`, destacando-se os métodos `mountC()`, `mountCs()` e `mountCt()`, que correspondem, respectivamente, à obtenção do tensor constitutivo macroscópico advindo da integração das parcelas no nível do microplano para os tensores elástico, secante ou tangente. Citam-se ainda os métodos `mountMPInternalVariables()` e `mountMPDualInternalVariables()`, responsáveis, respectivamente, pela obtenção das tensões e deformações volumétricas e desviadoras nos microplanos e o método `mountDualInternalVariableVector()`, responsável pelo cálculo do vetor de tensões macroscópico.

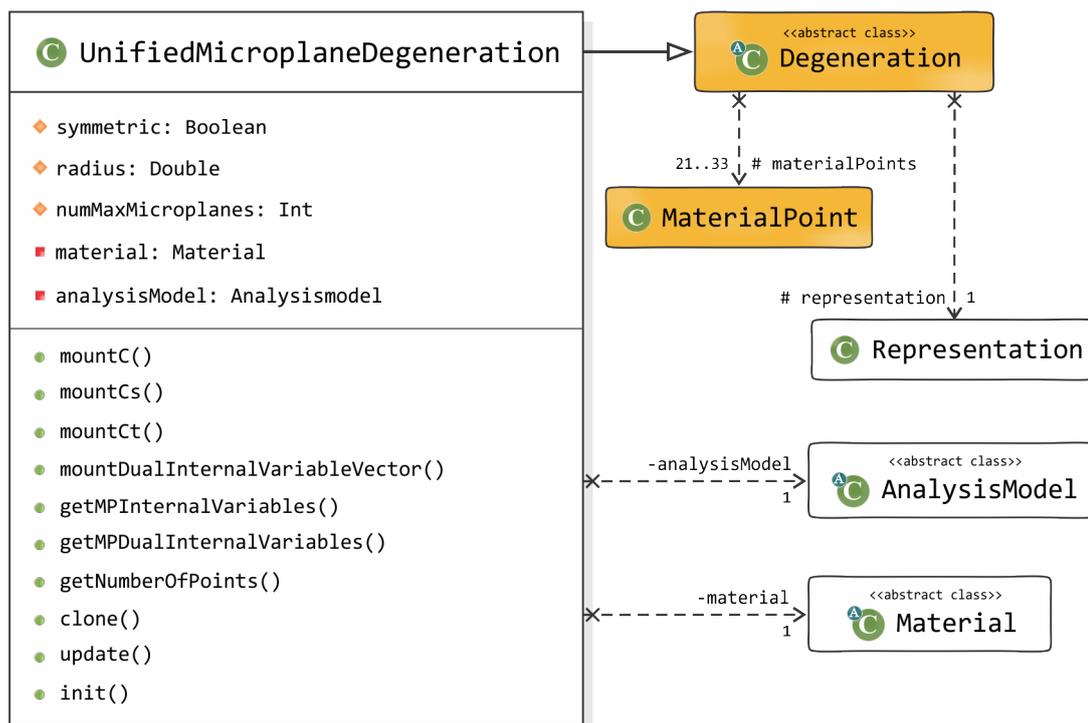


Figura 5.19: Diagrama de classes para `UnifiedMicroplaneDegeneration`.

A Figura 5.20 detalha a classe `MaterialPoint`, que representa um ponto no meio material, composta de: um objeto `IPoint3d`, que armazena as coordenadas do ponto no espaço, um objeto `IVolume`, que armazena as dimensões nas direções cartesianas Δ_x , Δ_y e Δ_z de responsabilidade do ponto, além de objetos do tipo `Material`,

`ContinuousPointModel` e `ConstitutiveModel`, que representam, respectivamente, o material, o modelo de análise e o modelo constitutivo deste ponto material.

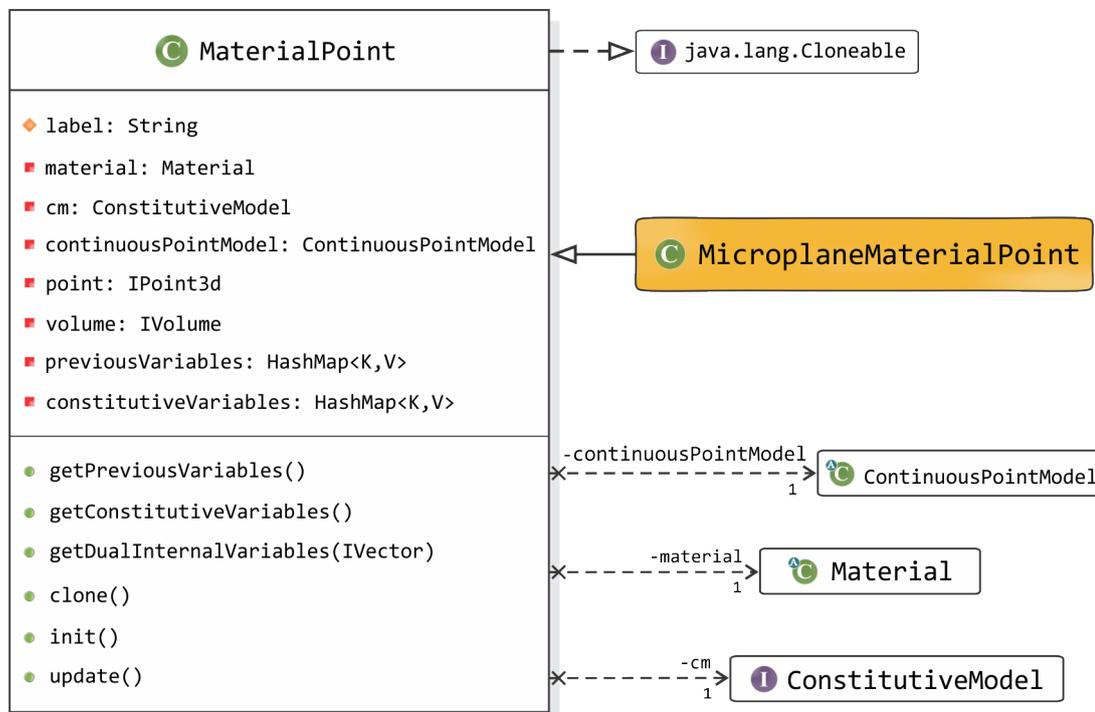


Figura 5.20: Diagrama de classes para `MaterialPoint`.

Em um ponto material pertencente a uma degeneração, as subclasses de `ContinuousPointModel` são aquelas que informam os operadores que transformam valores da degeneração em valores pontuais. Já a classe `MaterialPoint` possui dois objetos do tipo `HashMap` que armazenam as variáveis constitutivas atuais e prévias, intituladas `constitutiveVariables` e `previousVariables`, respectivamente. Estes dois objetos informam, em tempo de execução, os estados do ponto material associados à iteração corrente e ao passo anterior do processo incremental iterativo da análise.

A classe `MicroplaneMaterialPoint` (Figura 5.21) especializa os atributos de um ponto material ao estender os métodos e atributos da superclasse `MaterialPoint` necessários para representar a abstração de cada microplano.

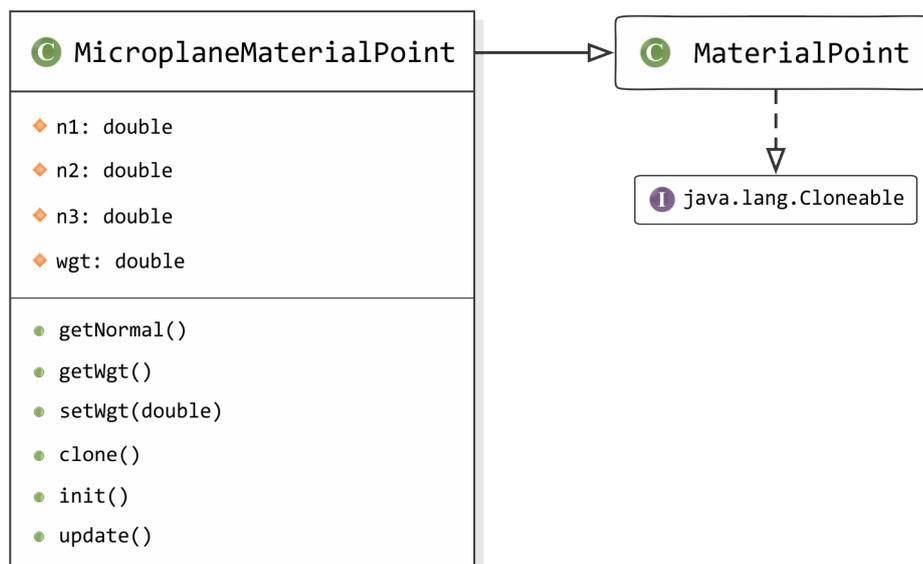


Figura 5.21: Diagrama de classes para `MicroplaneMaterialPoint`.

O método *getDualInternalVariables(IVector)*, responsável pelo acesso ao cálculo das tensões em cada ponto material, representa, para a classe herdeira `MicroplaneMaterialPoint`, o cálculo das parcelas de tensões e deformações, volumétrica e desviadora, agrupadas em um único vetor representativo das tensões nos microplanos. Para isto, é fundamental que se conheçam as componentes de seu vetor normal.

Como ilustra a Figura 5.21, cada objeto do tipo `MicroplaneMaterialPoint` possui as coordenadas do vetor normal ao microplano ($n1$, $n2$ e $n3$), além de seu peso (wgt), obtidos nas tabelas de integração apresentadas no Apêndice C.

Na Figura 5.22 tem-se o posicionamento dos microplanos, sejam estes representados por 21 ou 33 objetos do tipo `MicroplaneMaterialPoint`, posicionados sob uma esfera de raio unitário, centrada em cada ponto de integração.

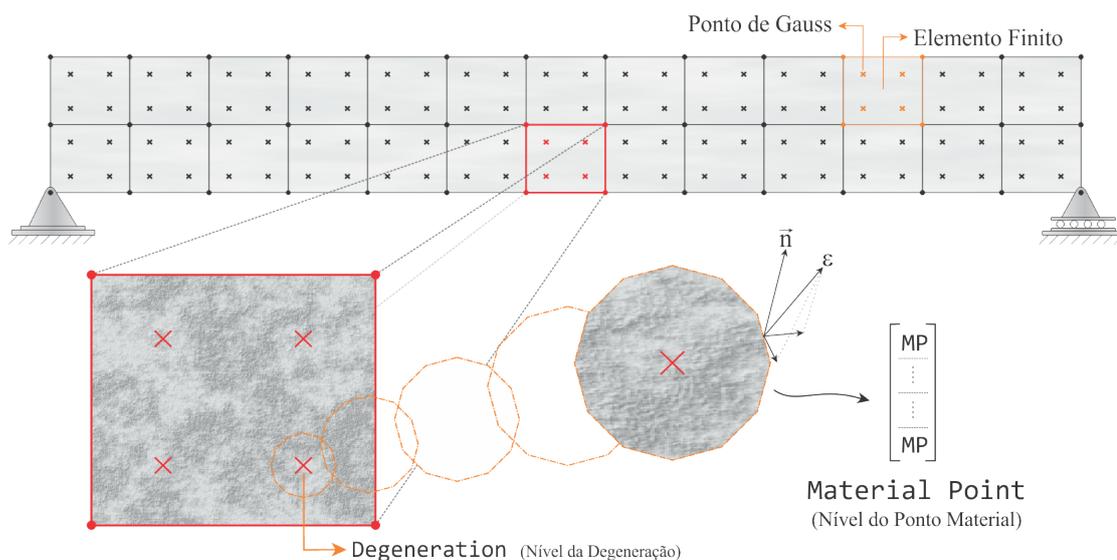


Figura 5.22: Representação do posicionamento dos microplanos centrados em cada ponto de integração.

Em resumo, verifica-se que a classe `Degeneration` possui um objeto `Representation` que o representa através de um modelo constitutivo, um modelo de análise e duas coleções do tipo `HashMap`, que armazenam suas variáveis constitutivas atuais e prévias. Estes atributos dizem respeito à degeneração como um todo, representando o comportamento do conjunto de pontos materiais da referida degeneração. Assim, sempre que solicitado pelo elemento, a classe `Degeneration` é capaz de construir tanto as matrizes constitutivas, elástica, secante e tangente, quanto o vetor de tensões referentes às variáveis de estado correntes.

5.3.3 Classe abstrata `AnalysisModel`

A classe abstrata `AnalysisModel` é responsável pelo repasse das informações dependentes do modelo de análise, necessárias aos elementos finitos e às representações das degenerações (Ver Figura 5.23).

As classes que especializam `AnalysisModel` representam os diversos modelos de análise e respondem por informações como o número de graus de liberdade, as variáveis de estado e as variáveis internas de cada modelo.

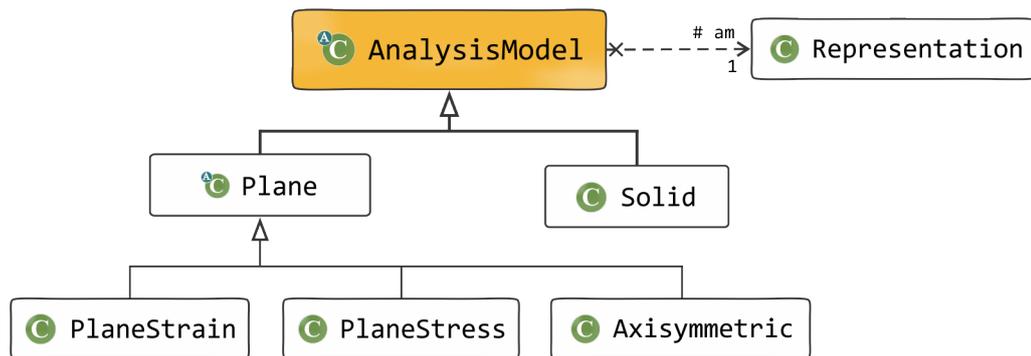


Figura 5.23: Diagrama de classes para **AnalysisModel**.

A Figura 5.24 ilustra o detalhamento dos métodos implementados para a classe **AnalysisModel**, com destaque para os métodos *getLamesFirstParameter()* e *getLamesSecondParameter()*, responsáveis pelo cálculo dos módulos volumétrico e de cisalhamento, dependentes da escolha do modelo de análise a ser adotado.

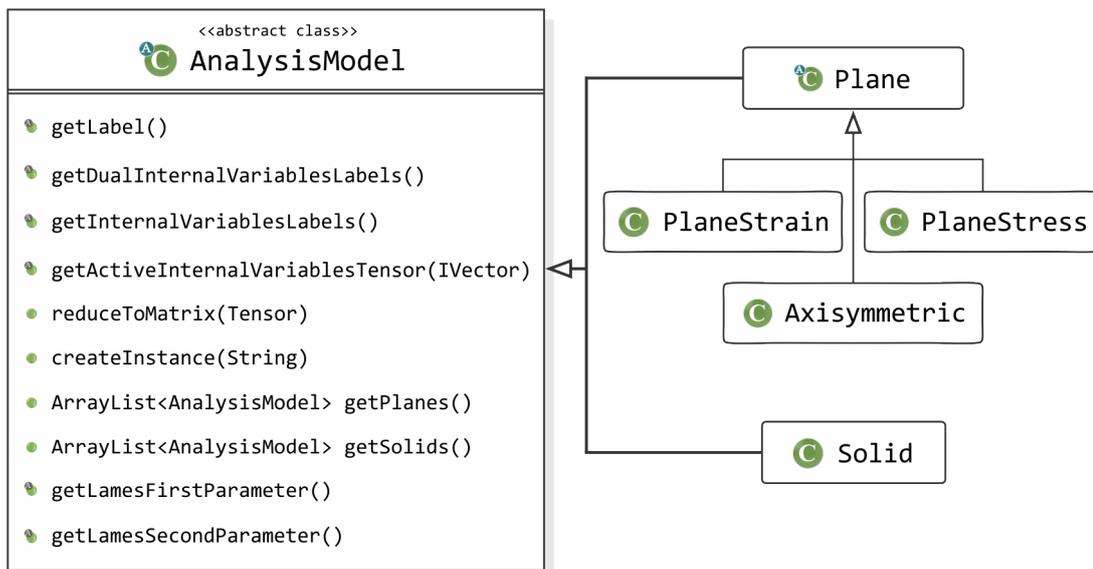


Figura 5.24: Detalhamento dos métodos para a classe **AnalysisModel**.

Enquanto a classe **AnalysisModel** responde por propriedades das degenerações, a classe **ContinuousPointModel** é responsável pelas propriedades dos pontos materiais que compõem cada degeneração, uma vez que é de sua responsabilidade informar os operadores necessários para a obtenção dos tensores constitutivos e os operadores que transformam valores generalizados, advindos da degeneração, em valores pontuais,

referentes ao ponto material. Deste modo, esta classe pode ser entendida como um modelo de análise aplicado ao ponto material (`MaterialPoint`).

Na Figura 5.25 é ilustrado o diagrama da classe `ContinuousPointModel`, com destaque a sua classe herdeira `MicroplanePointModel`, que especializa um ponto material para representação de um microplano.

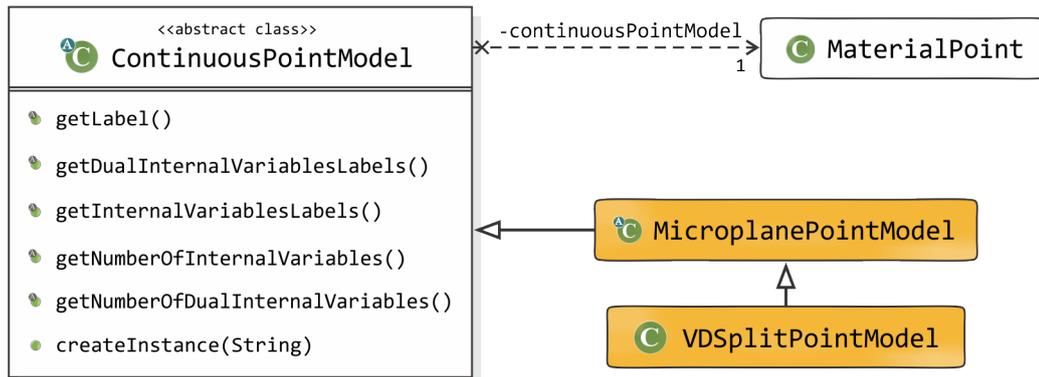


Figura 5.25: Diagrama de classes para `ContinuousPointModel`.

Conforme mostra a Figura 5.26, as classes `MicroplanePointModel` e sua especialização `VDSplitPointModel` possuem métodos para determinação da denominação (*Label*) e da ordem dos vetores de tensão e deformação nos microplanos.

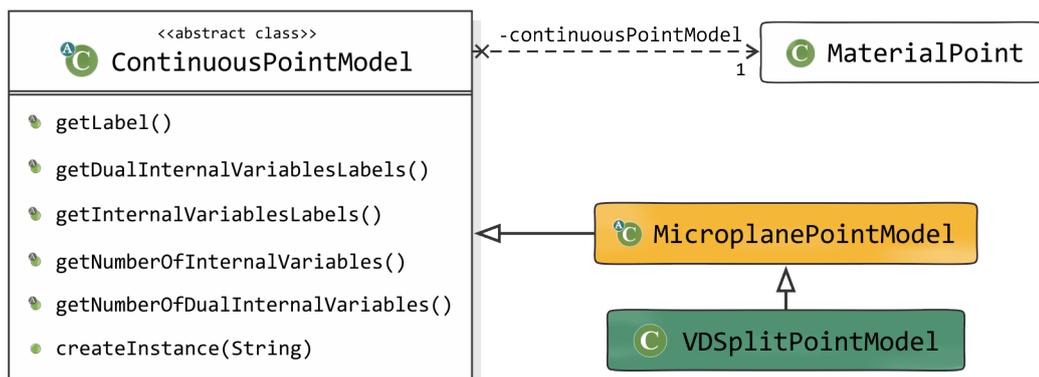


Figura 5.26: Diagrama de classes para `VDSplitPointModel`.

Além destes métodos herdados de `ContinuousPointModel`, podem-se citar os métodos `getDevInternalVariableOperator()`, `getVolInternalVariableOperator()` e `getVolFourthOrderInternalVariableOperator()`, responsáveis, respectivamente, pelo cálculo das componentes dos tensores \mathcal{D}_{pkl} , \mathcal{V}_{ij} e \mathcal{V}_{ijkl} , expostos no Apêndice A.

Capítulo 6

Simulações Numéricas

No presente capítulo são apresentadas e discutidas algumas das simulações numéricas realizadas com o Modelo Constitutivo de Microplanos proposto por Leukart e Ramm (2006), formulado segundo o Ambiente Teórico-Computacional desenvolvido em Penna (2011) e implementado nesta dissertação.

Para avaliar os parâmetros de dano que caracterizam um dado material e as medidas de deformação equivalente propostas por Ju (1989), Simo e Ju (1987), Lemaitre (1984) e de Vree et al. (1995), implementadas neste trabalho, são simulados exemplos de tração, compressão e cisalhamento puros com uso das funções de dano exponencial, polinomial, linear e bilinear, existentes no sistema *INSANE*.

Na sequência, a estabilidade numérica do modelo é investigada por meio de dois estudos. O primeiro avalia a dependência de malha. No segundo, simulações são realizadas, variando-se as aproximações do tensor constitutivo incremental.

Por fim, exemplos com situações de carregamento mais complexos são apresentados com objetivo de comparar os resultados obtidos com o Modelo Constitutivo de Microplanos implementado nesta dissertação, com resultados oriundos de ensaios experimentais disponíveis na literatura.

6.1 Ajuste de Parâmetros

Com objetivo de caracterizar um dado material para distintas combinações das quatro medidas de deformação equivalente implementadas neste trabalho, e de quatro funções de evolução de dano já existentes no sistema **INSANE**, os parâmetros que descrevem tais combinações foram ajustados.

Tal ajuste baseou-se na representação do comportamento do material para estados de tração dominante, uma vez que este estado é o principal responsável pelo processo de degradação de meios parcialmente frágeis.

Assim, usando simulações de tração pura, os diversos parâmetros foram sucessivamente ajustados até se obter o conjunto que descrevesse, para cada uma das medidas de deformação equivalente, relações *Tensão x Deformação* semelhantes, conforme as diferentes funções de dano adotadas. Na sequência, simulações para os estados de compressão e cisalhamento dominante também foram realizadas, a fim de avaliar o comportamento em função das medidas de deformação e funções de dano para estas formas de sollicitação.

Sendo assim, apresentam-se aqui os resultados do processo de ajuste do material usado por Leukart e Ramm (2006), que descreveram, a partir de uma análise em Estado Plano de Deformação (EPD) e uso de dano exponencial e da medida de deformação segundo de Vree et al. (1995), trajetórias de equilíbrio com emprego dos seguintes parâmetros: $E = 35000 \text{ MPa}$; $\nu = 0,15$; $\alpha^{mic} = 0,96$; $\beta^{mic} = 300,00$; $\kappa_0^{mic} = 0,0005$ e $r = 10$, necessários na composição das equações (4.19) e (4.42).

Partindo-se deste conjunto inicial de parâmetros, o processo de ajuste do material, para as diversas combinações de medidas de deformação equivalente e funções de evolução de dano, adotou-se: (1) a malha com um único elemento finito, mostrada na Figura 6.1; (2) aproximação elástica para o tensor constitutivo; (3) análise em Estado Plano de Deformação (EPD); e (4) método de controle de deslocamento generalizado, com fator de carga inicial de 0,60, tolerância de 1×10^{-4} em deslocamento

e carga de referência conforme indicação da Figura 6.1.

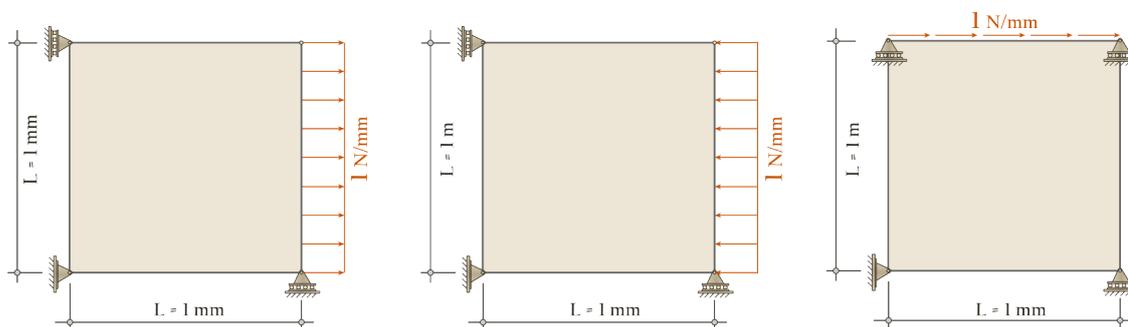


Figura 6.1: Configurações geométricas, de cargas e de condições de contorno das malhas utilizadas para as simulações de: (a) tração, (b) compressão e (c) cisalhamento, puros.

Os resultados do processo de ajuste do material em questão são apresentados nas Tabelas 6.1, 6.2, 6.3 e 6.4 para, respectivamente, as funções de dano exponencial, polinomial, linear e bilinear, com uso de todas as medidas de deformação equivalente.

Tabela 6.1: Parâmetros do material simulado em Leukart e Ramm (2006) para dano Exponencial e todas as medidas de deformação equivalente.

Medidas de Deformação Equivalente	α^{mic}	β^{mic}	κ_0^{mic}
Ju (1989)	0,960	2,740	0,0565
Simo e Ju (1987)	0,960	1,980	0,0800
Lemaitre (1984)	0,960	186,00	0,000815
de Vree et al. (1995)	0,960	300,00	0,0005

Tabela 6.2: Parâmetros do material simulado em Leukart e Ramm (2006) para dano Polinomial e todas as medidas de deformação equivalente.

Medidas de Deformação Equivalente	f_e^{mic}	E	κ_0^{mic}
Ju (1989)	1938,00	35000,00	0,1060
Simo e Ju (1987)	2738,00	35000,00	0,1490
Lemaitre (1984)	28,38	35000,00	0,00155
de Vree et al. (1995)	17,38	35000,00	0,00095

Tabela 6.3: Parâmetros do material simulado em Leukart e Ramm (2006) para dano Linear e todas as medidas de deformação equivalente.

Medidas de Deformação Equivalente	κ_u^{mic}	κ_0^{mic}
Ju (1989)	0,75	0,0565
Simo e Ju (1987)	1,06	0,080
Lemaitre (1984)	0,0112	0,000815
de Vree et al. (1995)	0,0070	0,0005

Tabela 6.4: Parâmetros do material simulado em Leukart e Ramm (2006) para dano Bilinear e todas as medidas de deformação equivalente.

Medidas de Deformação	κ_u^{mic}	κ_{cr}^{mic}	κ_0^{mic}	f_u^{mic}	f_{cr}^{mic}	f_0^{mic}
Ju (1989)	0,980	0,320	0,0565	0,00	7,20	15,7
Simo e Ju (1987)	1,400	0,450	0,080	0,00	7,20	15,7
Lemaitre (1984)	0,0146	0,00485	0,00081	0,00	7,20	15,7
de Vree et al. (1995)	0,0090	0,0030	0,0005	0,00	7,20	15,7

Os resultados do processo de ajuste do material para a simulação de tração pura, a partir dos parâmetros das tabelas descritas anteriormente, levam aos resultados apresentados pelas Figuras 6.2 e 6.3.

Com os parâmetros assim ajustados, foram realizadas também simulações de compressão e cisalhamento puros, com objetivo de avaliar a capacidade dos modelos em descrever o comportamento do material quando submetido a estes tipos de solicitações. Nestas simulações, utilizou-se dos mesmos parâmetros da análise para tração pura e as configurações descritas nas Figuras 6.1(b) e 6.1(c).

Os resultados obtidos para a simulação de compressão pura são mostrados nas Figuras 6.4 e 6.5. Para o caso de cisalhamento puro, os resultados são apresentados nas Figuras 6.6 e 6.7.

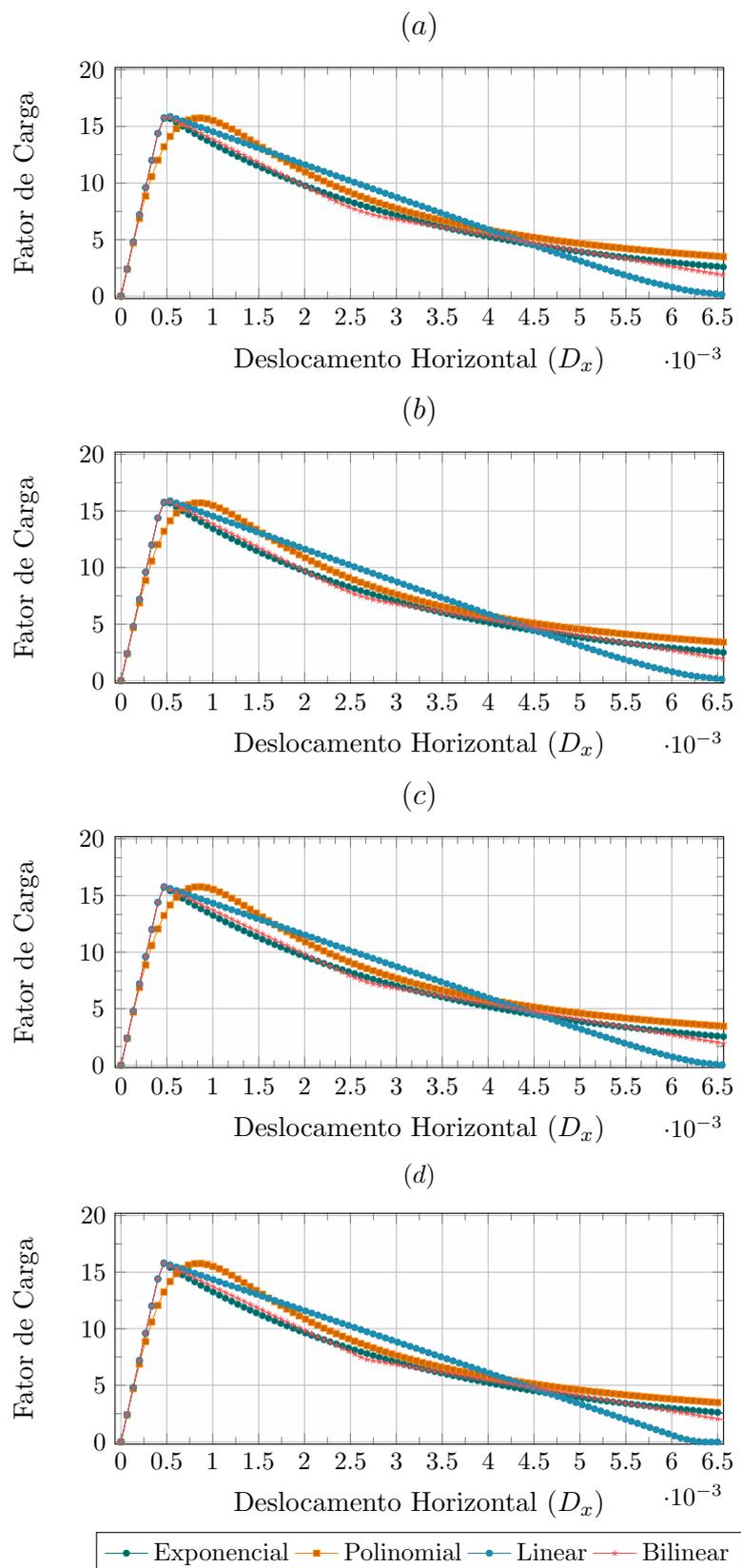


Figura 6.2: Resultados de tração pura com uso de distintas funções de dano e das medidas de deformação equivalente segundo: (a) Ju (1989), (b) Simo e Ju (1987), (c) Lemaitre (1984) e (d) de Vree et al. (1995).

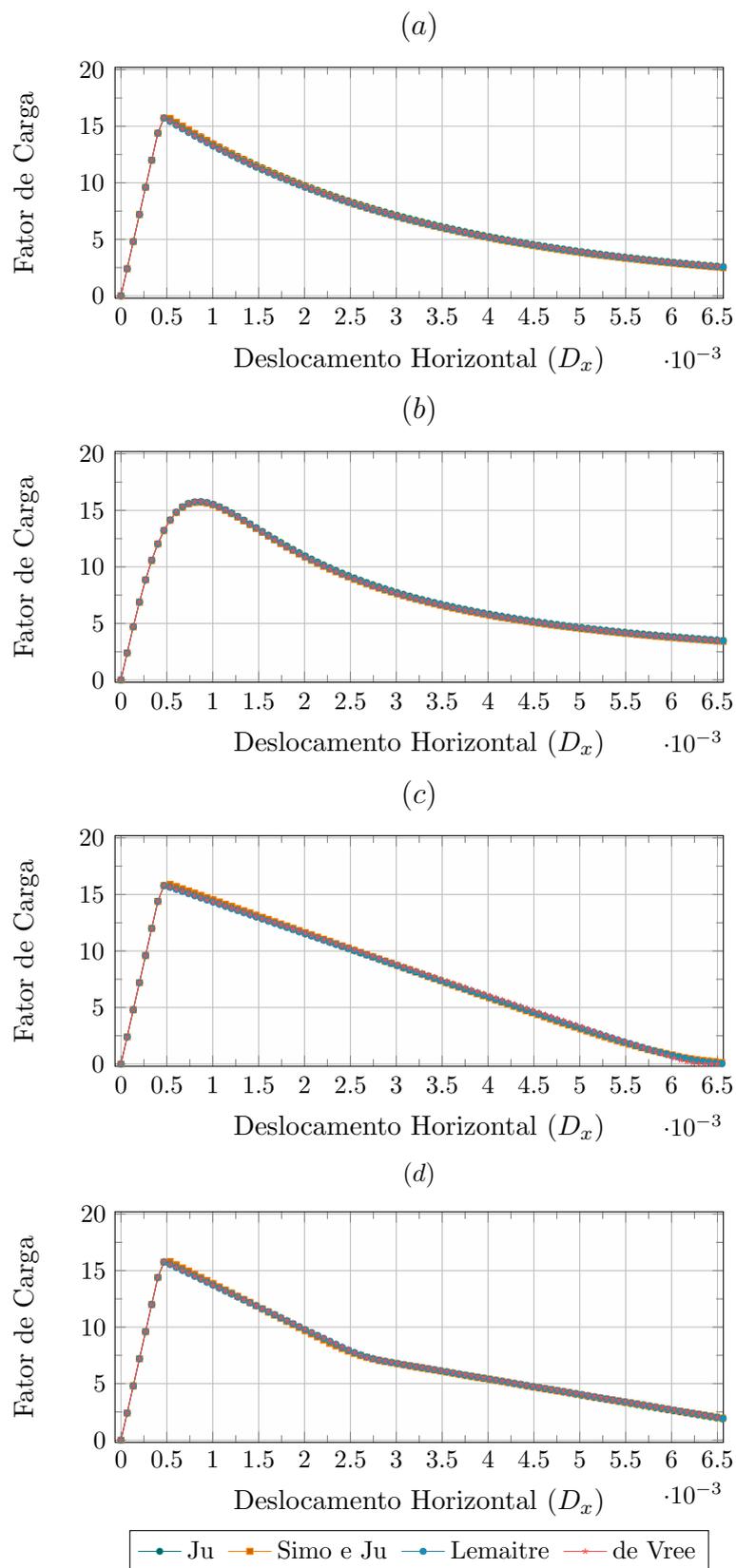


Figura 6.3: Resultados de tração pura com uso de todas as medidas de deformação e funções de dano: (a) exponencial, (b) polinomial, (c) linear e (d) bilinear.

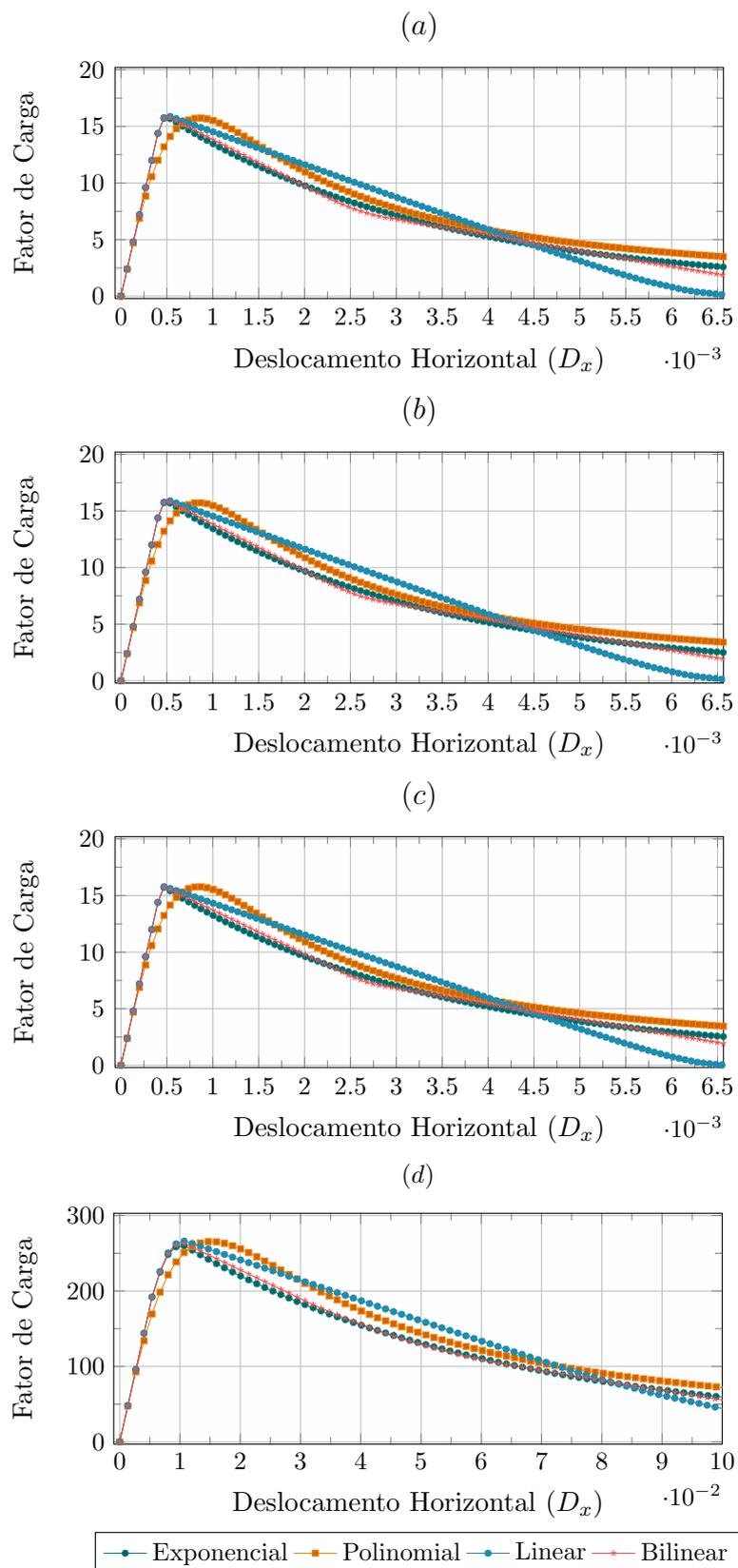


Figura 6.4: Resultados de compressão pura com uso de distintas funções de dano e das medidas de deformação equivalente definidas em: (a) Ju (1989), (b) Simo e Ju (1987), (c) Lemaitre (1984) e (d) de Vree et al. (1995).

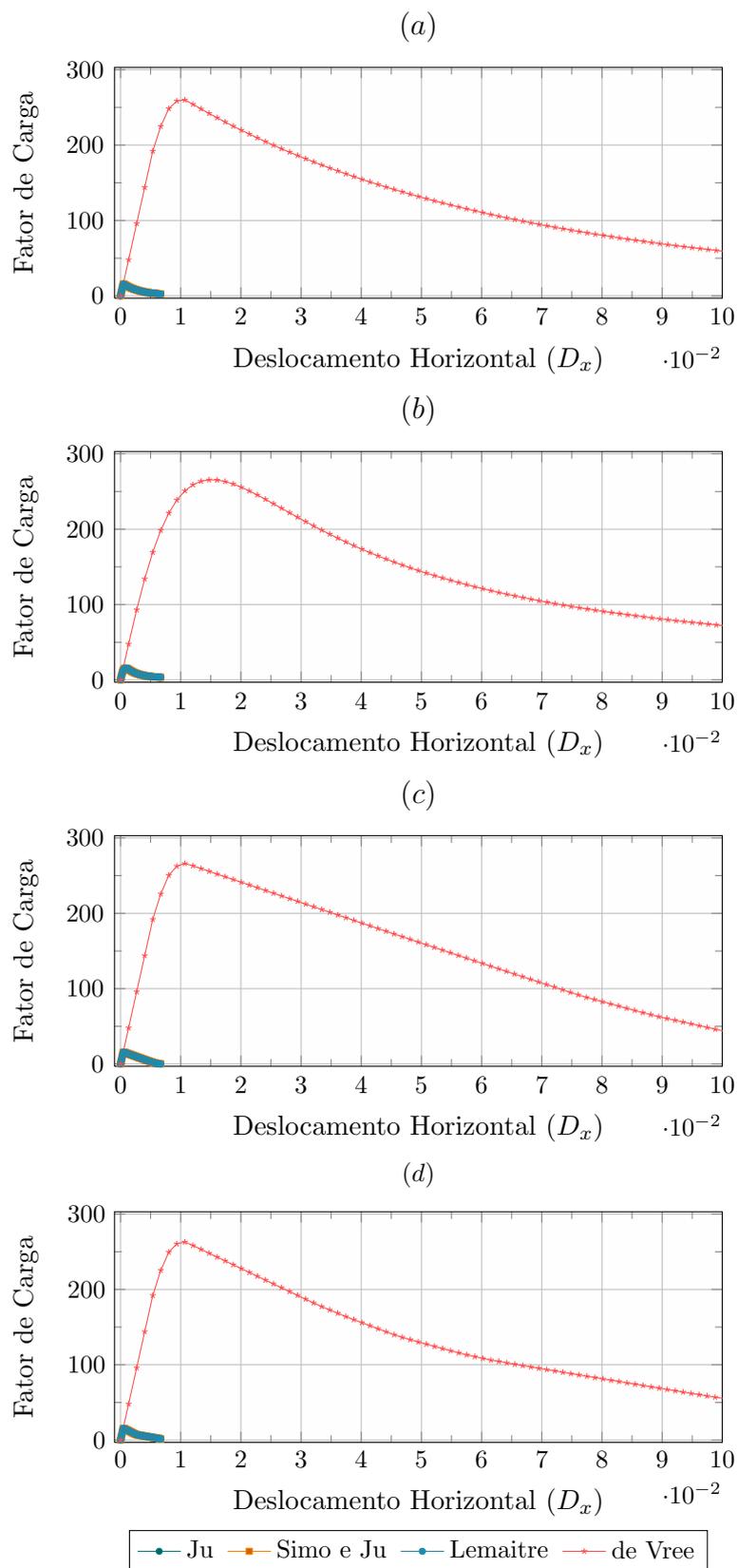


Figura 6.5: Resultados de compressão pura para todas as medidas de deformação e funções de dano: (a) exponencial, (b) polinomial, (c) linear e (d) bilinear.

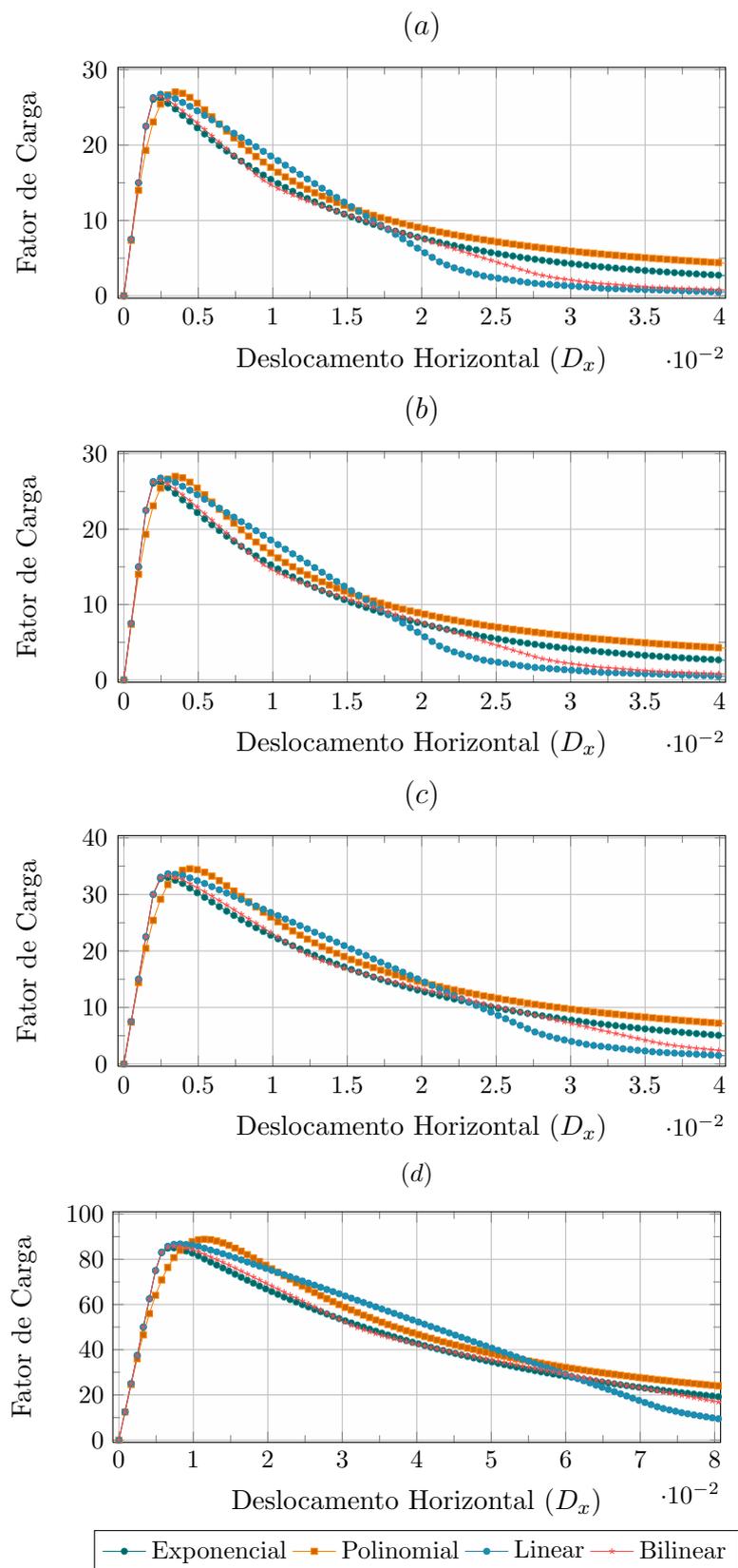


Figura 6.6: Resultados de cisalhamento puro com diferentes funções de dano e medidas de deformação equivalente segundo: (a) Ju (1989), (b) Simo e Ju (1987), (c) Lemaitre (1984) e (d) de Vree et al. (1995).

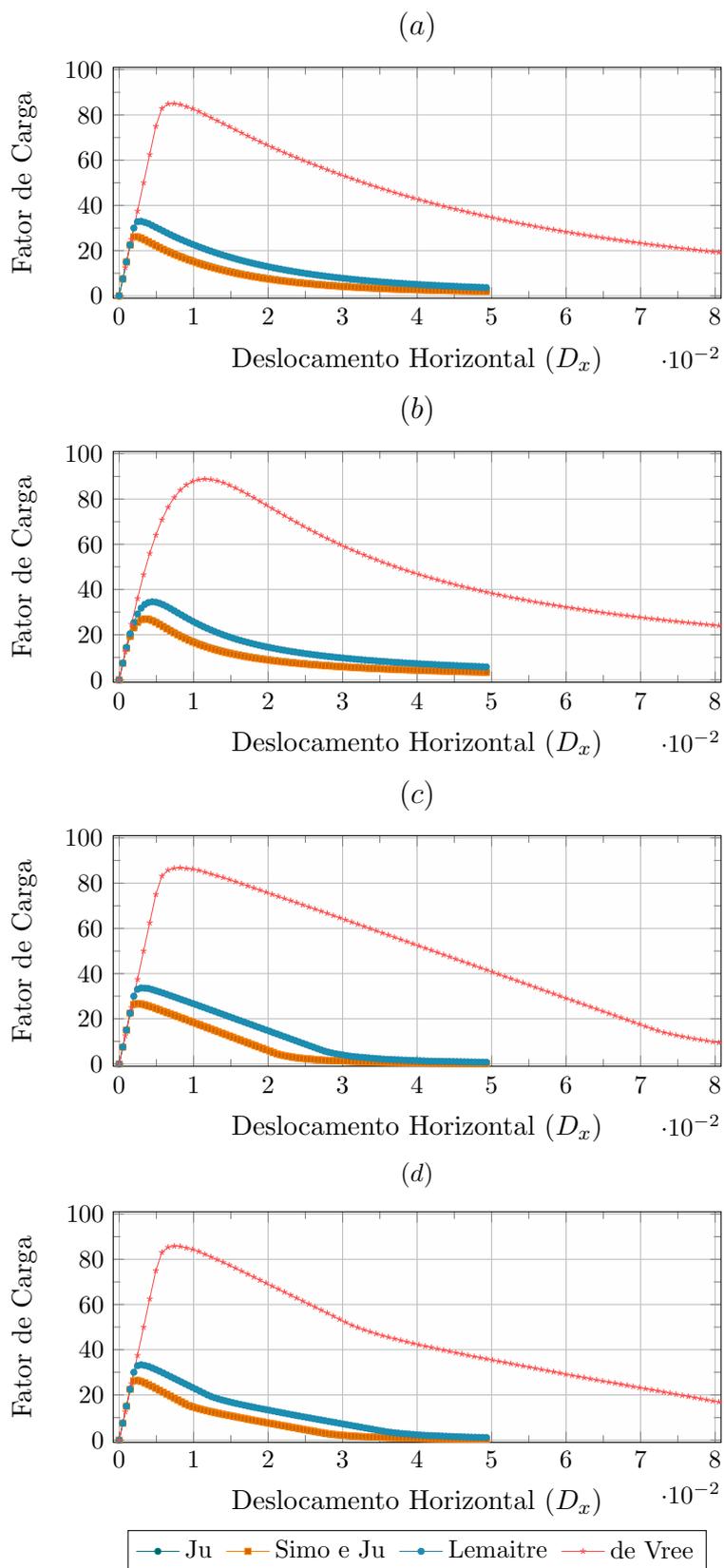


Figura 6.7: Resultados de cisalhamento puro para todas as medidas de deformação e funções de dano: (a) exponencial, (b) polinomial, (c) linear e (d) bilinear.

A partir da observação dos resultados apresentados na Figura 6.2, para as simulações de tração pura, verifica-se uma equivalência das trajetórias de equilíbrio, em virtude do ajuste de parâmetros realizado para cada combinação entre as medidas de deformação equivalente e as funções de evolução de dano. Esta equivalência é quantitativamente verificada pela semelhança dos limites de tensão, dados pelos pontos limites de carga das trajetórias de equilíbrio mostradas. Também se verifica uma equivalência quantitativa das áreas sob as curvas de amolecimento obtidas. Estes dois aspectos permitem concluir que os resultados são equivalentes, tanto do ponto de vista de resistência quanto do comportamento inelástico.

Esta questão é evidenciada a partir das trajetórias apresentadas na Figura 6.3, através do agrupamento dos resultados por tipo de função de evolução de dano: exponencial, polinomial, linear e bilinear. A excelente equivalência observada permite assumir que todas as combinações estudadas são representativas do material descrito no trabalho de Leukart e Ramm (2006).

Destacam-se, entretanto, duas diferenças importantes: (1) o formato do ramo de amolecimento; e (2) os valores da deformação associada ao limite de resistência, para os modelos com dano polinomial (Figuras 6.2 e 6.3b). O formato do ramo de amolecimento é uma característica intrínseca de cada função de dano e, portanto, é uma hipótese assumida. As deformações associadas ao limite de resistência, dos modelos com evolução de dano polinomial, são sempre maiores que as dos modelos que usam as demais funções de dano, independentemente da medida de deformação, uma vez que a função polinomial é não linear para qualquer valor de deformação e não somente para valores superiores a um limite especificado, delimitados, para as demais funções de dano, pelo parâmetro κ_0^{mic} das Tabelas 6.1 a 6.4.

A partir da observação dos resultados mostrados na Figura 6.4, para compressão pura, verifica-se uma equivalência das trajetórias de equilíbrio apenas em termos qualitativos, sendo que, para o ponto de vista quantitativo, os resultados merecem uma análise mais detalhada.

Observa-se que as medidas de deformação de Ju (1989) (Figura 6.4a), Simo e Ju (1987) (Figura 6.4b) e Lemaitre (1984) (Figura 6.4c) revelam resultados: (1) semelhantes entre si; (2) iguais aos resultados dos ensaios de tração pura correspondentes, mostrados nas Figuras 6.2a, 6.2b e 6.2c; e bastante diferentes dos resultados obtidos com a medida segundo de Vree et al. (1995) (Figura 6.4d).

Este último fato é evidenciado na Figura 6.5, que agrupa os resultados por função de dano. Também se observa que, como no ensaio de tração pura, as deformações associadas aos limites de carga, dos modelos com função de dano polinomial, são maiores que aquelas obtidas com as demais funções, independentemente da medida de deformação equivalente adotada.

Pode-se verificar que as medidas de deformação equivalente, exceto a proposta por de Vree et al. (1995), não são capazes de distinguir o comportamento do material quando solicitado por tração ou compressão.

Para melhor ilustrar esta questão, na Figura 6.8 são apresentadas as simulações com uso das medidas de deformação que não são capazes de diferir os esforços de tração dos de compressão, obtidas a título exemplificativo, com dano bilinear.

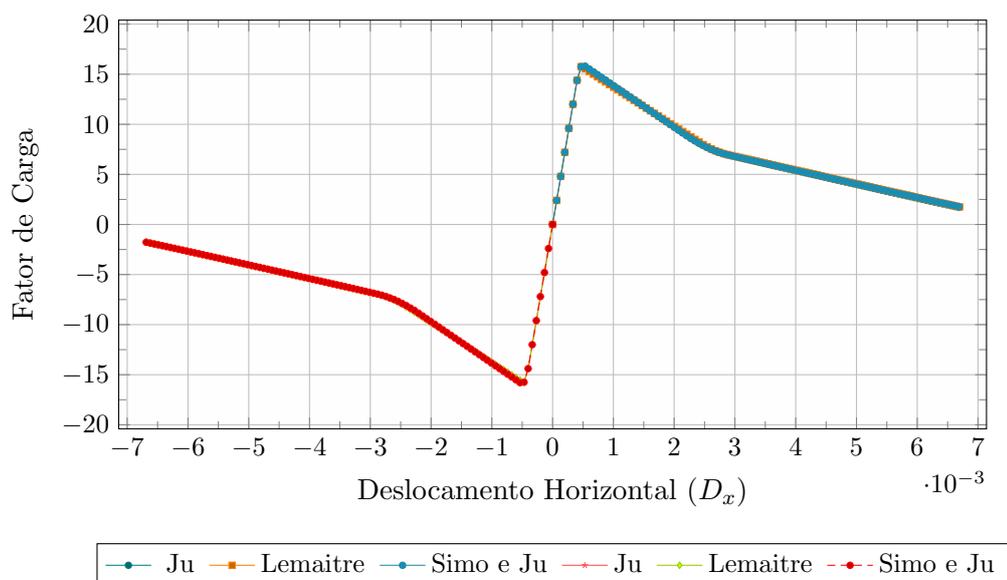


Figura 6.8: Resultados para as simulações de tração e compressão com uso das medidas de deformação equivalente propostas por Ju (1989), Simo e Ju (1987) e Lemaitre (1984) e função de dano bilinear.

A Figura 6.9 também ajuda a evidenciar a questão, mostrando as simulações que usam a medida de deformação equivalente proposta em de Vree et al. (1995), capaz de diferenciar os esforços de tração dos de compressão.

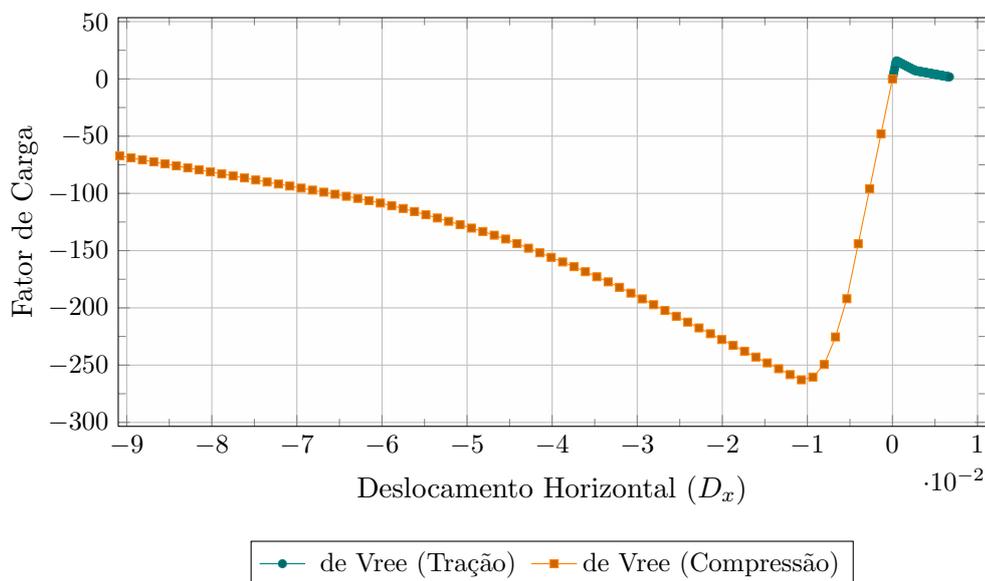


Figura 6.9: Resultados para as simulações de tração e compressão com uso das medidas de deformação segundo de Vree et al. (1995) e função de dano bilinear.

Todos esses resultados permitem escolher a medida de deformação equivalente proposta segundo de Vree et al. (1995) como a mais adequada para a representação do comportamento constitutivo do concreto.

Para finalizar a análise do processo de ajuste de parâmetros, observam-se os resultados para cisalhamento puro, mostrados na Figura 6.6. Nota-se novamente que, qualitativamente, os resultados são equivalentes. Entretanto, do ponto de vista quantitativo, os resultados obtidos com as deformações equivalentes de Ju (1989) (Figura 6.6a) e Simo e Ju (1987) (Figura 6.6b) são: (1) semelhantes entre si; (2) ligeiramente diferentes dos obtidos com a deformação equivalente de Lemaitre (1984) (Figura 6.6c), que apresentam limites de carga pouco superiores aos dos dois primeiros; e (3) bastante diferentes dos obtidos com a medida de deformação equivalente segundo de Vree et al. (1995) (Figura 6.6d), que apresentam limites de carga bastante superiores aos dos três primeiros.

Assim como observado para os casos de tração e compressão, verifica-se novamente que os valores de deformação associadas aos limites de carga são maiores para os modelos que usam função de dano polinomial, independentemente da medida de deformação equivalente. Estas questões são evidenciadas na Figura 6.7, cujos resultados são agrupados por tipo de função de evolução de dano.

6.2 Dependência de Malha

O fenômeno de localização de deformações numericamente induzidas é bastante comum em análise fisicamente não linear e sua ocorrência é altamente dependente do modelo constitutivo usado. Tal fenômeno pode surgir por diferentes motivos, sendo o refinamento da malha o motivo mais relatado na literatura.

Assim, para investigar o modelo constitutivo quanto à dependência da malha de elementos finitos, as simulações dos ensaios de tração, compressão e cisalhamento puros do item anterior, foram realizadas utilizando discretizações com 1, 4, 16, 64, 256 e 1024 elementos finitos, bem como as aproximações elástica, secante e tangente do tensor constitutivo.

Nas referidas simulações, empregaram-se a análise em Estado Plano de Deformação (EPD) e método de controle de deslocamentos, com tolerância em deslocamento de 1×10^{-4} , no qual se incrementou o deslocamento da face de aplicação de carga de 0,000052 *mm* para todas as medidas de deformação equivalente, exceto a medida proposta por de Vree et al. (1995), em que se adotou um valor de 0,0009 *mm*, para as simulações para compressão pura.

O material usado nas simulações foi o mesmo da seção 6.1. Contudo, adotou-se somente a função de dano exponencial, cujos parâmetros, para as quatro medidas de deformação equivalente são rerepresentados na Tabela 6.5.

Tabela 6.5: Parâmetros do material simulado em Leukart e Ramm (2006) para dano Exponencial e todas as medidas de deformação equivalente.

Medidas de Deformação Equivalente	α^{mic}	β^{mic}	κ_0^{mic}
Ju (1989)	0,960	2,740	0,0565
Simo e Ju (1987)	0,960	1,980	0,0800
Lemaitre (1984)	0,960	186,00	0,000815
de Vree et al. (1995)	0,960	300,00	0,0005

Os resultados para os casos de tração, compressão e cisalhamento, considerando a aproximação Elástica do tensor constitutivo incremental, são mostrados nas Figuras 6.10, 6.11 e 6.12, respectivamente.

Para o caso de tração, considerando a aproximação secante do tensor constitutivo, os resultados são apresentados na Figura 6.13.

Já na Figura 6.14, são mostrados os resultados para o caso de tração, para uma aproximação tangente do tensor constitutivo.

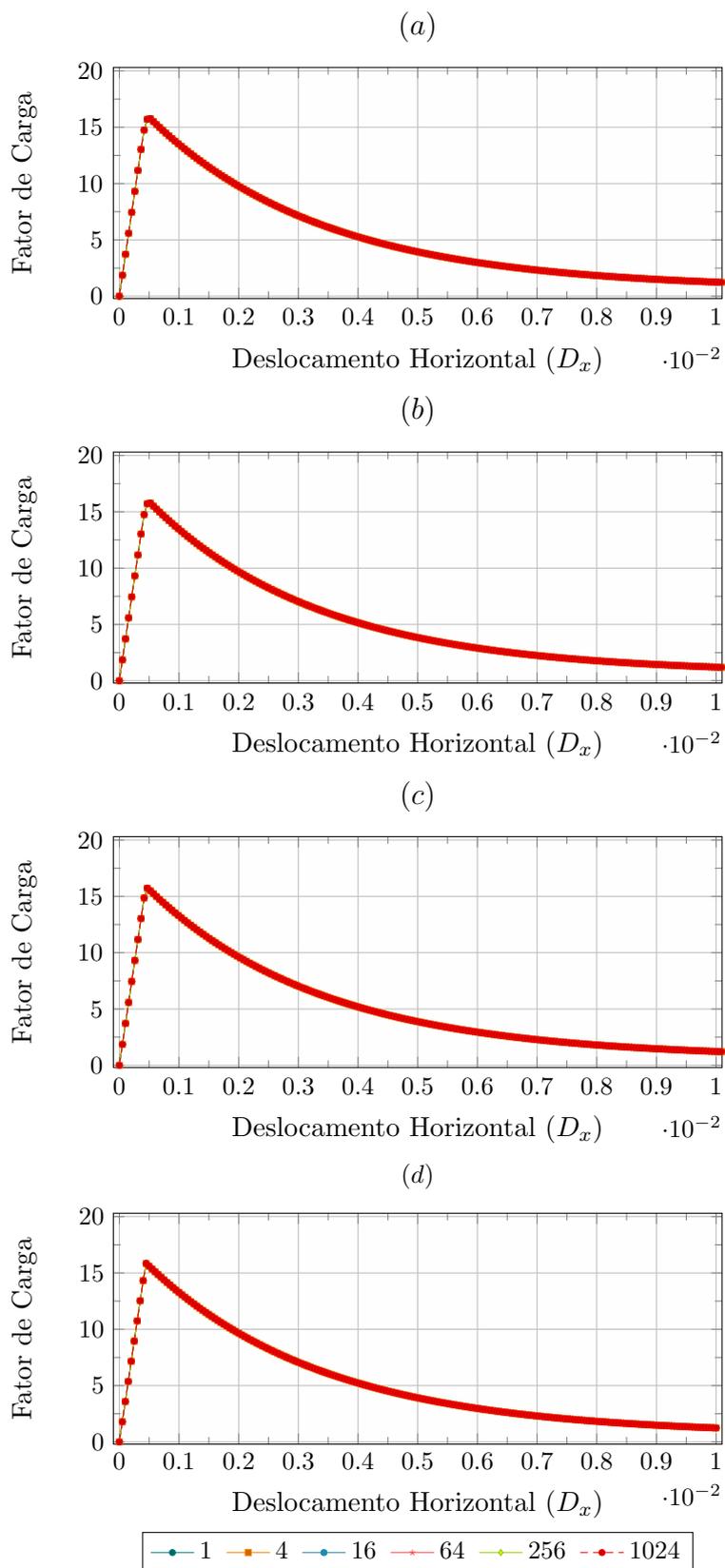


Figura 6.10: Resultados de tração pura com o refinamento da malha, para a aproximação elástica do tensor constitutivo e para as medidas segundo: (a) Ju (1989), (b) Simo e Ju (1987), (c) Lemaitre (1984) e de Vree et al. (1995).

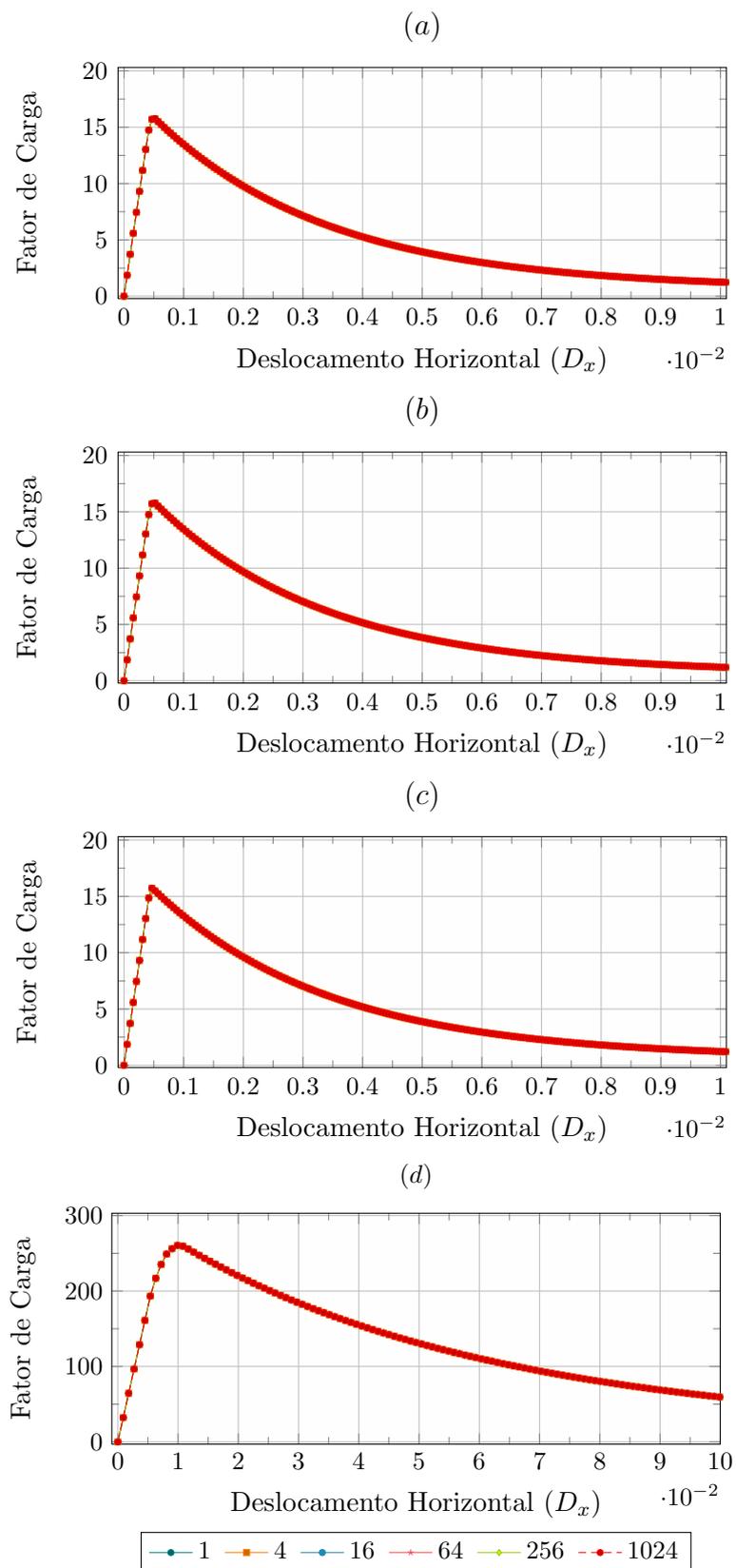


Figura 6.11: Resultados de compressão pura com o refinamento da malha, para a aproximação elástica do tensor constitutivo e medidas propostas por: (a) Ju (1989), (b) Simo e Ju (1987), (c) Lemaitre (1984) e de Vree et al. (1995).

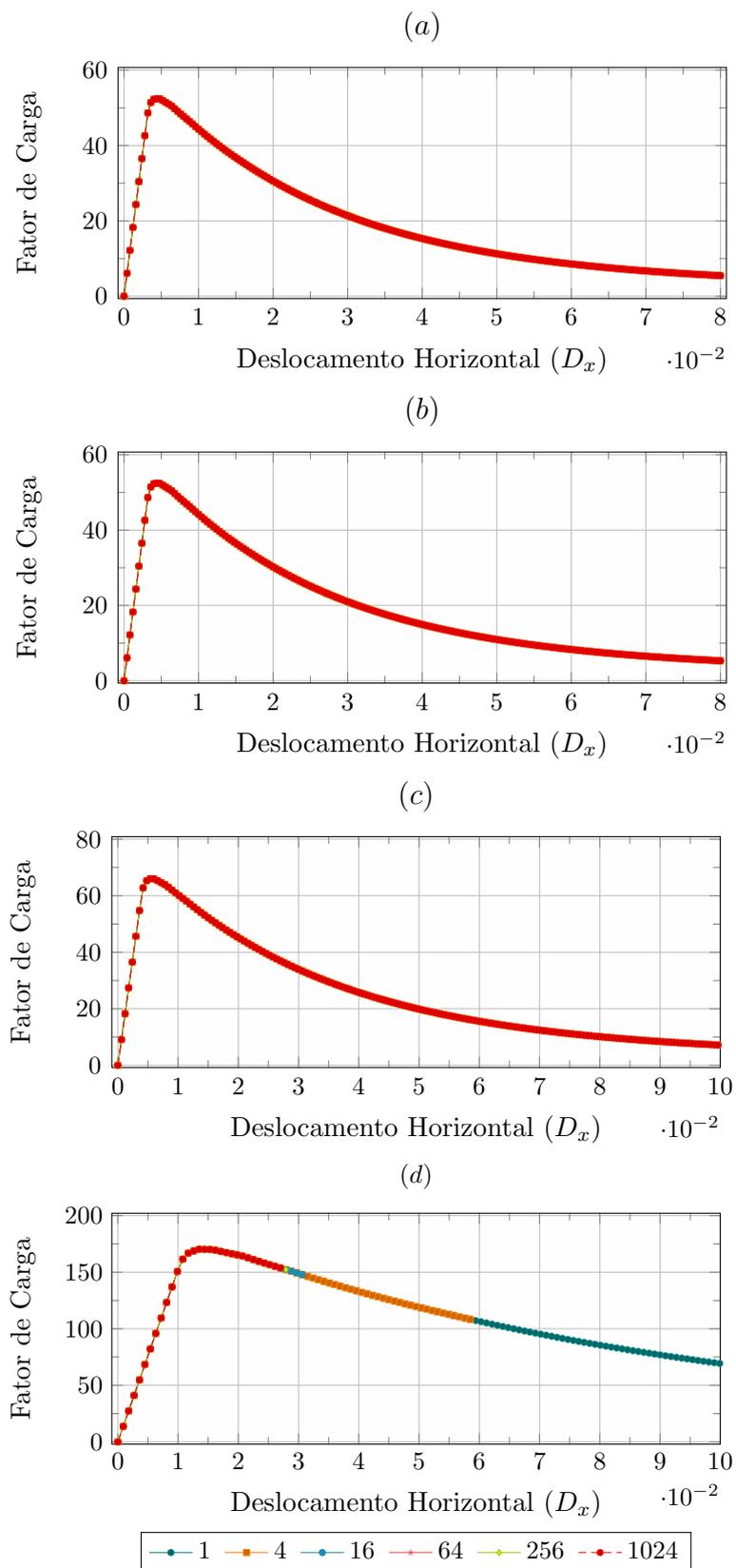


Figura 6.12: Resultados de cisalhamento puro com o refinamento da malha, para a aproximação elástica do tensor constitutivo e medidas segundo: (a) Ju (1989), (b) Simo e Ju (1987), (c) Lemaitre (1984) e de Vree et al. (1995).

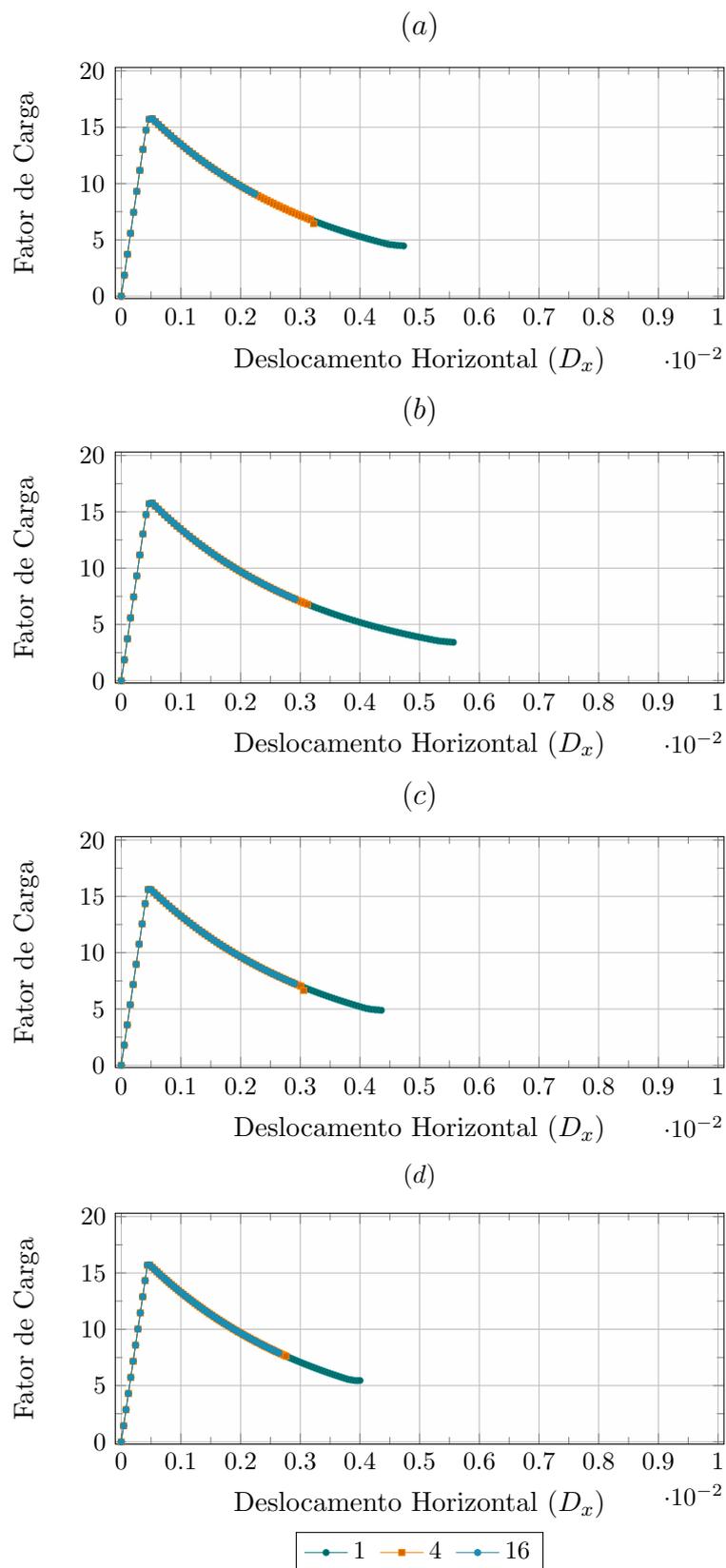


Figura 6.13: Resultados de tração pura para malhas de 1, 4 e 16 elementos finitos, para a aproximação secante do tensor constitutivo e medidas segundo: (a) Ju (1989), (b) Simo e Ju (1987), (c) Lemaitre (1984) e de Vree et al. (1995).

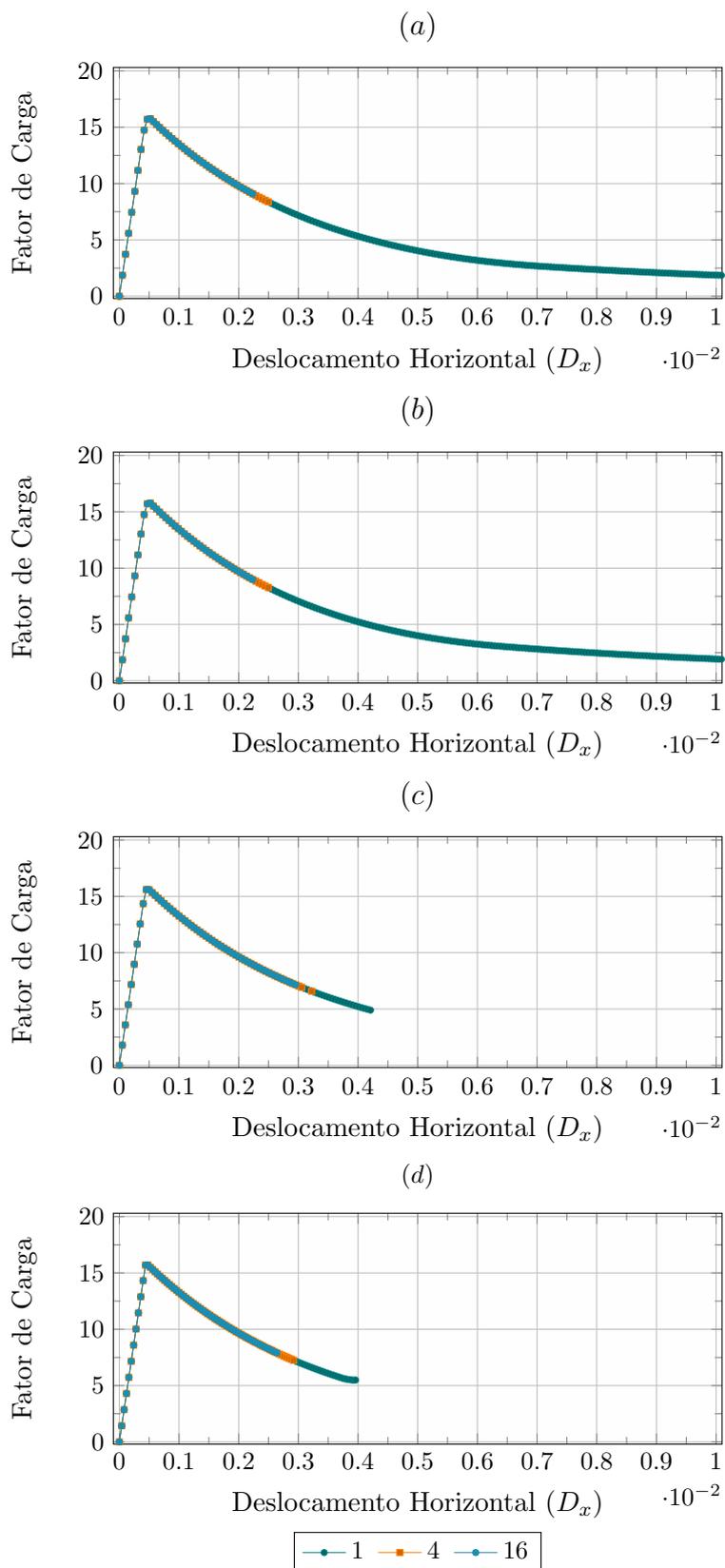


Figura 6.14: Resultados de tração pura para malhas de 1, 4 e 16 elementos finitos, para a aproximação tangente do tensor constitutivo e medidas de deformação de: (a) Ju (1989), (b) Simo e Ju (1987), (c) Lemaitre (1984) e de Vree et al. (1995).

Os resultados mostrados nas Figuras 6.10 e 6.11, correspondentes aos casos de tração e compressão, respectivamente, indicam ausência de dependência de malha, com o uso da aproximação elástica do tensor constitutivo, para todas as quatro medidas de deformação equivalente adotadas.

Já para o caso de cisalhamento, mostrado na Figura 6.12, mesmo com uma aproximação elástica, observam-se interrupções das trajetórias de equilíbrio para a medida de deformação segundo de Vree et al. (1995) (ver Figura 6.12d).

Os resultados das simulações para o ensaio de tração dominante com uma aproximação secante do tensor constitutivo, apresentados na Figura 6.13, mostram interrupções das trajetórias de equilíbrio, para todas as malhas de elementos finitos e para todas as medidas de deformação equivalente verificadas.

Já os resultados apresentados na Figura 6.14, correspondentes às simulações de tração dominante para uma aproximação tangente do tensor constitutivo, mostram interrupções das trajetórias de equilíbrio em função da malha adotada, para todas as medidas de deformação, com exceção da malha de um elemento finito para as medidas de deformação equivalente de Ju (1989) e Simo e Ju (1987), conforme detalhado nas Figuras 6.14a e 6.14b.

Em conjunto, todos esses resultados permitem concluir que o modelo constitutivo é dependente de malha, qualquer que seja a medida de deformação equivalente adotada. Ressalva-se, entretanto, que os resultados foram obtidos para estados de deformação puros, que são, portanto, muito sensíveis a pequenas variações numéricas, oriundas de algum ponto de integração ou, ainda, de qualquer ponto material, aqui entendido como um microplano.

Neste sentido, os resultados parecem indicar que a indução de localização de deformações é fortemente dependente da aproximação adotada para o tensor constitutivo incremental. A influência isolada deste aspecto, independentemente da malha, é analisada no item que se segue.

6.3 Aproximação do Tensor Constitutivo

Visando investigar, isoladamente, a influência das três formas de aproximação do tensor constitutivo na indução de localização de deformações, neste item são apresentadas as simulações de diferentes problemas, mantendo-se a malha fixa e alterando-se a forma da referida aproximação.

Em todas as simulações desta seção, adotou-se o mesmo material apresentado na seção 6.1, cujos parâmetros empregados para a função de evolução de dano exponencial são descritos na Tabela 6.5.

6.3.1 Tração Uniaxial Direta

Inicia-se retomando os resultados de tração pura, para a malha de um elemento finito, já descritos no item 6.2, agora agrupados para cada forma de aproximação do tensor constitutivo incremental, seja este elástico, secante ou tangente, conforme apresentado na Figura 6.15.

Os resultados indicam que as aproximações secante e tangente tendem a antecipar o surgimento de localização de deformações, independente da medida de deformação equivalente adotada. Contudo, ressalva-se, novamente, que esta simulação é muito sensível a pequenas variações numéricas no estado de deformação dos microplanos avaliados em cada ponto de integração.

Também é importante destacar que, neste caso, não se observam diferenças nas respostas, em função da aproximação adotada, a menos das interrupções ocasionadas pelo surgimento de localização de deformações.

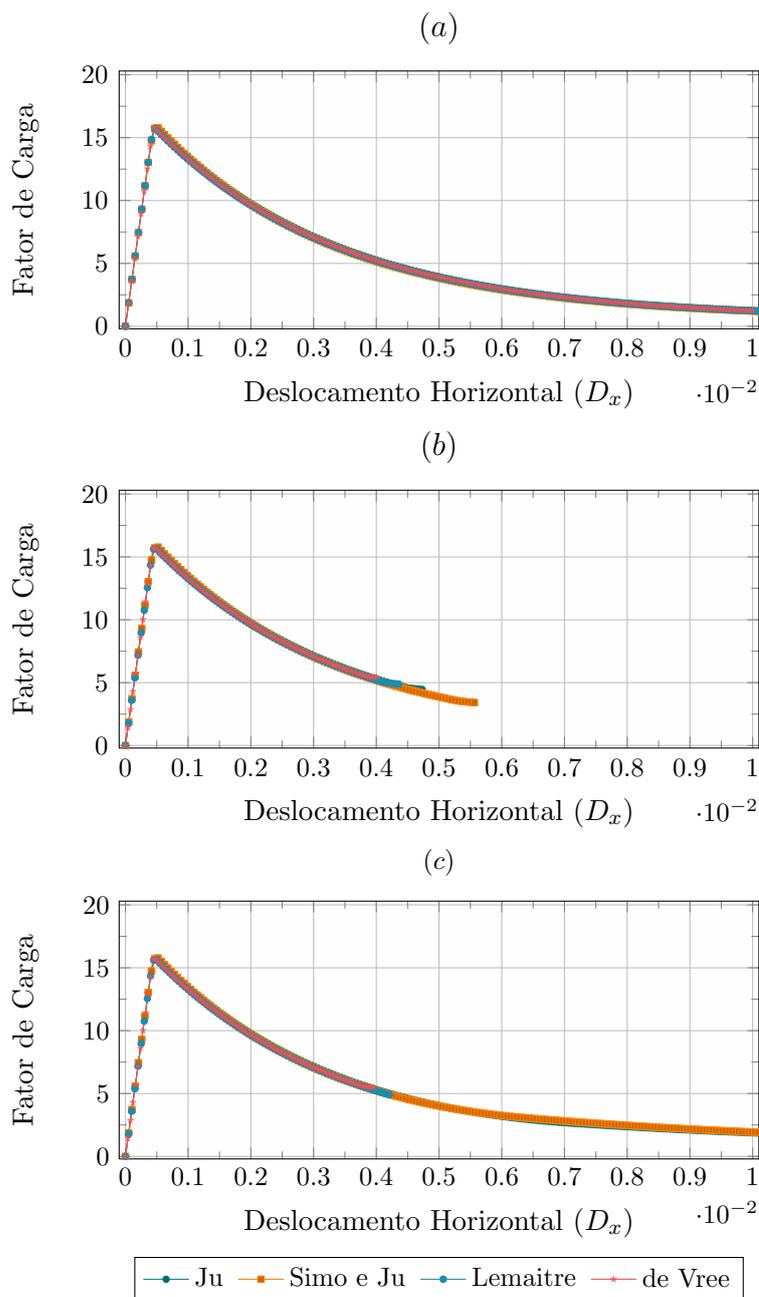


Figura 6.15: Resultados de tração pura para a malha de um elemento finito, com uso de distintas medidas de deformação e para o tensor constitutivo com aproximações: (a) elástica, (b) secante e (c) tangente.

6.3.2 Flexão em Três Pontos

Neste item, são simulados exemplos com o material da seção 6.1, cujos parâmetros são apresentados na Tabela 6.5, objetivando ilustrar o comportamento de uma viga submetida à flexão em três pontos, para as distintas medidas de deformação

equivalente e para as três formas de aproximação do tensor constitutivo.

Na Figura 6.16 são apresentadas a geometria da viga e a malha de elementos finitos, quadrilaterais de quatro nós, adotada. A carga de referência $P = 800\text{ N}$ foi igualmente dividida entre dois nós em destaque na figura.

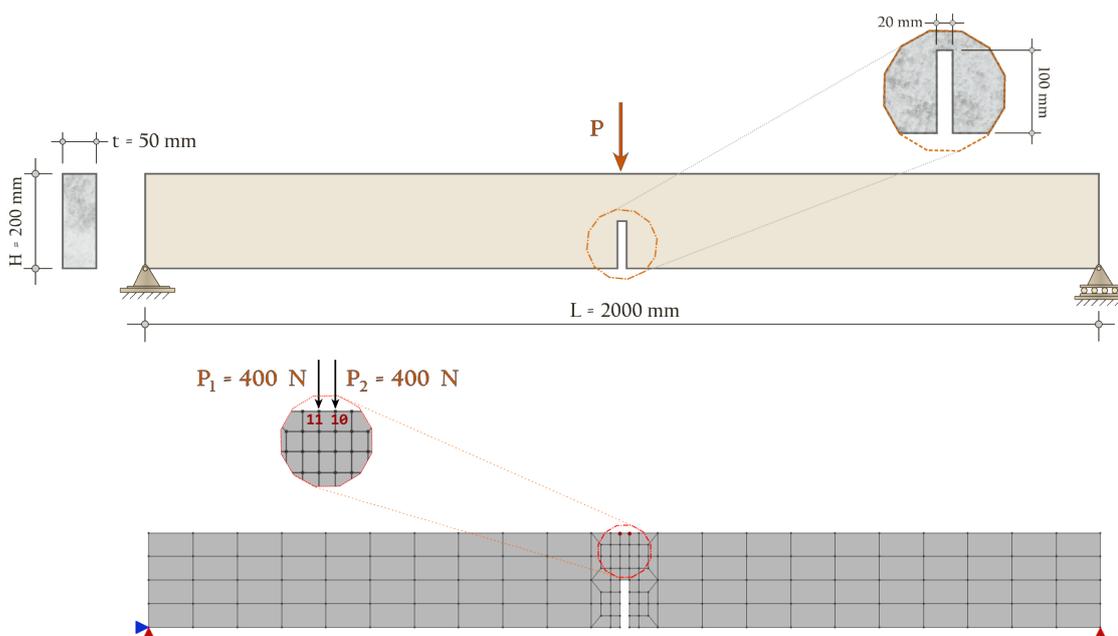


Figura 6.16: Viga submetida à flexão em três pontos: geometria e malha de elementos finitos adotadas nas simulações.

Para a análise não linear, utilizou-se as condições para EPT, método de controle de deslocamento generalizado, com incremento inicial do fator de carga de 0,02 e tolerância para convergência em deslocamento igual a 1×10^{-4} .

Os parâmetros para as medidas de deformação de Ju (1989), Lemaitre (1984), Simo e Ju (1987) e de Vree et al. (1995) são os descritos na Tabela 6.5.

A Figura 6.17 mostra as trajetórias de equilíbrio, correspondentes ao deslocamento vertical do ponto de aplicação de carga, avaliadas para as três formas de aproximação do tensor constitutivo incremental.

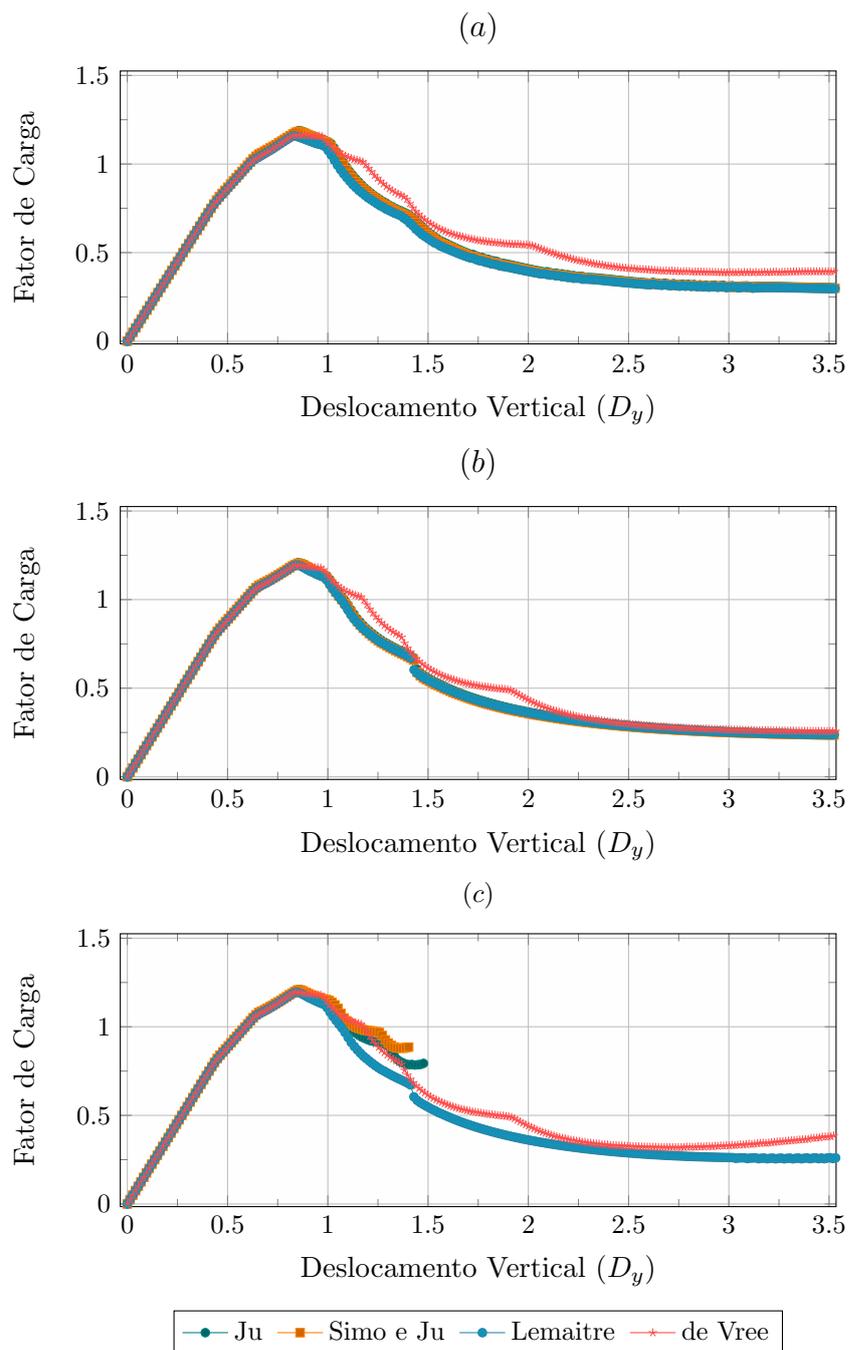


Figura 6.17: Resultados das simulações de flexão em três pontos, para as distintas medidas de deformação e para as aproximações do tensor constitutivo: (a) elástica, (b) secante e (c) tangente.

Nota-se, para todas as medidas de deformação equivalente, ocorrências de instabilidades numéricas, provavelmente ocasionadas por localização de deformações numericamente induzida. As trajetórias mais estáveis foram obtidas para uma aproximação elástica do tensor constitutivo, resultando, contudo, em uma resposta mais

rígida no trecho descendente.

Observa-se que o uso das medidas de deformação segundo Ju (1989) e Simo e Ju (1987), juntamente com a aproximação tangente do tensor constitutivo, foi incapaz de descrever o regime pós-crítico da viga. Isto pode ser atribuído à incapacidade destas medidas de distinguir os estados de solitação em tração e compressão, no trecho acima da ponta da fissura e abaixo do ponto de aplicação de carga.

6.3.3 Flexão em Quatro Pontos

Com o intuito de ilustrar o comportamento de uma viga submetida à flexão em quatro pontos, são simulados, nesta seção, exemplos para as distintas medidas de deformação e para as três aproximações do tensor constitutivo.

Na Figura 6.18 são ilustradas a geometria da viga e a malha de elementos finitos, quadrilaterais de quatro nós, usada. Adotou-se uma carga de referência $P = 40000\text{ N}$, uma análise em EPT, método de controle de deslocamento generalizado, com fator de carga de 0,02 e uma tolerância em deslocamento de 1×10^{-4} .

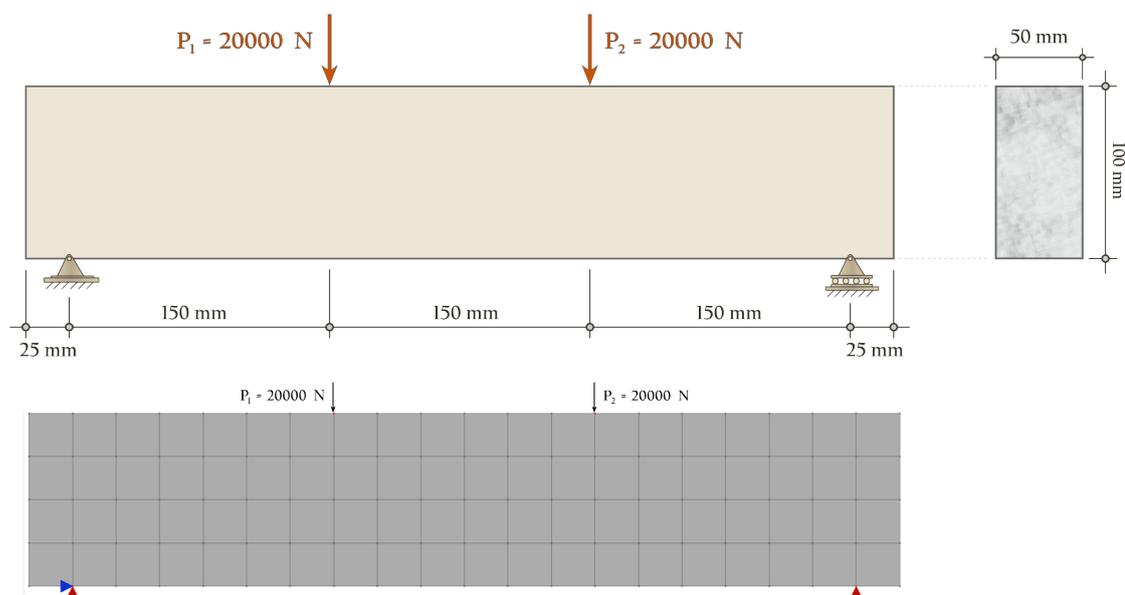


Figura 6.18: Viga submetida à flexão em quatro pontos: geometria e malha de elementos finitos adotadas nas simulações.

Os parâmetros empregados para as medidas de deformação equivalente propostas

por Ju (1989), Lemaitre (1984), Simo e Ju (1987) e de Vree et al. (1995) são os mesmos apresentados na Tabela 6.5.

A Figura 6.19 mostra as trajetórias de equilíbrio correspondentes ao deslocamento vertical do nó central na face superior da viga, para as três aproximações do tensor constitutivo, e para as quatro medidas de deformação equivalente.

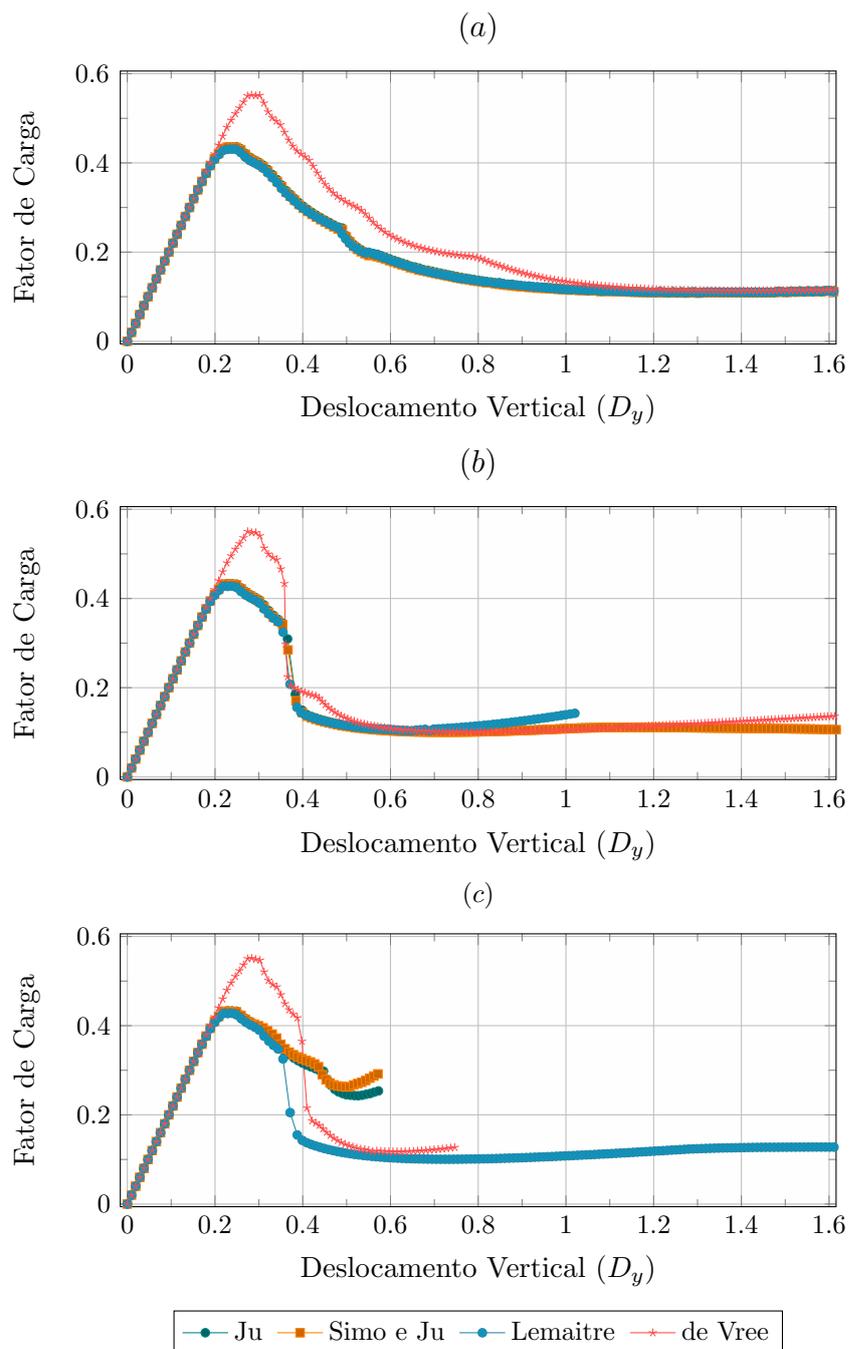


Figura 6.19: Resultados das simulações da flexão em quatro pontos para as aproximações do tensor constitutivo: (a) elástica, (b) secante e (c) tangente.

Verifica-se, principalmente para as aproximações secante e tangente do tensor constitutivo, que a trajetória de equilíbrio é interrompida no trecho descendente, devido à ocorrência de instabilidade numérica. Destaca-se, novamente, a incapacidade de descrever o regime pós-crítico da viga com uso das medidas de deformação equivalente propostas por Ju (1989) e Simo e Ju (1987), juntamente com as aproximações secante e tangente do tensor constitutivo.

A Figura 6.20 mostra a isofaixa de valores de deformações cisalhantes (ϵ_{xy}), correspondentes ao fim da análise, obtida a partir da aproximação elástica do tensor constitutivo, com uso da medida de deformação segundo de Vree et al. (1995).

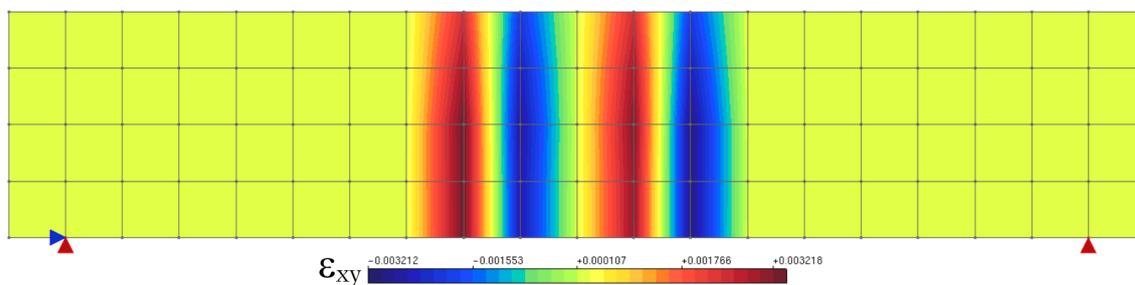


Figura 6.20: Variação das deformações cisalhantes obtida com a medida de deformação equivalente segundo de Vree et al. (1995) e aproximação elástica do tensor constitutivo.

Esta figura evidencia as regiões com mudança brusca de deformações de cisalhamento, localizadas entre as cargas aplicadas ao centro da viga. Os modelos com aproximações secante e tangente podem ter sido incapazes de descrever esta região, causando as instabilidades numéricas observadas.

6.4 Comparações com Resultados Numéricos e Experimentais

Nesta seção são apresentadas simulações, cujos resultados são comparados com resultados numéricos e experimentais disponíveis na literatura.

6.4.1 Chapa com Furo Submetida à Tração

Uma chapa com furo tracionada é simulada para as medidas de deformação equivalente propostas por Simo e Ju (1987) e de Vree et al. (1995). Na Figura 6.21 são ilustradas a geometria da chapa e a malha de elementos finitos quadrilaterais de quatro nós (com 2 x 2 pontos de Gauss) adotada. A chapa é carregada verticalmente e apenas um quarto da mesma é discretizada, dada sua simetria.

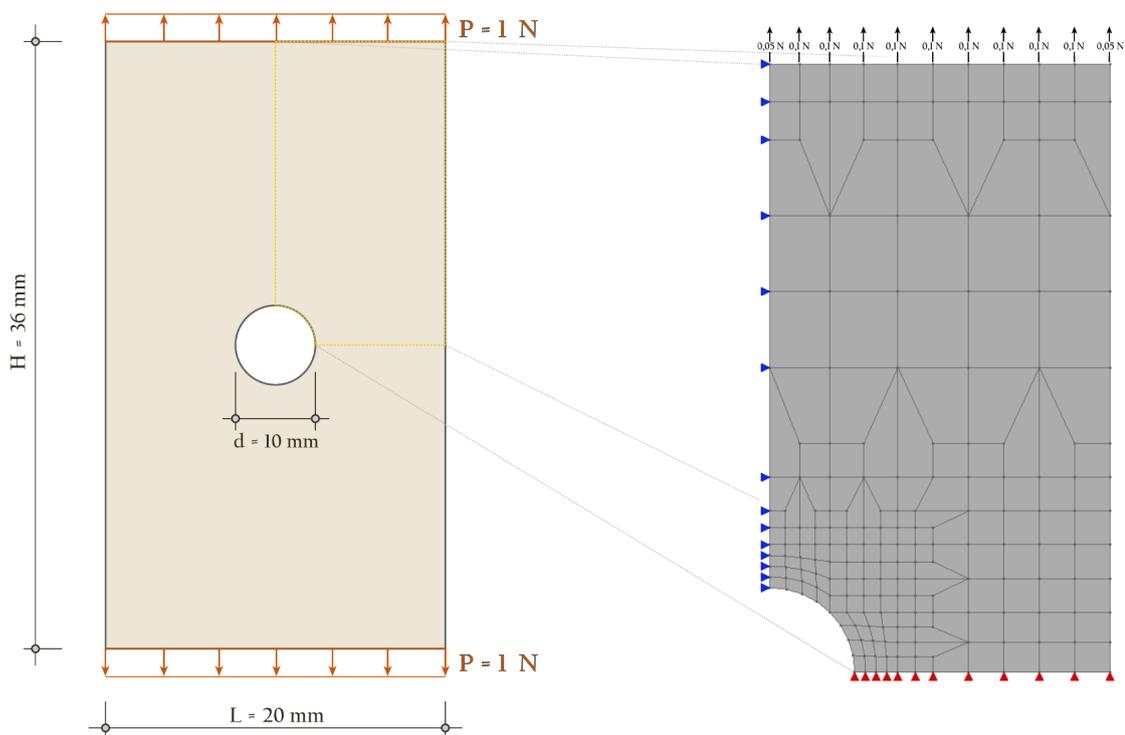


Figura 6.21: Chapa com furo submetida à tração: geometria e malha de elementos finitos utilizadas nas simulações numéricas.

Leukart e Ramm (2003) realizaram a mesma simulação numérica, adotando um Modelo de Microplanos que também emprega as componentes de deformação volumétrica e desviadora nos microplanos (decomposição V-D). Contudo, os autores utilizaram duas leis de dano independentes, sendo uma para a parcela volumétrica e outra para a desviadora, e adotaram duas medidas de deformação equivalente.

A parametrização do material empregado por Leukart e Ramm (2003) levou aos parâmetros descritos na Tabela 6.6 para uma função de dano exponencial e diferentes medidas de deformação equivalente.

Tabela 6.6: Parâmetros para simulação da chapa com furo proposta por Leukart e Ramm (2003) para diferentes medidas de deformação e função de dano exponencial.

Dados do material simulado			
Módulo de Elasticidade	$E = 30000,00 \text{ MPa}$		
Coefficiente de Poisson	$\nu = 0,20$		
Função de evolução de dano exponencial			
Medidas de deformação	α^{mic}	β^{mic}	κ_0^{mic}
Ju (1989)	0,850	13,50	0,000445
Simo e Ju (1987)	0,850	10,00	0,00063
Lemaitre (1984)	0,850	920,00	0,00000715
de Vree et al. (1995)	0,850	1220,00	0,000005

A análise não linear foi processada para as condições de Estado Plano de Tensão (EPT), método de controle de deslocamentos generalizado, com carga de referência $P = 1 \text{ N}$, tolerância para convergência em deslocamento igual a 1×10^{-4} , com incrementos de $0,08 \text{ mm}$.

A Figura 6.22 mostra as trajetórias de equilíbrio correspondentes ao deslocamento vertical da face de aplicação da carga para distintas medidas de deformação equivalente, função de evolução de dano exponencial e para as aproximações do tensor constitutivo, elástica, secante e tangente, comparado-as com o resultado numérico obtido segundo Leukart e Ramm (2003).

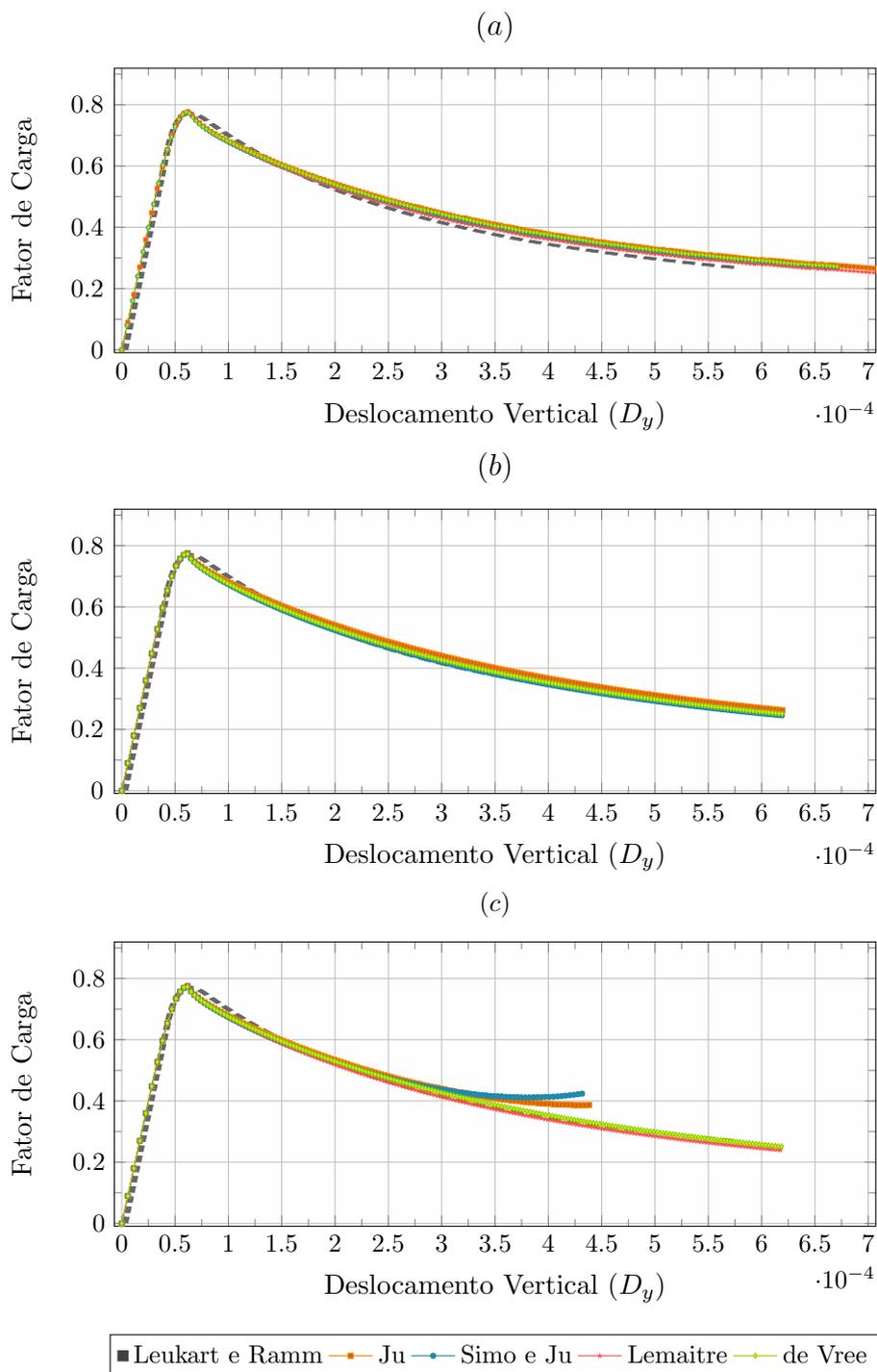


Figura 6.22: Resultados para a chapa com furo proposta por Leukart e Ramm (2003), simuladas para distintas medidas de deformação, dano exponencial e aproximações: (a) elástica, (b) secante e (c) tangente para o tensor constitutivo.

Os resultados para todas as medidas de deformação e aproximação elástica do tensor constitutivo demonstraram uma subestimativa da ductibilidade estrutural

(avaliada pela área sob o ramo descendente da trajetória), em comparação com as aproximações secante e tangente do tensor constitutivo.

Destaca-se também que as aproximações elástica e secante são mais custosas, do ponto de vista computacional, dado o maior número de iterações necessárias para convergência em cada passo.

Verifica-se ainda, para todas as medidas de deformação equivalente, que as trajetórias de equilíbrio foram completamente descritas, sem ocorrência antecipada de localização de deformações. Isto pode ser explicado pela presença predominante de esforços de tração, que confere maior estabilidade ao sistema. A exceção observada, ocorreu para as medidas de deformação segundo Ju (1989) e Simo e Ju (1987), mediante o uso da aproximação tangente para o tensor constitutivo, cuja trajetória de equilíbrio foi interrompida no decorrer do trecho inelástico.

A Figura 6.23 ilustra a isofaixa de valores para dano ocorrido ao longo da trajetória de equilíbrio para a medida de deformação segundo de Vree et al. (1995), com uso da função de dano exponencial. Os resultados apresentam certa concordância com o resultado numérico obtido no trabalho de Leukart (2005).

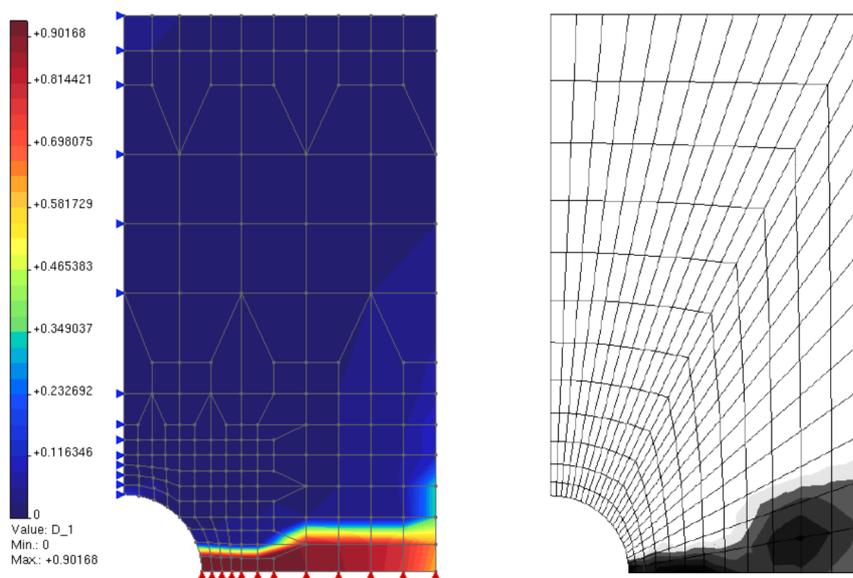


Figura 6.23: Variação do dano para uma função exponencial e medida de deformação definida por de Vree et al. (1995), à direita, comparada ao resultado extraído do trabalho de Leukart (2005), à esquerda.

A comparação entre as trajetórias de equilíbrio aqui simuladas e o resultado numérico obtido por Leukart e Ramm (2003) também demonstra excelente concordância, o que era esperado, pois ambas as simulações adotam um Modelo de Microplanos com deformação equivalente formulado sob a hipótese de decomposição V-D. Contudo, para o modelo empregado por Leukart e Ramm (2003), tem-se o uso de duas variáveis de dano independentes para cada parcela de deformação, enquanto que o modelo aqui implementado adota uma única variável de dano para a representação da degradação do material.

6.4.2 Painel em L

Winkler et al. (2004) realizaram ensaios experimentais em painéis de concreto em forma de *L*, como ilustra a Figura 6.24(a), e simulações numéricas com um modelo constitutivo de fissuração distribuída. Neste trabalho, modelou-se este painel com a utilização de elementos finitos quadrilaterais de quatro nós (com 2×2 pontos de Gauss), conforme ilustra a Figura 6.24(b).

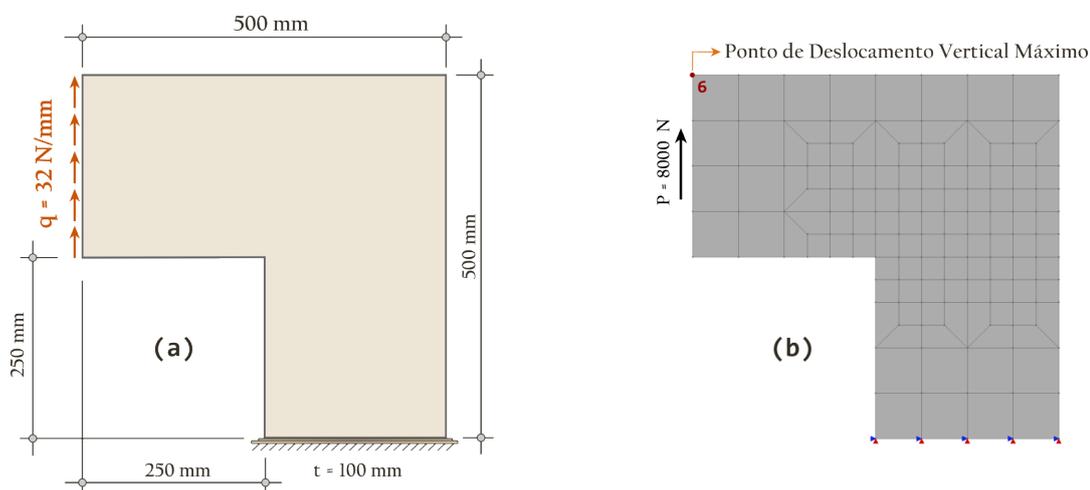


Figura 6.24: Painel em *L*: (a) geometria; (b) malha empregada nas simulações.

Na Tabela 6.7 têm-se os parâmetros adotados para uma análise sob as condições de EPT, com uso do método de controle de deslocamentos generalizado, incremento inicial do fator de carga de 0,025 e uma tolerância para convergência em

deslocamento igual a 1×10^{-4} , além de uma aproximação tangente para o tensor constitutivo.

Tabela 6.7: Parâmetros do material ensaiado por Winkler et al. (2004).

Módulo de Elasticidade	$E = 28850 \text{ MPa}$
Coefficiente de Poisson	$\nu = 0,18$
Resistência à Tração	$\sigma_t \approx 2,7 - 3,3 \text{ MPa}$

Para esta simulação, empregaram-se diferentes medidas de deformação equivalente, combinadas com as funções de dano exponencial e polinomial, cujos parâmetros são mostrados na Tabela 6.8, obtidos a partir da equivalência das curvas para um ensaio de tração direta, de maneira análoga à descrita no Apêndice B.

Tabela 6.8: Parâmetros para simulação do painel de Winkler et al. (2004) para diferentes medidas de deformação e distintas funções de dano.

Função de evolução de dano exponencial			
Medidas de deformação equivalente	α^{mic}	β^{mic}	κ_0^{mic}
Lemaitre (1984)	0,960	335,00	0,000213
de Vree et al. (1995)	0,960	500,00	0,000142
Função de evolução de dano polinomial			
Medidas de deformação equivalente	f_e^{mic}	E	κ_0^{mic}
Lemaitre (1984)	5,462	25850,00	0,000450
de Vree et al. (1995)	3,650	25850,00	0,000300

As trajetórias de equilíbrio, do ponto de deslocamento vertical máximo indicado na Figura 6.24b, são mostradas na Figura 6.25, para a função exponencial e para as medidas de deformação de Lemaitre (1984) e de Vree et al. (1995). Os resultados são comparados com os obtidos experimentalmente por Winkler et al. (2004).

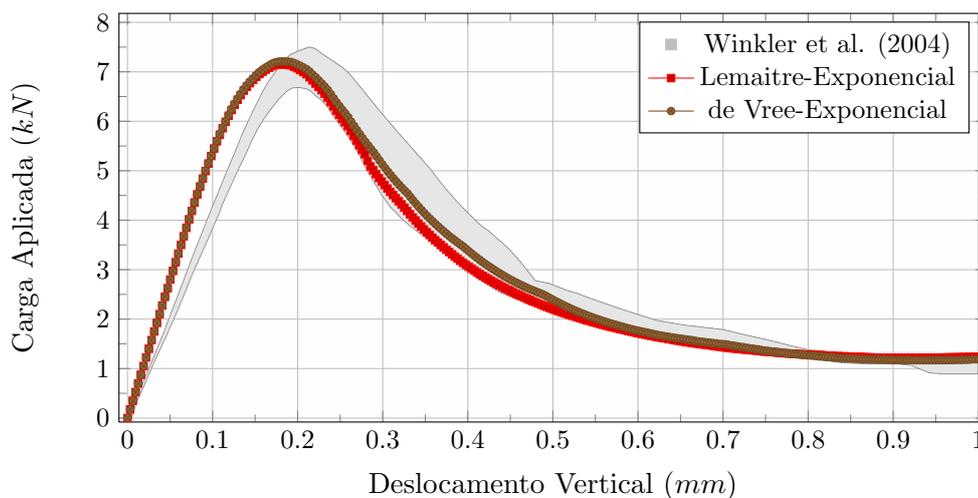


Figura 6.25: Resultados do painel em L para as medidas de Lemaitre (1984) e de Vree et al. (1995) com uso da função de dano exponencial.

Já na Figura 6.26 são mostradas as trajetórias para a função de evolução de dano polinomial. Os resultados também são comparados com os obtidos experimentalmente por Winkler et al. (2004).

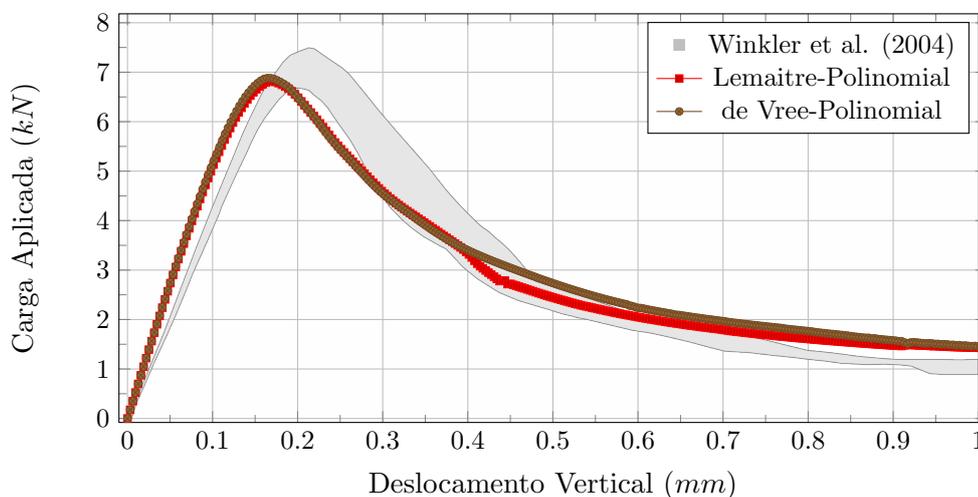


Figura 6.26: Resultados para o painel em L para as medidas de Lemaitre (1984) e de Vree et al. (1995) com uso da função de dano polinomial.

Por fim, as Figuras 6.27 e 6.28 ilustram as isofaixas de valores para dano ocorrido ao longo da trajetória de equilíbrio para as medidas de deformação equivalente de Lemaitre (1984) e de Vree et al. (1995), respectivamente, com uso da função de dano exponencial. Os resultados apresentam excelente concordância com os resultados

experimentais, principalmente no regime pós-crítico. Destaca-se a melhor adequação da função exponencial e da medida proposta por de Vree et al. (1995).

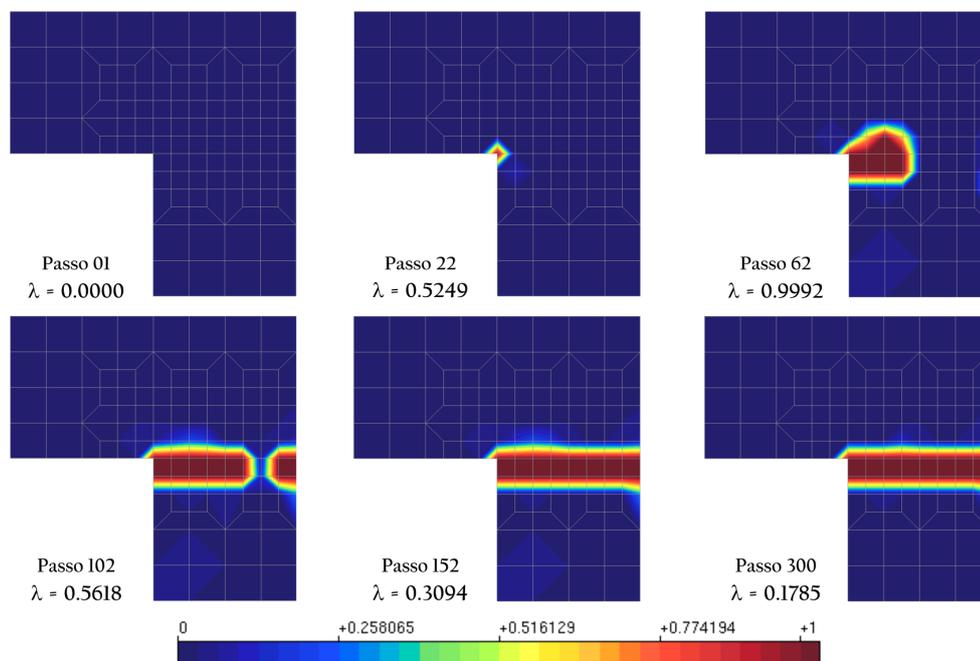


Figura 6.27: Variação do dano para uma função exponencial e medida de deformação definida por Lemaitre (1984).

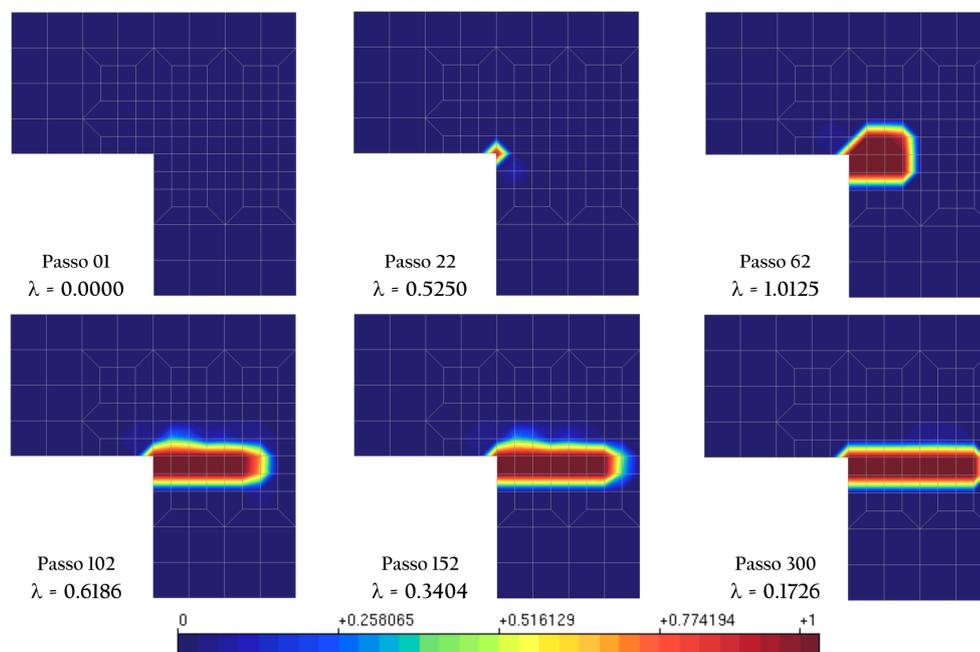


Figura 6.28: Variação do dano para uma função exponencial e medida de deformação segundo de Vree et al. (1995).

Tais figuras evidenciam ainda, que a propagação do dano por tração, para ambas as medidas de deformação equivalente, representa o comportamento esperado, pois a degradação se inicia de forma concentrada no centro do painel e se propaga horizontalmente ao longo da peça.

Ressalva-se o fato da medida definida por Lemaitre (1984) não diferenciar o comportamento do material em tração e compressão, o que justifica a ocorrência de dano por esmagamento no sentido oposto ao início da propagação da fissura.

O comportamento verificado para a medida definida por de Vree et al. (1995) é congruente ao observado por Winkler et al. (2004), para os casos experimental e numérico, conforme ilustra a Figura 6.29.

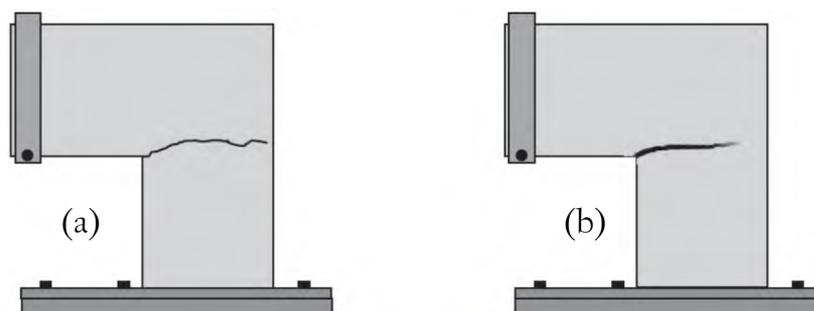


Figura 6.29: Padrão de dano observado por Winkler et al. (2004): (a) experimental; (b) numérico.

6.4.3 Flexão em Três Pontos

Petersson (1981) estudou experimentalmente uma viga de concreto submetida à flexão em três pontos. Os dados geométricos e a malha de 124 elementos quadriláteros de quatro nós (com 2 x 2 pontos de Gauss) usados nas simulações desta viga são mostrados na Figura 6.30.

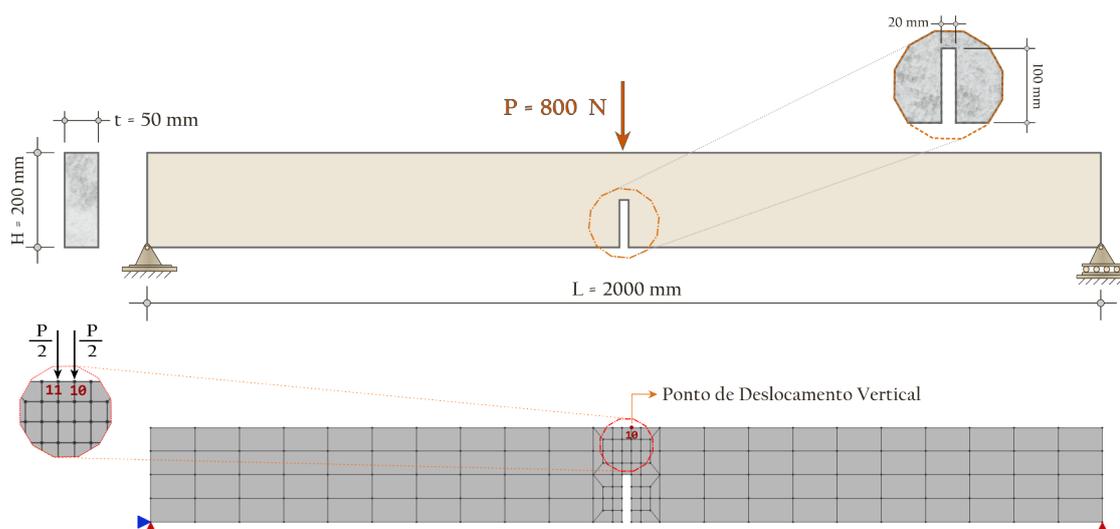


Figura 6.30: Flexão em três pontos: geometria e malha usadas nas simulações.

Os parâmetros do material obtidos por Petersson (1981) e usados nas simulações para uma viga submetida à flexão em três pontos são dados na Tabela 6.9.

Tabela 6.9: Parâmetros do material utilizado por Petersson (1981) em ensaios experimentais para uma viga submetida à flexão em três pontos.

Módulo de Elasticidade	$E = 30000 \text{ MPa}$
Coefficiente de Poisson	$\nu = 0,20$
Resistência à Tração	$\sigma_t \approx 3,3 - 4,3 \text{ MPa}$
Energia de Fratura	$G_f \approx 0,115 - 0,137 \text{ N/mm}$

A partir dos dados experimentais da Tabela 6.9, obteve-se os parâmetros numéricos para as funções de dano Exponencial, Polinomial, Linear e Bilinear, descritos na Tabela 6.10 e agrupados de acordo com as medidas de deformação equivalente propostas por Ju (1989), Simo e Ju (1987), Lemaitre (1984) e de Vree et al. (1995).

Em posse destes parâmetros, adotou-se para a análise não linear o método de controle de deslocamentos generalizado, com fator de carga igual a 0,02, uma tolerância para convergência em deslocamento de 1×10^{-4} , carga de referência igual a $P = 800 \text{ N}$ e uma análise em EPT. Os resultados numéricos foram obtidos para um deslocamento vertical do nó 10 e são agrupados conforme as aproximações elástica, secante ou tangente para o tensor constitutivo.

Tabela 6.10: Parâmetros para simulação da viga de Petersson (1981) com uso de distintas medidas de deformação e dano exponencial, polinomial, linear e bilinear.

Função de dano Exponencial						
Deformação Equivalente	α^{mic}	β^{mic}	κ_0^{mic}			
Simo e Ju (1987)	0,960	3,90	0,0255			
Ju (1989)	0,960	5,60	0,01800			
Lemaitre (1984)	0,960	340,00	0,000285			
de Vree et al. (1995)	0,960	500,00	0,000200			
Função de dano Polinomial						
Deformação Equivalente	f_e^{mic}	E	κ_0^{mic}			
Simo e Ju (1987)	760,000	30000,00	0,0520			
Ju (1989)	535,000	30000,00	0,0360			
Lemaitre (1984)	8,550	30000,00	0,000580			
de Vree et al. (1995)	5,950	30000,00	0,000385			
Função de dano Linear						
Deformação Equivalente	κ_u^{mic}	κ_0^{mic}				
Simo e Ju (1987)	0,575	0,0240				
Ju (1989)	0,410	0,0170				
Lemaitre (1984)	0,00650	0,000270				
de Vree et al. (1995)	0,00460	0,000190				
Função de dano Bilinear						
Deformação Equivalente	f_u^{mic}	f_{cr}^{mic}	f_0^{mic}	κ_u^{mic}	κ_{cr}^{mic}	κ_0^{mic}
Simo e Ju (1987)	0,0	2,25	4,0	0,6800	0,200	0,0250
Ju (1989)	0,0	2,25	4,0	0,4750	0,135	0,0175
Lemaitre (1984)	0,0	2,25	4,0	0,0080	0,00215	0,000280
de Vree et al. (1995)	0,0	2,25	4,0	0,0055	0,00155	0,000195

Os resultados da Figura 6.31 são agrupados conforme a aproximação do tensor constitutivo, seja esta elástica, secante ou tangente, para uma função de dano exponencial, em conjunto com os resultados experimentais de Petersson (1981).

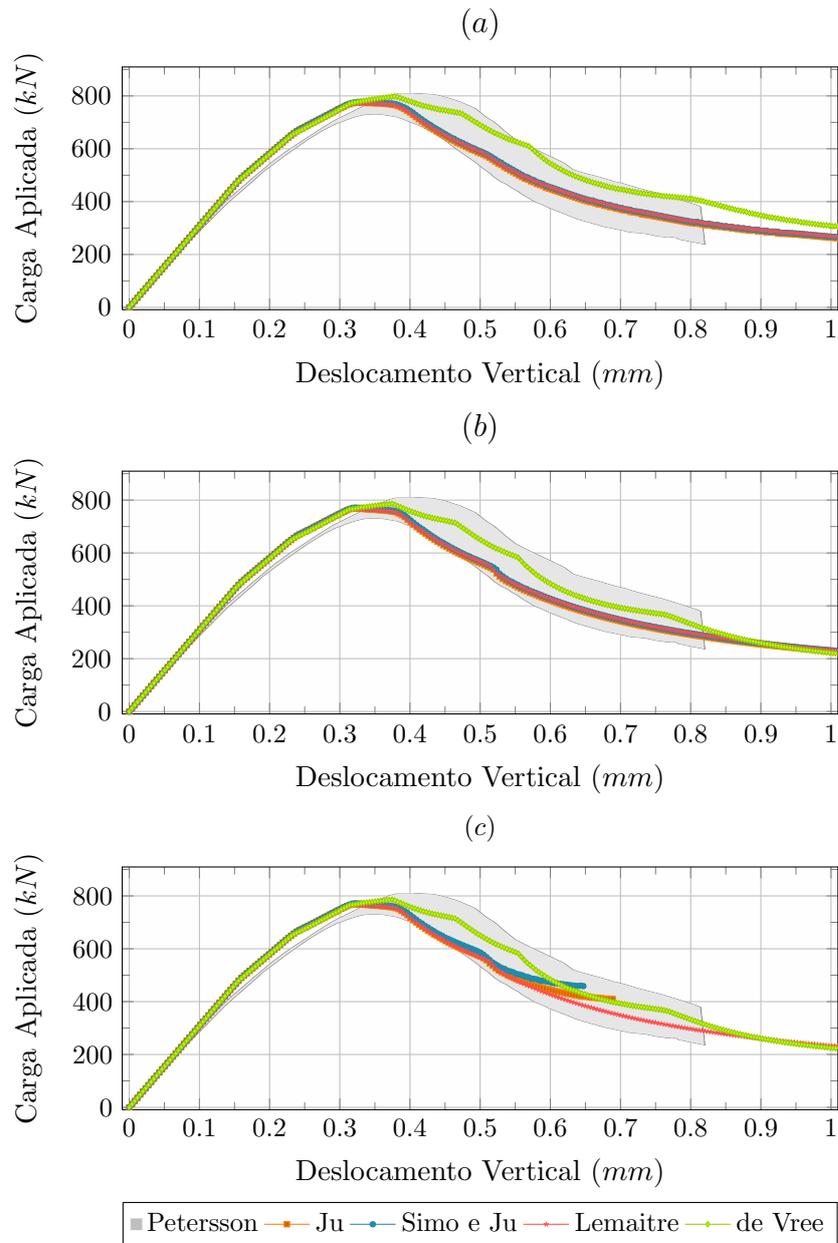


Figura 6.31: Simulações para a viga de Petersson (1981) para uma função de dano exponencial, diferentes medidas de deformação equivalente e para as aproximações do tensor constitutivo: (a) elástica, (b) secante e (c) tangente.

Os resultados mostrados na Figura 6.31 revelam boa concordância com aqueles obtidos experimentalmente por Petersson (1981), tanto na estimativa da carga máxima quanto na obtenção da rigidez no regime inelástico, sendo os melhores resultados apresentados para as medidas de deformação segundo Lemaitre (1984) e de Vree et al. (1995), que apresentaram, para as três formas de aproximação do

tensor constitutivo, uma melhor estabilidade ao longo da trajetória de equilíbrio.

Já na Figura 6.32 são agrupados os resultados para um dano polinomial, em conjunto com os resultados de Petersson (1981).

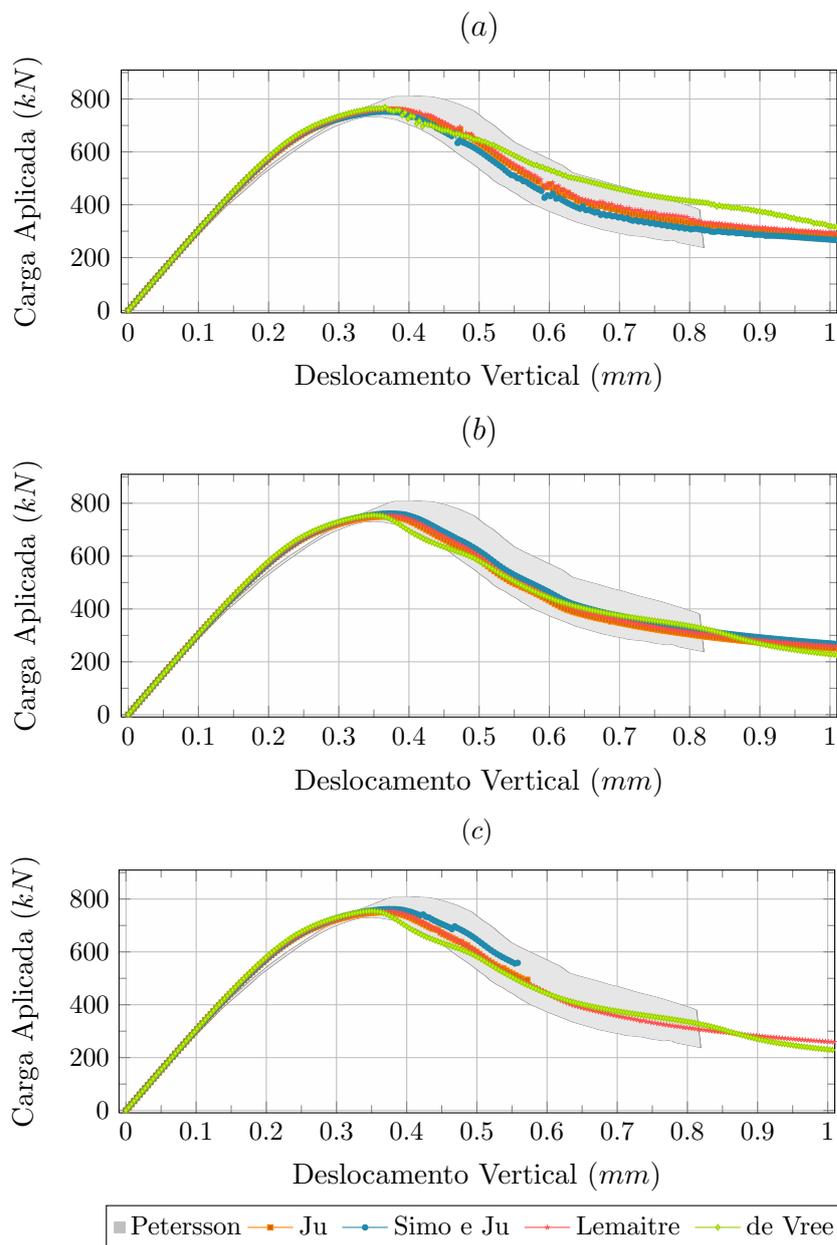


Figura 6.32: Simulações para a viga de Petersson (1981) para uma função de dano polinomial, diferentes medidas de deformação equivalente e para as aproximações do tensor constitutivo: (a) elástica, (b) secante e (c) tangente.

A análise dos resultados descritos na Figura 6.32 revelam boa concordância com aqueles obtidos experimentalmente por Petersson (1981), tanto na estimativa da

carga máxima quanto na obtenção da rigidez no regime inelástico. Os resultados obtidos para as medidas de deformação de Lemaitre (1984) e de Vree et al. (1995) apresentaram, para as três formas de aproximação do tensor constitutivo, uma melhor estabilidade numérica ao longo de toda a trajetória de equilíbrio.

Os resultados da Figura 6.33 são agrupados conforme a aproximação do tensor constitutivo e uma função de dano linear.

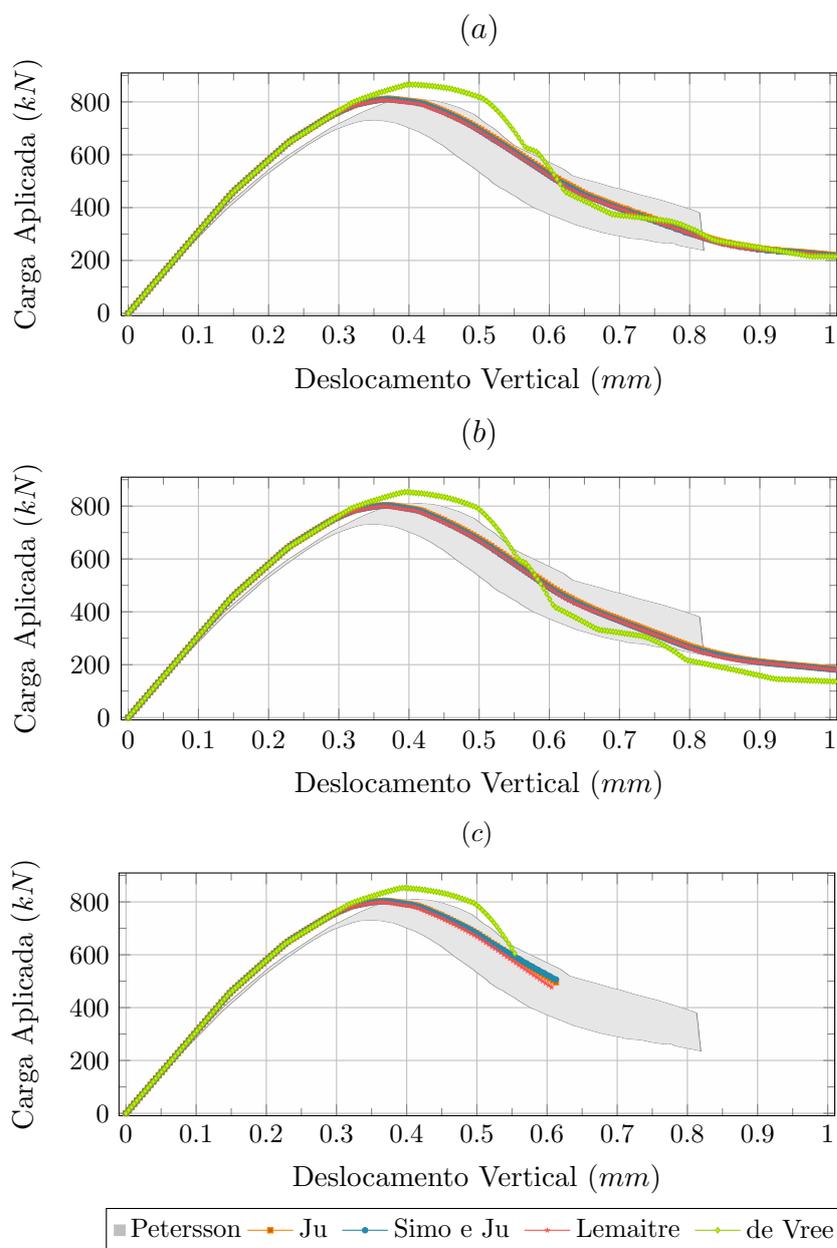


Figura 6.33: Simulações para a viga de Petersson (1981) para uma função de dano linear, diferentes medidas de deformação equivalente e para as aproximações do tensor constitutivo: (a) elástica, (b) secante e (c) tangente.

Os resultados da Figura 6.33 revelam boa concordância com aqueles obtidos por Petersson (1981), com melhores aproximações para as medidas de Ju (1989), Simo e Ju (1987) e Lemaitre (1984), que apresentaram, para as aproximações elástica e secante, uma melhor estabilidade numérica ao longo da trajetória de equilíbrio.

Os resultados da Figura 6.34 são agrupados conforme a aproximação do tensor constitutivo e uma função de dano bilinear.

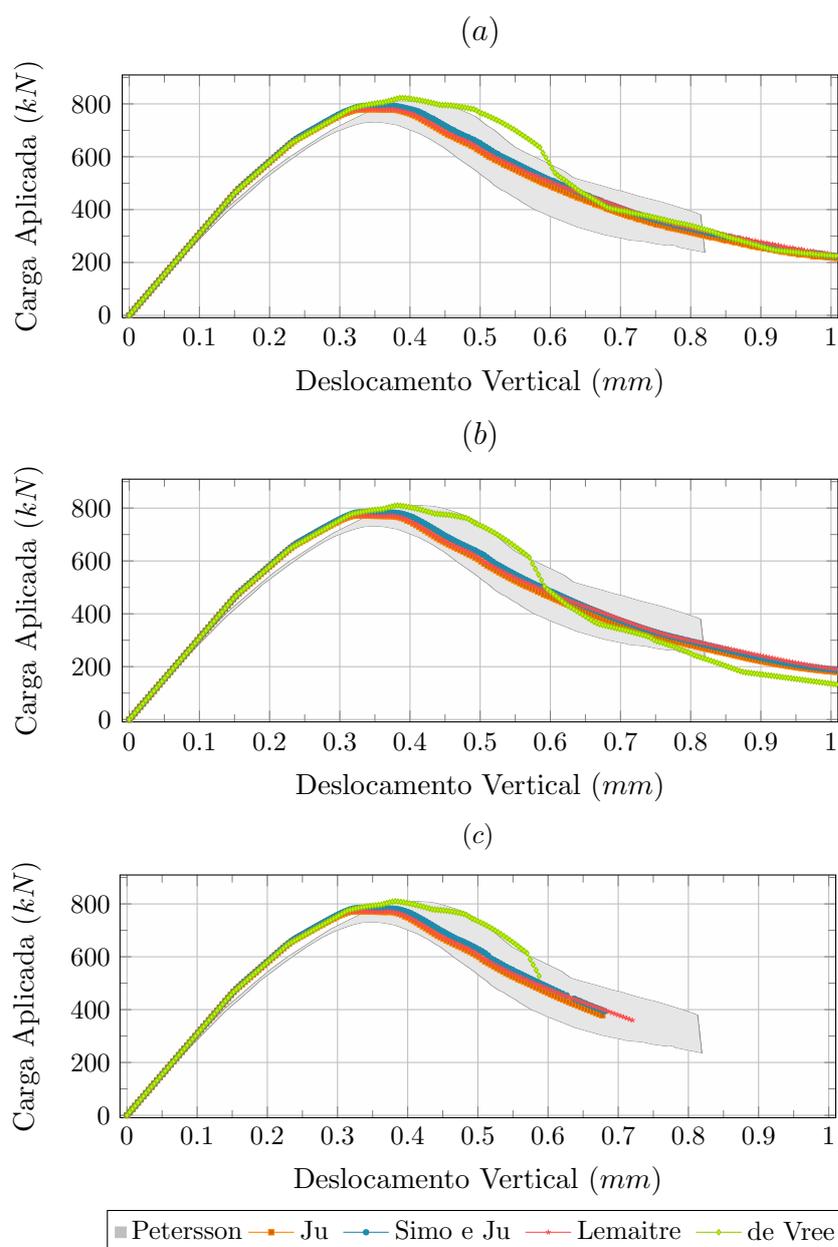


Figura 6.34: Simulações para a viga de Petersson (1981) para uma função de dano bilinear, diferentes medidas de deformação equivalente e para as aproximações do tensor constitutivo: (a) elástica, (b) secante e (c) tangente.

Avalia-se que os resultados da Figura 6.34 revelam boa concordância com aqueles obtidos experimentalmente por Petersson (1981). Os melhores resultados foram obtidos para as medidas propostas por Ju (1989), Simo e Ju (1987) e Lemaitre (1984), pois apresentaram para as aproximações elástica e secante do tensor constitutivo melhor estabilidade numérica ao longo da trajetória de equilíbrio.

6.4.4 Viga de Concreto Armado submetida à flexão em três pontos

Mazars e Pijaudier-Cabot (1989) realizaram ensaios experimentais em uma viga de concreto armado submetida à flexão em três pontos. Os resultados por eles obtidos são confrontados com as simulações realizadas com o modelo constitutivo aqui implementado. Na Figura 6.35 são informados os dados geométricos desta viga.

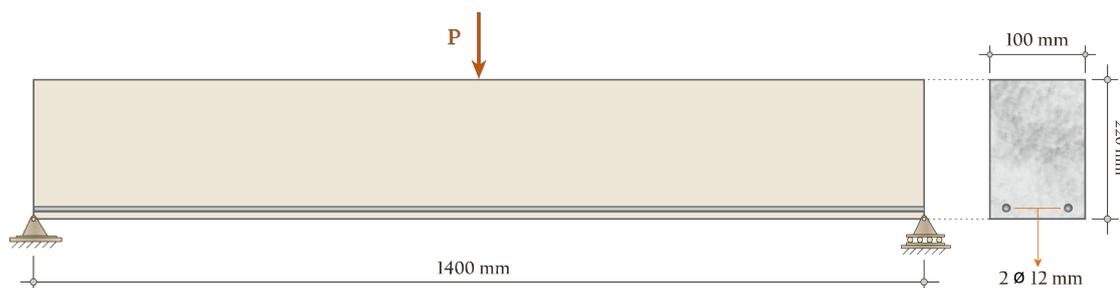


Figura 6.35: Viga de concreto armado submetida à flexão em três pontos estudada por Mazars e Pijaudier-Cabot (1989).

Na Tabela 6.11 são descritos os dados experimentais do material ensaiado por Mazars e Pijaudier-Cabot (1989).

Tabela 6.11: Dados do material ensaiado por Mazars e Pijaudier-Cabot (1989).

Módulo de Elasticidade para o Concreto	$E = 30000 \text{ MPa}$
Coefficiente de Poisson do Concreto	$\nu = 0,20$
Módulo de Elasticidade do Aço	$E = 210000 \text{ MPa}$
Coefficiente de Poisson do Concreto (valor adotado)	$\nu = 0,30$

Para as simulações deste trabalho, empregou-se uma análise sob as condições de EPT, com uso do método de controle de deslocamentos generalizado, incremento inicial do fator de carga de 550, tolerância para convergência em deslocamento de 1×10^{-4} e uma carga de referência $P = 1,0 N$.

Na Figura 6.36 é ilustrada a malha de elementos finitos quadrilaterais de quatro nós, representativa do material concreto, e de elementos finitos unidimensionais de dois nós, para caracterizar a armadura.

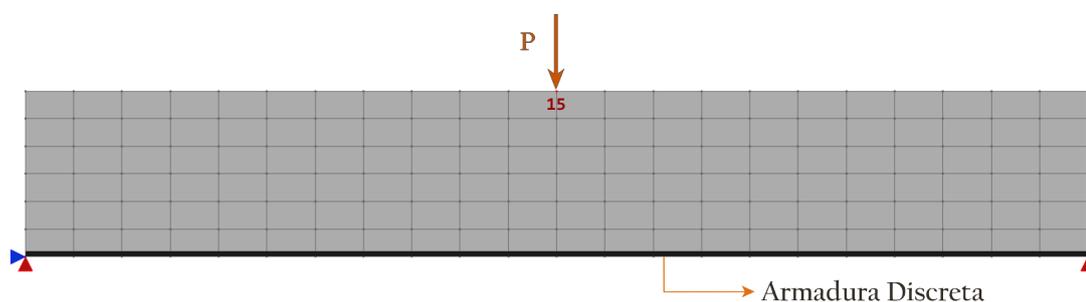


Figura 6.36: Viga de concreto armado submetida à flexão em três pontos: malha empregada nas simulações numéricas deste trabalho.

Para a modelagem do concreto, adotou-se o Modelo de Microplanos implementado neste trabalho. Para o aço, adotou-se o modelo de plasticidade, com critério de escoamento de *von Mises*, já implementado no sistema INSANE, com consideração da aderência perfeita entre o aço e o concreto.

Os parâmetros para o concreto são descritos na Tabela 6.12, para a medida de deformação segundo de Vree et al. (1995) e dano exponencial, obtidos a partir da equivalência das trajetórias de equilíbrio para um ensaio de tração pura, de modo análogo ao apresentado no Apêndice B. Na Tabela 6.12 têm-se também os parâmetros para o modelo de plasticidade adotado para o aço.

Tabela 6.12: Parâmetros para simulação da viga de concreto armado proposta por Mazars e Pijaudier-Cabot (1989).

Medida definida em de Vree et al. (1995) e função de dano exponencial		
$\alpha^{mic} = 0,96$	$\beta^{mic} = 1350,00$	$\kappa_0^{mic} = 0,000055$
Parâmetros para plasticidade com critério de <i>von Mises</i>		
Tensão de escoamento	$\sigma_y = 420,00 \text{ MPa}$	
Módulo de endurecimento-amolecimento	$H = 0,00$	

As trajetórias de equilíbrio, correspondentes ao deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga, para a medida de deformação segundo de Vree et al. (1995) e para as aproximações elástica, secante e tangente do tensor constitutivo, são ilustradas na Figura 6.37, juntamente com os valores experimentais apresentados por Mazars e Pijaudier-Cabot (1989).

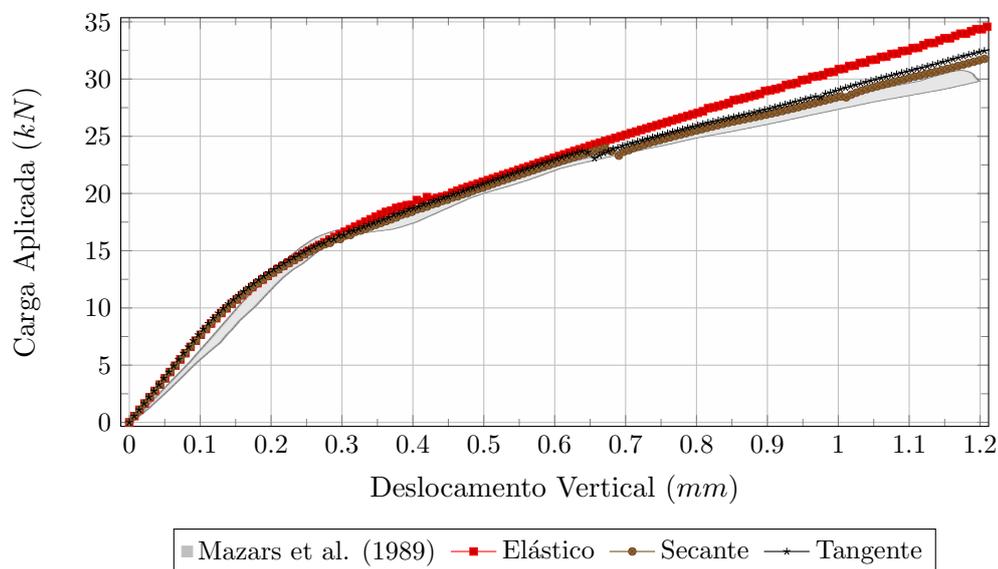


Figura 6.37: Simulações para diferentes aproximações do tensor constitutivo, comparadas com os resultados experimentais de Mazars e Pijaudier-Cabot (1989).

A Figura 6.38 descreve os resultados experimentais segundo Mazars e Pijaudier-Cabot (1989). Tais resultados são comparados com aqueles obtidos para a aproximação tangente do tensor constitutivo para um maior destaque.

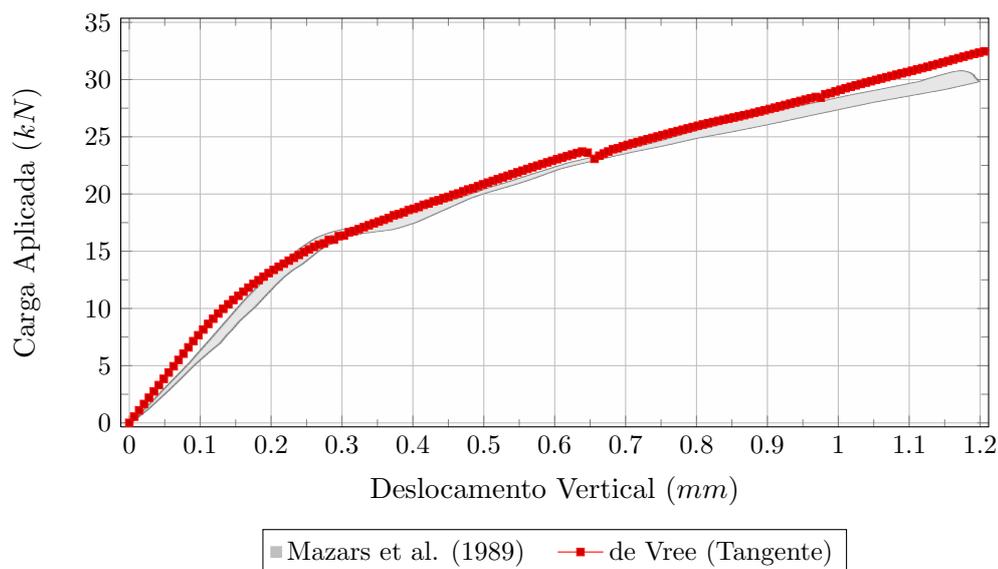


Figura 6.38: Comparativo do resultado experimental de Mazars e Pijaudier-Cabot (1989) com a simulação para uma aproximação tangente do tensor constitutivo.

Novamente, observa-se a partir das Figuras 6.37 e 6.38, excelente concordância entre os valores experimentais e os obtidos com o Modelo de Microplanos aqui implementado. A diferença entre os resultados obtidos com as três aproximações do tensor constitutivo é mínima, conforme observado na Figura 6.37. Isto pode ser explicado pela presença da armadura, que exerce muita influência na rigidez da viga e pelo estado de sollicitação por flexão em três pontos.

Por fim, a Figura 6.39 ilustra a isofaixa de valores de dano, correspondente à carga máxima. Verifica-se que a armadura proporciona uma melhor distribuição da degradação ao longo de toda a peça, além de proporcionar, em termos de análise numérica, melhoria de estabilidade no trecho inelástico.

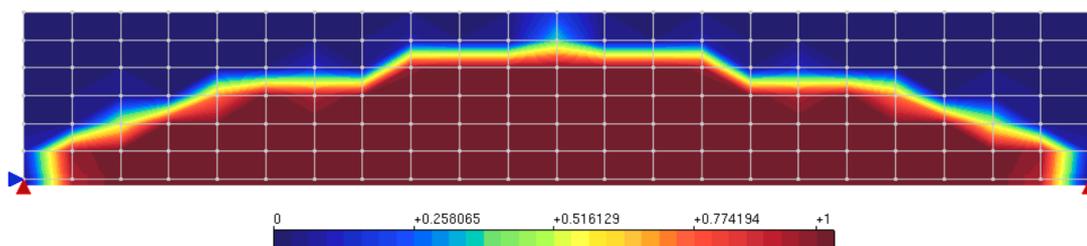


Figura 6.39: Isofaixa de valores de dano para a simulação do Modelo de Microplanos com medida de deformação equivalente definida por de Vree et al. (1995) e função de dano exponencial.

6.4.5 Viga de concreto armado submetida à flexão em quatro pontos

Álvares (1993) ensaiou experimentalmente vigas de concreto armado submetidas à flexão em quatro pontos para diferentes taxas de armadura, assim como apresentou simulações numéricas comparando-as com os resultados experimentais obtidos.

Nesta seção serão apresentadas simulações numéricas para as vigas ensaiadas por Álvares (1993) para as taxas de armaduras normalmente armadas e superarmadas, conforme ilustrado na Figura 6.40.

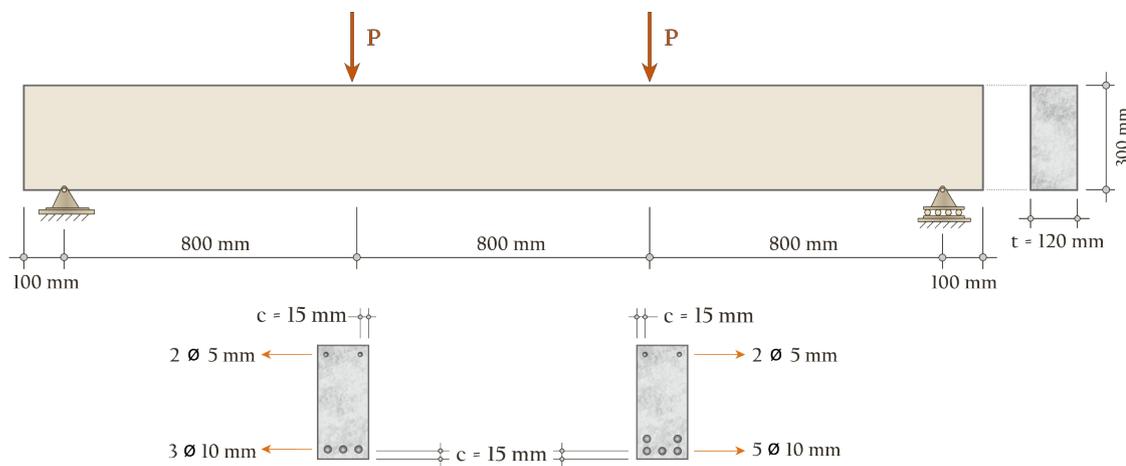


Figura 6.40: Viga de concreto armado submetida à flexão em quatro pontos com taxas normalmente armadas e superarmadas estudadas por Álvares (1993).

O autor também abordou em seu trabalho um estudo sobre o Modelo de Dano de Mazars (1984), utilizando-o para simular os resultados obtidos experimentalmente. Na Tabela 6.13 tem-se a descrição do material adotado por Álvares (1993) para os ensaios experimentais e os parâmetros numéricos para a modelagem numérica.

Tabela 6.13: Parâmetros experimentais e numéricos utilizados nas vigas armadas ensaiadas por Álvares (1993).

Parâmetros experimentais para o concreto armado	
Módulo de Elasticidade para o Concreto	$E = 29200,00 \text{ MPa}$
Coefficiente de Poisson do Concreto	$\nu = 0,20$
Módulo de Elasticidade do Aço	$E = 19600,00 \text{ MPa}$
Coefficiente de Poisson para o Aço	$\nu = 0,30$
Parâmetros numéricos para o Modelo de Mazars (1984)	
$A_t = 0,995$	$B_t = 8000,00$
$\kappa_0 = 0,00007$	$A_c = 0,850$
	$B_c = 1620,00$

Para a obtenção das trajetórias de equilíbrio, adotou-se o método de controle de deslocamentos generalizado, fator de carga igual a 1125, tolerância para convergência em deslocamento de 1×10^{-4} e carga de referência $P = 1,0 \text{ N}$.

A Figura 6.41 ilustra a malha de elementos finitos quadrilaterais de quatro nós sob uma análise em EPT, para representar o concreto, e de elementos finitos unidimensionais de dois nós, para caracterizar a armadura.

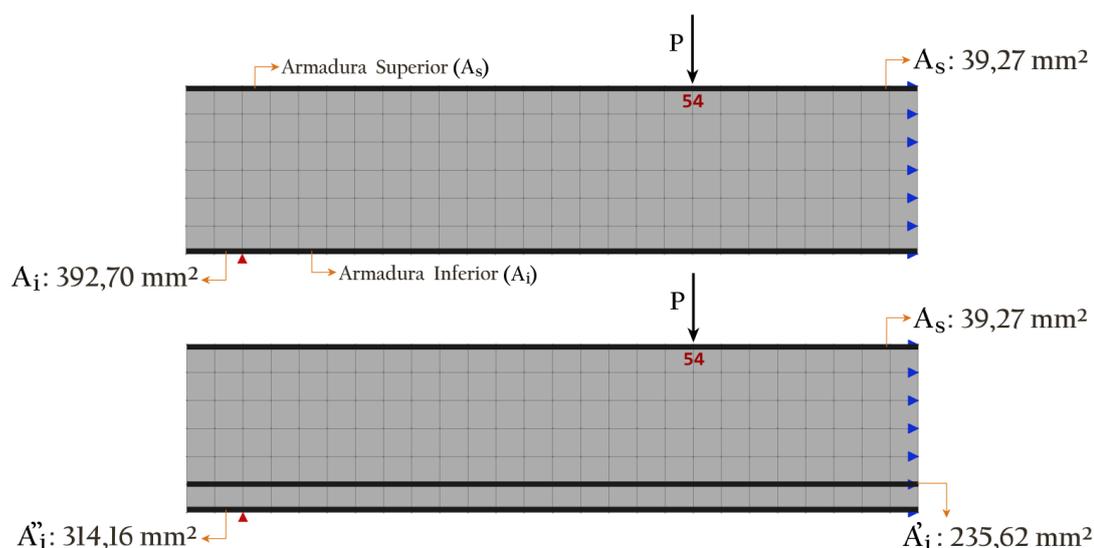


Figura 6.41: Viga em concreto armado de Álvares (1993): malhas empregadas nas simulações numéricas com uso do Modelo de Microplanos.

Para a modelagem do concreto, adotou-se o Modelo de Microplanos implementado neste trabalho. Para o aço, empregou-se o modelo de plasticidade, com critério de escoamento de *von Mises*, assumindo um comportamento elastoplástico e uma aderência perfeita entre o aço e concreto.

Os parâmetros para esses materiais são descritos na Tabela 6.13 com uso da medida de deformação proposta por de Vree et al. (1995), sendo estes obtidos a partir da parametrização dos resultados obtidos por Álvares (1993) com uso do Modelo de Mazars (1984), conforme detalhado no Apêndice B.

Tabela 6.14: Parâmetros para simulação da viga de Álvares (1993), com uso da medida proposta por de Vree et al. (1995) e distintas funções de dano.

Função de Dano Exponencial		
$\alpha^{mic} = 0,970$	$\beta^{mic} = 2200,00$	$\kappa_0^{mic} = 0,000102$
Função de Dano Polinomial		
$f_e^{mic} = 2,960$	$E = 29200,00$	$\kappa_0^{mic} = 0,000160$
Função de Dano Linear		
$\kappa_u^{mic} = 0,00115$	$\kappa_0^{mic} = 0,000103$	
Função de Dano Bilinear		
$f_u^{mic} = 0,00$	$f_{cr}^{mic} = 1,950$	$f_0^{mic} = 2,960$
$\kappa_u^{mic} = 0,00120$	$\kappa_{cr}^{mic} = 0,00032$	$\kappa_0^{mic} = 0,000103$

A Figura 6.42 descreve os resultados experimentais obtidos por Álvares (1993) para uma viga superarmada. Tais resultados são comparados com os encontrados para as aproximações elástica, secante e tangente do tensor constitutivo com uso da função de evolução de dano exponencial e medida de deformação equivalente segundo de Vree et al. (1995).

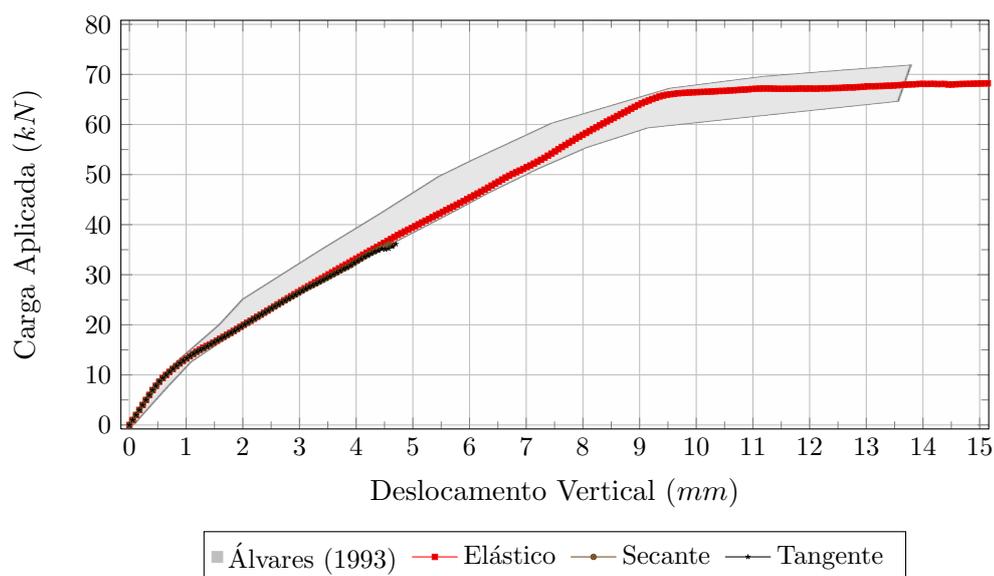


Figura 6.42: Resultados para a viga superarmada proposta por Álvares (1993) comparados com as simulações para uma função de dano exponencial, medida segundo de Vree et al. (1995) e para as três aproximações do tensor constitutivo.

A análise das trajetórias de equilíbrio da Figura 6.42 denota que há uma boa concordância entre os resultados experimental e numérico, sendo observadas para as aproximações secante e tangente a ocorrência de interrupções das trajetórias, ocorridas por instabilidades numéricas ligadas à forma de solicitação da estrutura, conforme observado e explanado na seção 6.3.3.

Evidencia-se ainda que as três trajetórias foram coincidentes até a carga aproximada de 35 kN , trecho em que apenas a aproximação elástica demonstrou estabilidade e continuidade até o fim da análise.

Tendo em vista esse comportamento estável para a aproximação elástica, a Figura 6.43 descreve novamente os resultados de Álvares (1993) para uma viga superarmada, com acréscimo das simulações realizadas para as demais funções de evolução de dano e medida de deformação segundo de Vree et al. (1995).

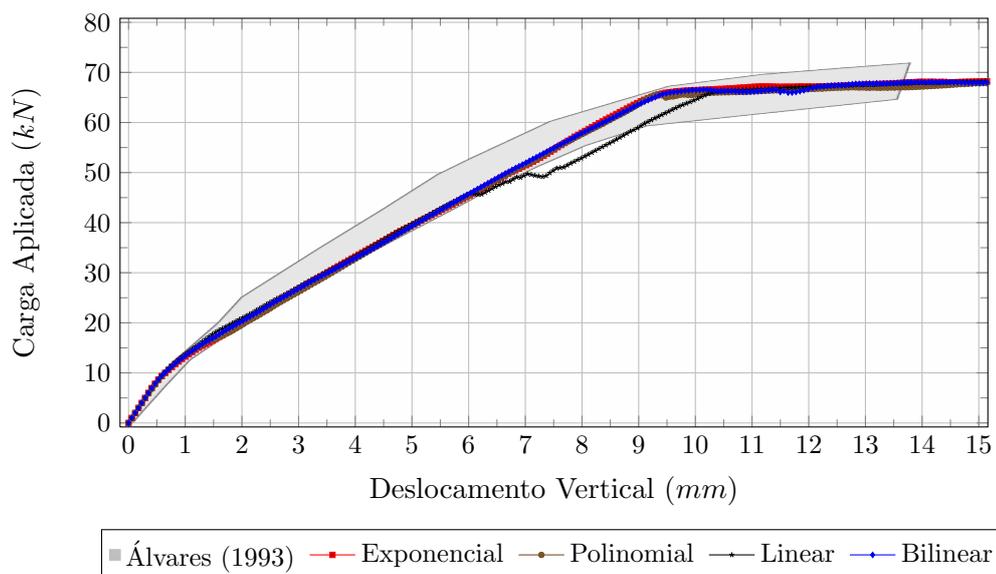


Figura 6.43: Resultados para a viga superarmada proposta por Álvares (1993) comparados com as simulações para distintas funções de dano e medida de deformação segundo de Vree et al. (1995).

A avaliação das trajetórias de equilíbrio denota que existe uma boa concordância das simulações numéricas aqui realizadas, principalmente, para as funções de dano exponencial, polinomial e bilinear, com os resultados experimentais obtidos por Álvares (1993).

Em especial, a função linear mostrou-se numericamente instável a partir da carga aproximada de 50 kN , motivada por alguma localização numericamente induzida neste trecho da trajetória.

Da mesma forma, a Figura 6.44 descreve os resultados experimentais segundo Álvares (1993) para uma viga normalmente armada. Tais resultados são comparados aos obtidos para a aproximação elástica do tensor constitutivo, uso de distintas funções de dano e medida de deformação segundo de Vree et al. (1995).

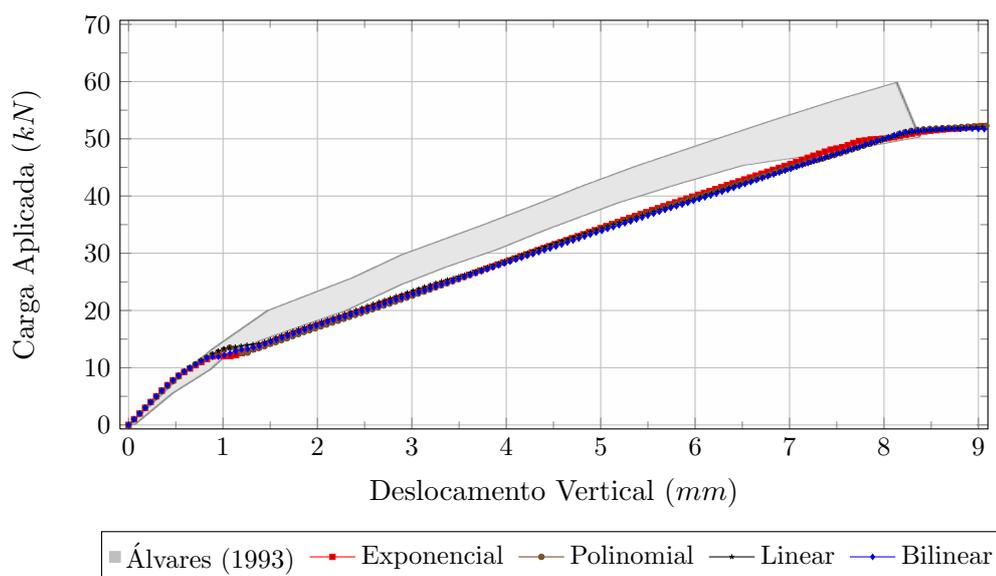


Figura 6.44: Resultados para a viga normalmente armada proposta por Álvares (1993) comparado com as simulações para diferentes funções de dano e medida de deformação segundo de Vree et al. (1995).

A avaliação das simulações para uma viga normalmente armada denota a existência de boa estabilidade numérica ao longo de toda a trajetória de equilíbrio. Contudo, a convergência dos resultados numéricos, quando comparada à do resultado de Álvares (1993), mostrou-se levemente abaixo da faixa experimental.

Por fim, a Figura 6.45 ilustra a isofaixa de valores de dano, correspondente a uma carga de 20 kN para uma viga superarmada simulada com dano exponencial. Verifica-se que a armadura proporciona uma melhor distribuição da degradação ao longo da peça e melhoria da estabilidade no trecho inelástico apenas para a aproximação elástica do tensor constitutivo.

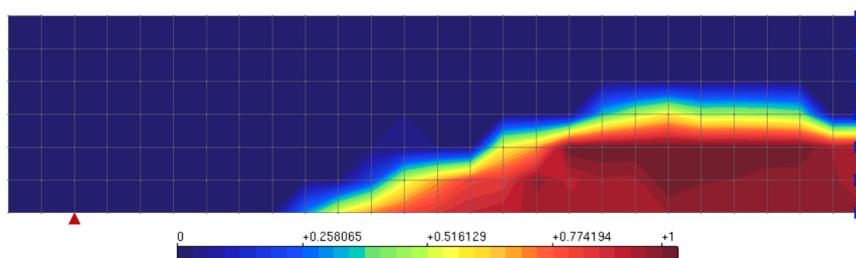


Figura 6.45: Isofaixa de valores de dano para uma viga superarmada, simulada com a medida segundo de Vree et al. (1995) e função de dano exponencial.

Capítulo 7

Considerações Finais

Esta dissertação formulou e implementou um Modelo de Microplanos, segundo o Ambiente Teórico-Computacional para Modelos Constitutivos desenvolvido por Penna (2011). Assim, o referido ambiente, anteriormente testado para outros modelos constitutivos, foi aqui validado para o modelo constitutivo de microplanos definido em Leukart e Ramm (2006), generalizando-o para diferentes medidas de deformação equivalente e funções de evolução de dano.

Constatou-se o grande potencial da biblioteca de modelos constitutivos do sistema computacional *INSANE*, em função da generalidade das implementações dos modelos e dos diversos recursos para modelagem constitutiva existentes nesta plataforma. Tais aspectos orientaram a inclusão do modelo de Leukart e Ramm (2006) no sistema, realizada de maneira a preservar tal generalidade e, portanto, garantir a fácil inclusão de outras formulações.

Sendo assim, do ponto de vista teórico, a formulação do Modelo de Microplanos em questão foi aqui reescrita com base nas equações gerais do ambiente teórico unificado de Penna (2011). Por outro lado, do ponto de vista computacional, o projeto orientado a objetos da inclusão do modelo de Leukart e Ramm (2006) mostrou-se eficiente e genérico, com possibilidades de inclusões de quaisquer Modelos de Microplanos, sejam estes: (1) baseados no PTV ou nas Leis Termodinâmicas; (2) com relações constitutivas dadas por leis tensão-deformação ou por funções de evolução de dano; ou (3) formulados com decomposição V-D, N-T ou V-D-T.

7.1 Conclusões

A formulação proposta por Leukart e Ramm (2006) foi utilizada em várias simulações numéricas apresentadas no Capítulo 6. A seguir são explanadas as conclusões advindas de cada seção de resultados apresentada em tal capítulo.

7.1.1 Deformação Equivalente e Funções de Dano

Na primeira parte do Capítulo 6, as simulações foram concebidas para as medidas de deformação equivalente implementadas, combinadas com quatro funções de evolução de dano: exponencial, polinomial, linear e bilinear. Tais simulações também serviram para ajustar os parâmetros do material. A partir da análise dos resultados apresentados nesta seção, pode-se concluir que:

- (1) em problemas cujas deformações são predominantemente de tração ou de compressão, não havendo variação do sinal das deformações no domínio do problema, as quatro medidas de deformação equivalente estudadas (Ju, 1989; Simo e Ju, 1987; Lemaitre, 1984; de Vree et al., 1995) são adequadas, ressaltando-se que as três primeiras apresentaram resultados muito semelhantes;
- (2) em problemas nos quais a distinção entre deformações de tração e de compressão é relevante, como em estruturas de concreto submetidas a carregamento genéricos, somente a medida de deformação segundo de Vree et al. (1995) é adequada;
- (3) dentre as funções de dano utilizadas, a única que considera a degradação para quaisquer valores de deformação é a polinomial. As demais estabelecem um limite mínimo de deformação, acima do qual o dano passa a ser avaliado. Inclusive a função de dano exponencial, utilizada com maior frequência para Modelos de Microplanos, possui esta característica, delimitada pelo parâmetro κ_0^{mic} . Ressalva-se, contudo, a necessidade de ajuste adequado dos parâmetros do material para a função polinomial, de maneira a definir a deformação de início do dano adequadamente. Ressalva-se também que esta deformação inicial de dano é sempre maior para o caso polinomial, em comparação com as demais funções de evolução de dano;

(4) na presença de deformações de cisalhamento, as medidas de Ju (1989) e Simo e Ju (1987) mostraram resultados de resistência muito semelhantes entre si, sendo inferiores aos obtidos com a medida de Lemaitre (1984), que por sua vez, são inferiores quando comparados com a medida segundo de Vree et al. (1995).

7.1.2 Dependência de Malha

Na sequência, simulações para avaliação da dependência de malha foram processadas, para todas as medidas de deformação equivalente e para quatro funções de evolução de dano. Inicialmente, optou-se pelo uso da aproximação elástica do tensor constitutivo, cujos resultados não denotaram dependência de malha, com exceção da medida proposta por de Vree et al. (1995), para o caso de cisalhamento puro. Porém, para as aproximações secante e tangente, os resultados apresentaram um alto índice de localização de deformações numericamente induzida, resultante em parte, do número superior de operações tensoriais envolvidas no cálculo do tensor constitutivo para estas aproximações, e em outra parte devido a natureza dos exemplos de tração, compressão e cisalhamento puros, muito sensíveis a pequenas variações, contrárias a uniformidade de distribuição de deformações, exigida pelo problema ao longo de toda a trajetória de equilíbrio.

Com base nesta análise, pode-se concluir que:

- (1) a medida de deformação equivalente parece não interferir na dependência de malha, dada a recorrência observada para todas as medidas usadas;
- (2) a indução de localização de deformações é mais recorrente para uma aproximação tangente do tensor constitutivo;
- (3) deve-se ter cuidado com o uso de estados puros para o estudo de dependência de malha devido à grande sensibilidade do mesmo a pequenas variações numéricas das deformações, principalmente quando a análise for realizada no nível do ponto material, como é o caso dos Modelos de Microplanos, o que eleva a possibilidade de não uniformidade no estado de deformações do problema.

7.1.3 Aproximação do Tensor Constitutivo

Simulações para carregamentos mais complexos foram processados visando avaliar, isoladamente, a influência da aproximação do tensor constitutivo na estabilidade numérica do modelo. Os resultados mostraram-se satisfatórios para os exemplos de tração, com trajetórias de equilíbrio estáveis para todas as medidas de deformação equivalente. Em destaque, as medidas propostas por Lemaitre (1984) e de Vree et al. (1995) resultaram em trajetórias mais estáveis para as três formas de aproximação do tensor constitutivo, seja pela convergência ou pelo tempo de processamento, com ressalva para a aproximação elástica deste tensor, cujas trajetórias inelásticas mostraram-se levemente mais rígidas.

Estes resultados permitem concluir que:

- (1) as aproximações secante e tangente são numericamente mais instáveis que a aproximação elástica, independentemente da medida de deformação adotada;
- (2) embora numericamente mais estável, a aproximação elástica é mais custosa computacionalmente, pois eleva o número de iterações em cada passo;
- (3) deve-se usar a aproximação elástica com muito cuidado, pois esta pode superestimar a rigidez do ramo descendente;
- (4) as medidas de deformação equivalente propostas por Ju (1989) e Simo e Ju (1987), quando usadas com a aproximação tangente do tensor constitutivo, induzem mais rapidamente a localização de deformações, quando comparadas com as medidas de deformação propostas por Lemaitre (1984) e de Vree et al. (1995).

7.1.4 Comparações com Resultados Numéricos e Experimentais

Os resultados numéricos e experimentais apresentaram excelente concordância entre si. A análise das comparações realizadas permitem concluir que:

- (1) as medidas de Ju (1989), Simo e Ju (1987) e de Lemaitre (1984) não devem ser usadas para análise de estruturas de concreto, exceto nos casos em que as regiões

comprimidas sejam muito pequenas comparadas ao tamanho total da estrutura;

(2) em geral, para estrutura de concreto, deve-se usar preferencialmente a medida de deformação segundo de Vree et al. (1995), que pode ser combinada com as funções de dano exponencial, polinomial, bilinear e linear;

(3) nas estruturas de concreto armado submetidas à flexão em três pontos, os problemas de instabilidade numérica, associados à aproximação do tensor constitutivo, são de pequena monta. Nestes casos, a presença da armadura parece estabilizar o modelo, devido ao acréscimo de rigidez introduzida pela mesma;

(4) contudo, o que se concluiu acima deve ser generalizado com cautela, pois, em se tratando de estruturas de concreto solicitadas por flexão em quatro pontos, verificou-se trajetórias de equilíbrio numericamente estáveis apenas para a aproximação elástica do tensor constitutivo, sob o uso de diferentes funções de dano, mostrando-se capaz de representar a resposta estrutural global sem alterações significativas.

7.2 Sugestões para Trabalhos Futuros

Dentre os estudos realizados nesta dissertação, alguns pontos importantes carecem de aprofundamento, seja por meio de novas simulações ou através do uso de novas estratégias para investigação dos fenômenos aqui pesquisados. Neste sentido, algumas propostas são sintetizadas a seguir.

7.2.1 Outros Modelos de Microplanos

A implementação do modelo de Leukart e Ramm (2006) orientou-se nas bases para formulações dos Modelos de Microplanos, descritas no Capítulo 2. Assim, optou-se por dividi-los nas superclasses, `NTSplitToMicroplaneModelFilter`, `VDSplitToMicroplaneModelFilter` e `VDTSplitToMicroplaneModelFilter`, conforme o que foi descrito nos diagramas de classes do Capítulo 5. Esta divisão agrupa as três grandes formas de decomposição da deformação nos microplanos, permitindo incluir outros Modelos de Microplanos, como os resumidos no Capítulo 2.

Sendo assim, sugere-se estudar as formulações de Modelos de Microplanos mais recentes, tais como os modelos de Wu e Li (2006, 2007, 2008) e Wu (2009), a fim de incluí-los no ambiente unificado. Para tanto, a única exigência, a princípio, é a implementação da classe *Filter*, responsável pelas operações tensoriais características de cada modelo constitutivo e de seu respectivo modelo de análise para o ponto material, estendido da superclasse `ContinuousPointModel` e necessário para a realização das operações tensoriais intrínsecas de cada modelo.

7.2.2 Modelos de Microplanos Não Locais

Diferentes simulações constataram que o modelo proposto por Leukart e Ramm (2006) possui amplas vantagens quando se pretende modelar materiais em meio anisotrópico. Todavia, para algumas situações de carregamento constatou-se problemas ligados à localização de deformações numericamente induzidas. Este fenômeno vem sendo alvo de inúmeros estudos recentes. Dentre as propostas que visam a inibição do mesmo, está a possibilidade do uso de uma abordagem constitutiva não local para os Modelos de Microplanos.

O trabalho de Kuhl et al. (2000) propõe uma aproximação para gradientes de deformação melhorados para microplanos. Cervenka et al. (2004) sugerem o uso do modelo de fissuração distribuída aliado ao Modelo de Microplanos como principal abordagem para evitar a ocorrência de resultados induzidos pela dependência de malha. Outros autores, como Peerlings et al. (1998) e Bažant e Jirásek (2002), também usaram uma formulação com gradiente de deformação para uma abordagem não local, com inserção das formulações de microplanos.

Porém, a proposta mais bem avaliada é a abordada por Leukart (2005), que constata em seu modelo a necessidade de um aprimoramento nas respostas para o regime inelástico. Para tanto, o autor propõe uma melhoria da formulação do gradiente de deformações nos microplanos, com a incorporação de uma escala de comprimento característico que controla a zona das ocorrências de falhas, estabelecendo uma relação

entre o tamanho e a distância das heterogeneidades do material.

Esta proposta pode contribuir diretamente para mitigar os problemas de dependência de malha observados durante as simulações com o modelo de Leukart e Ramm (2006) implementado nesta dissertação.

7.2.3 Outros Métodos Numéricos

O Modelo de Microplanos aqui implementado foi testado para discretizações do Método dos Elementos Finitos (MEF). Porém, tal implementação preservou a generalização característica do Ambiente Teórico-Computacional Unificado para Modelos Constitutivos desenvolvido em Penna (2011). Além disto, Penna (2011) ressalta a independência do ambiente unificado em relação ao método numérico. Assim, o ambiente pode ser empregado para discretizações baseadas nos Métodos Sem Malha (MSM), no Método de Elementos de Contorno (MEC) ou no Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG).

Neste sentido, propõe-se verificar a aludida independência para o Modelo de Microplanos, usando-o com outras abordagens numéricas, tais como o MSM, implementado no sistema *INSANE* a partir da pesquisa de Silva (2012), ou a partir do MEFG, implementado com o trabalho de Alves (2012).

7.2.4 Outros Modelos de Análise

Neste trabalho, as simulações foram realizadas sob análise em Estado Plano de Deformação (EPD) e Estado Plano de Tensão (EPT). Contudo, o Modelo de Microplanos de Leukart e Ramm (2006) foi implementado no Ambiente Unificado, de maneira independente do modelo de análise adotado.

Deste modo, propõe-se a simulação de problemas com o uso de outros modelos de análise, tais como os modelos axissimétrico e sólido.

Referências Bibliográficas

- Ajeje, F. H., 2009. Abordagem orientada a objetos para implementação computacional de elementos finitos de cascas planas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Almeida, M. L., 2005. Elementos finitos paramétricos implementados em java. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Álvares, M. S., 1993. Estudo de um modelo de dano para o concreto: formulação, identificação paramétrica e aplicação com emprego do método dos elementos finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil.
- Alves, P. D., 2012. Estratégia global-local aplicada ao método dos elementos finitos generalizados. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Anacleto, F. E. S., Ribeiro, G. O. e Ribeiro, T. S. A., (2011), Implementation of viscoplastic analysis for multi-region problems using the boundary element method, in 'XII International Conference on Boundary Element and Meshless Techniques', Brasília, Brasil.
- Armero, F. e Oller, S., 2000a. 'A general framework for continuum damage models. I. infinitesimal plastic damage models in stress space'. *International Journal of Solids Structures*, vol. 37, pp. 7409–7436.

- Armero, F. e Oller, S., 2000b. ‘A general framework for continuum damage models. II. integration algorithms, with applications to the numerical simulation of porous metals’. *International Journal of Solids Structures*, vol. 37, pp. 7437–7464.
- Batdorf, S. e Budianski, B., 1949. ‘A mathematical theory of plasticity based on the concept of slip’. *Technical Note 1871, National Advisory Committee for Aeronautics*, . Citado em Carol e Bažant (1997).
- Batoz, J. L. e Dhat, G., 1979. ‘Incremental displacement algorithms for nonlinear problems’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 14, pp. 1262–1267.
- Bažant, Z. P. e Caner, F. C., 2005. ‘Microplane model M5 with kinematic and static constraints for concrete fracture and anelasticity. I: Theory. II: Computation.’. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, vol. 131, pp. 31–40.
- Bažant, Z. P., Caner, F. C., Carol, I., Adley, M. D. e Akers, S. A., 2000a. ‘Microplane model M4 for concrete. I: Formulation with work-conjugate deviatoric stress’. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, vol. 126, pp. 944–953.
- Bažant, Z. P. e Gambarova, P. G., 1984. ‘Crack shear in concrete: crack band microplane model’. *Journal of Structural Engineering*, vol. 110(9), pp. 2015–2035.
- Bažant, Z. P. e Jirásek, M., 2002. ‘Nonlocal integral formulations of plasticity and damage: survey and progress’. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 128(11), pp. 1119–1149.
- Bažant, Z. P., M. D. Adley, I. C., Jirásek, M., Akers, S. A., Rohani, B., Cargile, J. D. e Caner, F. C., 2000b. ‘Large-strain generalization of microplane model for concrete and application’. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, vol. 126, pp. 971–980.

- Bažant, Z. P. e Oh, B. H., 1985. ‘Microplane model for progressive fracture of concrete and rock’. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 111(4), pp. 559–582.
- Bažant, Z. P. e Ožbolt, J., 1990. ‘Nonlocal microplane model for fracture, damage, and size effect in structures’. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 116(11), pp. 2485–2505.
- Bažant, Z. P. e Planas, J., 1998. *Fracture and Size Effect in Concrete and Other Quasibrittle Materials*. CRC Press, EUA.
- Bažant, Z. P. e Prat, P. C., 1988a. ‘Microplane model for brittle-plastic material: I. theory’. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 114(10), pp. 1672–1688.
- Bažant, Z. P. e Prat, P. C., 1988b. ‘Microplane model for brittle-plastic material: II. verification’. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 114(10), pp. 1689–1702.
- Camara, L. S., 2007. Um serviço web para o método dos elementos finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Carol, I., (1996), Elastic degradation and damage: plasticity-like formulation, stiffness recovery and localization, *in* ‘Mecánica Computacional vol. XVII’, Tucumán, Argentina, pp. 243–252.
- Carol, I. e Bažant, Z. P., 1997. ‘Damage and plasticity in microplane theory’. *International Journal of Solids Structures*, vol. 34, pp. 3807–3835.
- Carol, I., Bažant, Z. P. e Prat, P. C., 1992. ‘New explicit microplane model for concrete: Theoretical aspects and numerical implementation’. *International Journal of Solids Structures*, vol. 29, pp. 1173–1191.
- Carol, I., Jirásek, M. e Bažant, Z. P., 2001a. ‘A thermodynamically consistent approach to microplane theory. I. free energy and consistent microplane stresses’. *International Journal of Solids Structures*, vol. 38, pp. 2921–2931.

- Carol, I., Jirásek, M. e Bažant, Z. P., 2004. ‘A framework for microplane models at large strain, with application to hyperelasticity’. *International Journal of Solids Structures*, vol. 41, pp. 511–557.
- Carol, I., Rizzi, E. e Willam, K., 1994. ‘A unified theory of elastic degradation and damage based on a loading surface’. *International Journal of Solids Structures*, vol. 31, pp. 2835–2865.
- Carol, I., Rizzi, E. e Willam, K., 2001b. ‘On the formulation of anisotropic elastic degradation. Part I: Theory based on a pseudo-logarithmic damage tensor rate. Part II: Generalized pseudo-rankiner model for tensile damage’’. , .
- Carol, I. e Willam, K., 1996. ‘Spurious energy dissipation/generation and stiffness recovery models for elastic degradation and damage’. *International Journal of Solids Structures*, vol. 33, pp. 2939–2957.
- Carreira, D. J. e Chu, K. H., 1985. ‘Stress-strain relationship for plain concrete in compression’. *American Concrete Institute Journal*, vol. 82, pp. 797–804.
- Cervenka, J., Bažant, Z. P. e Wierer, M., 2004. ‘Equivalent localization element for crack band approach to mesh-size sensitivity in microplane model’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 62, pp. 700–726.
- Crisfield, M. A., 1981. ‘A fast incremental-iterative solution procedure that handles snap-through’. *Computers and Structures*, vol. 13, pp. 55–62.
- Crisfield, M. A., 1983. ‘An arc length method including line searches and accelerations’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 19, pp. 1269–1289.
- D’Addetta, G. A., 2004. Discrete Models for Cohesive Frictional Materials. Tese de Doutorado, Universität Stuttgart, Stuttgart, Alemanha.

- de Borst, R., 1987. ‘Smearred cracking, plasticity, creep and thermal loading - a unified approach’. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 62, pp. 89–110.
- de Borst, R., 1999. ‘A unified framework for concrete damage and fracture models including size effects’. *International Journal of Solids Structures*, vol. 95, pp. 261–277.
- de Vree, J. H. P., Brekelmans, W. A. M. e van Gils, M. A. J., 1995. ‘Comparison of nonlocal approaches in continuum damage mechanics’. *Computer e Structures*, vol. 55(4), pp. 581–588.
- Ferreira, R. L., 2008. Pré-processador para modelos reticulados e planos do método dos elementos finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Fonseca, F. T., 2008. Sistema computacional para análise dinâmica geometricamente não linear através do método dos elementos finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Fonseca, F. T., Pitangueira, R. L. S. e Filho, A. V., (2004), Implementação de modelos estruturais de barras como casos particulares do método de elementos finitos, *in* ‘Simpósio Mineiro de Mecânica Computacional - SIMMEC’, Itajubá, MG, Brasil.
- Fonseca, M. T., 2006. Aplicação orientada a objetos para análise fisicamente não-linear com modelos reticulados de seções transversais compostas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Fowler, M. e Scott, K., 2000. *UML Essencial - Um breve guia para a linguagem-padrão de modelagem de objetos*. Bookman, Porto Alegre, RS, Brasil.

- Fuina, J. S., 2004. Métodos de controle de deformações para análise não-linear de estruturas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Fuina, J. S., 2009. Formulações de modelos constitutivos de microplanos para contínuos generalizados. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Fuina, J. S., Pitangueira, R. L. S. e Penna, S. S., 2011. ‘A comparison of two microplane constitutive models for quasi-brittle materials’. *Applied Mathematical Modelling*, vol. 35, pp. 5326–5337.
- Germanio, L., 2005. Implementação orientada a objetos da solução de problemas estruturais dinâmicos via método dos elementos finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Gonçalves, M. A. B., 2004. Geração de malhas bidimensionais de elementos finitos baseada em mapeamentos transfinitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Hansen, E., Willam, E. e Carol, I., (2001), A two-surface anisotropic damage/plasticity model for plain concrete, *in* ‘Proceedings of IV International Conference on Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures’, FraMCoS-4 Conference, pp. 1–8.
- Ju, J. W., 1989. ‘On energy-based coupled elastoplastic damage theories: Constitutive modeling and computational aspects’. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 25, pp. 803–833.
- Kanatani, K. I., 1984. ‘Distribution of directional data and fabric tensors’. *International Journal of Engineering Science*, vol. 22, pp. 149–164.

- Kuhl, E. e Ramm, E., 2000. ‘Microplane modelling of cohesive frictional materials’. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 19, pp. S121–S143.
- Kuhl, E., Ramm, E. e de Borst, R., (1998), Anisotropic gradient damage with the microplane model, *in* ‘Proceedings of Conference on Computacional Modelling of Concrete Structures’, Vol. 1.
- Kuhl, E., Ramm, E. e de Borst, R., 2000. ‘An anisotropic gradient damage model for quasi-brittle materials’. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 183, pp. 87–103.
- Kuhl, E., Steinmann, P. e Carol, I., 2001. ‘A thermodynamically consistent approach to microplane theory. Part II. dissipation and inelastic constitutive modeling.’. *International Journal of Solids Structures*, vol. 38, pp. 2933–2952.
- Lee, R. C. e Tepfenhart, W. M., 2001. *UML e C++ - Guia Prático de Desenvolvimento Orientado a Objeto*. MAKRON Books, São Paulo, SP, Brasil.
- Lemaitre, J., 1984. ‘How to use damage mechanics’. *Nuclear Engineering and Design*, vol. 80, pp. 233–245.
- Leukart, M., 2005. Kombinierte anisotrope Schädigung und Plastizität bei kohäsiven Reibungsmaterialien. Tese de Doutorado, Universität Stuttgart, Stuttgart, Alemanha.
- Leukart, M. e Ramm, E., (2002), An alternative split within the microplane material model, *in* ‘Proceedings of the IV World Congress on Computational Mechanics’, WCCM Congress, Vienna, Áustria.
- Leukart, M. e Ramm, E., 2003. ‘A comparison of damage models formulated on different material scales’. *Computational Materials Science*, vol. 28, pp. 749–762.
- Leukart, M. e Ramm, E., 2006. ‘Identification and interpretation of microplane material laws’. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 132(3), pp. 295–305.

- Lubarda, V. e Krajcinovic, D., 1993. ‘Damage tensors and the crack density distribution’. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 30, pp. 2859–2877.
- Mazars, J., 1984. Application de la mécanique de l’endommagement au comportement non lineaire et à rupture du béton de structure. Tese de Doutorado, Université Paris, Paris, França. Citado em .
- Mazars, J. e Pijaudier-Cabot, G., 1989. ‘Continuum damage theory - Application to concrete’. *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, vol. 115, pp. 345–365.
- Mohr, O., 1900. ‘Welche umstände bedingen die elastizitätsgrenze und den bruch eines materiales?’. *Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure*, vol. 46.
- Moreira, R. N., 2006. Sistema gráfico interativo para ensino de análise estrutural através do método dos elementos finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Ožbolt, J. e Bažant, Z. P., 1992. ‘Microplane model for cyclic triaxial behavior of concrete’. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, vol. 118(7), pp. 1365–1386.
- Ožbolt, J., Li, Y. e Kožar, I., 2001. ‘Microplane model for concrete with relaxed kinematic constraint’. *International Journal of Solids Structures*, vol. 38, pp. 2683–2711.
- Peerlings, R. H. J., de Borst, R., Brekelmans, W. A. M. e Geers, M. G. D., 1998. ‘Gradient-enhanced damage modelling of concrete fracture’. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, vol. 3, pp. 323–342.
- Peerlings, R. H. J., de Borst, R., Brekelmans, W. A. M. e Vree, J. H. P., 1996. ‘Gradient-enhanced damage for quasi-brittle materials’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 39, pp. 3391–3403.
- Penna, S. S., 2007. Pós-processador para modelos bidimensionais não-lineares do

- método dos elementos finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Penna, S. S., 2011. Formulação multipotencial para modelos de degradação elástica: Unificação teórica, proposta de novo modelo, implementação computacional e modelagem de estruturas de concreto. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Petersson, P. E., (1981), Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials, Tech Report TVBM-1006, Lund Institute of Technology - Division of Building Materials, Lund, Suécia.
- Pitangueira, R. L. S., 1991. Modelo numérico para concreto heterogêneo. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- Pitangueira, R. L. S., 1998. Mecânica de Estruturas de Concreto com Inclusão de Efeitos de Tamanho e Heterogeneidade. Tese de Doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- Pitangueira, R. L. S. e Caldas, R. B., (2005), Projeto de software livre para modelos do método dos elementos finitos, *in* 'XXVI Iberian Latin American Congress on Computational Methods - CILAMCE', Guarapari, ES, Brasil.
- Ramm, E., 1981. 'Strategies for tracing the nonlinear response near limit points, in nonlinear finite element analysis in structural mechanics'. *In Nonlinear finite element analysis in structural mechanics*, pp. 63–68.
- Ramm, E., D'Addetta, G. A. e Leukart, M., (2003), Interrelations between continuum and discontinuum models for geomaterials, *in* 'Proceedings of the VII International Conference on Computational Plasticity', COMPLAS Conference, Barçela, Espanha.

- Ricks, E., 1972. 'The application of newton method to the problem of elastic stability'. *Journal of applied mechanics*, .
- Rizzi, E., 1995. Sulla localizzazione delle deformation in materiali e strutture. Tese de Doutorado, Dipartimento di Ingegneria Strutturale, Politecnico di Milano, Milão, Itália.
- Saliba, S. S., 2007. Implementação computacional e análise crítica de elementos finitos de placas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Silva, P. P. R., 2001. Implementação de modelos de microplanos para análise de estruturas de concreto, uma abordagem orientada a objetos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Silva, R. P., 2012. Análise Não-Linear de Estruturas de Concreto por meio do Método Element Free Galerkin. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Simo, J. e Ju, J. W., 1987. 'Strain and stress based continuous damage models: Part I - Formulation, Part II - Computational Aspects'. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 23, pp. 821–869.
- Taylor, G. I., 1938. 'Plastic strains in metals'. *Journal of the Institute of Metals*, vol. 62, pp. 307–324. Citado em Leukart e Ramm (2006).
- Winkler, B., Hofstetter, G. e Lehar, H., 2004. 'Application of a constitutive model for concrete to the analysis of a precst segmental tunnel lining'. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 28, pp. 797–819.
- Wu, J., 2009. 'An alternative approach to microplane theory'. *Mechanics of Materials*, vol. 41, pp. 87–105.

- Wu, J. e Li, J., (2006), On a new framework for anisotropic damage model, *in* e. Mota Soares, C. A., ed., ‘Proceedings of III European Conference on Computational Mechanics’, Lisboa, Portugal.
- Wu, J. e Li, J., (2007), Stress-based elastic anisotropic unilateral degradation model for concrete, *in* e. Carpinteri, A., ed., ‘Proceedings of VI International Conference on Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures’, FraMCoS-6 Conference, Catania, Itália.
- Wu, J. e Li, J., 2008. ‘On the mathematical and thermodynamical descriptions of strain equivalence based anisotropic damage model’. *Mechanics of Materials*, vol. 40, pp. 377–400.
- Yang, Y. B. e Shieh, M. S., 1990. ‘Solution method for nonlinear problems with multiple critical points’. *AIAA Journal*, vol. 28, pp. 2110–2116.
- Yang, Y. B. e S.R.Kuo, 1994. *Theory and Analysis of Nonlinear Framed Structures*. Springer-Verlag, Cingapura.

Apêndice A

Organização Tensorial para os Modelos de Microplanos

Verificou-se no Capítulo 4 que o Modelo de Microplanos proposto por Leukart e Ramm (2006) formulado segundo o Ambiente Teórica e Computacional Unificado de Penna (2011) foi descrito em notação indicial a fim de ser explicitamente visualizado em seu formato final de implementação. Este formato indicial teve por objetivo empregar a interface *ToTensor*, implementada no sistema *INSANE*, na qual todas as operações tensoriais são efetuadas com o intuito de aliar ganho computacional e consistência matemática para a obtenção de um funcionamento otimizado de modelos constitutivos em um ambiente unificado.

A seguir são explicitados todos os tensores empregados para a formulação unificada do Modelo de Microplanos proposto por Leukart e Ramm (2006), a fim de ampliar o entendimento deste modelo.

A.1 Tensor Identidade

O tensor identidade de segunda ordem \mathcal{I} é obtido com base nas condições para o *Delta de Kronecker*, δ_{ij} , resultando no tensor \mathcal{I} na forma:

$$\mathcal{I} = \delta_{ij} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

A.4 Parcela Desviadora do Tensor Simétrico

A parcela desviadora do tensor simétrico de quarta ordem \mathcal{I}_{ijkl}^{dev} é escrita como:

$$\mathcal{I}_{ijkl}^{dev} = \mathcal{I}_{ijkl}^{sym} - \mathcal{I}_{ijkl}^{vol}. \quad (\text{A.6})$$

Assim, este tensor tem suas 81 componentes expressas por:

$$\mathcal{I}_{ijkl}^{dev} = \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1/3 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & -1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 2/3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

A.5 Tensor de Projeção Volumétrico

O tensor de projeção volumétrico de segunda ordem \mathcal{V}_{ij} é expresso como:

$$\mathcal{V}_{ij} = \frac{1}{3} [\delta_{ij}]. \quad (\text{A.8})$$

Todas as componentes deste tensor são explicitadas na equação A.9:

$$\mathcal{V}_{ij} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

Já o tensor de projeção volumétrico de quarta ordem \mathcal{V}_{ijkl} é obtido a partir das componentes da equação A.10:

$$\mathcal{V}_{ijkl} = \frac{1}{9} [\delta_{ij} \otimes \delta_{kl}]_{ijkl} \Rightarrow \mathcal{V}_{ijkl} = \frac{1}{9} [\delta_{ij} \delta_{kl}]. \quad (\text{A.10})$$

As componentes deste tensor são escritas como:

$$\mathcal{V}_{ijkl} = \begin{bmatrix} 1/9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/9 \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

A.6 Tensor de Projeção Desviador

O tensor de projeção desviador de terceira ordem \mathcal{D}_{pkl} é obtido por:

$$\mathcal{D}_{pkl} = n_p \mathcal{I}_{ijkl}^{dev}. \quad (\text{A.12})$$

Portanto, expandindo as 27 componentes deste tensor, tem-se:

$$\mathcal{D}_{pkl} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}n_1 & \frac{1}{2}n_2 & \frac{1}{2}n_3 & -\frac{1}{3}n_2 & \frac{1}{2}n_1 & 0 & -\frac{1}{3}n_3 & 0 & \frac{1}{2}n_1 \\ \frac{1}{2}n_2 & -\frac{1}{3}n_1 & 0 & \frac{1}{2}n_1 & \frac{2}{3}n_2 & \frac{1}{2}n_3 & 0 & -\frac{1}{3}n_3 & \frac{1}{2}n_2 \\ \frac{1}{2}n_3 & 0 & -\frac{1}{3}n_1 & 0 & \frac{1}{2}n_3 & -\frac{1}{3}n_2 & \frac{1}{2}n_1 & \frac{1}{2}n_2 & \frac{2}{3}n_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

Já o tensor de projeção desviador de quarta ordem \mathcal{D}_{ijkl} é expresso por:

$$\mathcal{D}_{ijkl} = [\mathcal{D} : \mathcal{D}]_{ijkl} \Rightarrow \mathcal{D}_{ijkl} = \mathcal{D}_{pij} \mathcal{D}_{pkl}. \quad (\text{A.14})$$

Suas componentes não serão apresentadas em virtude deste produto tensorial ter como incógnita a normal n_p , elevando sua representação em termos ilustrativos. Cabe enfatizar que este tensor é simétrico, uma vez que tem origem na parcela desviadora oriunda do tensor simétrico \mathcal{I}_{ijkl}^{sym} .

Apêndice B

Obtenção dos Parâmetros de Dano

O Modelo de Microplanos implementado neste trabalho, no âmbito do Ambiente Teórico e Computacional para Modelos Constitutivos desenvolvido em Penna (2011), pode assumir diversas variações da função de evolução do dano, que podem ser combinadas ainda com distintas medidas de deformação equivalente.

Para tanto, a obtenção dos parâmetros para a caracterização de um dado material, para estas várias combinações possíveis, foi realizada a partir de simulações de tração dominante, de modo a correlacionar as propriedades do material em termos de seu módulo de elasticidade inicial (E_0), coeficiente de *Poisson* (ν), resistência à tração (σ_t) e de sua energia de fratura (G_f).

Todos os materiais simulados neste trabalho seguiram este procedimento. Para ilustrar esta questão, são descritos os procedimentos para obtenção dos parâmetros do material simulado por Álvares (1993) via Modelo de Mazars (1984), cujos parâmetros foram apresentados na Tabela 6.14.

Assim, admite-se inicialmente um ensaio de tração pura para a função de dano exponencial e para a medida de deformação definida por de Vree et al. (1995). A trajetória de equilíbrio obtida deve ser capaz de descrever os parâmetros correlacionados com as propriedades do material, dito anteriormente. Assim, uma vez alcançada uma curva representativa deste material, pode-se ajustar as trajetórias para as demais funções de evolução do dano.

A partir deste procedimento, os parâmetros numéricos e experimentais adotados

por Álvares (1993) foram parametrizados com os resultados para as trajetórias de equilíbrio apresentados na Figura B.1.

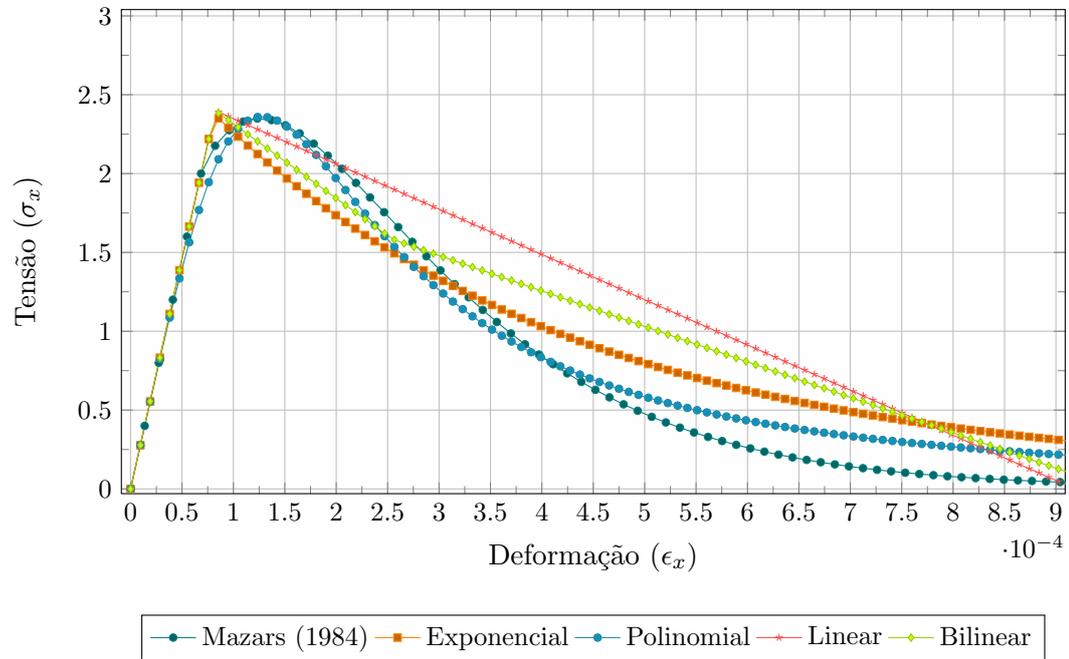


Figura B.1: Resultados de tração pura para a medida de Vree et al. (1995) e todas as funções de dano, parametrizadas a partir do material simulado por Álvares (1993) para o Modelo de Mazars (1984).

A apresentação dos ajustes realizados para o material ensaiado por Álvares (1993) servem de analogia para a obtenção dos demais materiais parametrizados para os exemplos simulados no Capítulo 6.

Apêndice C

Integração Numérica

Para a obtenção das componentes dos tensores constitutivos secante, E_{ijkl}^{sec} , e tangente, E_{ijkl}^{tan} , é necessário efetuar uma integração sobre uma semi-esfera. Esta integração é realizada numericamente por meio da soma dos valores da função a ser integrada em um número de pontos da semi-esfera (Figura C.1) e processada por meio da equação:

$$\int_{\Omega} F d\Omega \approx 4\pi \sum_{k=1}^{nmp} F_k \omega_k, \quad (C.1)$$

em que o índice k representa cada um dos microplanos usados na integração e ω_k é o peso da integração numérica para cada microplano.

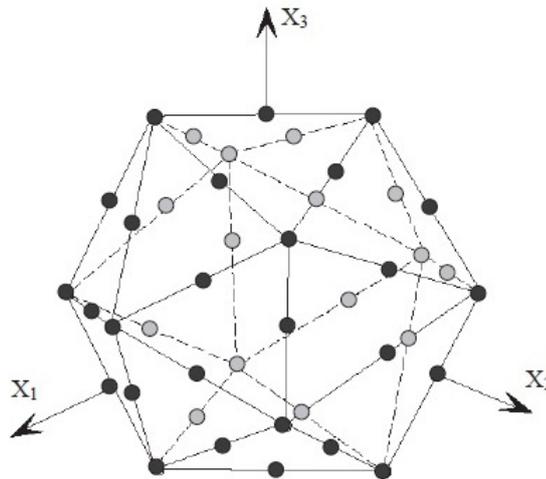


Figura C.1: Discretização espacial de uma esfera (Kuhl et al., 2001).

Estudos realizados por Bažant e Oh (1985) mostram que um total de 21 pontos de integração distribuídos sobre a superfície da semi-esfera são suficientes para a

obtenção das grandezas. Neste trabalho, foram testadas duas formas de integração numérica: com 21 pontos de integração sem simetria ortogonal e com 33 pontos de integração, conforme descrição das Tabelas C.1 e C.2, respectivamente. Em virtude do menor tempo para processamento numérico durante as simulações deste trabalho, optou-se pelo uso da integração com 21 pontos de integração, tendo em vista que os resultados das simulações pouco se alteraram.

Tabela C.1: Coordenadas e pesos para a integração numérica sobre uma semi-esfera com 21 pontos de integração - sem simetrias ortogonais (Bažant e Oh, 1985).

k_i	n_1	n_2	n_3	ω_k
1	0,187592474085	0	0,982246946377	0,0198412698413
2	0,794654472292	-0,525731112119	0,303530999103	0,0198412698413
3	0,794654472292	0,525731112119	0,303530999103	0,0198412698413
4	0,187592474085	-0,850650808352	-0,491123473188	0,0198412698413
5	0,794654472292	0	-0,607061998207	0,0198412698413
6	0,187592474085	0,850650808352	-0,491123473188	0,0198412698413
7	0,577350269190	-0,309016994375	0,755761314076	0,0253968253968
8	0,577350269190	0,309016994375	0,755761314076	0,0253968253968
9	0,934172358963	0	0,356822089773	0,0253968253968
10	0,577350269190	-0,809016994375	-0,110264089708	0,0253968253968
11	0,934172358963	-0,309016994375	-0,178411044887	0,0253968253968
12	0,934172358963	0,309016994375	-0,178411044887	0,0253968253968
13	0,577350269190	0,809016994375	-0,110264089708	0,0253968253968
14	0,577350269190	-0,50	-0,645497224368	0,0253968253968
15	0,577350269190	0,50	-0,645497224368	0,0253968253968
16	0,356822089773	-0,809016994375	0,467086179481	0,0253968253968
17	0,356822089773	0	-0,934172358963	0,0253968253968
18	0,356822089773	0,809016994375	0,467086179481	0,0253968253968
19	0	-0,50	0,866025403784	0,0253968253968
20	0	0,50	-0,866025403784	0,0253968253968
21	0	1,0	0	0,0253968253968

Tabela C.2: Coordenadas e pesos para a integração numérica sobre uma semi-esfera com 33 pontos de integração (Bažant e Oh, 1985).

k_i	n_1	n_2	n_3	ω_k
1	1,0	0	0	0,0098535399343
2	0	1,0	0	0,0098535399343
3	0	0	0	0,0098535399343
4	0,707106781187	0,707106781187	0	0,0162969685886
5	0,707106781187	-0,707106781187	0	0,0162969685886
6	0,707106781187	0	0,707106781187	0,0162969685886
7	0,707106781187	0	-0,707106781187	0,0162969685886
8	0	0,707106781187	0,707106781187	0,0162969685886
9	0	0,707106781187	-0,707106781187	0,0162969685886
10	0,933898956394	0,357537045978	0	0,0134788844008
11	0,933898956394	-0,357537045978	0	0,0134788844008
12	0,357537045978	0,933898956394	0	0,0134788844008
13	0,357537045978	-0,933898956394	0,357537045978	0,0134788844008
14	0,933898956394	0	-0,645497224368	0,0134788844008
15	0,93389895639	0	-0,357537045978	0,0134788844008
16	0,3575370459783	0	0,93389895639	0,0134788844008
17	0,357537045978	0	-0,93389895639	0,0134788844008
18	0	0,93389895639	0,357537045978	0,0134788844008
19	0	0,93389895639	-0,357537045978	0,0134788844008
20	0	0,357537045978	0,93389895639	0,0134788844008
21	0	0,357537045978	-0,93389895639	0,0134788844008
22	0,437263676092	0,437263676092	0,785875915868	0,0175759129880
23	0,437263676092	0,437263676092	-0,785875915868	0,0175759129880
24	0,437263676092	-0,437263676092	0,785875915868	0,0175759129880
25	0,437263676092	-0,437263676092	-0,785875915868	0,0175759129880
26	0,437263676092	0,785875915868	0,437263676092	0,0175759129880
27	0,437263676092	0,785875915868	-0,437263676092	0,0175759129880
28	0,437263676092	-0,785875915868	0,437263676092	0,0175759129880
29	0,437263676092	-0,785875915868	-0,437263676092	0,0175759129880
30	0,785875915868	0,437263676092	0,437263676092	0,0175759129880
31	0,785875915868	0,437263676092	-0,437263676092	0,0175759129880
32	0,785875915868	-0,437263676092	0,437263676092	0,0175759129880
33	0,785875915868	-0,437263676092	-0,437263676092	0,0175759129880

Apêndice D

Condições de Carregamento, Descarregamento e Recarregamento

O processo de degradação no ponto material pode ser avaliado pelas condições de carregamento, descarregamento e recarregamento no decorrer da análise numérica. Para uma avaliação com estado contínuo de carregamento, o material transpõe o regime elástico e atinge o inelástico com o avanço do dano até a ruptura da estrutura.

Segundo Penna (2011), esta é uma análise simplista que admite uma degradação uniforme de todo o domínio, porém se a análise do meio material for realizada ponto a ponto, pode-se descrever diferentes comportamentos para estes pontos, relacionando-os ao estado de tensão ou deformação e ao comportamento e histórico da análise, de modo a refletir diretamente no estado global da estrutura.

Neste sentido, a avaliação dos estados de carregamento, descarregamento ou recarregamento do material pode ser realizada por intermédio das condições de *Kuhn-Tucker*, fundamentadas nas funções de carregamento e nas variáveis históricas do modelo constitutivo em questão.

Assim, as condições de *Kuhn-Tucker*, complementaridade e de consistência, descritas na equação (3.38) para o modelo proposto por Leukart e Ramm (2006), para cada ponto material (microplano), são novamente apresentadas na forma:

$$\Phi^{mic} \leq 0, \quad \dot{\kappa}^{mic} \geq 0, \quad \Phi^{mic} \dot{\kappa}^{mic} = 0 \quad e \quad \dot{\Phi}^{mic} \dot{\kappa}^{mic} = 0, \quad (D.1)$$

em que Φ^{mic} é a função de carregamento e $\dot{\kappa}^{mic}$ é a taxa de variação da variável histórica de dano. A função de carregamento, Φ^{mic} , denotada pela equação (3.36), é novamente expressa por:

$$\Phi^{mic} = \eta^{mic} - \kappa^{mic}(d^{mic}) \leq 0 , \quad (D.2)$$

onde η^{mic} representa a medida de deformação equivalente e $\kappa^{mic}(d^{mic})$ denota a variável histórica da evolução do dano.

A partir da função Φ^{mic} , portanto, pode-se obter os estados de comportamento da estrutura para os regimes de carregamento elástico e inelástico, descarregamento e recarregamento para o modelo em questão.

A medida de deformação é dada por η^{mic} e a variável histórica é atribuída ao maior valor já atingido por κ^{mic} durante a análise (equação 3.37). É necessário ainda, conhecer os valores de η^{mic} , κ^{mic} e Φ^{mic} do estado anterior para se determinar os valores do estado corrente. Assim, tem-se:

$$\dot{\Phi}^{mic} = \Phi_i^{mic} - \Phi_{i-1}^{mic} , \quad (D.3)$$

e

$$\dot{\kappa}^{mic} = \kappa_i^{mic} - \kappa_{i-1}^{mic} . \quad (D.4)$$

Sendo assim, para o regime linear elástico, a variável κ^{mic} é igualada ao valor inicial da variável histórica, ou seja, $\kappa^{mic} = \kappa_0^{mic}$. Logo, como o valor de η^{mic} não atingiu valores superiores aos admitidos para o domínio elástico, as condições de *Kuhn-Tucker* são dadas, sequencialmente, pelo conjunto de condições:

$$\Phi_{i-1}^{mic} = \eta_{i-1}^{mic} - \kappa_0^{mic} < 0 \quad e \quad \Phi_i^{mic} = \eta_i^{mic} - \kappa_0^{mic} < 0 \quad \rightarrow \quad \Phi^{mic} < 0 , \quad (D.5)$$

$$|\Phi_{i-1}^{mic}| > |\Phi_i^{mic}| \quad \rightarrow \quad \dot{\Phi}^{mic} > 0 , \quad (D.6)$$

e,

$$\kappa_{i-1}^{mic} = \kappa_i^{mic} = \kappa_0^{mic} \quad \rightarrow \quad \dot{\kappa}^{mic} = \kappa_i^{mic} - \kappa_{i-1}^{mic} = 0 . \quad (D.7)$$

A Figura D.1 ilustra estas condições para o regime de carregamento elástico.

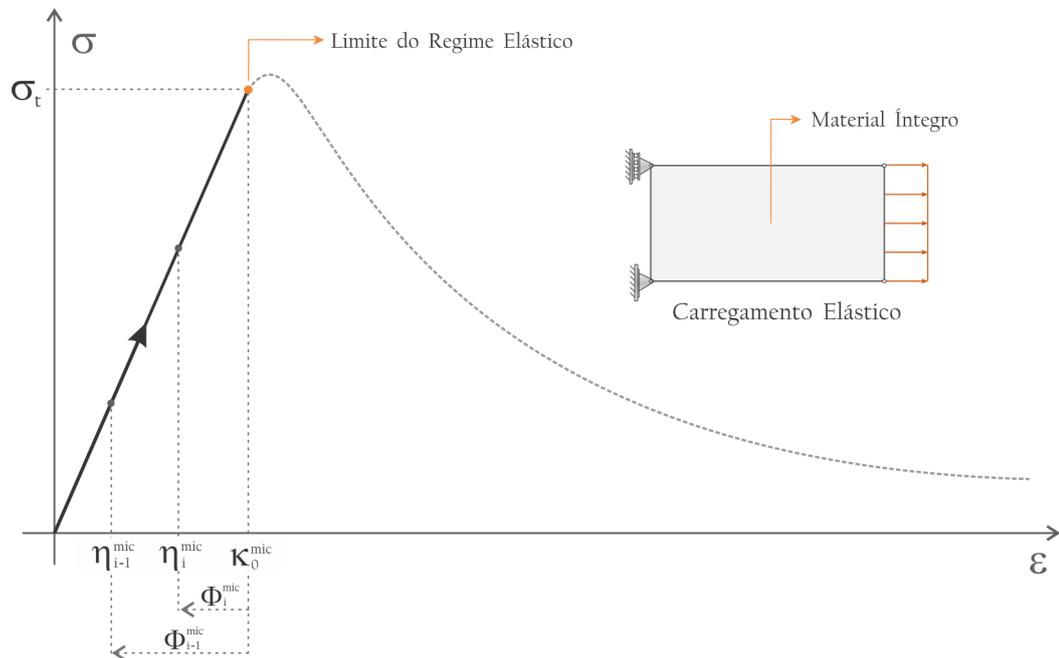


Figura D.1: Regime de carregamento no domínio elástico.

O regime inelástico é alcançado quando a variável κ^{mic} supera o valor de κ_0^{mic} e é atualizada com os novos valores obtidos para a medida η^{mic} . A Figura D.2 apresenta o regime inelástico de carregamento com dano.

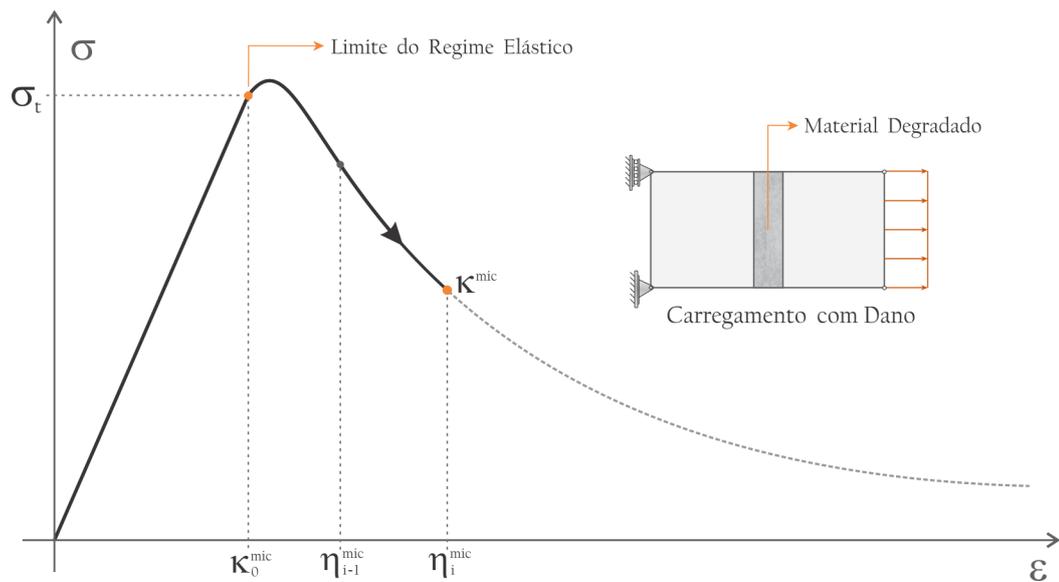


Figura D.2: Regime inelástico de carregamento com dano.

Com o estado de carregamento inelástico iniciado, as condições de *Kuhn-Tucker*

são expressas por:

$$\Phi_{i-1}^{mic} = \eta_{i-1} - \kappa^{mic} = 0 \quad e \quad \Phi_i^{mic} = \eta_i - \kappa^{mic} = 0 \rightarrow \Phi^{mic} = 0, \quad (D.8)$$

$$|\Phi_{i-1}^{mic}| = |\Phi_i^{mic}| = 0 \rightarrow \dot{\Phi}^{mic} = 0, \quad (D.9)$$

e,

$$\kappa^{mic} = \kappa_i^{mic} = \eta_i^{mic} \quad e \quad \kappa_i^{mic} > \kappa_{i-1}^{mic} \rightarrow \dot{\kappa}^{mic} = \kappa_i^{mic} - \kappa_{i-1}^{mic} > 0. \quad (D.10)$$

Para os Modelos de Microplanos, as condições de *Kuhn-Tucker* são avaliadas no nível do ponto material, o que leva a uma consideração anisotrópica do comportamento da estrutura, ou seja, enquanto um microplano entra em regime de carregamento elástico, outro pode estar em regime inelástico de carregamento com dano ou, ainda, em regime de descarregamento ou recarregamento.

A Figura D.3 ilustra tais condições para o regime de descarregamento. Verifica-se que o descarregamento também pode ocorrer no regime linear elástico e as condições de carregamento, neste caso, são usadas com a inserção da condição que $\kappa^{mic} = \kappa_0^{mic}$.

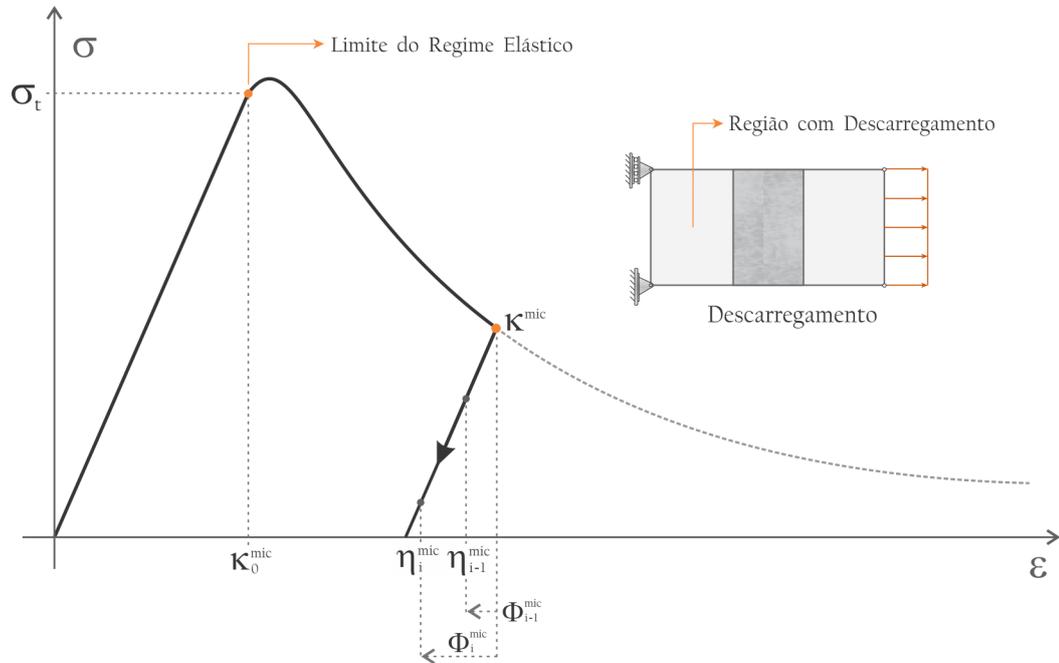


Figura D.3: Regime de descarregamento.

Sendo assim, para o regime de descarregamento, as condições de *Kuhn-Tucker* são expressas na forma:

$$\Phi_{i-1}^{mic} = \eta_{i-1} - \kappa^{mic} < 0 \quad e \quad \Phi_i^{mic} = \eta_i - \kappa^{mic} < 0 \quad \rightarrow \quad \Phi^{mic} < 0, \quad (D.11)$$

$$|\Phi_{i-1}^{mic}| < |\Phi_i^{mic}| \quad \rightarrow \quad \dot{\Phi}^{mic} < 0, \quad (D.12)$$

e,

$$\kappa_i^{mic} = \kappa_{i-1}^{mic} = \kappa^{mic} \quad \rightarrow \quad \dot{\kappa}^{mic} = \kappa_i^{mic} - \kappa_{i-1}^{mic} = 0. \quad (D.13)$$

Por fim, a Figura D.4 ilustra que o regime de recarregamento é semelhante ao carregamento elástico, embora para um estado de deformação mais avançado.

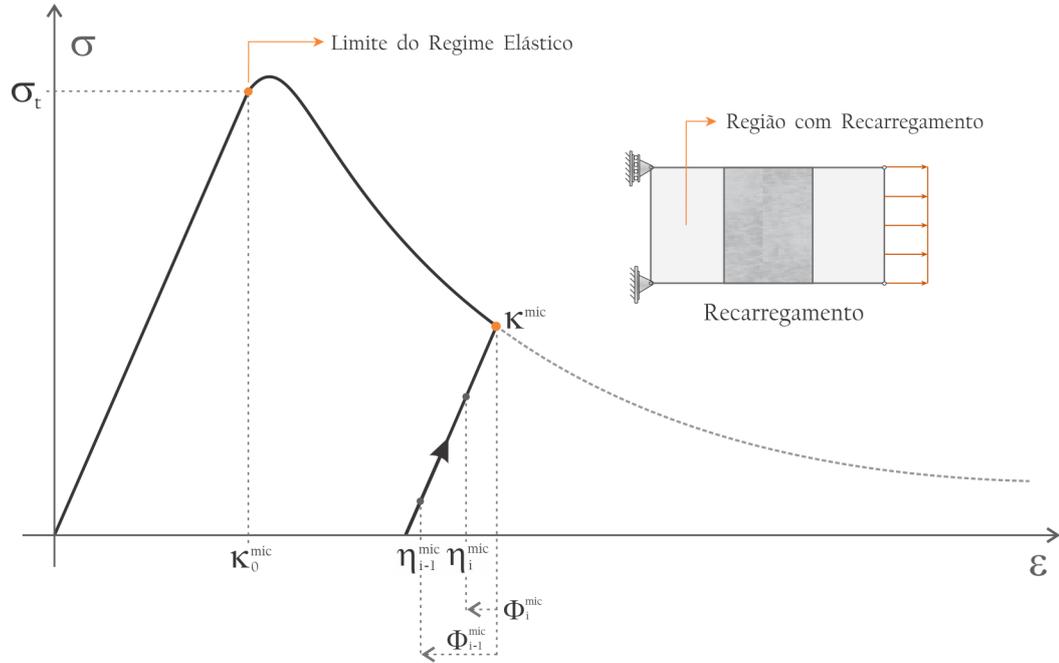


Figura D.4: Regime de recarregamento.

Sendo assim, o regime de recarregamento leva as seguintes condições:

$$\Phi_{i-1}^{mic} = \eta_{i-1} - \kappa^{mic} < 0 \quad e \quad \Phi_i^{mic} = \eta_i - \kappa^{mic} < 0 \quad \rightarrow \quad \Phi^{mic} < 0, \quad (D.14)$$

$$|\Phi_{i-1}^{mic}| > |\Phi_i^{mic}| \quad \rightarrow \quad \dot{\Phi}^{mic} > 0, \quad (D.15)$$

e,

$$\kappa_{i-1}^{mic} = \kappa_i^{mic} = \kappa^{mic} \quad \rightarrow \quad \dot{\kappa}^{mic} = \kappa_i^{mic} - \kappa_{i-1}^{mic} = 0. \quad (D.16)$$

A partir do conjunto de condições apresentadas para cada regime de carregamento obtém-se, em síntese, as condições de carregamento elástico e inelástico, descarregamento e recarregamento, expressas sequencialmente pelas condições:

Carregamento Elástico:

$$\Phi^{mic} < 0; \quad \dot{\Phi}^{mic} > 0; \quad \kappa^{mic} = \kappa_0^{mic}; \quad \dot{\kappa}^{mic} = 0, \quad (D.17)$$

Carregamento Inelástico:

$$\Phi^{mic} = 0; \quad \dot{\Phi}^{mic} = 0; \quad \kappa^{mic} > \kappa_0^{mic}; \quad \dot{\kappa}^{mic} > 0, \quad (D.18)$$

Descarregamento:

$$\Phi^{mic} < 0; \quad \dot{\Phi}^{mic} < 0; \quad \kappa^{mic} > \kappa_0^{mic}; \quad \dot{\kappa}^{mic} = 0, \quad (D.19)$$

Recarregamento:

$$\Phi^{mic} < 0; \quad \dot{\Phi}^{mic} > 0; \quad \kappa^{mic} > \kappa_0^{mic}; \quad \dot{\kappa}^{mic} = 0. \quad (D.20)$$

Por fim, tais condições devem ser satisfeitas em conjunto com as condições de complementaridade e de consistência, ou seja:

$$\Phi^{mic} \dot{\kappa}^{mic} = 0 \quad e \quad \dot{\Phi}^{mic} \dot{\kappa}^{mic} = 0. \quad (D.21)$$

Apêndice E

Histórico do Sistema INSANE e a Organização do Núcleo Numérico

O Projeto Orientado a Objetos (POO) do sistema INSANE foi apresentado no Capítulo 5, com ênfase nas classes e métodos criados ou modificados no decorrer do desenvolvimento desta dissertação.

Com intuito de descrever mais detalhadamente as classes usadas direta ou indiretamente nas simulações, será apresentado um complemento ao POO do INSANE, além de um breve histórico sobre este sistema computacional.

E.1 Contexto Histórico do Sistema INSANE

As pesquisas acerca da mecânica computacional do concreto possuem um contexto histórico no âmbito da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG). Idealizados inicialmente por Pitangueira (1991) e Pitangueira (1998), tais trabalhos possibilitaram a inserção das primeiras pesquisas sobre a modelagem constitutiva do concreto nessa instituição.

No que tange os Modelos Constitutivos de Microplanos, os primeiros estudos tiveram início com o trabalho de Silva (2001), que implementou a Teoria dos Microplanos para análise fisicamente não linear de estruturas de concreto. Este trabalho foi implementado no sistema FEMOOP (*Finite Element Method - Object Oriented Program*), desenvolvido pelo Departamento de Engenharia Civil da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio).

O trabalho de Fuina (2004) possibilitou a implementação dos métodos de controle clássicos, além de propor o Método de Controle de Deformações, de modo a ampliar os métodos incrementais-iterativos disponíveis no FEMOOP, considerados imprescindíveis para a resolução de problemas não lineares.

Estes trabalhos demonstraram a necessidade de um novo sistema para análise estrutural e a criação do INSANE possibilitou o desenvolvimento de uma plataforma com código aberto, de modo a fornecer um importante aporte computacional para a concepção de trabalhos como Fonseca et al. (2004), Gonçalves (2004), Pitanguera e Caldas (2005), Almeida (2005), Germanio (2005), Fonseca (2006), Moreira (2006), Penna (2007), Saliba (2007), Camara (2007), Ferreira (2008), Fonseca (2008), Ajeje (2009), Fuina (2009), Penna (2011), Anacleto et al. (2011), Alves (2012), Silva (2012), e dos atualmente em desenvolvimento.

Tais trabalhos permitiram a ampliação do núcleo numérico do sistema computacional INSANE em diversas funções, sejam estas voltadas ao ensino da análise estrutural nas disciplinas de engenharia ou vinculadas à pesquisa na área da mecânica computacional de estruturas.

E.2 Detalhamento do Núcleo Numérico do INSANE

O núcleo numérico do sistema INSANE será apresentado, nesta seção, com ênfase nos aspectos mais relevantes de suas interfaces e classes através de ilustrações com diagramas de classe em *Unified Modeling Language* (UML).

E.2.1 Interface Assembler

A interface `Assembler` é detentora dos métodos necessários para a montagem das matrizes e vetores do sistema visto na equação (5.1) e que pode ser simplificado para o caso estático da mecânica dos sólidos para a equação (5.2). Esta interface é implementada por `FemAssembler`, que possui a hierarquia necessária para os diversos tipos de problemas modelados via MEF. A classe `FemAssembler`, por sua vez, possui

como atributo um objeto do tipo `Model`, entendido como o modelo de elementos finitos para o qual se deve montar este sistema de equações.

Na Figura E.1 são ilustrados alguns métodos da interface `Assembler`, que fornecem quaisquer parcelas do sistema matricial da equação (5.2). Os métodos `init()` e `update()` fazem parte do processo para a análise não linear, como forma de acionar o mecanismo de propagação de mudanças `Observer` para um correta persistência dos dados. Já os métodos `getC()`, `getTotalC()` e `getIncrementalC()` são responsáveis por fornecer a matriz de rigidez, respectivamente, para os equilíbrios elástico, secante ou tangente, a partir das parcelas da matriz C dadas na equação (5.2).

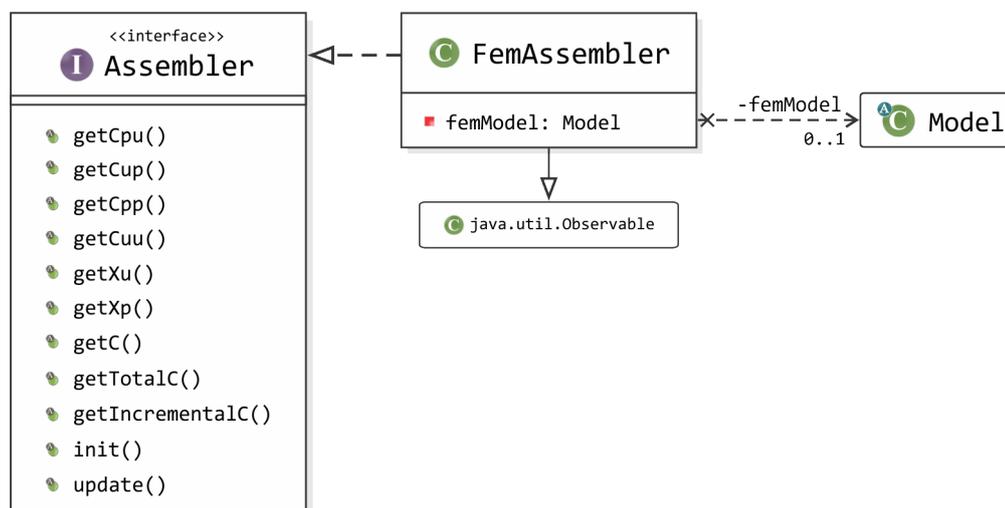


Figura E.1: Diagrama de classe para `Assembler`.

E.2.2 Classe Abstrata `Solution`

A partir da montagem das parcelas da equação (5.2), a solução da mesma é repassada para a classe `Solution`, que possui o método `execute()`, responsável pelo início do processo de solução, repassado como herança para as classes especializadas da solução, conforme ilustra a Figura E.2. Dentre as classes que implementam `Solution`, a classe abstrata `EquilibriumPath` é responsável pela solução de problemas não lineares por meio de um processo incremental-iterativo.

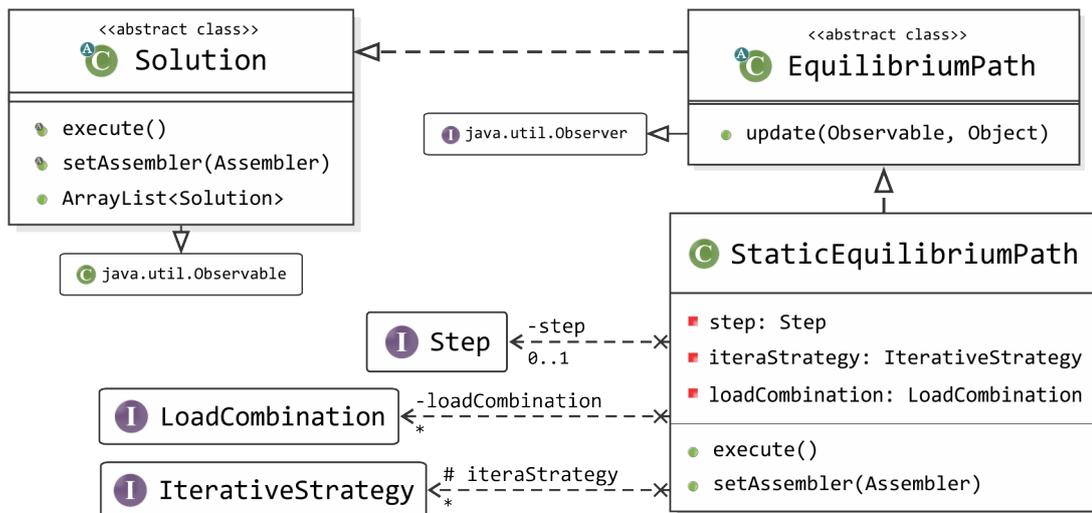


Figura E.2: Diagrama de classe para Solution.

A classe `StaticEquilibriumPath`, herdeira de `EquilibriumPath`, especializa as soluções não lineares para o caso estático. Para tanto, esta classe possui um objeto do tipo `Step`, responsável pelos métodos necessários à execução de um passo incremental da análise não linear, além de uma lista de instâncias do tipo `IterativeStrategy`, que especifica o método de controle a ser adotado para a solução.

Destaca-se na Figura E.3, os dois métodos de controle mais usados nesta dissertação, sendo os métodos de controle direto de deslocamentos (`DisplacementControl`) e de controle de deslocamentos generalizado (`GeneralizedDisplacementControl`).

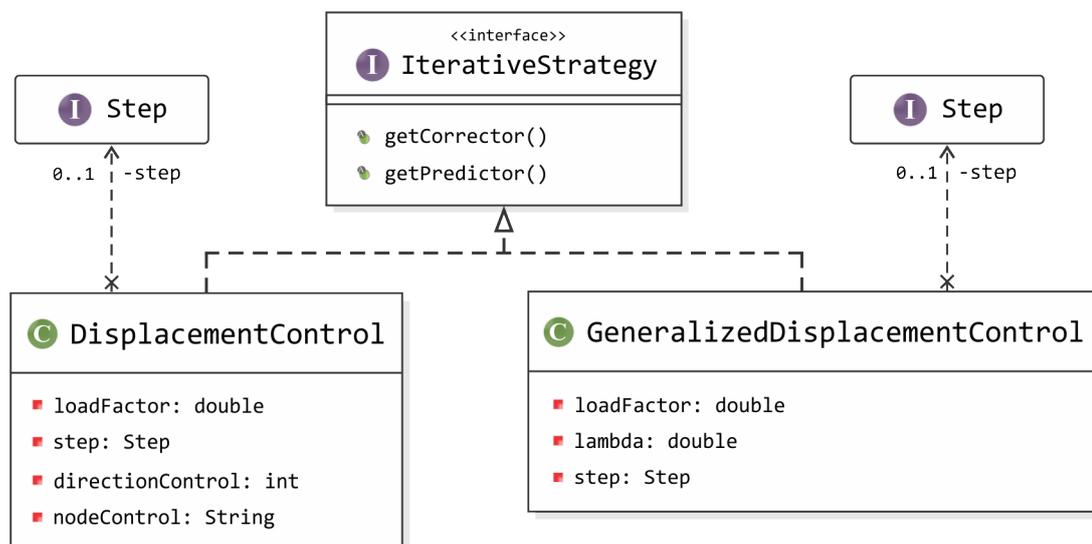


Figura E.3: Diagrama de classe para IterativeStrategy.

A interface `Step` é implementada pela classe `StandardNewtonRaphson`, que denota a implementação do método padrão de *Newton-Raphson*, empregado nas soluções das simulações numéricas desta dissertação.

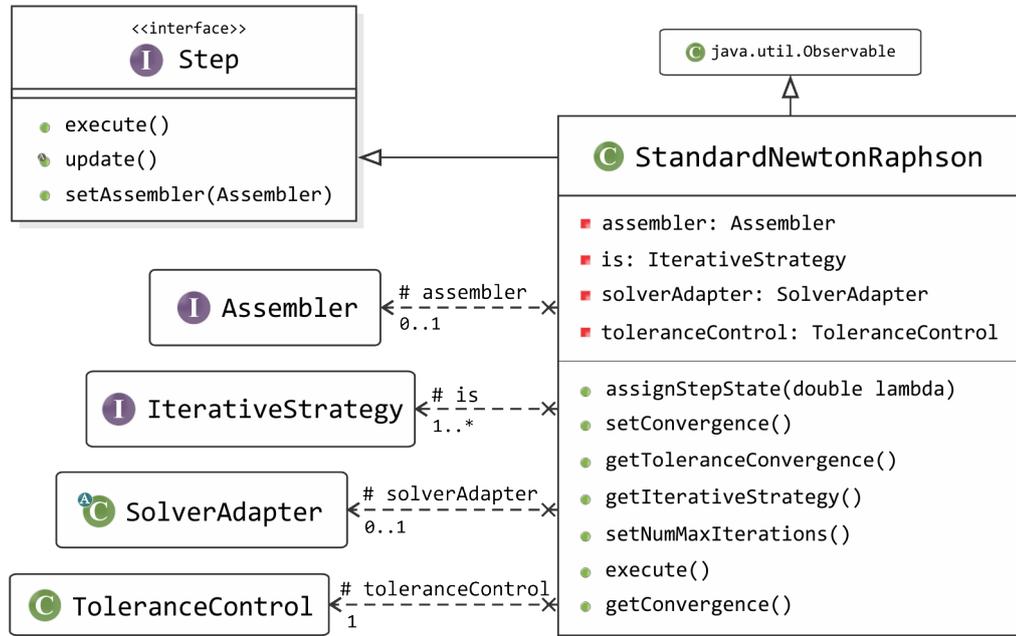


Figura E.4: Diagrama de classe para `Step`.

E.2.3 Classe Abstrata Model

A classe abstrata `Model` representa o modelo discreto a ser analisado. Dentre as classes que implementam `Model`, a fim de representar de modo mais geral um dado modelo, podem ser citadas várias listas de objetos que caracterizam o modelo e se comunicam a partir de métodos de acesso e manipulação destas listas.

A classe `FemModel` implementa `Model` com intuito de representar um modelo em termos do MEF. Assim, um objeto `FemModel` possui listas de nós, elementos, funções de forma, carregamentos, modelos de análise, materiais, modelos constitutivos, degenerações, além de possuir duas instâncias, sendo um modelo do tipo `AnalysisModel` e um objeto `ProblemDriver`, conforme ilustra a Figura E.5.

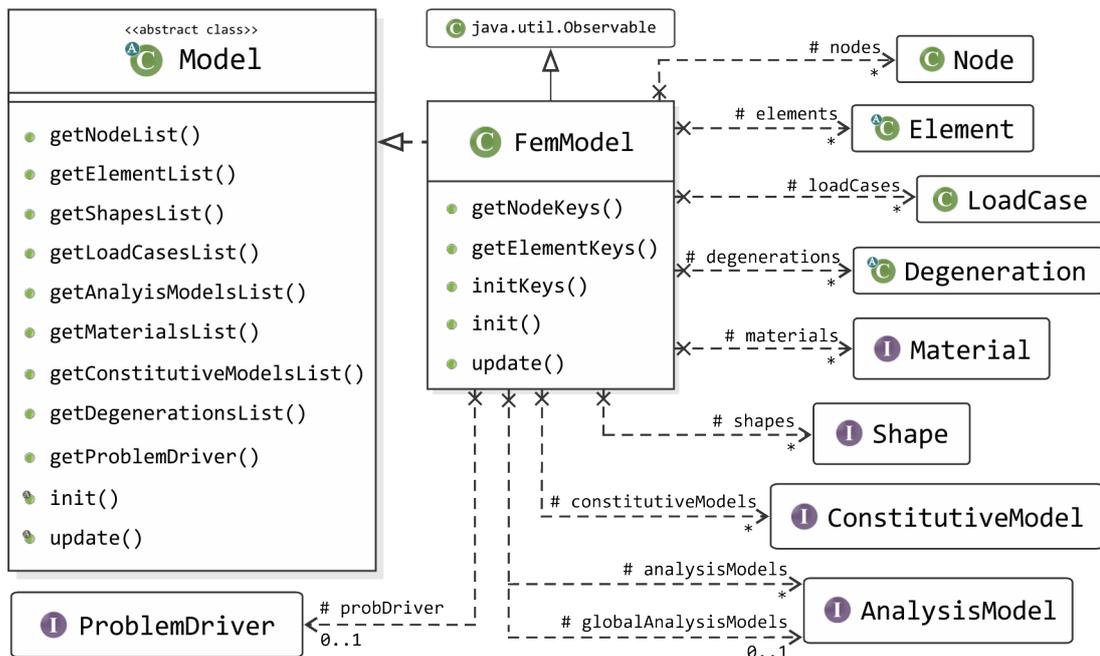


Figura E.5: Diagrama de classe para Model.

A classe `Element` possui listas de `ElementNode` e `Degeneration` que representam sua incidência e seus pontos de integração e constituições geométrica e física. Ela possui ainda objetos de `AnalysisModel`, `Shape` e `ConstitutiveModel` que representam, respectivamente, o modelo de análise, a função de forma e o modelo constitutivo, além de um objeto `ProblemDriver`, que armazena informações relativas ao tipo de problema que o elemento modela.

A classe `Element` é estendida pela classe `ParametricElement`, que particulariza sua representação para os elementos finitos paramétricos. Esta, por sua vez, herda todos os atributos de `Element` e um objeto `IntegrationOrder`, que denota sua ordem de integração numérica, como ilustrado na Figura E.6.

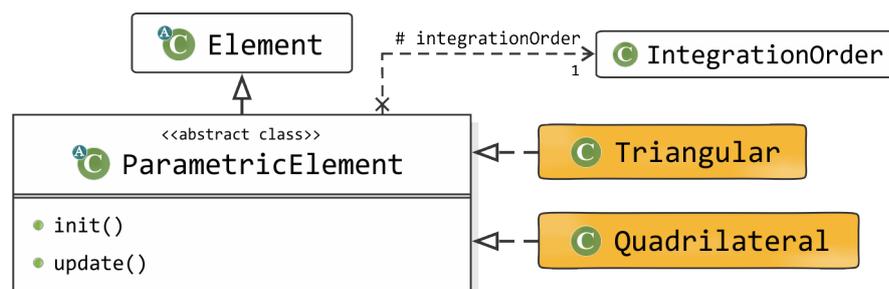


Figura E.6: Diagrama de classe para ParametricElement.

Em sua hierarquia, as classes que representam os elementos finitos paramétricos são separadas de acordo com sua geometria, sendo os elementos paramétricos unidimensionais, planos triangulares ou quadrilaterais e sólidos tetraédricos ou hexaédricos. Nesta dissertação, as classes `Triangular` e `Quadrilateral` receberam objetos da degeneração do tipo `UnifiedMicroplaneDegeneration`, para o uso de quaisquer Modelos de Microplanos implementados.

Já a interface `ProblemDriver` é detentora dos métodos que informam a `Assembler` as parcelas de cada elemento na equação do modelo, sejam estas elásticas, incrementais ou totais. Em sua hierarquia são representados diferentes tipos de problemas para distintas formulações de modelos discretos, o que torna a classe `Element` genérica e independente do problema que representa.

Na Figura E.7 é representada a classe `PhysicallyNonLinear`, que implementa a interface `ProblemDriver`, a fim de particularizar o problema para a análise fisicamente não linear, temática central desta dissertação.

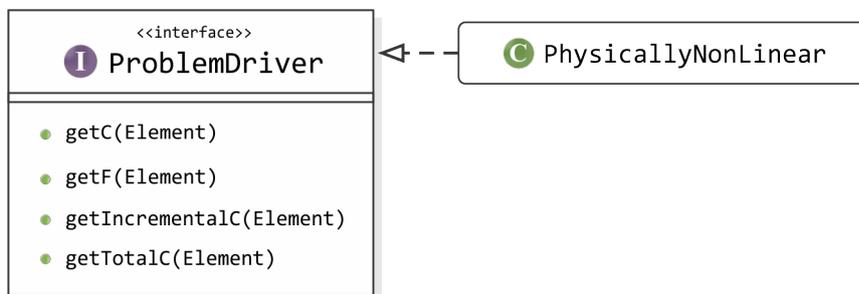


Figura E.7: Diagrama de classe para `ProblemDriver`.

Por fim, as funções de forma dos elementos finitos são agrupadas na hierarquia da interface `Shape`, que possui métodos responsáveis por fornecer as funções de forma e suas primeiras e segundas derivadas. Estas funções são divididas de acordo com a geometria, seja esta unidimensional, triangular, quadrilateral, tetraédrica ou hexaédrica. Existe ainda a especialização destas funções conforme o número de nós na incidência dos elementos. O diagrama de classe detalhado para a interface `Shape` é encontrado nos trabalhos de Fonseca (2006) e Fonseca (2008).