

**FRAMEWORK TEÓRICO E COMPUTACIONAL PARA  
ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO:  
IMPLEMENTAÇÃO DE MODELOS DE ARMADURA E ADERÊNCIA**

**Saulo Silvestre de Castro**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

**FRAMEWORK TEÓRICO E COMPUTACIONAL PARA  
ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO:  
IMPLEMENTAÇÃO DE MODELOS DE ARMADURA E ADERÊNCIA**

**Saulo Silvestre de Castro**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de “Mestre em Engenharia de Estruturas”.

---

Prof. Dr. Roque Luiz da Silva Pitangueira  
DEES - UFMG (Orientador)

---

Prof. Dr. Samuel Silva Penna  
DEES - UFMG (Co-Orientador)

---

Prof. Dr. Felício Bruzzi Barros  
DEES - UFMG

---

Prof. Dr. Americo Campos Filho  
UFRGS-RS

**Belo Horizonte**  
**20 de Dezembro de 2013**

*“É muito melhor lançar-se em busca de conquistas grandiosas, mesmo expondo-se ao fracasso, do que alinhar-se com os pobres de espírito, que nem gozam muito nem sofrem muito, porque vivem numa penumbra cinzenta, onde não conhecem nem vitória, nem derrota.”*

*Theodore Roosevelt.*

# Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço ao maior Engenheiro de todos: Deus. Agradeço-lhe por mais uma vez, ter-me dado força, sabedoria e coragem para enfrentar as diversidades que surgiram ao longo deste trabalho.

Aos meus pais, Geraldo e Laurita, ao meu irmão, Sandro, e a minha esposa, Vanessa, por compreenderem minha ausência, por me encorajarem e acima de tudo, por nunca terem perdido a fé em mim.

Ao Professor Pitangueira, R. L. S, pela sua sabedoria, dedicação e amizade conferida a mim ao longo de minha vida acadêmica.

Ao Professor Penna, S. S., pelo profissionalismo e dedicação demonstrados no decorrer da co-orientação deste trabalho.

Aos professores do PROPEEs pelos ensinamentos acadêmicos.

A minha grande amiga Ana Paula por sempre me motivar a buscar meus sonhos.

Ao tio Magu pelo encorajamento dado.

Aos amigos Anderson, Anelize, Ricardo Lanes e Samuel Lamounier pelas incontáveis horas de estudo e apoio mútuo dado em tantos finais de semana.

A gerência e toda equipe da VLB Engenharia, em especial, aos amigos Antônio (Totôinho), André (Dedé), Luna, Marco, Rafael, Pedro Henrique, Silvana, Felipe pelo tempo cedido, pela compreensão e ensinamentos transmitidos a mim.

A gerência e toda equipe da LPC Engenharia pelo tempo cedido, pela compreensão e pelo apoio dado.

A todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

# Resumo

De Castro, S. S., 2013. Framework Teórico e Computacional para Estruturas de Concreto Armado: Implementação de Modelos de Armadura e Aderência. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.

Com o advento dos computadores digitais, juntamente com o conhecimento acumulado após anos de estudo sobre o comportamento do concreto com e sem armadura, vários modelos numéricos surgiram. Dentre os vários modelos desenvolvidos, os baseados no Método dos Elementos Finitos, mostraram ser poderosas ferramentas para a análise de estruturas de concreto armado, pretendendo e simples. Neste contexto, a inclusão da armadura na análise de estruturas de concreto armado pode ser feita por meio de três modelos distintos: modelos de armadura discreta, modelos de armadura embutida e modelos de armadura distribuída. Nos dois primeiros, o fenômeno da perda de aderência pode ser incluído, tornando-os mais realistas e, conseqüentemente, mais difundidos. A presente dissertação apresenta os modelos de armadura discreta, o modelo de armadura embutida e modelos especiais de mola e de contato para inclusão de perda de aderência. Os modelos apresentados foram incorporados no **INSANE** (**IN**teractive **S**tructural **AN**alysis **E**nvironment), sistema computacional para análise estrutural desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas da UFMG. Vários problemas foram analisados com os modelos incluídos, objetivando validar as implementações realizadas.

**Palavras chaves:** Modelos de Armadura, Modelos para Perda de Aderência, Análise Não-Linear, Método dos Elementos Finitos.

# Abstract

De Castro, S. S., 2013. Theoretical and Computational Framework for Reinforced Concrete Structures: Implementation of Reinforcement and Bond-Slip Models . Master Dissertation, Federal University of Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.

With the advent of digital computers, together with accumulated knowledge after years of study on the behavior of simple and reinforced concrete, several numerical models have been developed. Among several developed models, the models based on the Finite Element Method have shown to be powerful tools for the analysis of reinforced, simple and prestressed concrete structures. In this context, the inclusion of the reinforcement in the analysis of reinforced concrete structures can be made using three different models: smeared reinforcement models, discrete reinforcement models, embedded reinforcement models. In the first two models, the phenomenon of bond-slip can be included, making them more realistic and, therefore, more popular. This dissertation presents the discrete reinforcement models, the embedded reinforcement models and link and contact element to include bond-slip. Those models were incorporated into **INSANE** (**IN**teractive **S**tructural **AN**alysis **E**nvironment), computer system for structural analysis developed at the Department of Structural Engineering of UFMG. Several problems were analyzed using the models included, aiming to validate the implementation made.

**Keywords:** Reinforced Models, Bond-slip Models, Non-Linear Analysis, Finite Element Method.

# Lista de Figuras

2.1	Modelo de armadura discreta bidimensional. . . . .	8
2.2	Modelo de armadura discreta tridimensional. . . . .	9
2.3	Elemento arbitrário com armadura embutida. . . . .	10
2.4	Coordenada normalizada independente ao longo da camada de armadura. . . . .	12
2.5	Elemento tridimensional com armadura embutida. . . . .	18
3.1	Fissuras de aderência. . . . .	26
3.2	Distribuição de tensões. . . . .	27
3.3	Lei constitutiva proposta por Eligehausen et al. (1983). . . . .	29
3.4	Lei constitutiva proposta por Doerr (1988). . . . .	31
3.5	Influência da área lateral da armadura normalizada para $a_r = 0.065$ , correspondente a barra usada nos trabalhos de Doerr (1988). . . . .	32
3.6	Aumento da tensão de aderência em função da tensão lateral na superfície de contato entre a armadura e o concreto. . . . .	34
3.7	Redução da tensão de aderência em função do afastamento $\Delta_t$ entre a matriz de concreto e a armadura. . . . .	34
3.8	Lei proposta por Nilson (1968). . . . .	36
3.9	Lei proposta por Hawkins et al. (1982). . . . .	37
3.10	Modelo de molas para modelos tridimensionais e seu sistema coordenado. . . . .	38
3.11	Elemento de contato com aproximação linear. . . . .	39
3.12	Elemento de contato indeformado. . . . .	44
4.1	Organização do núcleo numérico. . . . .	50
4.2	Classes da solução com a implementação do método de Newton-Raphson. . . . .	53

4.3	Algoritmo genérico proposto por Yang e Shieh (1990). . . . .	54
4.4	Início do processo de execução do método de Newton-Rapshon - Adaptado de Penna (2011). . . . .	55
4.5	Obtenção da rigidez incremental - Penna (2011). . . . .	56
4.6	Integração da rigidez tangente de um elemento - Adaptado de Penna (2011). . . . .	56
4.7	Obtenção da matriz constitutiva tangente para a integração da rigidez incremental. - Adaptado de Penna (2011). . . . .	57
4.8	Atividades de obtenção do vetor de forças internas. - Adaptado de Penna (2011). . . . .	58
4.9	Cálculo das tensões: relações entre degeneração e modelo constitutivo - Adaptado de Penna (2011). . . . .	59
4.10	Diagrama da classe Element. . . . .	60
4.11	Diagrama de classe para Shape. . . . .	62
4.12	Diagrama de classe para ConstitutiveModel. . . . .	64
4.13	Diagrama de classe para ClasseMaterial. . . . .	65
4.14	Diagrama de classe para Classe AnalysisModel. . . . .	68
4.15	Especializações da classe <b>ProblemDriver</b> . . . . .	68
4.16	Diagrama de atividades para obtenção da rigidez incremental em elementos de armadura embutida. . . . .	70
4.17	Diagrama de atividades para obtenção do vetor de cargas nodais equivalentes ao estado de tensão interno em elementos de armadura embutida. . . . .	71
5.1	Chapa quadrada Tracionada. . . . .	73
5.2	Malhas Elaboradas para solucionar o problema Proposto. . . . .	74
5.3	Variação de tensão ao longo da armadura. . . . .	75
5.4	Anel de Concreto com uma camada de aço: (a) Perspectiva, (b) Planta. . . . .	76
5.5	Malha usada por Elwi e Hrudey (1988). . . . .	77
5.6	Resultados de Elwi e Hrudey (1988). . . . .	77
5.7	Malhas Elaboradas para solucionar o problema Proposto. . . . .	78
5.8	Variação da tensão na camada de armadura. . . . .	79
5.9	Escorregamento da armadura - Malha M1. . . . .	80
5.10	Escorregamento da armadura - Malha M2. . . . .	80

5.11	Escorregamento da armadura - Malha M3. . . . .	81
5.12	Tensão de aderência - Malha M1. . . . .	81
5.13	Tensão de aderência - Malha M2. . . . .	82
5.14	Tensão de aderência - Malha M3. . . . .	82
5.15	Escorregamento da camada de armadura. . . . .	83
5.16	Tensão de aderência ao longo da camada de armadura. . . . .	83
5.17	Tensão na camada de armadura - Malha M1. . . . .	84
5.18	Tensão na camada de armadura - Malha M2. . . . .	84
5.19	Tensão na camada de armadura - Malha M3. . . . .	85
5.20	Tensão na camada de Armadura. . . . .	85
5.21	Malha de elementos finitos elaborada. . . . .	86
5.22	Escorregamento da camada de armadura com uso de elemento de molas. . . . .	87
5.23	Tensão de aderência para o modelo com elemento de molas. . . . .	87
5.24	Tensão na camada de armadura para o modelo com elemento de molas. . . . .	88
5.25	Escorregamento ao longo da camada de armadura. . . . .	88
5.26	Tensão ao longo da camada de armadura. . . . .	89
5.27	Geometria do problema proposto. . . . .	90
5.28	Tensão ao longo da camada de armadura - Elwi e Hrudehy (1988). . . . .	90
5.29	Malha elaborada - M1. . . . .	91
5.30	Malha elaborada - M2. . . . .	92
5.31	Variação da tensão ao longo da camada de armadura. . . . .	92
5.32	Malha elaborada. . . . .	93
5.33	Variação das tensões ao longo da camada de armadura. . . . .	93
5.34	Caracterização do ensaio de arrancamento. . . . .	94
5.35	Geometria padrão para o ensaio de arrancamento. . . . .	95
5.36	Geometria do ensaio em estudo. . . . .	95
5.37	Malha de elementos finitos elaborada. . . . .	96
5.38	Trajetória de equilíbrio no ponto de controle de escorregamento - $P_{max} = 33kN$ . . . . .	97
5.39	Curva tensão de aderência-escorregamento. . . . .	98
5.40	Deformação para $P = 32,9kN$ . . . . .	99
5.41	Escorregamento ao longo da barra de armadura para $P = 32,9kN$ . . . . .	99
5.42	Tensão axial ao longo da barra de armadura para $P = 32,9kN$ . . . . .	100
5.43	Tensão normal no concreto ao longo do corpo de prova para $P = 32,9kN$ . . . . .	100

5.44	Detalhes geométricos e da disposição das armaduras da viga estudada (dimensões em mm). . . . .	102
5.45	Geometria e malha. . . . .	104
5.46	Malha de Elementos Finitos Elaborada - M1 E M2. . . . .	105
5.47	Trajectoria de equilíbrio correspondente ao deslocamento no meio do vão. . . . .	105
5.48	Malha de Elementos Finitos - M3 e M4. . . . .	106
5.49	Trajectoria de equilíbrio correspondente ao deslocamento no meio do vão. . . . .	107
5.50	Malha de Elementos Finitos - M5 e M7. . . . .	108
5.51	Malha de Elementos Finitos - M6 e M8. . . . .	109
5.52	Trajectoria de equilíbrio correspondente ao deslocamento no meio do vão. . . . .	109
5.53	Variações de grandezas na malha M7 para o passo referente à carga de 13kN: (a) Isofaixas de dano para o modelo com aderência perfeita; (b) Isofaixas de dano para o modelo com perda de aderência e (c) Tensões de aderência ao longo da armadura. . . . .	111
5.54	Malha de Elementos Finitos - M9. . . . .	112
5.55	Trajectoria de equilíbrio correspondente ao deslocamento no meio do vão. . . . .	113

# Lista de Tabelas

3.1	Parâmetros para as relações “ <i>tensões de aderência-deslizamento</i> ” para barras nervuradas. . . . .	30
3.2	Parâmetros para as relações “ <i>tensões de aderência-deslizamento</i> ” para barras não nervuradas. . . . .	30
3.3	Escorregamentos últimos para para diversos valores de $a_r$ e $f_c$ . . . . .	33
5.1	Parâmetros adotados para a lei de escorregamento. . . . .	97
5.2	Parâmetros para o modelo de Dano Volumétrico. . . . .	102
5.3	Parâmetros para o modelo de Microplanos. . . . .	103
5.4	Parâmetros adotados para a lei de escorregamento. . . . .	103

# Sumário

<b>Agradecimentos</b>	<b>ii</b>
<b>Resumo</b>	<b>iii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iv</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>viii</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>ix</b>
<b>Sumário</b>	<b>1</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>3</b>
1.1 Objetivos . . . . .	5
1.1.1 Objetivos Gerais . . . . .	5
1.1.2 Objetivos Específicos . . . . .	5
1.2 Organização do Texto . . . . .	6
<b>2 Modelos de Armadura</b>	<b>7</b>
2.1 Modelos de Armadura Discreta . . . . .	8
2.2 Modelos de Armadura Embutida . . . . .	9
2.2.1 Elemento Proposto por Elwi e Hrudey (1988) . . . . .	10
2.2.2 Generalização do modelo de Elwi e Hrudey (1988) . . . . .	17
<b>3 Modelos de Aderência</b>	<b>24</b>
3.1 Mecanismos de Aderência . . . . .	25
3.2 Leis Constitutivas para a Perda de Aderência . . . . .	28
3.2.1 Lei Proposta por Eligehausen et al. (1983) . . . . .	28
3.2.2 Lei Proposta por Doerr (1988) . . . . .	31
3.2.3 Lei Proposta por Nilson (1968) . . . . .	35
3.2.4 Lei Proposta por Hawkins et al. (1982) . . . . .	36
3.3 Modelos Numéricos para Perda de Aderência . . . . .	37
3.3.1 Modelo de Perda de Aderência Pontual - Elementos de Molas . . . . .	37
3.3.2 Modelo de Perda de Aderência Contínua - Elementos de Contato . . . . .	39

<b>4</b>	<b>Implementação Computacional</b>	<b>49</b>
4.1	Organização do Núcleo Numérico . . . . .	50
4.2	Análise Estática Fisicamente Não Linear . . . . .	52
4.3	Inserção dos Modelos de Armadura e Aderência . . . . .	59
4.3.1	A classe Element . . . . .	59
4.3.2	Classe Shape . . . . .	61
4.3.3	Classe ConstitutivelModel . . . . .	63
4.3.4	Classe Material . . . . .	65
4.3.5	Classe AnalysisModel . . . . .	66
4.3.6	Classe ProblemDriver . . . . .	68
<b>5</b>	<b>Exemplos de Validação</b>	<b>72</b>
5.1	Chapa Tracionada . . . . .	72
5.2	Anel com uma Camada de Armadura . . . . .	75
5.2.1	Modelo de Armadura Embutida . . . . .	78
5.2.2	Modelo de Armadura Discreta . . . . .	86
5.3	Anel com duas Camadas de Armadura . . . . .	89
5.3.1	Modelo de Armadura Embutida Plano . . . . .	91
5.3.2	Modelo de Armadura Discreta . . . . .	92
5.4	Ensaio de Arrancamento . . . . .	94
5.5	Viga de Concreto Armado - Alvares (1993) . . . . .	101
5.5.1	Modelos de Armadura Discreta Planos . . . . .	104
5.5.2	Modelos de Armadura Discreta Tridimensionais . . . . .	106
5.5.3	Modelos de Armadura Embutida Planos . . . . .	107
5.5.4	Modelos de Armadura Embutida Tridimensionais . . . . .	111
<b>6</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>114</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>117</b>

# Capítulo 1

## Introdução

O concreto armado é um dos mais importantes materiais empregados na engenharia civil. Os altos valores de resistência atingidos, a viabilidade econômica e a eficiência do concreto armado fazem com que o seu uso seja extremamente atrativo para uma extensa gama de empreendimentos.

A elaboração de projeto de estruturas de concreto armado tem como principais objetivos o desenvolvimento de estruturas com elevado grau de segurança, e ao mesmo tempo, economicamente vantajosas. Para atender estes objetivos torna-se indispensável o uso de ferramentas de análise cada vez mais eficientes e precisas. Este fato é ainda mais relevante na análise de estruturas com geometria e carregamentos complexos, ou onde é exigido maior segurança e precisão no dimensionamento. Como exemplo de estruturas com estas características, pode-se citar as estruturas de aproveitamento hidroenergético, usinas nucleares, pontes, túneis entre outras. Para conceber projetos nos quais a estrutura atenda tais exigências, os projetistas devem usar ferramentas de análise que possuam modelos e métodos capazes de representar o comportamento das estruturas o mais próximo possível da realidade. Munidos de um bom ferramental de análise, os projetistas estruturais podem adotar soluções mais sofisticadas e ousadas sem, com isso, abrir mão da segurança e funcionalidade da estrutura.

As ferramentas de análise do comportamento das estruturas de concreto armado são extremamente importantes. O seu desenvolvimento não é tarefa fácil e exige

muito estudo e experimentos, devido ao comportamento complexo do concreto armado. Dentre os diversos fatores que caracteriza o comportamento do concreto armado, citam-se:

- i.** o concreto armado é formado por dois materiais com comportamento físico e mecânico extremamente distintos;
- ii.** o material concreto, por si só, possui comportamento não linear até mesmo para baixos níveis de tensão, devido à existência prévia de processos de microfissuração e, em estados mais avançados de sollicitação, à ocorrência do fenômeno de amolecimento: diminuição da capacidade resistente acompanhada do aumento das deformações;
- iii.** o aço da armadura e a matriz de concreto interagem de forma complexa, segundo um mecanismo de aderência e escorregamento, cujo comportamento possui origens químicas e físicas.

Tal comportamento fez com que os engenheiros e cientistas do passado desenvolvessem e aplicassem inúmeras fórmulas empíricas, obtidas de experimentos em laboratório e experiências práticas, para entender, projetar e avaliar as estruturas de concreto. Com o advento dos computadores digitais, juntamente com conhecimento acumulado após anos de estudo sobre o comportamento do concreto simples e armado, vários modelos numéricos surgiram. Dentre os vários modelos desenvolvidos, os baseados no método dos elementos finitos (MEF), se mostraram uma poderosa ferramenta para a análise de estruturas de concreto armado, protendendo e simples. A evolução do uso do MEF para a análise de estruturas de concreto armado foi acompanhada do desenvolvimento de vários modelos constitutivos para o concreto, para a armadura, bem como modelos para representar a interface entre estes dois materiais. Os próximos capítulos apresentam vários elementos para modelagem da armadura e do fenômeno de perda de aderência na interface entre o concreto e a armadura, bem como, a implementação computacional destes modelos.

A implementação dos modelos que serão apresentados foi feita no sistema **INSANE** (**IN**teractive **S**tructural **A**nalysis **E**nvironment). O **INSANE** é um sistema computacional para análise estrutural desenvolvido pelo Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais. O sistema é desenvolvido seguindo o paradigma da Programação Orientada a Objetos (POO) utilizando a linguagem de programação JAVA.

Em uma descrição extremamente sucinta, o **INSANE** pode ser resumido como um sistema que se estrutura sobre um conjunto de classes que formam um núcleo numérico que, por sua vez, interage com outros dois grupos de classes que correspondem a um pré e um pós processador. As classes que compõem o núcleo numérico implementam os diversos modelos numéricos passíveis de serem analisados pelo sistema, assim como as implementações de técnicas de solução dos modelos implementados. As diversas implementações já existentes no sistema possibilitavam a elaboração e análise de modelo de armadura discreta sem inclusão da perda de aderência. Desta forma, o presente trabalho introduziu no sistema ferramentas adicionais que possibilitam a elaboração de modelos de armadura discreta com a inclusão da perda de aderência e a elaboração de modelos de armadura embutida.

## 1.1 Objetivos

### 1.1.1 Objetivos Gerais

O presente trabalho tem como objetivo introduzir no **INSANE** recursos que possibilitem a elaboração de modelos de armadura discreta, com inclusão da perda de aderência e de modelos de armadura embutida bidimensionais e tridimensionais.

### 1.1.2 Objetivos Específicos

Como objetivos específicos, citam-se:

- i. Implementar elementos de mola para simular o contato entre o aço e o concreto;
- ii. Implementar elementos de contato para simular o contato entre o aço e o concreto;
- iii. Implementar modelos de armadura embutida (ou incorporada);
- iv. Implementar leis de aderência entre o aço e o concreto;
- v. Validar a implementação dos modelos apresentados por meio de simulações numéricas cujas soluções sejam conhecidas.

## 1.2 Organização do Texto

O presente trabalho contém, além deste, mais 5.

O capítulo 2 descreve os possíveis modelos que podem ser usados para a modelagem de estruturas de concreto armado. Neste capítulo, também apresenta-se as formulações matemáticas dos modelos que serão inseridos no sistema **INSANE**.

O capítulo 3 apresenta os mecanismos de funcionamento da aderência, bem como os modelos matemáticos existentes para simular numericamente o seu comportamento.

O capítulo 4 apresenta o projeto orientado a objetos adotado na implementação dos modelos de armadura e aderência no sistema **INSANE**.

O capítulo 5 apresenta a validação dos modelos implementados por meio da simulação numérica de problemas cuja a solução é conhecida na literatura.

O capítulo 6 apresenta considerações finais e sugestões para futuras pesquisas.

# Capítulo 2

## Modelos de Armadura

Ao modelar estruturas de concreto armado, a armadura pode ser representada segundo três enfoques distintos:

- i. Modelos de armadura distribuída;
- ii. Modelos de armadura discreta;
- iii. Modelos de armadura embutida (ou incorporada).

O modelo de armadura distribuída é embasado em uma distribuição uniforme da armadura segundo uma orientação  $\theta$  qualquer. Neste enfoque, não são introduzidos os fenômenos de perda de aderência e não é possível alterar a geometria da armadura ao longo da espessura do elemento. Desta forma, deve-se usar uma relação tensão-deformação para o material composto aço-concreto.

Os modelos de armadura discreta e embutida são mais robustos e usados. Uma discussão mais detalhada de cada um destes modelos será apresentada nas seções seguintes.

## 2.1 Modelos de Armadura Discreta

O modelo de armadura discreta foi o primeiro modelo a ser proposto para uso em malhas de elementos finitos para a análise de estruturas de concreto armado. Um dos primeiros trabalhos foi apresentado por Ngo e Scordelis (1967).

Este modelo é extremamente difundido e usado. A essência deste modelo está no uso de um elemento plano (Figura 2.1) ou tridimensional (Figura 2.2) para representar a matriz de concreto e um elemento de treliça ou de pórtico para representar a armadura. A rigidez total deste conjunto é obtida da sobreposição da rigidez dos elementos que representam a armadura discreta, com a rigidez dos elementos que representam o concreto, nos respectivos graus de liberdade.

A maior vantagem deste modelo é a possibilidade de inclusão dos efeitos de perda de aderência da armadura. Uma das formas de introduzir os efeitos da perda de aderência é o uso de elementos especiais para conectar os elementos da armadura aos elementos de concreto. Vários elementos foram propostos para fazer a conexão da armadura com o concreto e representar a aderência da armadura. Uma discussão detalhada sobre tais elementos será apresentada no capítulo 3.

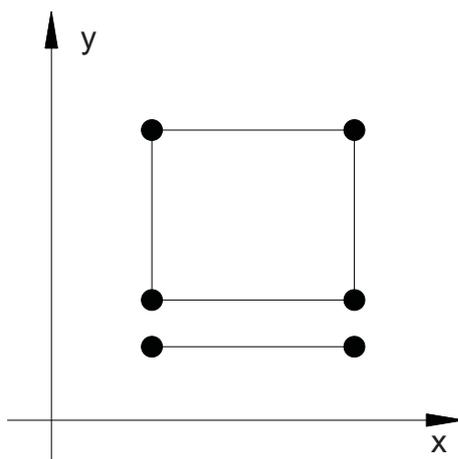


Figura 2.1: Modelo de armadura discreta bidimensional.

A grande limitação deste modelo é o condicionamento da posição da camada de armadura com a geometria da malha. Este condicionamento implica no uso de

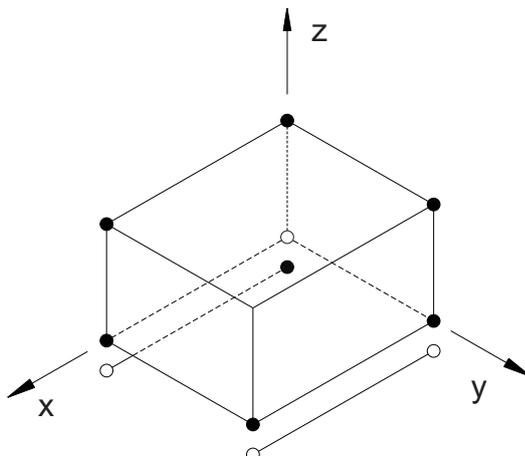


Figura 2.2: Modelo de armadura discreta tridimensional.

um maior número de elementos  $e$ , conseqüentemente, um maior número de graus de liberdade. O aumento do número de graus de liberdade do modelo exige maior esforço computacional e tempo de processamento.

## 2.2 Modelos de Armadura Embutida

Nos modelos de armadura embutida, a armadura é considerada como um elemento unidimensional incorporado ao elemento de concreto (elemento pai) que pode ser bidimensional ou tridimensional. Esta premissa implica que os deslocamentos da armadura devem ser consistentes com os deslocamentos internos do elemento de concreto.

Os primeiros elementos desenvolvidos consideravam a aderência perfeita entre a armadura e o concreto. Esta consideração resulta em sérias limitações para o modelo, entretanto, vários trabalhos surgiram com o intento de contornar esse problema.

Balakrishna e Murray (1987) propuseram incluir os efeitos da aderência através da introdução de nós extras ao longo do elemento que representa a camada de armadura. Os nós adicionais devem possuir características de aderência prescritos. Obviamente, a introdução dos nós extras implica em aumento do número de graus

de liberdade do modelo.

Outra técnica para introduzir a aderência em modelos de armadura embutida foi proposta no trabalho de Allwood e Bajarwan (1989). Este trabalho propõe uma generalização do elemento que representa a camada de armadura. Nesta generalização, os efeitos da aderência são introduzidos na formulação do elemento de armadura.

Apresenta-se a seguir a formulação proposta por Elwi e Hrudey (1988) e sua generalização para elementos tridimensionais feita por Barzegar e Maddipudi (1997).

## 2.2.1 Elemento Proposto por Elwi e Hrudey (1988)

### 2.2.1.1 Formulação Geométrica

A formulação geométrica do elemento proposto por Elwi e Hrudey (1988) parte de um elemento plano arbitrário com um segmento de armadura com geometria qualquer (Figura 2.3).

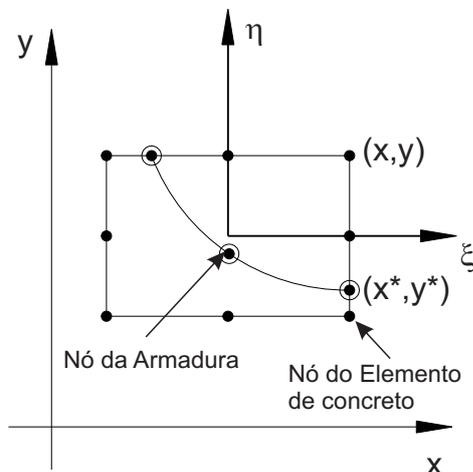


Figura 2.3: Elemento arbitrário com armadura embutida.

Neste elemento, o sistema de coordenadas globais é dado pelos eixos  $(x, y)$  e o sistema de coordenadas naturais do elemento pai é dado pelos eixos  $(\xi, \eta)$ . Sendo a função de interpolação dos deslocamentos do nó  $i$  (pertencente ao elemento pai) dada por  $\phi_i(\xi, \eta)$ , as coordenadas globais de um ponto qualquer do elemento pai

podem ser relacionadas com as coordenadas naturais através da equação

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \phi \rangle & 0 \\ 0 & \langle \phi \rangle \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{y\} \end{Bmatrix}, \quad (2.1)$$

onde  $\langle \phi \rangle$  é o vetor linha das funções de forma do elemento pai (no decorrer do texto será usado a notação  $\langle \rangle$  para indicar um vetor linha);  $\{x\}$  e  $\{y\}$  são respectivamente o vetor de coordenadas  $x$  e vetor de coordenadas  $y$  dos nós do elemento pai.

Assim como as coordenadas globais, os valores diferenciais das coordenadas  $x$  e  $y$  podem ser relacionados com os diferenciais naturais através da equação

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix}, \quad (2.2)$$

onde  $[J]$  é a da matriz da transformação jacobiana, dada por

$$[J] = \begin{Bmatrix} \langle x \rangle \\ \langle y \rangle \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \langle \phi \rangle}{\partial \xi} & \frac{\partial \langle \phi \rangle}{\partial \eta} \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

A continuidade dos elementos de armadura deve ser garantida com a existência de nós nos pontos onde o elemento da armadura intercepta o elemento de concreto.

As coordenadas de um ponto qualquer da camada de armadura são obtidas através do uso das funções de interpolação. No caso de elementos curvos, nós adicionais se fazem necessários no domínio do elemento. Desta forma, as coordenadas de um ponto qualquer sobre o elemento de armadura são dadas por:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \psi \rangle & 0 \\ 0 & \langle \psi \rangle \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x^*\} \\ \{y^*\} \end{Bmatrix}, \quad (2.4)$$

onde  $\{x^*\}$  e  $\{y^*\}$  são os vetores de coordenadas dos nós do elemento de armadura associados ao elemento pai e  $\langle \psi \rangle$  é o vetor linha das funções de interpolação unidimensionais da camada de armadura.

As funções de interpolação  $\psi$  são expressas em termos da coordenada normalizada independente  $\gamma$  (Figura 2.4). A determinação do grau das funções e, consequentemente, do número de nós do elemento, depende da complexidade da geometria da barra de armadura e da precisão que se pretende obter na análise a ser realizada.

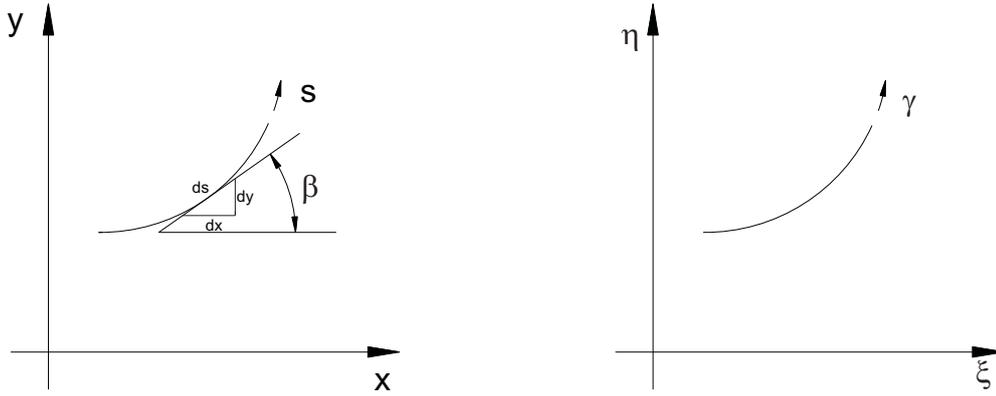


Figura 2.4: Coordenada normalizada independente ao longo da camada de armadura.

O segmento de barra irá exercer influência em vários termos da matriz de rigidez global e no escorregamento ocasionado pela perda de aderência. Desta forma, faz-se necessário integrações no domínio da armadura e a determinação de um elemento diferencial de comprimento  $ds$ , ao longo da armadura.

Tomando o ângulo  $\beta$  com orientação tangente a um ponto do segmento de armadura (Figura 2.4), tem-se que

$$\langle \cos \beta \quad \text{sen} \beta \rangle = \langle \frac{dx}{ds} \quad \frac{dy}{ds} \rangle, \quad (2.5)$$

com

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \quad (2.6a)$$

$$ds^2 = \left( \frac{dx}{d\gamma} d\gamma \right)^2 + \left( \frac{dy}{d\gamma} d\gamma \right)^2, \quad (2.6b)$$

$$\frac{ds}{d\gamma} = \sqrt{\left( \frac{dx}{d\gamma} \right)^2 + \left( \frac{dy}{d\gamma} \right)^2}, \quad (2.6c)$$

na qual

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{dx}{d\gamma} \\ \frac{dy}{d\gamma} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cc} \langle \frac{d\psi}{d\gamma} \rangle & 0 \\ 0 & \langle \frac{d\psi}{d\gamma} \rangle \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \{x^*\} \\ \{y^*\} \end{array} \right\}. \quad (2.7)$$

Assim sendo, os cossenos diretores da tangente de um ponto qualquer ao longo da armadura, bem como a derivada  $\frac{ds}{d\gamma}$ , podem ser diretamente obtidos usando as equações 2.5 e 2.6.

Um elemento diferencial de volume  $dV_s$  e um elemento diferencial de superfície  $dS_s$  da camada de armadura podem ser escritos em função de  $ds$ , da espessura do elemento  $t$ , da área da armadura por unidade de espessura  $A_s$  e do perímetro da armadura por unidade de espessura  $O_s$ , sendo dados por

$$dV_s = tA_s ds, \quad (2.8)$$

$$dS_s = tO_s ds. \quad (2.9)$$

### 2.2.1.2 Mapeamento Inverso

Durante o processo de obtenção da rigidez do elemento de armadura embutida é necessário conhecer o campo de deformação no elemento pai nos pontos sobre a camada de armadura. Desta forma, deve-se determinar as coordenadas naturais  $(\xi, \eta)$  de um ponto qualquer da armadura a partir de suas coordenadas globais.

O mapeamento entre o sistema global e natural de coordenadas é dado na formulação isoparamétrica, pela equação 2.1. A determinação da forma inversa da equação 2.1 é uma tarefa dispendiosa. Contudo, o mapeamento inverso pode ser feito através de técnicas numéricas como o processo iterativo baseado no método de Newton-Raphson. As coordenadas  $(\xi_p, \eta_p)$ , do ponto  $(x_p, y_p)$ , são as raízes da equação

$$\begin{Bmatrix} x_p \\ y_p \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \langle \phi \rangle & 0 \\ 0 & \langle \phi \rangle \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{y\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (2.10)$$

Estas raízes podem ser determinadas usando o processo iterativo de Newton-Raphson, cuja a solução após  $n + 1$  iterações, é dada por

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix}_p^{n+1} = \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix}_p^n + \begin{Bmatrix} \Delta\xi \\ \Delta\eta \end{Bmatrix}_p^{n+1}, \quad (2.11)$$

onde

$$\begin{Bmatrix} \Delta\xi \\ \Delta\eta \end{Bmatrix}_p^{n+1} = -[J^n]^{T-1} \left( \begin{Bmatrix} x_p \\ y_p \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \langle\phi\rangle^n & 0 \\ 0 & \langle\phi\rangle^n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{y\} \end{Bmatrix} \right), \quad (2.12)$$

com  $[J^n] = [J(\xi^n, \eta^n)]$  e  $\langle\phi\rangle^n = \langle\phi\rangle(\xi^n, \eta^n)$ .

### 2.2.1.3 Campo de Deformações

O incremento de deformação normal na direção tangente à armadura é dado por:

$$\Delta\varepsilon_s = \frac{d\Delta w_b}{ds} + \Delta\varepsilon_x \cos^2\beta + \Delta\varepsilon_y \sin^2\beta + \Delta\gamma_{xy} \cos\beta \sin\beta, \quad (2.13)$$

onde  $\Delta\varepsilon_x$ ,  $\Delta\varepsilon_y$  e  $\Delta\gamma_{xy}$  são os incrementos de deformações no elemento de concreto;  $\Delta w_b$  é o incremento de escorregamento da armadura;  $\beta$  é o ângulo formado entre a tangente à camada de armadura e o eixo global x (Figura 2.4);  $ds$  é um elemento infinitesimal de comprimento ao longo da camada de armadura.

Os incrementos de deformação  $\Delta\varepsilon_x$ ,  $\Delta\varepsilon_y$  e  $\Delta\gamma_{xy}$  são obtidos diretamente dos incrementos do campo de deslocamentos do elemento pai. O incremento do escorregamento da camada de armadura é interpolado como

$$\Delta w_b(\gamma) = \langle\psi(\gamma)\rangle \{\Delta w_b^*\}, \quad (2.14)$$

onde  $\psi(\gamma)$  é definido na equação 2.4 e  $\{\Delta w_b^*\}$  é o vetor de incrementos de escorregamento nos nós da armadura (Figura 2.3)

Por fim, o incremento da deformação na armadura pode ser expresso por

$$\Delta\varepsilon_s = \langle \langle B_b \rangle \quad \langle B_s \rangle \rangle \begin{Bmatrix} \{\Delta w_b^*\} \\ \{\Delta q\} \end{Bmatrix}, \quad (2.15)$$

onde

$$\{B_b\} = \frac{d\gamma}{ds} \{\psi, \gamma\}, \quad (2.16)$$

$$\{B_s\} = \begin{Bmatrix} \cos^2\beta \{\phi, x\} + \cos\beta \sin\beta \{\phi, y\} \\ \cos\beta \sin\beta \{\phi, x\} + \sin^2\beta \{\phi, y\} \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

e

$$\{\Delta q\} = \begin{Bmatrix} \{\Delta u\} \\ \{\Delta v\} \end{Bmatrix}, \quad (2.18)$$

nas quais,  $\{\phi_{,x}\}$  e  $\{\phi_{,y}\}$  são as derivadas parciais de  $\{\phi\}$  em relação a  $x$  e  $y$  respectivamente.

#### 2.2.1.4 Matriz de Rigidez Incremental do Elemento de Armadura Embutida

A determinação da matriz de rigidez do elemento é fundamentada na forma incremental do Princípio dos Trabalhos Virtuais e na hipótese de que as deformações ocorrem somente na direção ao longo da camada de armadura.

Ao se considerar a perda de aderência, a forma incremental do trabalho interno é dada por

$$\delta\Delta W = \int_{V_s} (\sigma_s + \Delta\sigma_s) \delta\Delta\varepsilon_s dV_s + \int_{S_s} (\tau_b + \Delta\tau_b) \delta\Delta w_b ds, \quad (2.19)$$

onde  $\Delta\sigma_s$  indica incremento no estado corrente de tensão na armadura,  $\Delta\tau$  indica incremento no estado corrente da tensão de contato entre a armadura e o concreto; e  $dV_s$  e  $dS_s$  são definidos nas equações 2.8 e 2.9, respectivamente.

As formas incrementais das relações constitutivas das camadas da armadura são dadas por

$$\Delta\sigma_s = E_s^t \Delta\varepsilon_s \quad (2.20)$$

e

$$\Delta\tau_b = E_b^t \Delta w_b, \quad (2.21)$$

onde  $E_s^t$  é o módulo tangente da relação tensão-deformação do aço da armadura e  $E_b^t$  é o módulo tangente da relação tensão-escorregamento da lei de aderência.

Ao substituir as equações 2.8, 2.9, 2.20 e 2.21 na equação 2.19 tem-se que

$$\delta\Delta W = \int_s (\delta\Delta\varepsilon_s E_s^t \Delta\varepsilon_s A_s + \delta\Delta w_b O_s) t ds + \int_s (\delta\Delta\varepsilon_s \sigma_s A_s + \delta\Delta w_b \tau_b O_s) t ds. \quad (2.22)$$

Substituindo as equações 2.14 e 2.15 na equação 2.22, o incremento do trabalho virtual pode ser escrito na forma matricial apresentada abaixo:

$$\delta\Delta W = \langle\langle\delta\Delta w_b^*\rangle\rangle\langle\delta\Delta q\rangle \left\{ \begin{bmatrix} [K_{bb}] & [K_{bs}] \\ [K_{sb}] & [K_{ss}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta w_b^*\} \\ \{\delta q\} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{Q_b\} \\ \{Q_s\} \end{Bmatrix} \right\}, \quad (2.23)$$

onde

$$[K_{bb}] = \int_\gamma (\{\psi\} E_b \langle\psi\rangle O_s + \{B_b\} E_s \langle B_b\rangle A_s) \frac{ds}{d\gamma} t d\gamma; \quad (2.24)$$

$$[K_{bs}] = [K_{sb}]^T = \int_\gamma \{B_b\} E_s \langle B_s\rangle A_s \frac{ds}{d\gamma} t d\gamma; \quad (2.25)$$

$$[K_{ss}] = \int_\gamma \{B_s\} E_s \langle B_s\rangle A_s \frac{ds}{d\gamma} t d\gamma; \quad (2.26)$$

$$\{Q_b\} = \int_\gamma (\{B_b\} \sigma_s A_s + \{\psi\} \sigma_b O_s) \frac{ds}{d\gamma} t d\gamma; \quad (2.27)$$

$$\{Q_s\} = \int_\gamma \{B_s\} \sigma_s A_s \frac{dS}{d\zeta} t d\gamma. \quad (2.28)$$

As submatrizes  $[K_{ss}]$ ,  $[K_{bs}]$  e  $[K_{bb}]$  representam as contribuições do aço e da aderência na rigidez do elemento composto e os vetores  $\{Q_b\}$  e  $\{Q_s\}$  são forças internas associadas as tensões  $\tau_b$  e  $\sigma_s$ .

Combinando o incremento do trabalho virtual interno da armadura com o incremento do elemento de concreto tem-se que

$$\delta\Delta W_{ELM} = \langle\langle\delta\Delta w_b^*\rangle\rangle\langle\delta\Delta q\rangle \left( \begin{bmatrix} [K_{bb}] & [K_{bs}] \\ [K_{sb}] & [K_{ss}] + [K_{cc}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Delta w_b^*\} \\ \{\Delta q\} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{Q_b\} \\ \{Q_s\} - \{F\} - \{\Delta F\} \end{Bmatrix} \right), \quad (2.29)$$

onde  $F$  e  $\Delta F$  são o carregamento nodal equivalente ao estado corrente de tensão e seu incremento, respectivamente, no elemento de concreto.  $[K_{cc}]$  é a rigidez do mesmo na ausência de armadura.

Para as situações onde o elemento possui diversos segmentos de armadura, a matriz de rigidez do elemento é expandida tomando a seguinte forma

$$[k] = \begin{bmatrix} [K_{bb_1}] & 0 & 0 & \cdots & & [K_{bs_1}] \\ 0 & [K_{bb_2}] & 0 & \cdots & & [K_{bs_2}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & [K_{bb_n}] & & [K_{bs_n}] \\ [K_{sb_1}] & [K_{sb_2}] & \cdots & [K_{sb_n}] & [K_{ss_1}] + [K_{ss_2}] + \cdots + [K_{ss_n}] + [K_{cc}] & \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

De forma análoga ao exposto pra matriz de rigidez, o vetor de forças nodais internas deve ser expandido tomando a seguinte forma

$$[F_{inc.}] = \left\{ \begin{array}{c} \{Q_{b_1}\} \\ \{Q_{b_2}\} \\ \vdots \\ \{Q_{b_n}\} \\ \{Q_{s_1}\} + \{Q_{s_2}\} + \cdots + \{Q_{s_n}\} - \{F\} - \{\Delta F\} \end{array} \right\}. \quad (2.31)$$

## 2.2.2 Generalização do modelo de Elwi e Hrudehy (1988)

O modelo de armadura embutida bidimensional proposto por Elwi e Hrudehy (1988) pode ter sua formulação estendida para o caso tridimensional.

No modelo tridimensional, cada segmento de camada de armadura deve possuir nós no domínio do elemento e, para garantir a continuidade da camada, deve também possuir o nó inicial em uma das faces do elemento e o seu nó final em outra face. A figura 2.5 apresenta um elemento genérico com um segmento de armadura com três nós.

Assim como nos elementos bidimensionais, em um elemento tridimensional, o incremento de deslocamento em uma ponto qualquer da camada de armadura é dado por

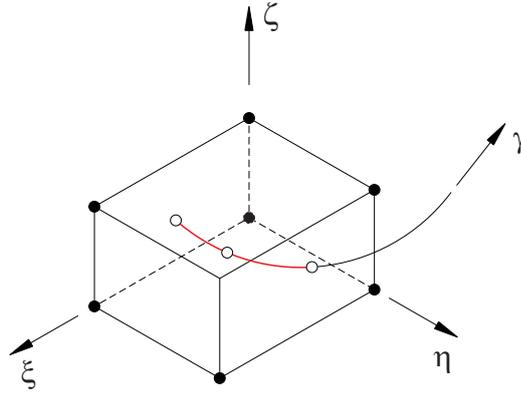


Figura 2.5: Elemento tridimensional com armadura embutida.

$$\Delta w_s = \Delta w_c + \Delta w_b. \quad (2.32)$$

Na equação 2.32 o termo  $\Delta w_c$  se refere ao incremento de deslocamento experimentado pelo elemento de concreto e a parcela  $\Delta w_b$  se refere ao incremento de deslocamento sofrido pelo elemento que representa a armadura devido ao escorregamento da barra.

O incremento de escorregamento em qualquer ponto da armadura pode ser obtido pela interpolação feita com as funções de forma  $\psi(\gamma)$  do elemento que representa a camada de armadura. O grau da função de forma depende do número de nós internos introduzidos no elemento. Sendo assim, o incremento de escorregamento de um ponto qualquer da camada de armadura é dado por

$$\Delta w_b(\gamma) = \langle \psi(\gamma) \rangle \{ \Delta w_b^* \} , \quad (2.33)$$

onde  $\gamma$  é a coordenada natural da camada de armadura onde se deseja conhecer o incremento de escorregamento,  $\{ \Delta w_b^* \}$  é o vetor de escorregamentos nodais da camada de armadura.

A camada de armadura é representada por um elemento unidimensional, sendo

que os cossenos diretores da linha que a representa são dados por:

$$\begin{aligned} l &= \frac{dx}{ds} = \frac{1}{J^*} \frac{dx}{d\gamma}, \\ m &= \frac{dy}{ds} = \frac{1}{J^*} \frac{dy}{d\gamma}, \\ n &= \frac{dz}{ds} = \frac{1}{J^*} \frac{dz}{d\gamma}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

As coordenadas globais  $x$ ,  $y$  e  $z$  em um ponto qualquer da camada de armadura podem ser obtidas por meio das funções interpoladoras. Desta forma, tem-se que

$$\begin{aligned} x &= \langle \psi \rangle \{x^*\}, \\ y &= \langle \psi \rangle \{y^*\}, \\ z &= \langle \psi \rangle \{z^*\}; \end{aligned} \quad (2.35)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\gamma} &= \langle \psi, \gamma \rangle \{x^*\}, \\ \frac{dy}{d\gamma} &= \langle \psi, \gamma \rangle \{y^*\}, \\ \frac{dz}{d\gamma} &= \langle \psi, \gamma \rangle \{z^*\}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

As equações 2.34 a 2.36 permitem obter os valores de  $l$ ,  $m$  e  $n$ , necessários à montagem da matriz que transforma deformações globais em deformação axial da camada de armadura é dada por:

$$T = [l^2 \quad m^2 \quad n^2 \quad lm \quad mn \quad nl]. \quad (2.37)$$

A deformação axial em um ponto qualquer da camada de armadura é obtida pela deformação do elemento de concreto neste mesmo ponto, acrescida da deformação adicional causada pelo escorregamento da armadura. Sabendo que o vetor de deformações de um elemento tridimensional é dado por

$$\Delta\epsilon = \begin{bmatrix} \Delta\epsilon_x \\ \Delta\epsilon_y \\ \Delta\epsilon_z \\ \Delta\gamma_{xy} \\ \Delta\gamma_{yz} \\ \Delta\gamma_{zx} \end{bmatrix}, \quad (2.38)$$

tem-se que o incremento de deformação na camada da armadura é dado por

$$\Delta\epsilon_s = T\Delta\epsilon + \frac{d}{ds}(\Delta w_b), \quad (2.39)$$

onde

$$\frac{d}{ds}(\Delta w_b) = \frac{d}{ds}\langle\psi(\gamma)\rangle\{\Delta w_b^*\}; \quad (2.40)$$

$$\frac{d}{ds}\langle\psi(\gamma)\rangle = \frac{d}{d\gamma}\langle\psi(\gamma)\rangle\frac{d\gamma}{ds}; \quad (2.41)$$

$$\frac{d\gamma}{ds} = \frac{1}{J^*}; \quad (2.42)$$

$$\langle B_b \rangle = \frac{d}{d\gamma}\langle\psi(\gamma)\rangle\frac{1}{J^*}; \quad (2.43)$$

$$\langle B_s \rangle = \langle T \rangle [B], \quad (2.44)$$

onde  $[B]$  é a matriz que transforma deslocamentos dos nós do elemento de pai em deformações internas ao mesmo.

A equação 2.39 pode ser reescrita como

$$\Delta\epsilon_s = T\Delta\epsilon + \langle B_b \rangle\{\Delta w_b^*\}, \quad (2.45)$$

onde  $\epsilon$  é o vetor de deformações do elemento pai.

A matriz de rigidez do elemento, bem como o vetor de forças nodais, são determinados com a aplicação do princípio dos trabalhos virtuais em sua forma incremental.

Desta forma, tem-se que

$$\delta(\Delta W_{int}) = \int_{V_s} (\sigma_s + \Delta\sigma_s) \delta(\Delta\epsilon_s) dV_s + \int_{S_s} (\tau_b + \Delta\tau_b) \delta(\Delta w_b) dS_s, \quad (2.46)$$

onde  $\sigma_s$  é a tensão axial na camada de armadura,  $\tau_b$  é tensão de aderência ao longo da barra,  $V_s$  é o volume do elemento de armadura e  $S_s$  é a superfície de contato da armadura.

Os elementos infinitesimais de volume e de área da camada de armadura são dados por:

$$dV_s = A_s ds; \quad (2.47)$$

$$dS = O_s ds. \quad (2.48)$$

As relações tensão-deformação e aderência-escorregamento são o dadas respectivamente por

$$\Delta\sigma_s = E_s\Delta\varepsilon_s \quad (2.49)$$

e

$$\Delta\tau_s = E_b\Delta\varepsilon_b. \quad (2.50)$$

Substituindo as equações 2.47,2.48 2.49 e 2.50 na equação 2.46, tem-se que

$$\begin{aligned} \delta(\Delta W_{int}) &= \int_s [E_s\Delta\varepsilon_s\delta(\Delta\varepsilon_s)A_s + \delta(\Delta w_b)O_s] ds \\ &+ \int_s [\sigma_s\delta(\Delta\varepsilon_s)A_s + \tau_b\delta(\Delta w_b)O_s] ds. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Substituindo os incrementos de escorregamento ( $\Delta w_b$ ) e o incremento de deformações da armadura ( $\Delta\varepsilon_s$ ), dados pelas equações 2.33 e 2.39, respectivamente, a equação do P.T.V pode ser reescrita na forma

$$\delta\Delta W = \langle\langle\delta\Delta w_b^*\rangle\rangle\langle\delta\Delta q\rangle \left\{ \begin{bmatrix} [K_{bb}] & [K_{bs}] \\ [K_{sb}] & [K_{ss}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta w_b^*\} \\ \{\delta q\} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{Q_b\} \\ \{Q_s\} \end{Bmatrix} \right\}, \quad (2.52)$$

onde

$$[K_{bb}] = \int_{\gamma} (\{\psi\}E_b\langle\psi\rangle O_s + \{B_b\}E_s\langle B_b\rangle A_s) \frac{ds}{d\gamma} t d\gamma; \quad (2.53)$$

$$[K_{bs}] = [K_{sb}]^T = \int_{\gamma} \{B_b\}E_s\langle B_s\rangle A_s \frac{ds}{d\gamma} t d\gamma; \quad (2.54)$$

$$[K_{ss}] = \int_{\gamma} \{B_s\}E_s\langle B_s\rangle A_s \frac{ds}{d\gamma} t d\gamma; \quad (2.55)$$

$$\{Q_b\} = \int_{\gamma} (\{B_b\}\sigma_s A_s + \{\psi\}\sigma_b O_s) \frac{ds}{d\gamma} t d\gamma \quad (2.56)$$

e

$$\{Q_s\} = \int_{\gamma} \{B_s\}\sigma_s A_s \frac{ds}{d\zeta} t d\gamma. \quad (2.57)$$

As submatrizes  $[K_{ss}]$ ,  $[K_{bs}]$  e  $[K_{bb}]$  representam as contribuições do aço e da aderência na rigidez do elemento composto e os vetores  $\{Q_b\}$  e  $\{Q_s\}$  são forças internas associadas as tensões  $\tau_b$  e  $\sigma_s$ .

Combinando o incremento do trabalho virtual interno do segmento de armadura com o incremento do elemento de concreto tem-se que

$$\delta\Delta W_{ELM} = \langle\langle\delta\Delta w_b^*\rangle\rangle\langle\delta\Delta q\rangle \quad (2.58)$$

$$\left( \left[ \begin{array}{cc} [K_{bb}] & [K_{bs}] \\ [K_{sb}] & [K_{ss}] + [K_{cc}] \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \{\Delta w_b^*\} \\ \{\Delta q\} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \{Q_b\} \\ \{Q_s\} - \{F\} - \{\Delta F\} \end{array} \right\} \right),$$

onde  $F$  e  $\Delta F$  são o carregamento nodal equivalente ao estado corrente de tensão e seu incremento, respectivamente, no elemento de concreto.  $[K_{cc}]$  é a rigidez do mesmo na ausência de armadura.

Para as situações onde o elemento possui diversos segmentos de armadura, a matriz de rigidez do elemento é expandida tomando a seguinte forma

$$[K] = \left[ \begin{array}{cccc|cccc} [K_{bb_1}] & 0 & 0 & \cdots & & & & [K_{bs_1}] \\ 0 & [K_{bb_2}] & 0 & \cdots & & & & [K_{bs_2}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & [K_{bb_n}] & & & & [K_{bs_n}] \\ [K_{sb_1}] & [K_{sb_2}] & \cdots & [K_{sb_n}] & [K_{ss_1}] + [K_{ss_2}] + \cdots + [K_{ss_n}] & + [K_{cc}] & & \end{array} \right]. \quad (2.59)$$

De forma análoga ao exposto para a matriz de rigidez, o vetor de cargas nodais internas deve ser expandido tomando a seguinte forma:

$$[F_{inc.}] = \left\{ \begin{array}{c} \{Q_{b_1}\} \\ \{Q_{b_2}\} \\ \vdots \\ \{Q_{b_n}\} \\ \{Q_{s_1}\} + \{Q_{s_2}\} + \dots + \{Q_{s_n}\} - \{F\} - \{\Delta F\} \end{array} \right\}. \quad (2.60)$$

# Capítulo 3

## Modelos de Aderência

Geralmente, na modelagem de estruturas de concreto armado, adota-se modelos simplistas onde se considera a aderência perfeita entre o concreto e a armadura. Esta simplificação implica em uma perfeita compatibilidade de deformações do concreto e da armadura. Em regiões onde ocorre alta transferência de esforços na interface dos dois materiais, tais como nas vizinhanças de regiões com elevado processo de fissuração, zonas de ancoragens, etc, deve-se levar em conta o processo de perda de aderência e relacionar a transferência de esforços com o deslocamento relativo entre os dois materiais.

Em malhas de elementos finitos sabe-se que dois elementos adjacentes são conectados pelos seus nós em comum. Esta conexão implica em deslocamentos idênticos para os dois elementos. Conectar desta forma elementos que representam as barras de aço e elementos que representam a matriz de concreto impõe uma compatibilidade de deformações entre os dois materiais. Desta forma, o modelo não seria capaz de representar o fenômeno da perda aderência e do escorregamento da armadura. Para solucionar estes problemas, elementos especiais são usados para modelar o contato entre a armadura e o concreto. Vários elementos foram elaborados para representar a aderência e o escorregamento da armadura.

Este capítulo destina-se a apresentar os mecanismos de aderência, sua formulação matemática e, por fim, apresentar alguns elementos finitos formulados com a finalidade de representar a perda de aderência entre o concreto e armadura.

### 3.1 Mecanismos de Aderência

A aderência entre o concreto e a armadura é uma das mais importantes condições para o funcionamento do concreto armado (Keuser e Mehlhorn, 1987). A aderência é responsável pela solidarização entre os dois materiais, garantindo a compatibilidade de deformações entre o concreto e o aço, assim como, a transferência de esforços entre os dois materiais.

A aderência é um fenômeno complexo, que envolve tensões de tração e compressão e sofre influência de muitos fatores de difícil compreensão.

Em uma abordagem teórica, a aderência pode ser subdividida em três partes: adesão, atrito e aderência mecânica.

A adesão é caracterizada pelo o efeito de “colagem” entre a matiz cimentícia e o aço da armadura (Leonhardt e Monnig, 1977). Este efeito é função das ligações físico químicas oriundas da reação de pega do cimento. A intensidade da adesão depende do nível de penetração da pasta de cimento nas asperezas existentes na armadura. Desta forma, fatores como o processo de laminação, de estiramento, tipo de aço, nível de corrosão etc, são determinantes deste fenômeno. A adesão isoladamente não é suficiente para garantir uma boa ligação, uma vez que pequenos deslocamentos são suficientes para destruir esse tipo de ligação.

A aderência por atrito se manifesta após o rompimento da ligação por adesão e o início do escorregamento da armadura (deslocamento relativo entre o aço e o concreto). Contudo, para que a aderência por atrito se manifeste, deve existir pressões transversais à armadura. As pressões transversais podem ser oriundas de cargas externas, expansões do concreto ou retração do concreto. Notoriamente, essa

parcela é extremamente influenciada pela aspereza das superfícies das barras.

A aderência mecânica é fruto do intertravamento (encaixe) entre a superfície da armadura e o concreto. Embora esta parcela possa se manifestar em barras lisas, onde o concreto se encaixa nas irregularidades das barra, ela é mais intensa em barras nervuradas (também chamadas de barras de alta aderência). Esta parcela faz com que as barras nervuradas sejam o tipo de armadura com maior aproveitamento de sua resistência. A magnitude da aderência mecânica em barras nervuradas é função da inclinação, altura e distância entre as nervuras. O intertravamento do concreto nas nervuras do aço dão origem a “consoles de concreto” que são solicitados ao corte antes que a barra possa escorregar (Leonhardt e Monnig, 1977). A solicitação das nervuras da barra no console de concreto dá origem a tensões de compressão e tração no concreto que envolve a barra. As tensões de tração dão origem a fissuras internas denominadas fissuras de aderência.

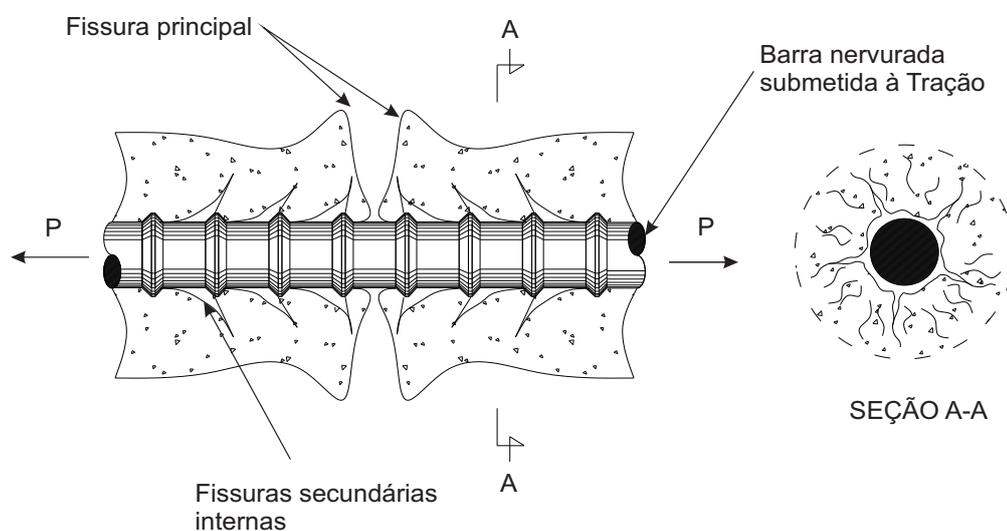


Figura 3.1: Fissuras de aderência.

Goto (1992) comprovou experimentalmente a existência das fissuras de aderência. Em seu trabalho, foi demonstrado que existe uma intensa fissuração do concreto, onde fissuras principais são acompanhadas de fissuras secundárias dispostas conforme a figura 3.1.

As fissuras de aderência são responsáveis por uma significativa perda de rigidez da peça além de alterarem os mecanismos de transferência de tensão entre o aço e o concreto, pois, após a formação das fissuras, a tensão é transferida por meio de forças de compressão inclinadas, como pode ser visto na figura 3.2. Desta forma, a força de compressão é resultante de uma componente paralela ao eixo da barra e uma componente perpendicular a barra (distribuição radial). A componente radial atua como uma pressão interna introduzindo tensões de tração e podendo dar origem a fissuras de fendilhamento. Em situações onde a tensão de confinamento é insuficiente ou em casos onde a armadura de confinamento é insuficiente, as fissuras de fendilhamento podem chegar a superfície conduzindo a tensão de aderência a um valor nulo (antes da tensão de aderência atingir seu valor máximo) resultando no colapso da peça por fendilhamento. Em peças onde o confinamento das armaduras se dá de forma eficiente, o escorregamento da armadura é crescente até o ponto em que todo o concreto existente entre as nervuras seja totalmente cisalhado. A partir deste ponto, o único mecanismo de aderência é o atrito entre a armadura e o concreto, cujo valor é inferior à tensão de aderência antes do fim da aderência mecânica.

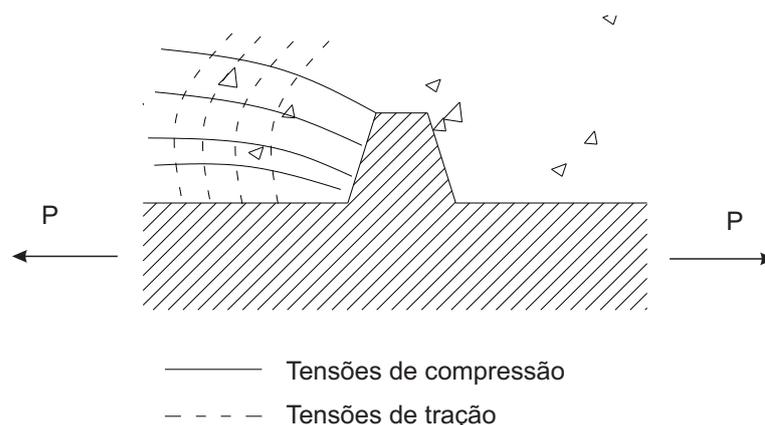


Figura 3.2: Distribuição de tensões.

Embora a tensão de aderência possa teoricamente ser dividida da forma apresentada, não é possível mensurar cada uma das parcelas apresentadas isoladamente.

Ao longo dos anos, muitas pesquisas foram desenvolvidas na tentativa de conceber modelos analíticos e numéricos que pudessem representar a aderência. Destas pesquisas surgiram muitos modelos que em sua maioria, possuem base empírica ou são calibrados por meio de dados experimentais.

Em modelos numéricos, escopo do presente trabalho, os modelos são dependentes de leis constitutivas “*tensão de aderência-escorregamento*”, obtidas a partir de ensaios experimentais, capazes de descrever o fenômeno.

Apresentam-se no próximo item algumas leis constitutivas usadas nos modelos que serão apresentados.

## 3.2 Leis Constitutivas para a Perda de Aderência

### 3.2.1 Lei Proposta por Eligehausen et al. (1983)

Eligehausen et al. (1983) realizou um estudo experimental da relação tensão de aderência escorregamento para barras ancoradas em concreto confinado e sujeitas a carregamentos monotônicos e cíclicos. Ao final de seu estudo experimental, os autores propuseram um modelo analítico, representado na figura 3.3, para o caso de carregamentos monotônicos.

A representação matemática do modelo é dada pelas seguintes equações:

$$\tau = \tau_{max} \left( \frac{w_b}{w_{b1}} \right)^\alpha \quad \text{para } 0 \leq w_b \leq w_{bmax}; \quad (3.1)$$

$$\tau = \tau_{max} \quad \text{para } w_{b1} \leq w_b < w_{b2}; \quad (3.2)$$

$$\tau = \tau_{max} - (\tau_{max} - \tau_f) \left[ \frac{(w_b - w_{b2})}{(w_{b3} - w_{b2})} \right] \quad \text{para } w_{b2} \leq w_b \leq w_{b3}; \quad (3.3)$$

$$\tau = \tau_f \quad \text{para } w_b > w_{b3}, \quad (3.4)$$

onde  $\tau$  é a tensão de aderência para um dado escorregamento  $w_b$ ;  $\tau_{max}$  é a máxima tensão de aderência;  $\tau_f$  é a tensão de aderência final;  $w_{b1}$  é o escorregamento referente

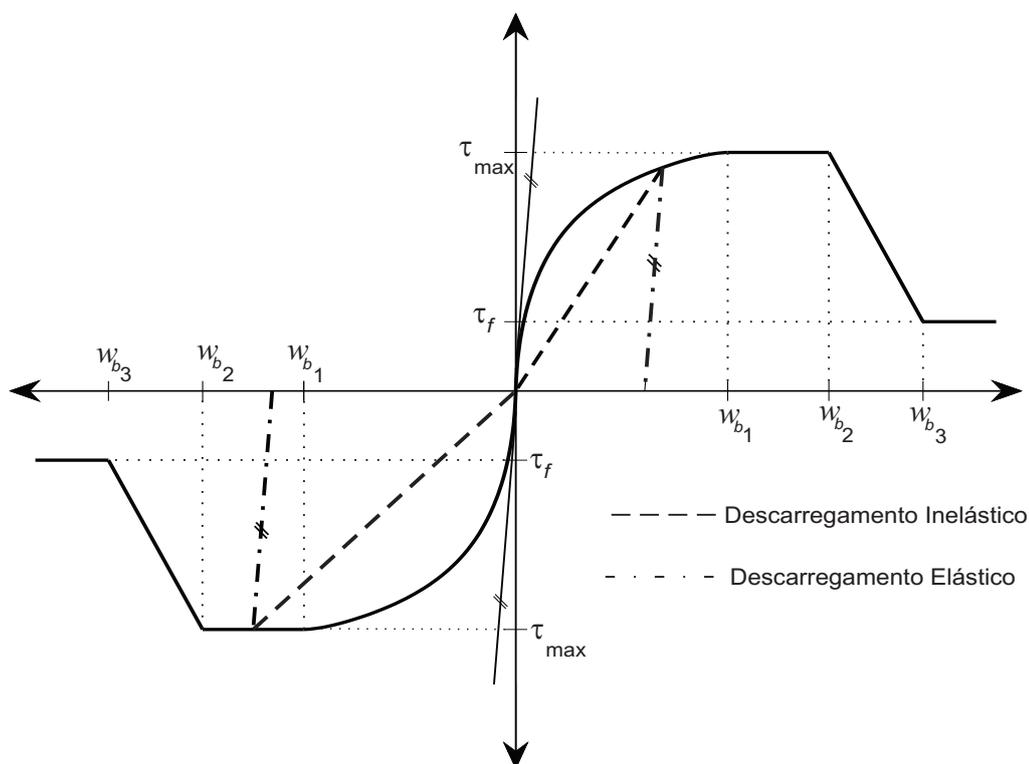


Figura 3.3: Lei constitutiva proposta por Eligehausen et al. (1983).

a tensão máxima de aderência;  $w_{b3}$  é o escorregamento no momento que a tensão de aderência atinge seu ponto final.

O Modelo proposto por Eligehausen et al. (1983) é adotado pelo CEB/FIB (2010) e pode ser usado para barras de alta aderência e para barras lisas, desde que se adote parâmetros plausíveis para tal. Os parâmetros para o referido modelo são apresentados na tabela 3.1 para o caso de barras nervuradas e na tabelas 3.2 para o caso das barras não nervuradas.

Tabela 3.1: Parâmetros para as relações “*tensões de aderência-deslizamento*” para barras nervuradas.

Parâmetro	Concreto com confinamento	
	Boa aderência	Má aderência
$w_{b1}(mm)$	1,0	1,8
$w_{b2}(mm)$	2,0	3,6
$w_{b3}(mm)$	*	*
$\alpha$	0,4	0,4
$\tau_{max.}(MPa)$	$2,5f_{ck}^{\frac{1}{2}**}$	$1,25f_{ck}^{\frac{1}{2}**}$
$\tau_f(MPa)$	$0,4\tau_{max.}$	$0,4\tau_{max.}$

\* Espaçamento entre nervuras

\*\* fck em MPa

Tabela 3.2: Parâmetros para as relações “*tensões de aderência-deslizamento*” para barras não nervuradas.

Parâmetro	Fios trefilados a frio		Barras laminadas a quente	
	Boa aderência	Má aderência	Boa aderência	Má aderência
$w_{b1}(mm)$	0,01	0,01	0,1	0,1
$w_{b2}(mm)$	0,01	0,01	0,1	0,1
$w_{b3}(mm)$	0,01	0,01	0,1	0,1
$\alpha$	0,5	0,5	0,5	0,5
$\tau_{max.}(MPa)$	$0,1f_{ck}^{\frac{1}{2}*}$	$0,05f_{ck}^{\frac{1}{2}*}$	$0,30f_{ck}^{\frac{1}{2}*}$	$0,15f_{ck}^{\frac{1}{2}*}$
$\tau_f(MPa)$	$0,1f_{ck}^{\frac{1}{2}*}$	$0,05f_{ck}^{\frac{1}{2}*}$	$0,30f_{ck}^{\frac{1}{2}*}$	$0,15f_{ck}^{\frac{1}{2}*}$

\* fck em MPa

### 3.2.2 Lei Proposta por Doerr (1988)

Doerr (1988) propôs a relação “*tensão de aderência-escorregamento*”, ilustrada na figura 3.4 e representada matematicamente pelas equações 3.5 e 3.6

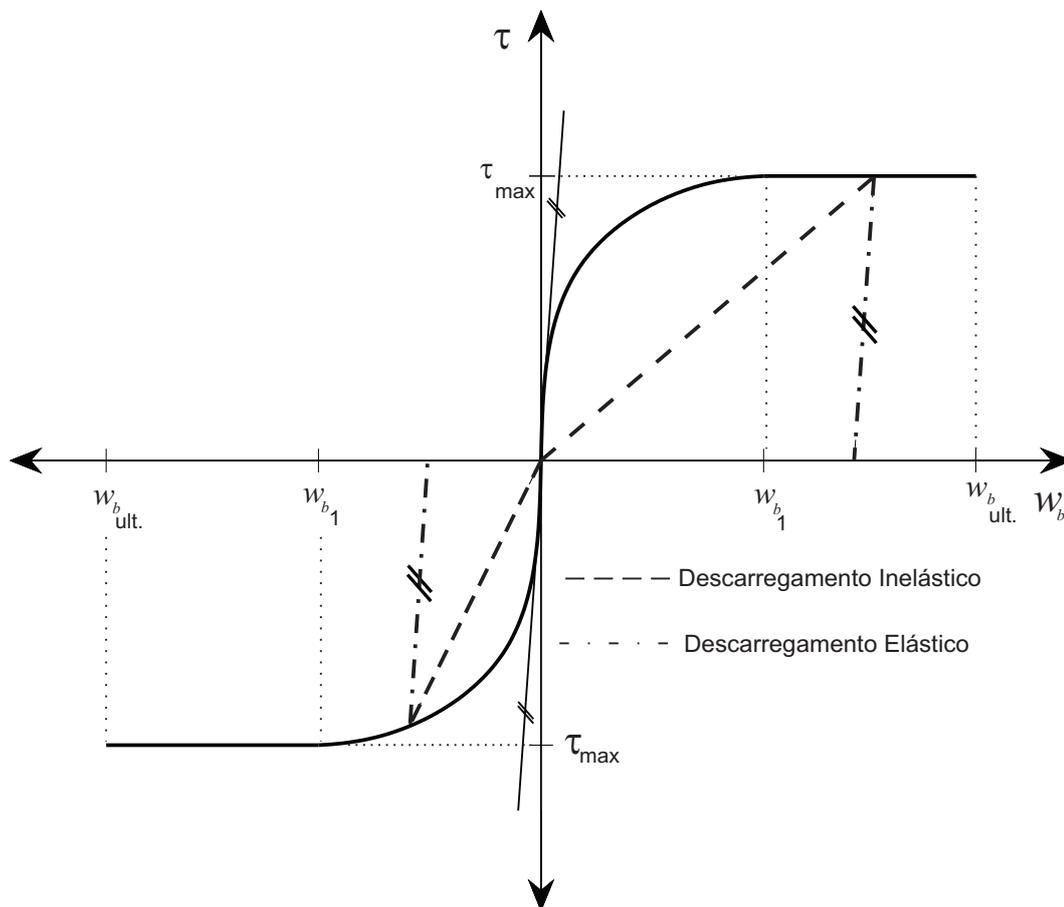


Figura 3.4: Lei constitutiva proposta por Doerr (1988).

$$\tau = \alpha f_{ct} \left[ 5 \left( \frac{w_b}{w_{b1}} \right) - 4,5 \left( \frac{w_b}{w_{b1}} \right)^2 + 1,4 \left( \frac{w_b}{w_{b1}} \right)^3 \right] \text{ para } w_b < w_{b1}, \quad (3.5)$$

$$\tau = \alpha 1,9 f_{ct} \text{ para } w_b > w_{b1}, \quad (3.6)$$

onde  $\tau$  é a tensão de aderência;  $f_{ct}$  é a resistência a tração do concreto;  $w_b$  é o escorregamento da armadura;  $w_{b1}$  é o escorregamento associado à tensão máxima;  $\alpha$  é um coeficiente que considera os diversos fatores que influenciam na perda de aderência.

A constante  $\alpha$  é composta por quatro outros fatores e é dado por

$$\alpha = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4. \quad (3.7)$$

A constante  $\alpha_1$ , que varia de 0,8 a 1,25, é responsável por representar a influência oriunda da granulometria dos agregados da matriz de concreto, consistência do concreto no momento da concretagem e orientação do esforço com relação a direção de lançamento do concreto.

A constante  $\alpha_2$  é uma função da variável geométrica  $a_r$ , que por sua vez, é dada pela razão entre a área superficial entre duas nervuras consecutivas e a área da seção transversal considerada. Desta forma, a variável  $\alpha_2$  é responsável por representar a influência da geometria da barra na perda de aderência. O uso desta constante se justifica no fato de Doerr (1988) ter proposto a relação constitutiva em estudo, tomando como referência os resultados experimentais realizados com barras nervuras de diâmetro igual a  $16mm$  e  $a_r = 0,065$ . Apresenta-se na figura 3.5 a relação entre as variáveis  $\alpha_2$  e  $a_r$ .

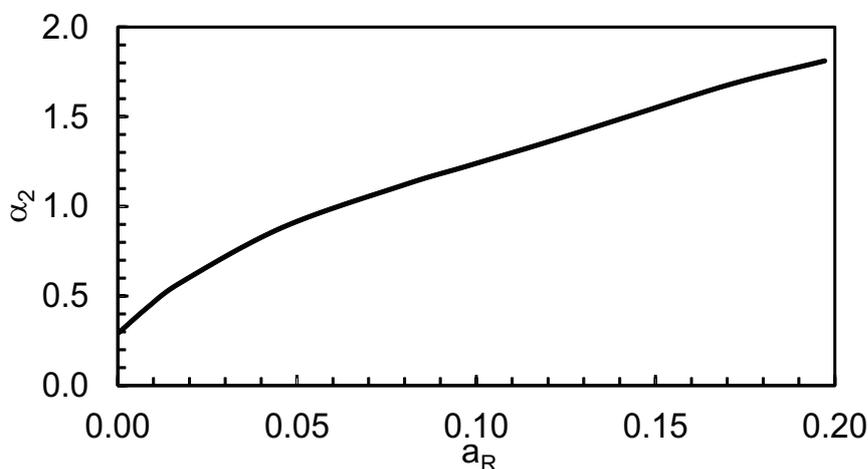


Figura 3.5: Influência da área lateral da armadura normalizada para  $a_r = 0.065$ , correspondente a barra usada nos trabalho de Doerr (1988)).

Outra grandeza dependente do parâmetro  $a_r$  é o escorregamento último. Apresenta-se na tabela 3.3 valores de escorregamentos últimos correlacionados com diversos valores do parâmetro  $a_r$  e a resistência de concreto.

Tabela 3.3: Escorregamentos últimos para para diversos valores de  $a_r$  e  $f_c$ .

$a_r$	$f_c^* = 20MPa$	$f_c^* = 40MPa$	$f_c^* = 60MPa$
0,005	5,00	3,60	3,00
0,010	3,06	2,16	1,80
0,025	1,50	1,06	0,88
0,050	0,88	0,62	0,52
0,100	0,51	0,38	0,30
0,200	0,30	0,21	0,18
0,400	0,22	0,15	0,13

\* resistência à compressão para ensaio cúbico.

O parâmetro  $\alpha_3$  representa a influência da pressão transversal a armadura ou o confinamento da armadura. Este fator é baseado nos trabalho de Doerr (1988) e nos trabalhos de Eligehausen et al. (1983). No trabalho de Doerr (1988) são apresentados estudos realizados em corpos de provas cilíndricos onde observa-se uma correlação entre o aumento da tensão de aderência e o aumento de uma pressão radial  $q$ , atuando sobre a superfície da armadura, originária de um pressão externa  $p$  aplicada de forma radial. Nos estudos realizados por Eligehausen et al. (1983), foram considerados apenas o acréscimo de tensão somente em uma direção. Os resultados destes dois estudos podem ser vistos na figura 3.2.2.

A pressão superficial  $q$  também exerce uma forte influência no valor do escorregamento  $w_{b,1}$ . A correlação entre estes dois parâmetros é dado por:

$$w_{b1} = 0,06 + 0,004q. \quad (3.8)$$

Embora Doerr (1988) e Eligehausen et al. (1983) tenham comprovado experimentalmente a influência da pressão lateral no acréscimo da tensão de aderência, não foi apresentado uma equação matemática para correlacionar esta dependência.

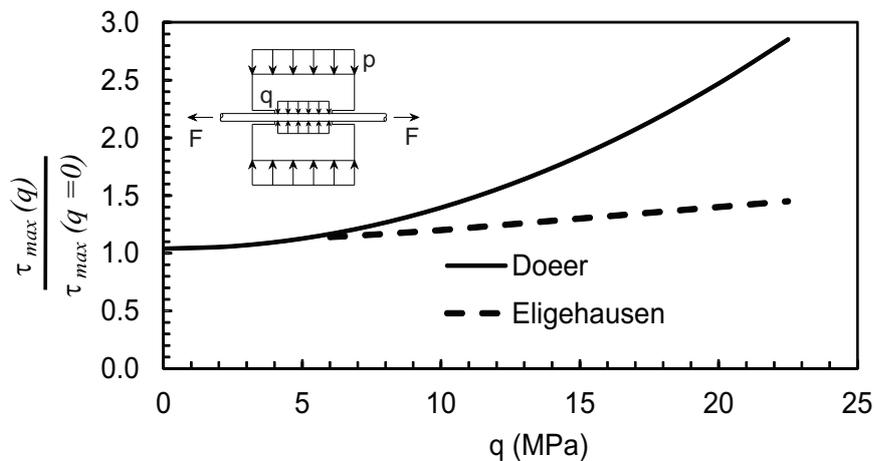


Figura 3.6: Aumento da tensão de aderência em função da tensão lateral na superfície de contato entre a armadura e o concreto.

Contudo, Doerr (1988) recomenda em seu trabalho o uso do parâmetro  $\alpha_3$  em casos onde não é possível garantir o completo envolvimento da armadura pela matriz de concreto, desta forma, a figura 3.7 ilustra valores recomendados de  $\alpha_3$ .

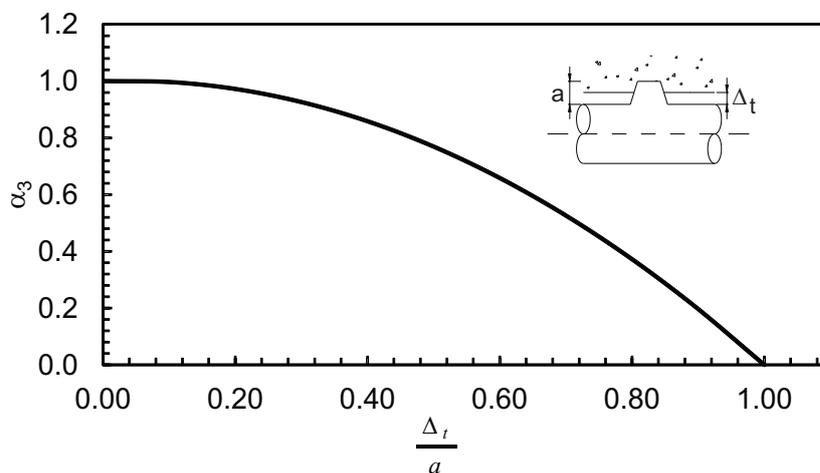


Figura 3.7: Redução da tensão de aderência em função do afastamento  $\Delta_t$  ente a matriz de concreto e a armadura.

Por fim, o parâmetro  $\alpha_4$  inclui os efeitos do processo de microfissuração do concreto na zona de aderência. Nilson (1972) apresenta uma a relação entre a “tensão

de aderência-escorregamento”, muito influenciada pelos efeitos locais. Desta forma, o parâmetro  $\alpha_4$  é dado por

$$\alpha_4 = \alpha_{4,1} \cdot \alpha_{4,2}, \quad (3.9)$$

onde

$$\alpha_{4,1} = 1 - \frac{f_y}{f_u} \cdot \frac{\epsilon_u}{\epsilon_y}; \quad (3.10)$$

$$\alpha_{4,1} = \text{sen}\phi. \quad (3.11)$$

Na equação 3.11 o ângulo  $\phi$  se refere ao ângulo formado entre o eixo da barra e as fissuras no concreto, o que torna esse parâmetro de difícil obtenção.

### 3.2.3 Lei Proposta por Nilson (1968)

Em seu trabalho, Nilson (1968) toma como base dados experimentais apresentados por Bresler e Bertero (1966) e conclui que a relação tensão de aderência-escorregamento pode ser bem representada por um polinômio de terceiro grau dado por

$$\tau = A \cdot w_b - B \cdot w_b^2 + C \cdot w_b^3, \quad (3.12)$$

onde os coeficiente A, B e C devem ser tomados com base em dados experimentais.

No trabalho apresentado por Nilson (1968), a equação (3.12) apresenta a seguinte forma

$$\tau = 981w_b - 5.7361w_b^2 + 837.383w_b^3. \quad (3.13)$$

Obviamente a equação (3.13) somente possui validade em situações similares ao adotado por Bresler e Bertero (1966), de forma que em situações distintas, os coeficiente A, B e C deverão ser devidamente ajustados.

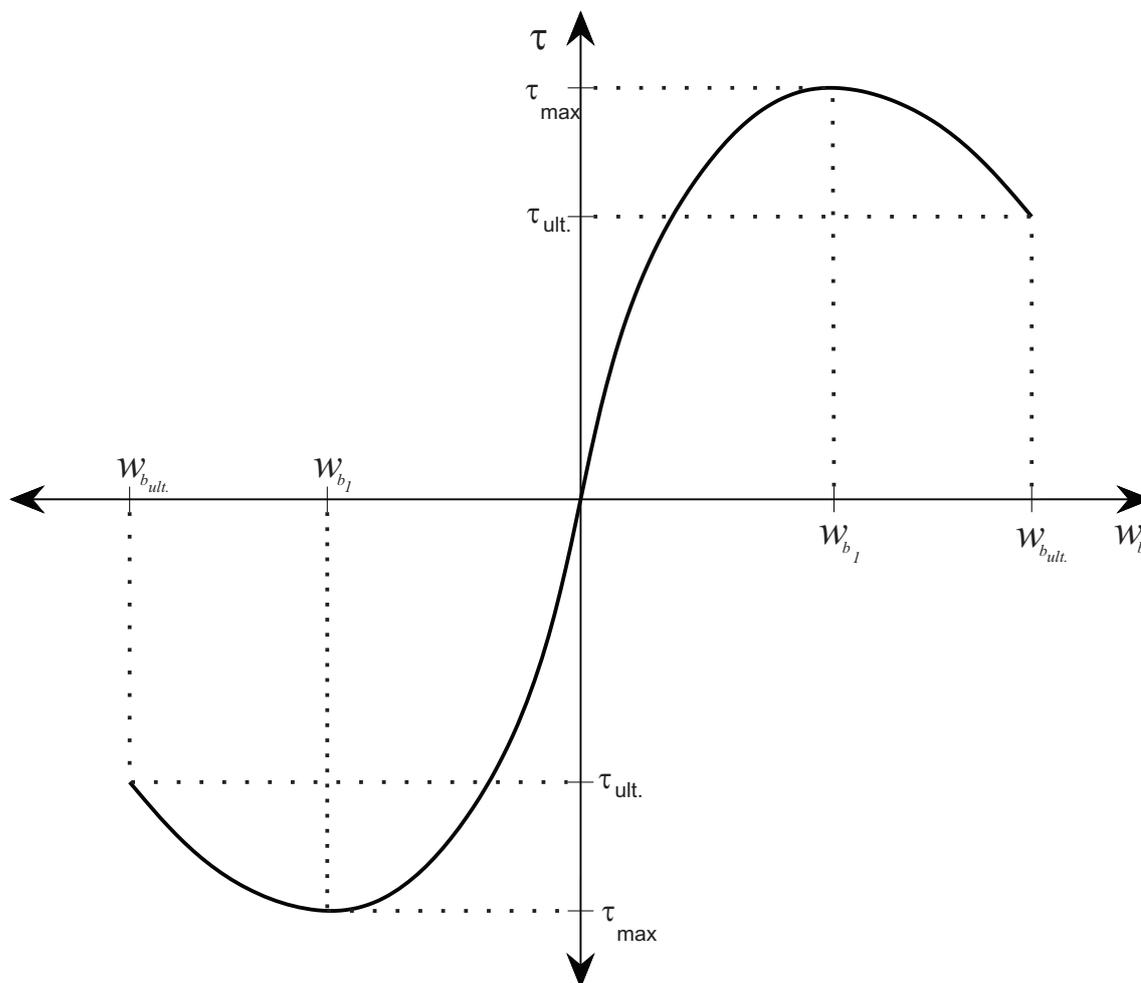


Figura 3.8: Lei proposta por Nilson (1968).

### 3.2.4 Lei Proposta por Hawkins et al. (1982)

Hawkins et al. (1982) após estudar o comportamento da tensão de aderência sob a ação de carregamentos cíclico, propuseram, para o caso de carregamentos monotônicos, uma lei tensão de aderência-escorregamento poligonal formada por três retas como pode ser visto na figura 3.9

Para utilizar o modelo proposto por Hawkins et al. (1982) é necessário determinar os deslocamento relativos  $w_{b,1}$ ,  $w_{b,2}$ ,  $w_{b,ult.}$  e da tensão de aderência máxima  $\tau_{max}$ . Para tal, é necessário confrontar a curva proposta com dados experimentais obtido de ensaios do tipo pull-out.

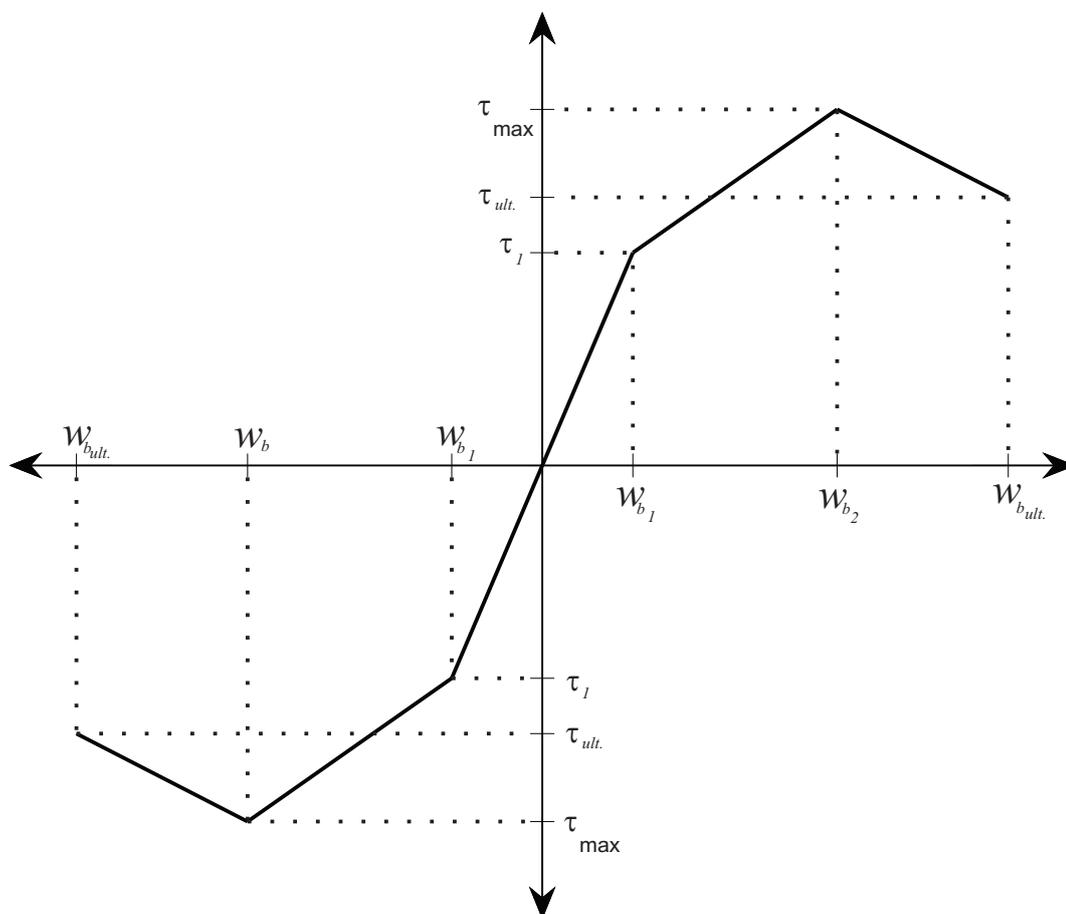


Figura 3.9: Lei proposta por Hawkins et al. (1982).

Rosa (1994) apresenta em seu trabalho uma tentativa de correlacionar os parâmetros do modelo proposto por Hawkins et al. (1982) com as propriedades mecânicas do concreto e as propriedades geométricas da armadura, porém não obteve bons resultados.

### 3.3 Modelos Numéricos para Perda de Aderência

#### 3.3.1 Modelo de Perda de Aderência Pontual - Elementos de Molas

O modelo de molas é o mais simples dos elementos desenvolvidos para representar a perda de aderência e o escorregamento da armadura. Este modelo foi proposto por

Ngo e Scordelis (1967). É formado por molas ortogonais que não possuem dimensões físicas. Este elemento liga os nós do aço aos nós do concreto e o comportamento na interface aço-concreto é representado através da relação tensão-escorregamento escolhida apropriadamente para cada uma das molas. A figura 3.10 ilustra a proposta.

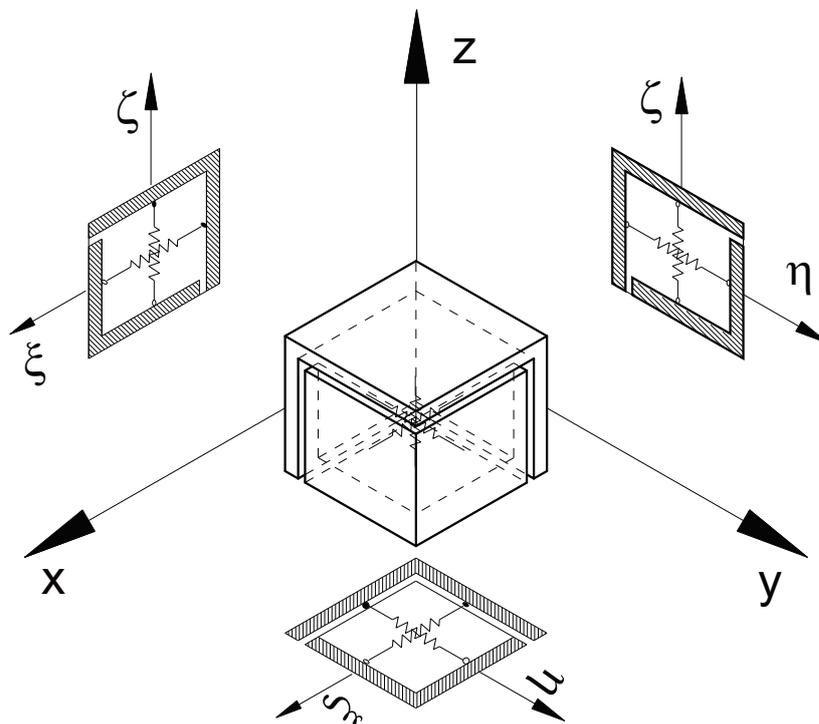


Figura 3.10: Modelo de molas para modelos tridimensionais e seu sistema coordenado.

A relação entre as tensões e os deslocamentos relativos para o elemento é dada por:

$$\begin{bmatrix} \tau_{\xi} \\ \tau_{\eta} \\ \tau_{\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{\xi} & 0 & 0 \\ 0 & k_{\eta} & 0 \\ 0 & 0 & k_{\zeta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_{\xi} \\ \Delta_{\eta} \\ \Delta_{\zeta} \end{Bmatrix}, \quad (3.14)$$

onde  $k_{\xi}$ ,  $k_{\eta}$  e  $k_{\zeta}$  são os coeficientes de rigidez de mola na direção  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\zeta$ , respectivamente;  $\tau_{\xi}$ ,  $\tau_{\eta}$  e  $\tau_{\zeta}$  são as tensões de aderência nas direções  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\zeta$ , respectivamente;  $\Delta_{\xi}$ ,  $\Delta_{\eta}$  e  $\Delta_{\zeta}$  são os escorregamentos nas direções  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\zeta$ , respectivamente (Figura



e o outro nó se liga ao elemento de armadura. Desta forma, os nós que se ligam ao elemento de concreto formam um segmento e os nós que se ligam ao elemento de armadura formam um segundo segmento. Embora os dois segmentos sejam definidos por conjunto de nós distintos, no estado indeformado estes segmentos possuem as mesmas coordenadas.

Durante o desenvolvimento do texto, o segmento formado pelos nós ligados ao elemento de concreto será denominado como segmento “c” e, de maneira análoga, o segmento formado pelos nós ligados ao segmento de armadura será denominado segmento “s”.

As coordenadas globais do elemento de contato são dadas por  $(x,y)$ , as coordenadas naturais do elemento são dadas por  $(\xi)$  e o vetor das funções de interpolação dos deslocamentos nodais é dado por  $\{\phi\}$ . As coordenadas globais de um ponto qualquer do elemento podem ser relacionadas com as coordenadas naturais através das equações (3.15).

$$x(\xi) = \langle \psi \rangle \{x\}, \quad (3.15)$$

$$y(\xi) = \langle \psi \rangle \{y\}, \quad (3.16)$$

onde  $\{x\}$  é o vetor das coordenadas x dos nós do elemento e  $\{y\}$  é o vetor das coordenadas y dos nós do elemento. Usando as mesmas funções de forma utilizadas para interpolar a geometria do elemento, os deslocamentos de cada um dos segmentos formados pelos nós podem ser interpolados segundo o sistema de equações (3.17).

$$\begin{Bmatrix} u^c \\ v^c \\ u^s \\ v^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \phi \rangle & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \langle \phi \rangle & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \langle \phi \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \langle \phi \rangle \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u^c\} \\ \{v^c\} \\ \{u^s\} \\ \{v^s\} \end{Bmatrix}, \quad (3.17)$$

ou, de forma simplificada,

$$\{u\} = [\phi] \{u_n\}, \quad (3.18)$$

onde  $u^s, v^s$  são os deslocamentos em um ponto de coordenadas  $(\xi)$  no segmento

“s”;  $u^c, v^c$  são os deslocamentos em um ponto de coordenada ( $\xi$ ) no segmento “c”;  $\{u^s\}, \{v^s\}$  são os vetores deslocamentos dos nós ligados aos elemento de armadura;  $\{u^c\}, \{v^c\}$  são os vetores de deslocamentos dos nós ligados ao elemento de concreto;  $\{u_n\}$  é o vetor de deslocamentos nodais;  $\{u\}$  é o vetor de deslocamentos no ponto de coordenada ( $\xi$ ).

Ao solicitar a estrutura com esforços suficientemente grandes para que ocorra o escorregamento da armadura, o elemento de contato se deformará dando origem aos deslocamentos relativos entre os nós duplos. Em situações onde ocorre deslocamentos relativos nas duas direções, o elemento passa a ter a segunda dimensão física. Sendo assim, os deslocamentos relativos entre dois pontos com coordenadas coincidentes, mas estando um no segmento “c” e o outro no segmento “s”, são dados por:

$$\begin{Bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^c \\ v^c \\ u^s \\ v^s \end{Bmatrix}, \quad (3.19)$$

ou, de forma simplificada,

$$\{\Delta\} = [A] \{u\}. \quad (3.20)$$

Substituindo a equação (3.18) na equação (3.20) tem-se que

$$\{\Delta\} = [A] [\phi] \{u^n\}, \quad (3.21)$$

ou, de forma simplificada,

$$\{\Delta\} = [B] \{u^n\}, \quad (3.22)$$

onde

$$[B] = [A] [\phi]. \quad (3.23)$$

De forma análoga, as tensões nos mesmos pontos estudados anteriormente estão

relacionadas com as tensões de contato por meio da equação (3.24).

$$\begin{Bmatrix} \tau_x^c \\ \tau_y^c \\ \tau_x^s \\ \tau_y^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \end{Bmatrix}, \quad (3.24)$$

ou, simbolicamente

$$\{\tau\} = [A]^T \{\tau_{cont.}\}. \quad (3.25)$$

O vetor de deslocamentos relativos de um ponto, tendo como referência o sistema global, pode ser transformado para o sistema local por meio do produto entre vetor de cossenos diretores e o vetor de deslocamentos relativos, na forma:

$$\begin{Bmatrix} \Delta_\xi \\ \Delta_\eta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l \\ m \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{Bmatrix}, \quad (3.26)$$

ou, simbolicamente,

$$[\Delta_L] = [T][\Delta]. \quad (3.27)$$

De forma análoga, tem-se a transformação do vetor de tensões

$$\begin{Bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{Bmatrix} = [T]^T \begin{Bmatrix} \tau_\xi \\ \tau_\eta \end{Bmatrix}, \quad (3.28)$$

$$\{\tau\} = [T]^T \{\tau_L\}. \quad (3.29)$$

A relação entre as tensões de contato e os deslocamentos relativos na superfície de contato, tendo como referência o sistema de coordenadas locais, é dada por

$$\{\tau_L\} = \{C_L\} \{\Delta_L\}, \quad (3.30)$$

onde

$$[C_L] = \begin{bmatrix} C_{\xi\xi} & C_{\xi\eta} \\ C_{\eta\xi} & C_{\eta\eta} \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

Considerando-se que os deslocamentos relativos se dão de forma independente nas três direções, a matriz constitutiva é dada por

$$[C_L] = \begin{bmatrix} C_{\xi\xi} & 0 \\ 0 & C_{\eta\eta} \end{bmatrix}, \quad (3.32)$$

onde  $C_{\xi\xi}$  e  $C_{\eta\eta}$  são módulos de aderência nas direções  $\xi$ ,  $\eta$  respectivamente.

A matriz  $[C_L]$  pode ser transformada para o sistema de coordenadas globais através da equação

$$[C] = [T]^T [C_L] [T]. \quad (3.33)$$

De posse da matriz constitutiva do elemento, com referência ao sistema global da estrutura, a matriz de rigidez por ser obtida através da equação

$$[K^e] = \int_A [B]^T [C] [B] dA. \quad (3.34)$$

O vetor de forças nodais equivalentes às tensões correntes do elemento é obtido pela equação

$$\underline{F}_e = \int_A \underline{B}^T \underline{\tau} dA, \quad (3.35)$$

onde

$$\underline{\tau} = \underline{C} \underline{\Delta}. \quad (3.36)$$

As equações 3.37 e 3.35 devem ser integradas sobre a superfície de contato do elemento. Assim, o elemento diferencial  $dA$  para o elemento unidimensional é dado por

$$dA = t|J|d\xi, \quad (3.37)$$

onde  $t$  é a espessura da superfície de contato e  $|J|$  é o determinante da matriz jacobiana.

### 3.3.2.2 Modelo Bidimensional

O elemento de contato bidimensional pode ser usado para conexão de elementos tridimensionais com elementos de armadura unidimensionais (representando barras de aço), elementos de armadura bidimensionais (representando chapas de aço) ou

outros elementos tridimensionais. Este elemento pode ainda ser usado para conectar camadas distintas de elementos de casca ou elementos de estado plano.

A formulação deste elemento é a mesma apresentada na formulação dos elementos unidimensionais. Desta forma, será apresentado a expansão da formulação usando a mesma nomenclatura utilizada no item 3.3.2.1.

Por se tratar de um elemento bidimensional, faz-se necessário o uso de mais uma coordenada natural, que por sua vez, deve ser ortogonal aos eixos naturais  $\xi$  e  $\eta$  (Figura 3.12), de forma que, os nós que se ligam ao elemento de concreto formam agora um plano que será denominado de plano “c” e os nós que se ligam ao elemento de armadura formam outro plano que, por sua vez, será denominado plano “s”. Assim como nos elementos unidimensionais, este elemento no estado indeformado não apresentará uma de suas dimensões físicas.

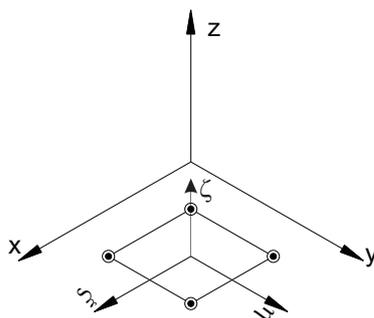


Figura 3.12: Elemento de contato indeformado.

As coordenadas globais do elemento de contato bidimensionais são dadas por  $(x, y)$ , as coordenadas naturais do elemento são dadas por  $(\xi, \eta, \zeta)$  e o vetor das funções de interpolação dos deslocamentos nodais é dado por  $\phi$ , que para o dado caso é função das coordenadas naturais  $(\xi, \eta)$ . As coordenadas globais de um ponto qualquer do elemento podem ser relacionadas com as coordenadas naturais através das equações (3.38).

$$x(\xi, \eta) = \langle \phi \rangle \{x\}, \quad (3.38)$$

$$y(\xi, \eta) = \langle \phi \rangle \{y\},$$

onde  $\{x\}$  é o vetor das coordenadas  $x$  dos nós do elemento e  $\{y\}$  é o vetor das coordenadas  $y$  dos nós do elemento.

Usando as mesmas funções de forma utilizadas para interpolar a geometria do elemento, os deslocamentos de cada um dos planos formados pelos nós podem ser interpolados segundo as equações (3.39).

$$\begin{Bmatrix} u^c \\ v^c \\ w^c \\ u^s \\ v^s \\ w^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \phi \rangle & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \langle \phi \rangle & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \langle \phi \rangle & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \langle \phi \rangle & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \langle \phi \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \langle \phi \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{u^c\} \\ \{v^c\} \\ \{w^c\} \\ \{u^s\} \\ \{v^s\} \\ \{w^s\} \end{Bmatrix}, \quad (3.39)$$

ou, de forma simplificada,

$$\{u\} = [\phi] \{u_n\}; \quad (3.40)$$

onde  $u^s, v^s, w^s$  são os deslocamentos em um ponto de coordenadas  $(\xi, \eta)$  no plano “s”;  $u^c, v^c, w^c$  são os deslocamentos em um ponto de coordenada  $(\xi, \eta)$  no plano “c”;  $\{u^s\}, \{v^s\}, \{w^s\}$  são os deslocamentos dos nós do elemento de armadura;  $\{u^c\}, \{v^c\}, \{w^c\}$  são os deslocamentos dos nós do elemento de concreto;  $\{u_n\}$  é o vetor de deslocamentos nodais;  $\{u\}$  é o vetor de deslocamentos no ponto de coordenada  $(\xi, \eta)$ .

Existindo esforços suficientes para que ocorra o escorregamento da armadura, o elemento de contato se deformará dando origem aos deslocamentos relativos entre os nós duplos. Nas situações onde ocorre deslocamentos relativos nas três direções, o elemento passa a ter a terceira dimensão física. Sendo assim, os deslocamentos relativos entre dois pontos com coordenadas coincidentes, mas estando um no plano “c” e o outro no plano “s”, são dados por:

$$\begin{Bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \\ \Delta_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^c \\ v^c \\ w^c \\ u^s \\ v^s \\ w^s \end{Bmatrix}, \quad (3.41)$$

ou, de forma simplificada,

$$\{\Delta\} = [A] \{u\} \quad (3.42)$$

Substituindo a equação (3.40) na equação (3.42) tem-se que

$$\{\Delta\} = [A] [\phi] \{u^n\}, \quad (3.43)$$

ou, de forma simplificada,

$$\{\Delta\} = [B] \{u^n\}, \quad (3.44)$$

onde

$$[B] = [A] [\phi]. \quad (3.45)$$

De forma análoga, as tensões nos mesmos pontos estudados anteriormente estão relacionadas com as tensões de contato por meio da equação:

$$\begin{Bmatrix} \tau_x^c \\ \tau_y^c \\ \tau_z^c \\ \tau_x^s \\ \tau_y^s \\ \tau_z^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{Bmatrix}, \quad (3.46)$$

ou, simbolicamente

$$\{\tau\} = [A]^T \cdot \{\tau_{cont.}\}. \quad (3.47)$$

O vetor de deslocamentos relativos de um ponto, tendo como referência o sistema global, pode ser transformado para o sistema local por meio do produto entre vetor

de cossenos diretores e o vetor de deslocamentos relativos, na forma

$$\begin{Bmatrix} \Delta_\xi \\ \Delta_\eta \\ \Delta_\zeta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \\ \Delta_z \end{Bmatrix}, \quad (3.48)$$

ou, simbolicamente

$$[\Delta_L] = [T][\Delta] \quad (3.49)$$

De forma análoga, tem-se a transformação do vetor de tensões

$$\begin{Bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{Bmatrix} = [T]^T \begin{Bmatrix} \tau_\xi \\ \tau_\eta \\ \tau_\zeta \end{Bmatrix} \quad (3.50)$$

$$\{\tau\} = [T]^T \{\tau_L\}. \quad (3.51)$$

A relação entre as tensões de contato e os deslocamentos relativos na superfície de contato, tendo como referência o sistema de coordenadas locais, é dada por

$$\{\tau_L\} = \{C_L\} \cdot \{\Delta_L\}, \quad (3.52)$$

onde

$$[C_L] = \begin{bmatrix} C_{\xi\xi} & C_{\xi\eta} & C_{\xi\zeta} \\ C_{\eta\xi} & C_{\eta\eta} & C_{\eta\zeta} \\ C_{\zeta\xi} & C_{\zeta\eta} & C_{\zeta\zeta} \end{bmatrix}. \quad (3.53)$$

Considerando-se que os deslocamentos relativos se dão de forma independente nas três direções, a matriz constitutiva é dada por

$$[C_L] = \begin{bmatrix} C_{\xi\xi} & 0 & 0 \\ 0 & C_{\eta\eta} & 0 \\ 0 & 0 & C_{\zeta\zeta} \end{bmatrix}, \quad (3.54)$$

onde  $C_{\xi\xi}$ ,  $C_{\eta\eta}$  e  $C_{\zeta\zeta}$  são módulos de aderência nas direções  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\zeta$  respectivamente.

A matriz  $[C_L]$  pode ser transformada para o sistema de coordenadas globais através da equação

$$[C] = [T]^T [C_L] [T]. \quad (3.55)$$

De posse da matriz constitutiva do elemento, com referência ao sistema global da estrutura, a matriz de rigidez por ser obtida através da equação

$$[K^e] = \int_A [B]^T [C] [B] dA. \quad (3.56)$$

O vetor de forças nodais equivalente às tensões internas do elemento é dado por

$$\{F_e\} = \int_A [B]^T \{\tau\} dA. \quad (3.57)$$

As equações (3.56) e (3.57) devem ser integradas sobre a superfície de contato do elemento. Assim, o elemento diferencial  $dA$  é dado por

$$dA = |J| dr ds, \quad (3.58)$$

onde  $|J|$  é o determinante da matriz jacobiana.

# Capítulo 4

## Implementação Computacional

O **INSANE** (**IN**teractive **Str**uctural **AN**alysis **E**nvironment) é um sistema computacional para análise estrutural desenvolvido pelo Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais. O sistema é desenvolvido seguindo o paradigma da Programação Orientada a Objetos (POO) utilizando a linguagem de programação JAVA.

Em uma descrição extremamente sucinta, o **INSANE** pode ser resumido como um sistema que se estrutura sobre um conjunto de classes que formam um núcleo numérico, que por sua vez, interage com outros dois grupos de classes que correspondem a um pré e um pós processador. As classes que compõem o núcleo numérico implementam os diversos modelos numéricos passíveis de serem analisados pelo sistema, assim como as implementações de diversas técnicas de solução do modelos implementados. As diversas implementações já existentes no sistema possibilitavam a elaboração e análise de modelo de armadura discreta sem inclusão da perda de aderência. Desta forma, o presente capítulo tem como principal objetivo, apresentar as implementações realizadas junto ao núcleo numérico, visando a elaboração de todos os modelos de armadura discreta com inclusão da perda de aderência, além de incluir os modelos de armadura embutida bi e tridimensionais.

O projeto orientado ao objeto das classes implementadas, bem como, o posicionamento destas classes frente ao núcleo numérico, será apresentado com o uso de diagramas UML (*Unified Modelling Language*). A escolha da representação por UML se justifica no fato desta linguagem ser um padrão na modelagem de sistemas computacionais, principalmente, aqueles desenvolvidos segundo o paradigma orientado ao objeto.

Para identificar as classe que foram inseridas no sistema, elas serão destacadas em vermelho.

## 4.1 Organização do Núcleo Numérico

O núcleo numérico do sistema **INSANE** é composto da classe abstrata **Model**, da interface **Assembler** e da classe abstrata **Solution**, como pode ser visto na figura 4.1.

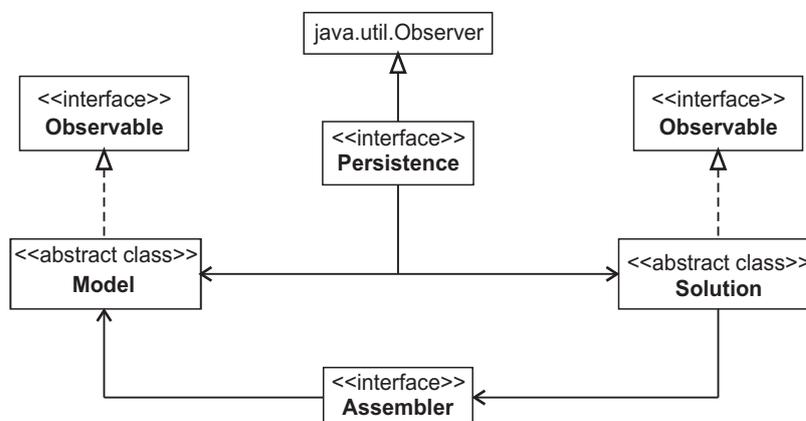


Figura 4.1: Organização do núcleo numérico.

A classe abstrata **Model** é responsável por reunir e fornecer à interface **Assembler** todos os dados relativos ao modelo discreto a ser analisado. A interface **Assembler** tem função de manipular os dados fornecidos pela classe **Model** de forma a definir o sistema matricial que rege o modelo em análise. Por fim, a classe abstrata **Solution** é detentora das técnicas e ferramentas necessárias para solucionar o sistema matricial

montado pela interface **Assembler**, seja o sistema linear ou não.

Para persistir os dados não voláteis do modelo em análise, o núcleo numérico se auxilia da interface **Persistence**. As classes que implementam a interface **Persistence**, são responsáveis por ler arquivos de entrada e escrever arquivos de saída, ambos, do tipo XML (eXtensible Markup Language). Ao ler um arquivo de entrada (advindo do pré processador, por exemplo), as classes que implementam a interface **Persistence** possuem métodos capazes de coletar e fornecer todos os dados necessário para preencher o modelo a ser analisado. Durante e após o processamento do modelo, as implementações da interface **Persistence** escrevem em disco, todos os dados necessários para que o pós processador possa ler e representar graficamente os resultado obtidos.

As classes que implementam a interface **Assembler** são capazes de montar o sistema matricial a ser solucionado. Em sua máxima generalização, a interface **Assembler** concebe o sistema matricial de segunda ordem dado por

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\mathbf{X} = \mathbf{D}, \quad (4.1)$$

onde  $\mathbf{X}$  é vetor de variáveis de estado do problema,  $\ddot{\mathbf{X}}$  e  $\dot{\mathbf{X}}$  são vetores que possuem respectivamente a primeira e a segunda derivada temporais das grandezas de estado;  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$   $\mathbf{C}$  são matrizes de coeficientes que podem ou não depender da variável de estado e de suas derivadas,  $\mathbf{D}$  é o vetor independente.

Para que o dados oriundos dos novos recursos inseridos no sistema (frutos do presente trabalho) pudessem ser passados para a classe **Model** e sobre tudo, para que os mesmos pudessem persistir no sistema, foi necessário realizar modificações em algumas das classe que implementam a interface **Persistence**, mais especificamente, na classe **PersistenceAsXML**.

A observação das alterações do modelo em análise se dá segundo um mecanismo de propagação de mudanças proporcionado pelo padrão **Observer**. Segundo este padrão, existem objetos denominadas observadores, frutos de alguma das classes

que implementam a interface `java.util.Observer`. Ainda neste padrão, existem objetos denominados observados, que por sua vez, são oriundos de alguma das classe que implementam a interface `java.util.observable`. Sempre que algum objeto do tipo observador é criado, o mesmo é inserido em uma lista existente nos objetos ditos observados, na qual é enumerado os objetos observadores existentes. Desta forma, sempre que um objeto do tipo observado sofre algum tipo de alteração, o mesmo dispara um mecanismo de propagação de modificações, notificando assim, a todos os seus observadores quanto a necessidade de se atualizarem. O mecanismo descrito é responsável por garantir a consistência entre a comunicação entre a interface `Persistence` (observador) e as interfaces `Solution` e `Model` (observados).

Maiores detalhes quanto as classe que compõem a núcleo numérico podem ser visto em Fonseca (2006), Fuina (2009), Fonseca (2008), Penna (2011).

## 4.2 Análise Estática Fisicamente Não Linear

Simplificando o sistema 4.1 para os problemas estáticos da mecânica dos sólidos, o sistema matricial que rege o problema é dado por

$$\mathbf{CX} = \mathbf{D}, \quad (4.2)$$

onde  $\mathbf{C}$  é a matriz de rigidez global,  $\mathbf{X}$  é o vetor de deslocamentos nodais e  $\mathbf{D}$  é o vetor de forças nodais do Modelo.

Nos problemas que apresentam a não linearidade física, ocorre uma dependência entre entre a Matriz de Rigidez  $\mathbf{C}$  e o vetor de deslocamentos  $\mathbf{X}$ . Para este caso específico, as raízes do sistema 4.2 somente podem ser determinadas por meio de um processo incremental iterativo de forma que o sistema 4.2 deve ser reescrito da seguinte forma

$$\mathbf{K}_t \delta \mathbf{U} = \delta \lambda \mathbf{P} + \mathbf{Q}, \quad (4.3)$$

onde  $\mathbf{K}_t$  é a matriz de rigidez tangente,  $\mathbf{U}$  é o vetor de deslocamentos incrementais,  $\delta\lambda$  é um incremento do fator de carga,  $\mathbf{P}$  é o valor da carga de referência e  $\mathbf{Q}$  é o vetor de cargas residuais do Modelo. A obtenção do vetor  $\mathbf{Q}$  é dada pela diferença entre o vetor de cargas externas e o vetor de forças equivalentes às tensões internas  $\mathbf{F}_i$ .

No Métodos dos Elementos Finitos (MEF), a matriz de rigidez global do problema,  $\mathbf{K}_t$ , e o vetor de forças internas  $\mathbf{F}_i$  são obtidos a partir da contribuição de cada elemento. Para tal, cada elemento finito processa as duas operações fundamentais:

$$\mathbf{k}_t^e = \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{E}_t \mathbf{B} dV_e \quad (4.4)$$

e

$$\mathbf{F}_t^e = \int_{V_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV_e, \quad (4.5)$$

onde  $\mathbf{F}_i^e$  é o vetor de carga nodais equivalentes ao estado de tensões corrente de cada elemento,  $\boldsymbol{\sigma}$  são as tensões no elemento finito,  $\mathbf{k}_t^e$  é a rigidez tangente,  $\mathbf{B}$  é a matriz das relações deformação-deslocamento,  $\mathbf{E}_t$  é a matriz constitutiva tangente e por fim,  $V_e$  é o volume do elemento finito.

No **INSANE**, o processo incremental iterativo é implementado no método *execute()* da classe `StaticEquilibriumPath`, derivada da classe `Solution` como pode ser observado na figura 4.2.

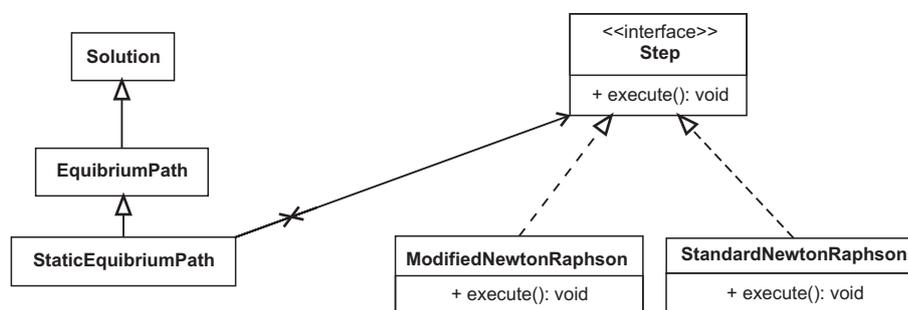


Figura 4.2: Classes da solução com a implementação do método de Newton-Rapshon.

A partir da figura 4.2, observa-se que a classe `StaticEquilibriumPath` se auxilia

da classe **Step**, sendo que as classe derivadas **StandardNewtonRapshon** e **ModifiedNewtonRapshon**, implementam o método *execute()*, contendo respectivamente, as versões padrão e modificada do método de Newton Rapshon.

Os trabalhos de Fonseca (2006), Fonseca (2008), Fuina (2009) apresentam a implementação do método *execute()* no sistema **INSANE**. A referida implementação foi realizada segundo o algoritmo genérico proposto por Yang e Shieh (1990) cujo o diagrama de atividades é explicitado na figura 4.3. Embora o presente texto não destine-se a detalhar o algoritmo de solução, faz-se necessário destacar alguns passos para uma melhor compreensão das classe e métodos implementados.

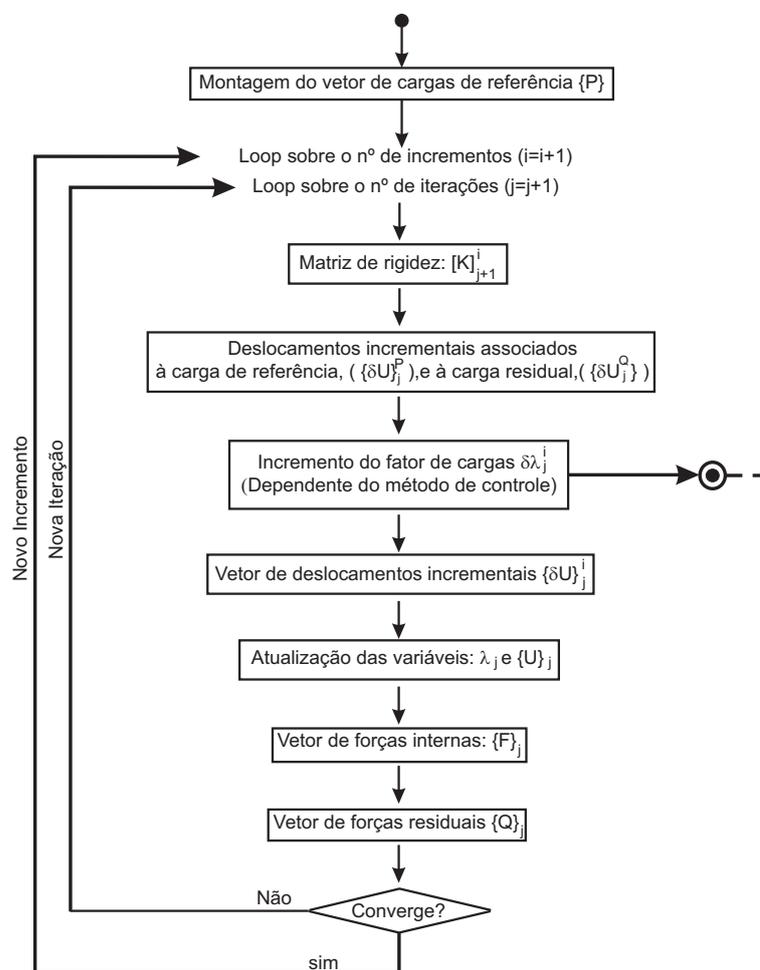


Figura 4.3: Algoritmo genérico proposto por Yang e Shieh (1990).

Ao analisar o algoritmo proposto por Yang e Shieh (1990), notas-se que primeira

atividade do algoritmo é solicitar que a classe **Assembler** faça a montagem da matriz de rigidez incremental (Figura 4.4). Para tal, o método *getIncrementalCuu()*, pertencente a classe **Assembler**, invoca o método *getIncrementalC()* de cada elemento finito (Figura 4.5). No caso dos elementos em que a integração da matriz de rigidez é feito numericamente, as implementações da classe abstrata **Element** se auxilia de alguma implementação da classe **ProblemDrive**, que por sua vez, é responsável para montar a matriz de rigidez do elemento tendo em visata a natureza do problema que o elemento destina-se representar (ver figura 4.6)

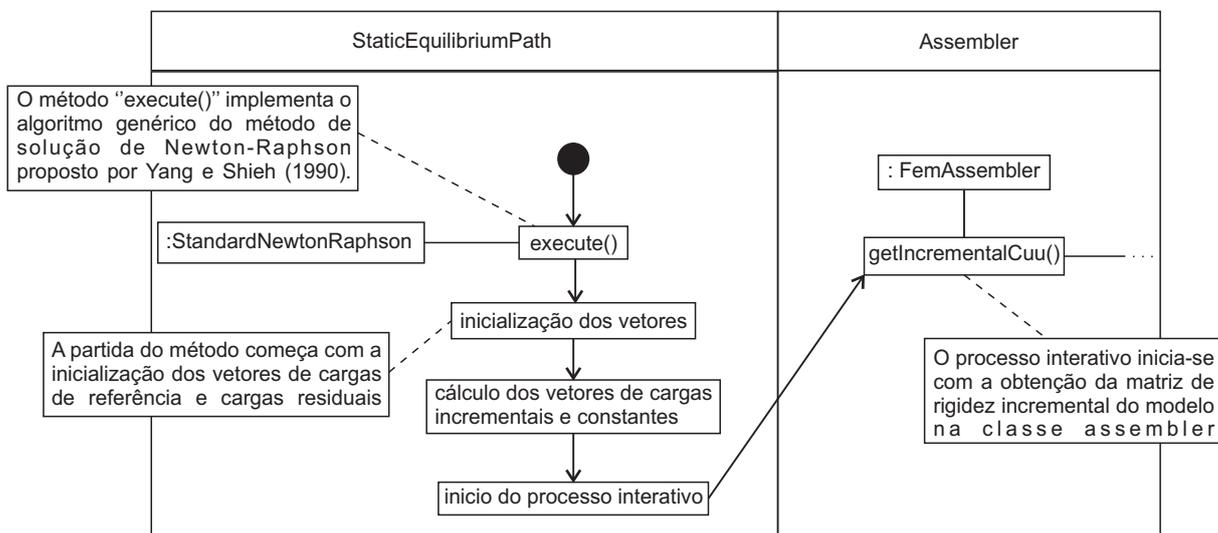


Figura 4.4: Início do processo de execução do método de Newton-Raphson -

Adaptado de Penna (2011).

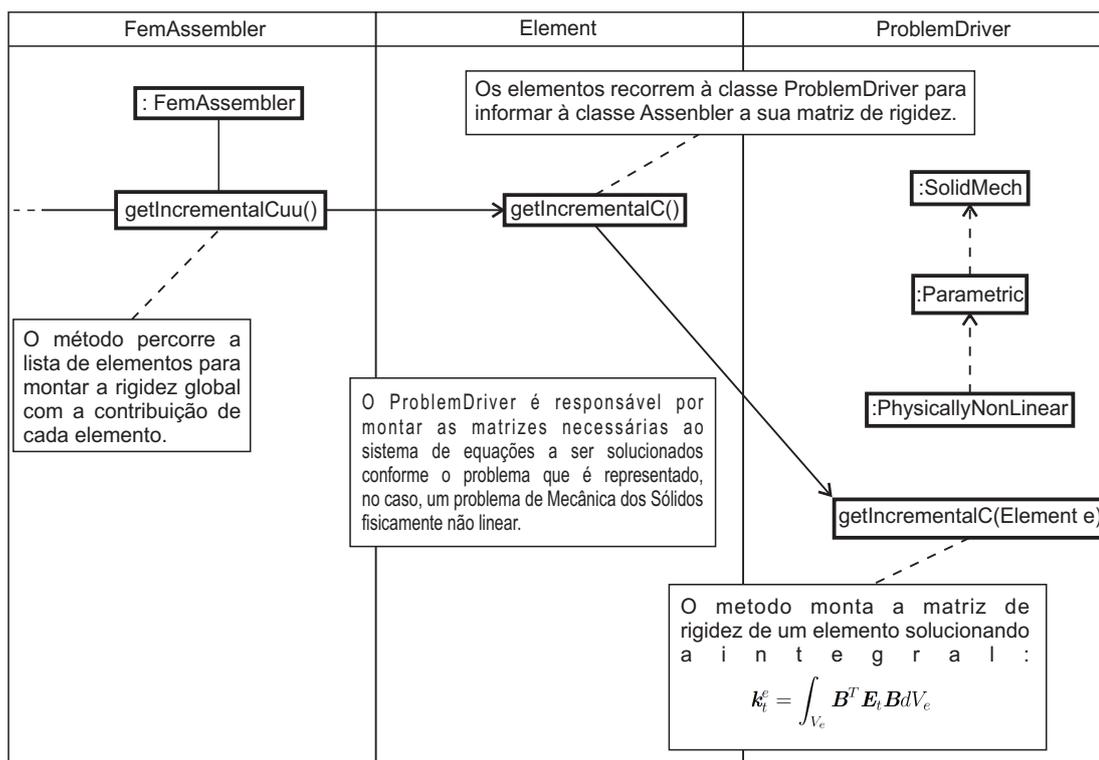


Figura 4.5: Obtenção da rigidez incremental - Penna (2011).

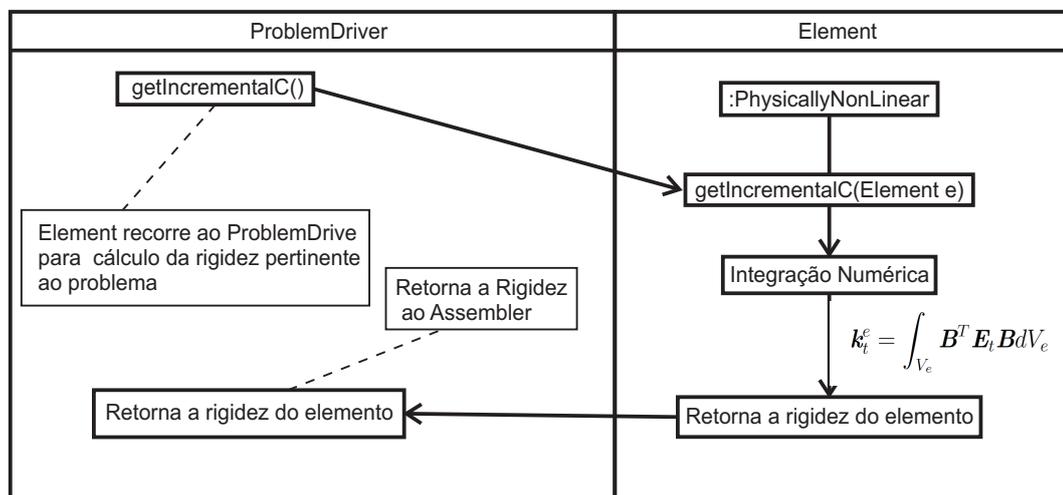


Figura 4.6: Integração da rigidez tangente de um elemento - Adaptado de Penna (2011).

No sistema **INSANE** os pontos materiais e os pontos de integração de um elemento finito são representados por objetos das classes que implementam a classe

abstrata *Degeneration*. Desta forma, as informações inerentes às propriedades geométricas, ao material, ao modelo de análise e o modelo constitutivo se encontram encapsuladas na degeneração. A degeneração também é responsável por guardar as variáveis constitutivas históricas (variáveis correntes e variáveis prévias) necessárias para análise fisicamente não linear.

No decorrer da análise não linear, o tensor constitutivo tangente é avaliado em cada degeneração pela classe `CosntitutiveModel` (detalhada no item 4.3.3) conforme apresentado na figura 4.7.

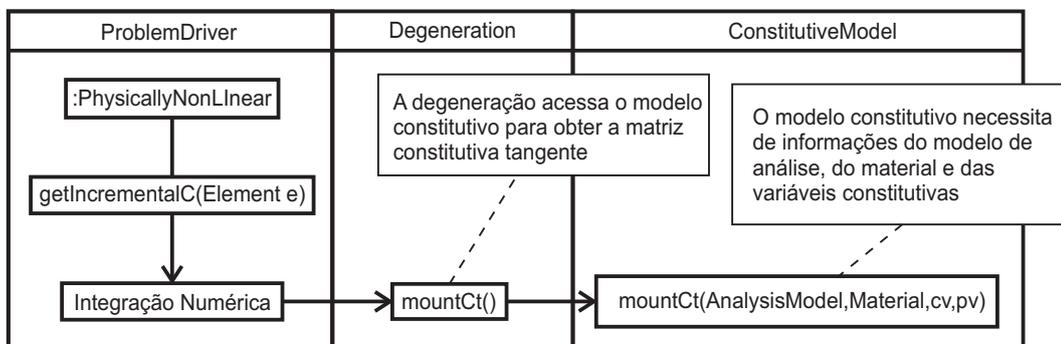


Figura 4.7: Obtenção da matriz constitutiva tangente para a integração da rigidez incremental. - Adaptado de Penna (2011).

Após a obtenção da matriz de rigidez incremental, é possível calcular os deslocamentos devidos às cargas incrementais e as cargas residuais, conforme o procedimento apresentado na figura 4.8.

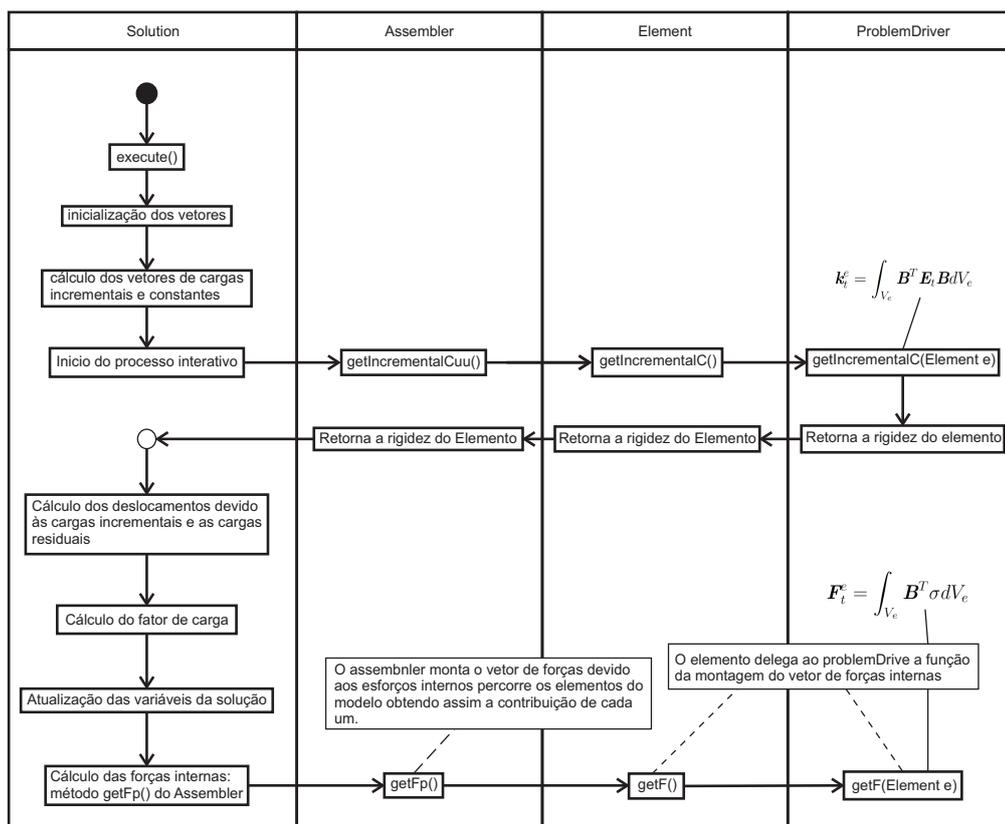


Figura 4.8: Atividades de obtenção do vetor de forças internas. - Adaptado de Penna (2011).

De posse do vetor de deslocamento, é calculado o fator de carga e as variáveis do processo de solução são atualizadas (variáveis que dependem do método de controle usado como apresentado por Fuina (2009)). Após a atualização das variáveis, a convergência do processo é verificada confrontando as forças internas e externas.

Outra atividade importante, que pode ser observada na figura 4.8, é a obtenção das forças equivalente às tensões internas. Salienta-se que o cálculo do estado de tensão em cada ponto material é realizado pela classe `CosntitutiveModel` no método `mountDualInternalVariableVector()`. Para tal, é necessário que a degeneração responsável por representar o ponto material forneça à classe `CosntitutiveModel` os mapas com as variáveis históricas do processo. Para melhor entendimento do processo, a figura 4.9 apresenta a sequência de atividades para o cálculo das tensões internas.

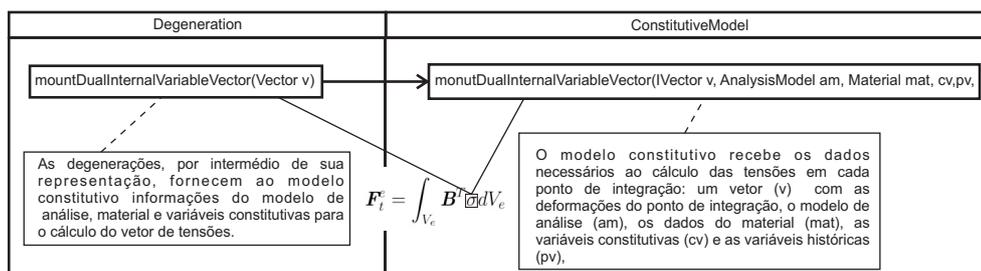


Figura 4.9: Cálculo das tensões: relações entre degeneração e modelo constitutivo -

Adaptado de Penna (2011).

## 4.3 Inserção dos Modelos de Armadura e Aderência

### 4.3.1 A classe Element

No **INSANE**, o elemento finito é representado por uma classe abstrata denominada **Element** (Figura 4.10). Para se caracterizar, a classe **Element** se auxilia das seguintes classes: **Shape**, para representar diversas funções de aproximação; **AnalysisModel**, para representar os variados modelos de análise; **Degeneration** para representar os pontos materiais do elemento (degeneração da geométrica) e os pontos de integração do elemento; **ProblemDriver**, para representar as formulações dos diversos problemas que podem ser resolvidos pelo sistema (Figura 4.10).

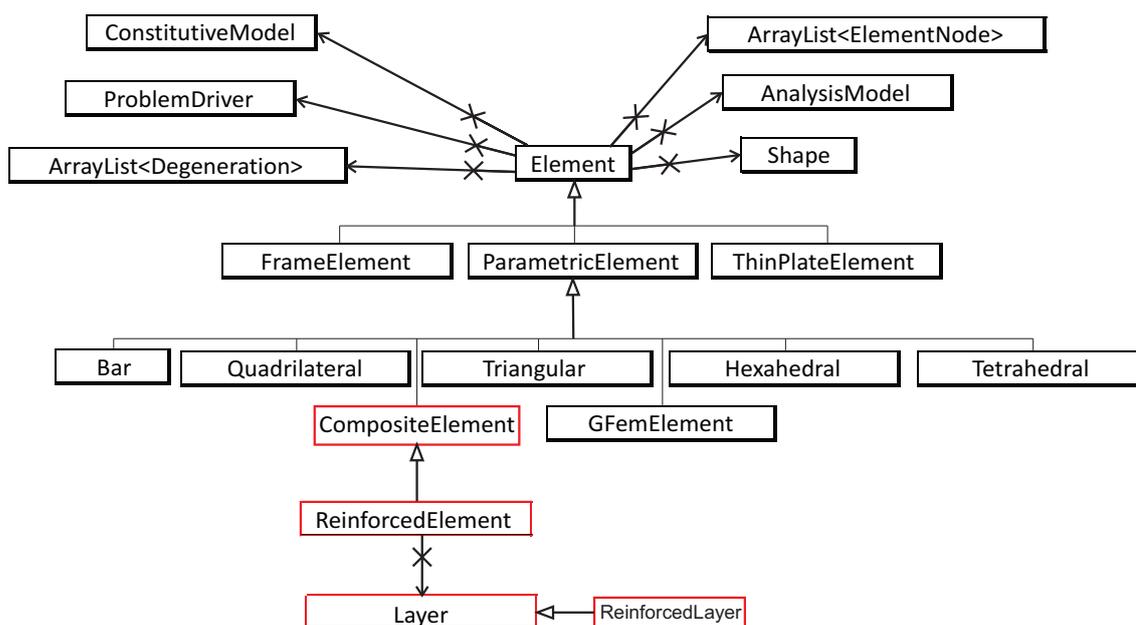


Figura 4.10: Diagrama da classe Element.

Atualmente existem no sistema diversas extensões da classe `Element`, visando representar os grupos de elementos existentes na literatura. Destaca-se a classe `ParametricElement`, responsável por representar o grupo dos elementos finitos paramétricos.

Durante a apresentação dos modelos de armadura discreta, evidenciou-se que a perda de aderência pode ser incluída com o uso de elementos paramétricos de contato ou de um elemento analítico de mola. Desta forma, não será necessário realizar nenhuma extensão da classe `Element` para incluir os elementos de contato, contudo, foi realizado uma extensão da classe `Element` para incluir no sistema os elementos de mola. Obviamente, o elemento de mola poderia ter sido tratado como um elemento paramétrico, contudo, por simplicidade foi implementada a sua forma analítica.

O elemento de armadura embutida também possui formulação paramétrica, contudo, este elemento é composto por uma elemento pai (responsável por representar a matriz de concreto) e um ou mais elementos unidimensionais que representam as possíveis camadas de armadura. Diante desta particularidade, não foi possível

fazer uso de nenhuma das extensões da classe `ParametricElement` para representá-lo. Portanto foi necessário criar uma extensão da `ParametricElement`. A extensão realizada buscou a máxima generalização possível, desta forma, foi implementado uma classe abstrata denominada `CompositeElement` e uma classe abstrata chamada `Layer`.

A classe `CompositeElement` possui vários métodos necessários para caracterizar um elemento composto em sua máxima generalização. Para representar os elementos de armadura embutida, implementou-se a classe `ReinforcedElement` que estende de `CompositeElement`.

A classe `Layer` tem a função de gerenciar as propriedades físicas e geométricas das camadas que irão compor um elemento composto, ou seja, auxilia a classe `CompositeElement` no que tange a manipulação de dados referentes a suas camadas. Para representar as camadas de armadura que compõe o elemento de armadura embutida, foi implementada uma extensão da classe `Layer` denominada `ReinforcedLayer`.

### 4.3.2 Classe Shape

Como já mencionado no item 4.3.1, a classe `Element` se auxilia da classe abstrata `Shape` para representar as diversas funções de aproximação do elemento.

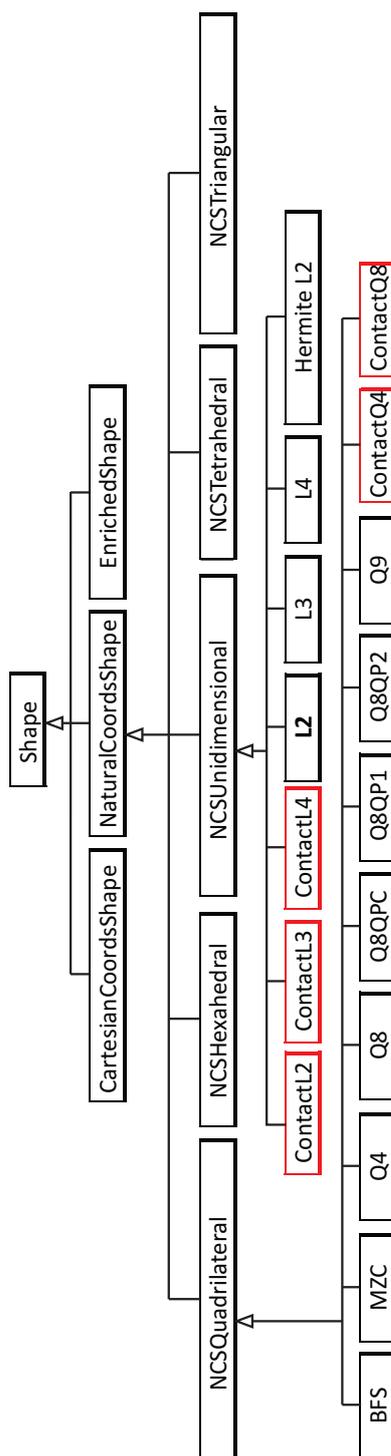


Figura 4.11: Diagrama de classe para Shape.

A figura 4.11 apresenta as diversas implementações da classe `Shape` que visam representar aproximações unidimensionais de 2, 3 e 4 nós, quadrilaterais de 4, 8 e 9 nós, triangulares de 3, 6 e 10 nós, hexaédricos de 8 e 20 nós, tetraédricos de 4 e 10

nós.

Os elementos de contato apresentados no presente trabalho possuem a particularidade de possuírem nós duplos, onde cada conjunto de nós deverá ter sua própria aproximação. Tendo em vista esta particularidade, foi necessário a implementação das classe `ContactL2`, `ContactL3` e `ContactL4` para auxiliar elementos de contato unidimensionais com 2, 3 e 4 pares de nós respectivamente. Para representar as funções de aproximação dos elementos de contato planos, implementou-se as classes `ContactQ4` e `ContactQ8` que representam respectivamente os elementos com 4 pares e 8 pares de nós respectivamente.

### 4.3.3 Classe ConstitutiveModel

A classe `ConstitutiveModel` destina-se a representar o comportamento constitutivo de um dado material quando sujeito a problemas fisicamente não lineares. Para tanto, esta classe possui métodos capazes de calcular o operador tangente e o vetor de forças internas de dado ponto material, sem que para isso, a classe necessite recorrer diretamente ao elemento finito, aos pontos de integração ou mesmo ao modelo discreto. Desta forma, as duas principais funções desta classe são o cálculo da matriz constitutiva tangente (método *mountCt()*) e do vetor de tensões (método *mountDualInternalVariableVector()*) em um ponto material. Nos dois métodos citados, as informações necessárias para o cálculo das entidades foram passados por algum objeto da classe `Degeneration` que esteja representando o ponto material. As figura 4.7 e 4.9 esclarece o processo aqui exposto.

No item 4.13 foi apresentado uma ilustração sobre a representação da aderência como uma material fictício. Para que as propriedades constitutivas deste material pudesse representar o comportamento da aderência e sua gradativa degradação, foi necessário criar duas extensões da classe `ConstitutiveModel`. A primeira extensão criada foi chamada de `BondConstitutiveModelIU` que representa as propriedades constitutivas da aderência com descarregamento inelástico. A segunda extensão foi

denominada `BondConstitutiveModelEU` que representa as propriedades constitutivas da aderência com descarregamento elástico.

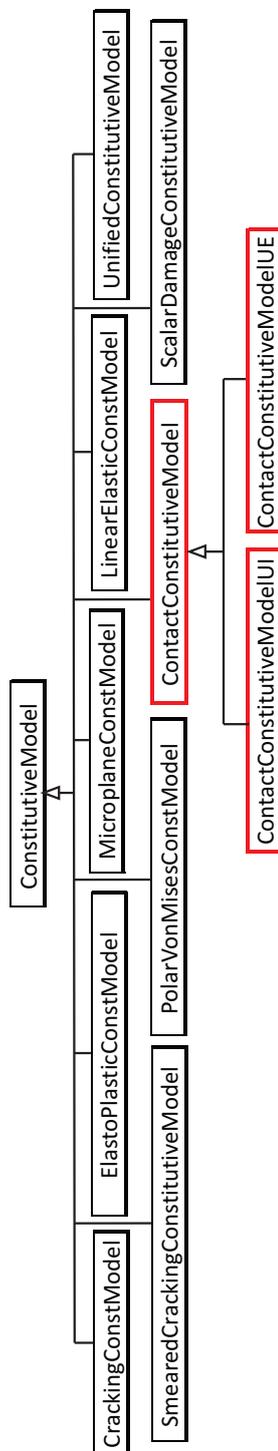


Figura 4.12: Diagrama de classe para `ConstitutiveModel`.

### 4.3.4 Classe Material

No **INSANE** o material é representado por uma classe abstrata denominada **Material**. Esta classe possui vários métodos que possibilitam a descrição das propriedades dos diversos materiais possíveis. A figura 4.13 apresenta a hierarquia da classe **Material**

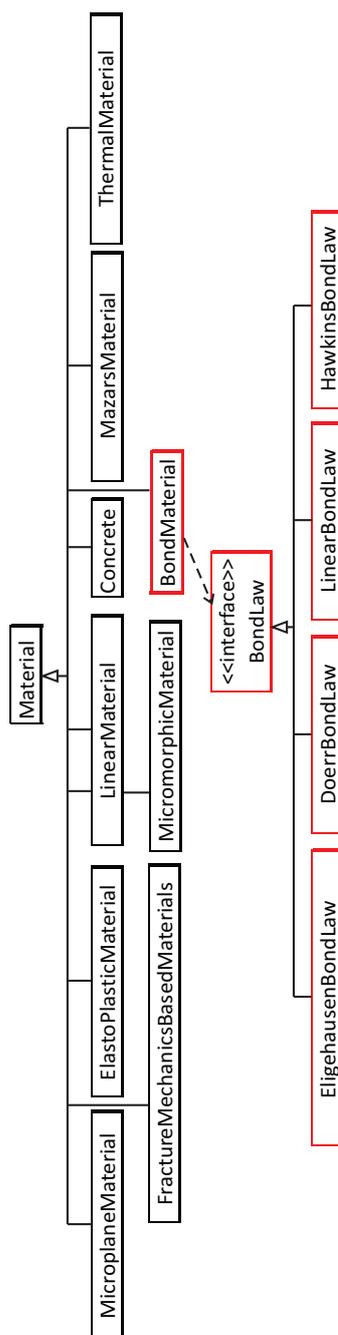


Figura 4.13: Diagrama de classe para ClasseMaterial.

Cada uma das classes herdeiras de `Material` representam um material diferente. Para tal, as classes herdeiras possuem como atributos o seu identificador e um mapa com os valores de suas propriedades físicas.

Para representar a aderência e sua gradativa degradação, utilizou-se de uma abstração que considera a aderência como um material fictício e cujas propriedades físicas são oriundas de uma lei “*tensão de aderência-escorregamento*”. Desta forma, foi necessário criar uma extensão da classe `Material` denominada `BondMaterial` cujas as propriedades físicas são associadas a leis “*tensão de aderência-escorregamento*”. Para que diversas leis pudessem ser representadas nos sistema sem que fosse necessário a criação de novas extensões da classe `Material`, criou-se uma interface chamada `BondLaw`.

As implementações da interface `BondLaw` possuem a função de caracterizar uma determina lei “*tensão de aderência-escorregamento*”. Desta forma, a classe `BondMaterial` possui instâncias da classe `BondLaw` para representar uma lei *tensão de aderência-escorregamento*. Salienta-se que a representação da aderência como um material, sugere o material fictício seja ortotrópico. Diante desta abstração, a classe `BondMaterial` permite que seja atribuída uma lei para cada umas direções ortogonais.

Diante das diversas leis “*tensão de aderência-escorregamento*” existentes na literatura, foram realizadas algumas implementadas da interface `BondLaw`, da qual cita-se: `EligehausenBondLaw`, responsável por representar a lei de aderência proposta por Eligehausen et al. (1983); `DoerBondLaw` responsável por representar a lei de aderência proposta por Doerr (1988), `HawkinsBondLaw` responsável por representar a lei proposta por Hawkins et al. (1982).

#### 4.3.5 Classe `AnalysisModel`

Os diversos modelos de análise implementados no sistema `INSANE` são representados por extensões da classe abstrata `AnalysisModel`. Assim, estas classes

possuem métodos capazes de fornecer informações inerentes ao modelo, tais como, o número de graus de liberdade, variáveis de estado e variáveis internas (deformações e tensões).

Para incluir os modelos de análise relativos aos elementos finitos de contato unidimensionais, foram implementadas as seguintes extensões da classe `AnalysisModel`: `ContactLinePlane` para modelos de contato entre um elemento unidimensional e um elemento plano; `ContactLineSolid` para modelos de contato entre um elemento unidimensional e um elemento tridimensional; `ContactPlanePlane` para modelos de contato entre dois elementos planos; `ContactPlaneSolid` para modelos de contato entre um elemento plano e um elemento tridimensional.

Para inserir os modelos de análise relativos aos elementos finitos de mola foram implementadas as seguintes extensões da classe `AnalysisModel`: `ContactPointPoint` para modelos onde se quer conectar nós com apenas um grau de liberdade, `ContactPointLine` para modelos onde se quer conectar nós com dois graus de liberdade perpendiculares entre si; `ContactPointSolid` para modelos onde se quer conectar nós com três graus de liberdade perpendiculares entre si.

Por fim, para introduzir o modelo de armadura embutida foi necessário criar uma extensão da classe `AnalysisModel` composta de outras extensões da classe `AnalysisModel`, denominada `ReinforcedElement`. No item 2.2 foi apresentada a formulação dos elementos embutidos pela composição entre um elemento do estado plano (ou tridimensional), um elemento unidimensional e um elemento de perda de aderência. Diante desta problemática, buscou-se implementar uma extensão da `AnalysisModel` que se auxiliasse de uma modelo de análise para representar o elemento pai, um modelo de análise para representar as camadas de armadura e um modelo de análise para representar a perda de aderência.

Esta abordagem possibilitou criar uma classe genérica e capaz de representar o modelo de armadura embutida no estado plano ou tridimensional

A figura 4.14 apresenta o diagrama de classe para `AnalysisModel`.

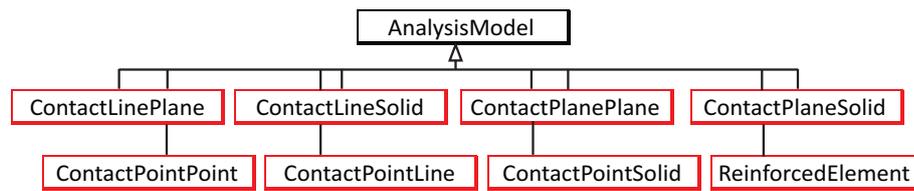


Figura 4.14: Diagrama de classe para Classe AnalysisModel.

### 4.3.6 Classe ProblemDriver

A interface `ProblemDriver` possui a função de calcular e informar a classe `Assembler` a contribuição de cada o elemento faz a cada uma das parcelas da equação do modelo. Desta forma, fica claro que a interface `ProblemDriver` é responsável por formular matematicamente o problema a ser analisado. A figura 4.15 apresenta a hierarquia da interface `ProblemDriver`.

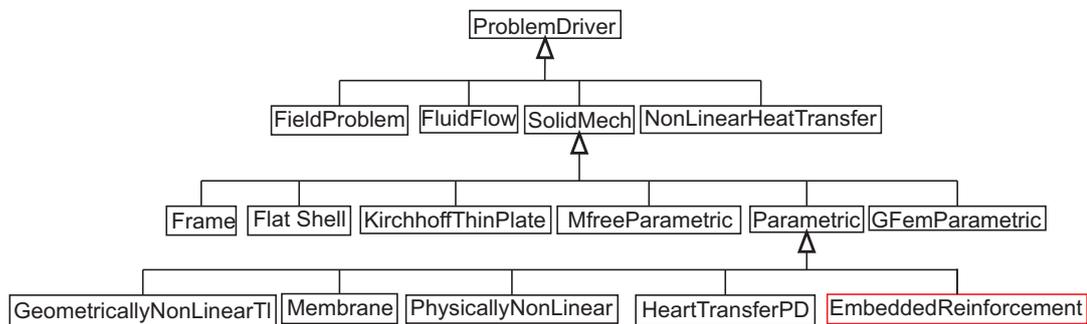


Figura 4.15: Especializações da classe `ProblemDriver`.

Nos itens 2.2.1.4 e 2.2.2 apresentou-se a formulação dos elementos de armadura embutida, onde se explicitou que a matriz de rigidez deste elemento é composta por 4 submatrizes para cada camada de armadura e 1 submatriz que representa a contribuição do elemento pai. Esta composição é explicitada na equação 4.6.

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{bb_1}] & 0 & 0 & \cdots & [K_{bs_1}] \\ 0 & [K_{bb_2}] & 0 & \cdots & [K_{bs_2}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & [K_{bb_n}] & [K_{bs_n}] \\ [K_{sb_1}] & [K_{sb_2}] & \cdots & [K_{sb_n}] & [K_{ss_1}] + [K_{ss_2}] + \cdots + [K_{ss_n}] + [K_{cc}] \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Os itens 2.2.1.4 e 2.2.2 apresentam também, a formulação do vetor de cargas nodais devido ao estado de tensão interno do elemento. Este vetor é composto por 2 subvetores para cada camada de armadura (“*layer*”) e um subvetor que representa a contribuição do elemento pai. A definição deste vetor é explicitado na equação 4.7.

$$[F_{inc.}] = \left\{ \begin{array}{c} \{Q_{b_1}\} \\ \{Q_{b_2}\} \\ \vdots \\ \{Q_{b_n}\} \\ \{Q_{s_1}\} + \{Q_{s_2}\} + \cdots + \{Q_{s_n}\} - \{F\} - \{\Delta F\} \end{array} \right\}. \quad (4.7)$$

Diante deste cenário, criou-se uma uma extensão da classe `Parametric` denominada `EmbeddedReinforcement`. Esta classe possui métodos capazes de calcular as submatrizes apresentadas na equação 4.6, os subvetores da equação 4.7, montar a matriz de rigidez total do elemento e o vetor de cargas nodais equivalentes ao estado de tensão interno do elemento. Desta forma, destaca-se os seguintes métodos implementados: `getIncrementalKbb(...)` responsável por calcular a submatriz  $k_{bb}$  associada a camada de armadura  $i$ ; `getIncrementalKbs(...)` responsável por calcular a submatriz  $k_{bs}$  associada a camada de armadura  $i$ ; `getIncrementalKsb(...)` responsável por calcular a submatriz  $k_{sb}$  associada a camada de armadura  $i$ ; `getIncrementalKss(...)` responsável por calcular a submatriz  $k_{ss}$  associada a camada de armadura  $i$ ; `getIncrementalKcc(...)` responsável por calcular a submatriz  $k_{cc}$  associada a contribuição do elemento pai; `getQb(...)` responsável por calcular o vetor de forças internas  $Q_b$  associada a camada de armadura  $i$ ; `getQs(...)` responsável por calcular o vetor de forças internas  $Q_s$  associada a camada de armadura  $i$ ;

`getFparent(...)` responsável por calcular o vetor de forças internas  $F$  associado ao elemento pai.

Neste contexto, a matriz de rigidez incremental do elemento é calculada pelo método `getIncrementalC(...)`, que por sua vez, foi sobrecarregado na classe `EmbeddedReinforcement`, para que assim, o método possa montar a matriz de rigidez incremental considerando a possibilidade de existir no elemento pai várias camadas de armadura. Para expor o processo de cálculo implementado, a figura 4.16 o algoritmo implementado no método `getIncrementalC(...)`.

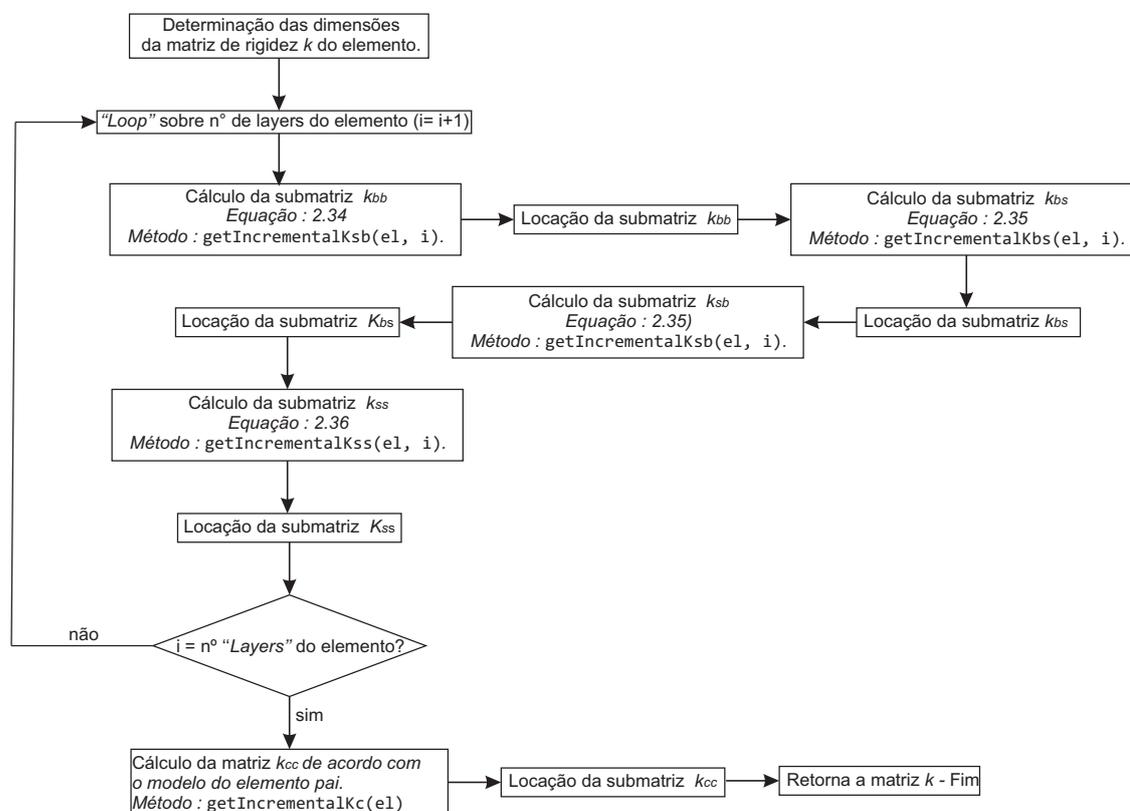


Figura 4.16: Diagrama de atividades para obtenção da rigidez incremental em elementos de armadura embutida.

O vetor de cargas nodais equivalentes ao estado de tensões internas do elemento é montado pelo método `getF(...)`. Este método foi sobrecarregado na classe `EmbeddedReinforcement` de forma a montar o vetor considerando a possibilidade de

existir no elemento pai vários segmentos de armadura. Para expor o processo de cálculo implementado neste método, a figura 4.17 apresenta o algoritmo implementado no método.

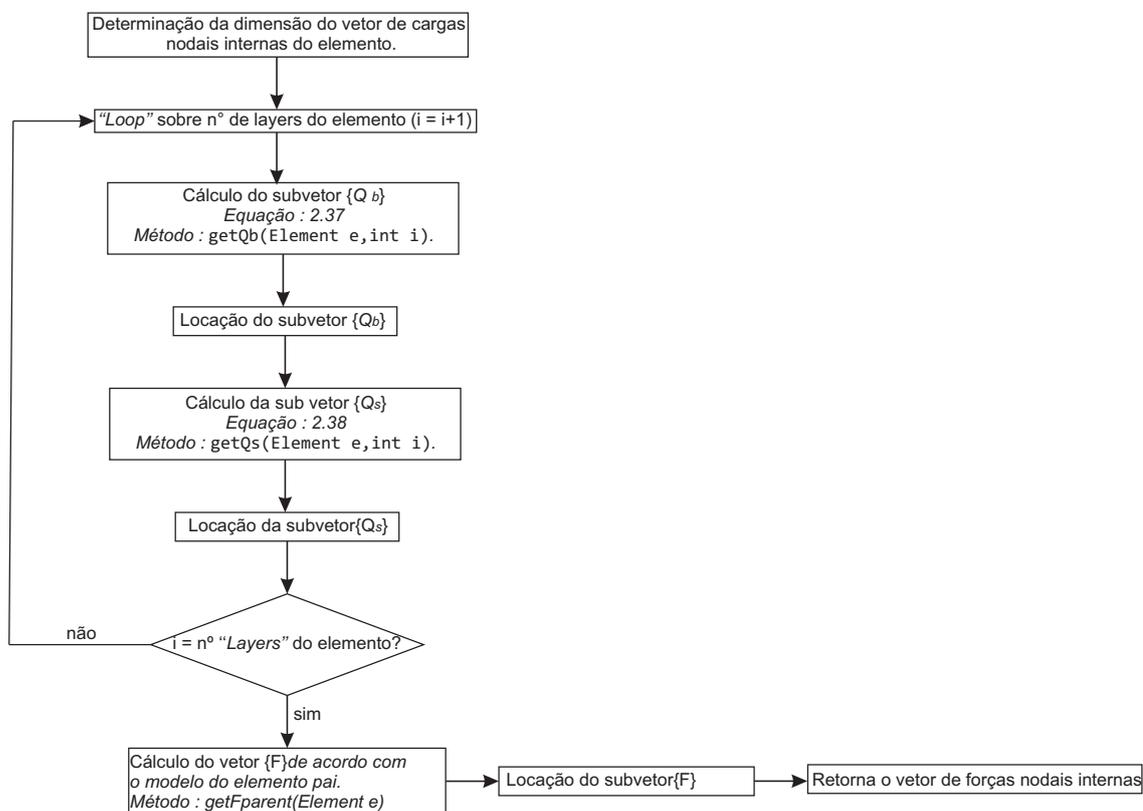


Figura 4.17: Diagrama de atividades para obtenção do vetor de cargas nodais equivalentes ao estado de tensão interno em elementos de armadura embutida.

# Capítulo 5

## Exemplos de Validação

Para validar os recursos implementados e apresentados, vários problemas foram simulados numericamente no **INSANE** e os resultados obtidos foram confrontados com os resultados cuja a solução é conhecida na literatura. Inicialmente, foram realizadas simulações de problemas com menor complexidade e, posteriormente, foram modelados problemas típicos para se analisar a perda de aderência em estruturas de concreto armado.

### 5.1 Chapa Tracionada

Como primeiro exemplo, apresenta-se o problema de uma chapa contendo duas camadas de armadura e sujeita a tração em uma de suas extremidades, conforme pode ser visto na figura 5.1.

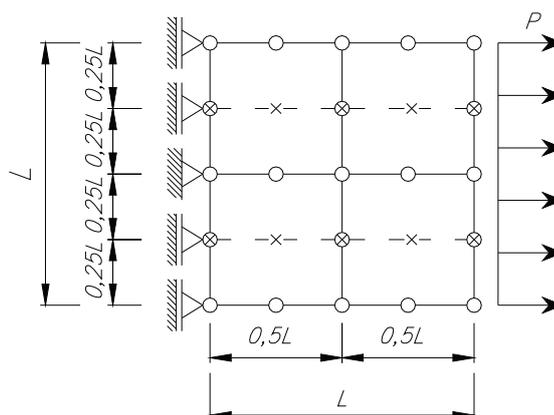


Figura 5.1: Chapa quadrada Tracionada.

Este problema será analisado usando 4 malhas distintas:

**Malha M1:** Malha composta por 1 elemento plano de armadura embutida possuindo duas camadas de armadura, sendo cada camada de armadura representada por 4 nós cada e o elemento pai representado por 9 nós (Figura 5.2(a));

**Malha M2:** Malha regular composta de 4 elementos planos de armadura embutida, onde o elemento pai é representado por nove nós e cada camada de armadura é representada por 4 nós (Figura 5.2 (b));

**Malha M3:** Malha regular composta de 4 elementos planos de armadura embutida, onde o elemento pai é representado por oito nós e cada camada de armadura é representada por 4 nós (Figura 5.2 (c));

**Malha M4:** Malha irregular composta de 4 elementos planos de armadura embutida, onde o elemento pai é representado por oito nós e cada camada de armadura é representada por 4 nós (Figura 5.2(d));

A solução deste problema tem como objetivo validar a implementação do mapeamento inverso, usado nos elementos de armadura embutida, e estudar o comportamento destes elementos quando empregados em malhas regulares e irregulares com diferentes aproximações.

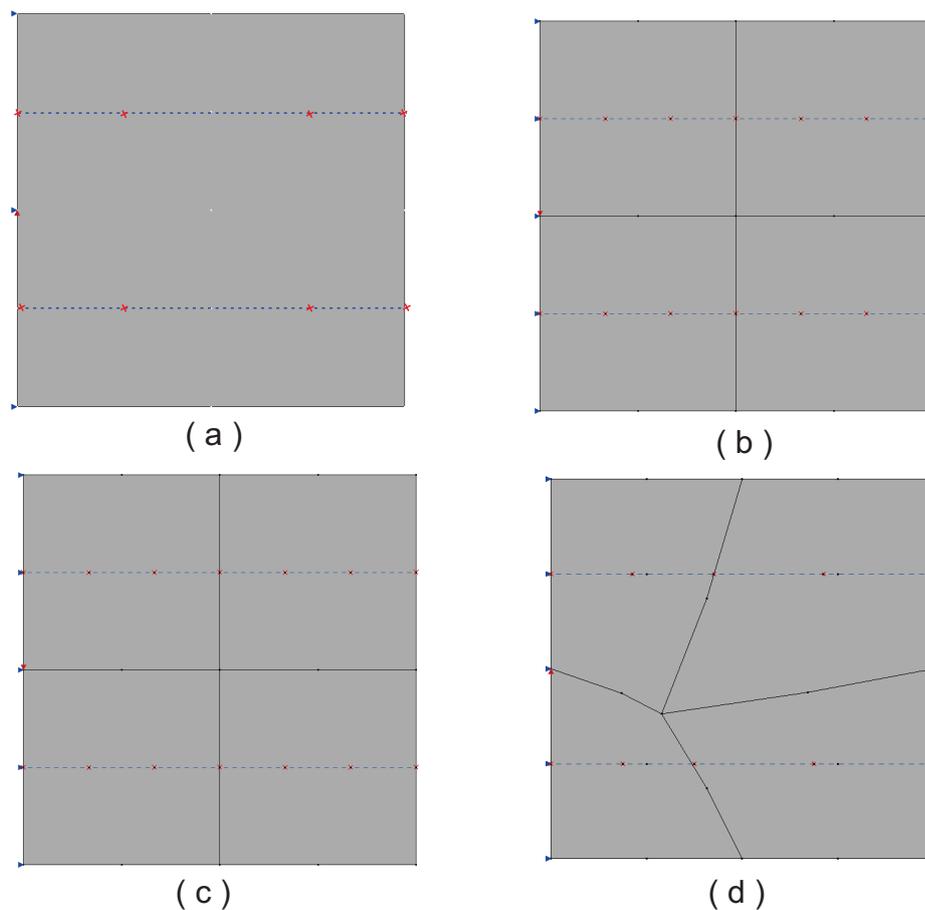


Figura 5.2: Malhas Elaboradas para solucionar o problema Proposto.

Este problema foi analisado por Elwi e Hrudey (1988). Em seu trabalho, foram usados 4 elementos de armadura embutida em estado plano de tensões, camada de armadura representada por 4 nós por elemento pai, integração numérica segundo a quadratura de Gauss-Legendre, usando 4 pontos de integração ao longo de cada camada de armadura e materiais lineares elásticos com os seguintes parâmetros:  $A_s/L = 0,0025$ ,  $O_s = 0,45$ ,  $E_s/E_c = 8$ ,  $\nu = 0,25$ . Nas relações apresentadas,  $A_s$  é a área de armadura por unidade de espessura;  $O_s$  é o perímetro da camada de armadura por unidade de espessura;  $E_s$  é o módulo de elasticidade da camada de armadura;  $E_c$  é o módulo do concreto;  $\nu$  é o coeficiente de Poisson. No presente trabalho adotou-se os seguinte parâmetros  $L = 1m$ ;  $P = 100N/m^2$ ;  $t = 0.1m$ ;  $E_s = 200GPa$ .

Segundo Elwi e Hrudehy (1988), este problema resulta em um estado de tensão constante na camada de armadura, cuja a razão entre a tensão na armadura e a tensão atuante “P” é da ordem de 5,7. Apresenta-se na figura 5.3 um gráfico comparativo entre os resultados obtidos com cada uma das malhas elaboradas.

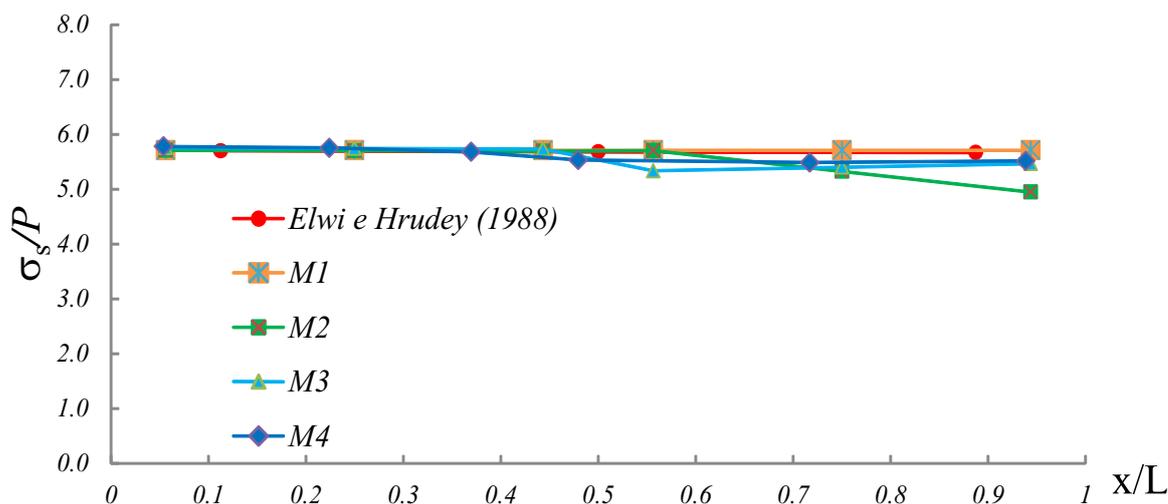


Figura 5.3: Variação de tensão ao longo da armadura.

Ao analisar o gráfico apresentado na figura 5.3, nota-se que em todas as malhas obteve-se resultados próximos da referência, embora uma pequena perturbação nos valores é observada na região de aplicação de carga. Com a finalidade de validar o mapeamento inverso, conclui-se que os resultados foram satisfatórios, uma vez que, os resultados obtidos com as diversas malhas apresentam o mesmo comportamento.

## 5.2 Anel com uma Camada de Armadura

O problema proposto nesta seção consiste em um anel espesso, possuindo uma camada de armadura e sujeito a uma pressão constante em sua face externa, conforme pode ser visto na figura 5.4.

O problema proposto foi apresentado e analisado numericamente por Elwi e Hrudehy (1988). Em seu trabalho, Elwi e Hrudehy (1988) realizaram simulações numéricas

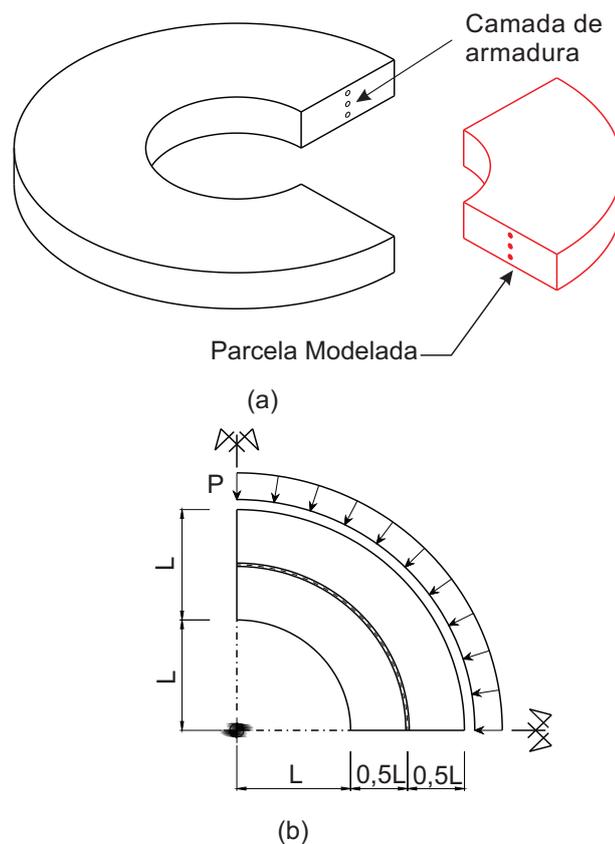


Figura 5.4: Anel de Concreto com uma camada de aço: (a) Perspectiva, (b) Planta.

onde, em um primeiro momento, a perda de aderência foi suprimida e, em uma segunda análise, considerou-se a perda de aderência segundo uma relação “*tensão de aderência-eskorregamento*” linear. Em ambos os casos, foram usados 4 elementos planos com armadura embutida em estado plano de tensões, camada de armadura representada por 4 nós por elemento pai, integração numérica segundo a quadratura de Gauss-Legendre, com 4 pontos de integração ao longo de cada camada de armadura e materiais lineares elásticos. A figura 5.5 apresenta o modelo idealizado por Elwi e Hrudefy (1988).

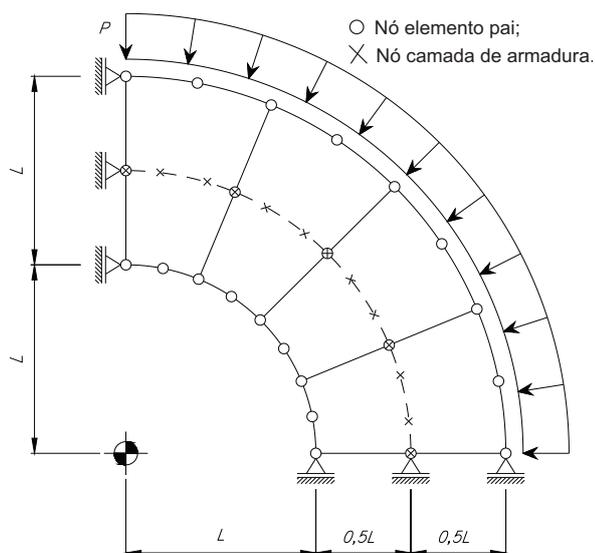


Figura 5.5: Malha usada por Elwi e Hrudehy (1988).

Os parâmetros dos modelos são tais que:  $A_s/L = 0,0025$ ;  $O_s = 0,45$ ;  $E_s/E_c = 8$ ;  $E_bL/E_s = 0,27$ ;  $\nu = 0,25$ .

Na situação em que é considerada a aderência perfeita, a tensão na camada de armadura é constante, ao passo que, ao considerar a perda de aderência, a tensão ao longo da camada de armadura apresenta variação parabólica como apresentado na figura 5.6.

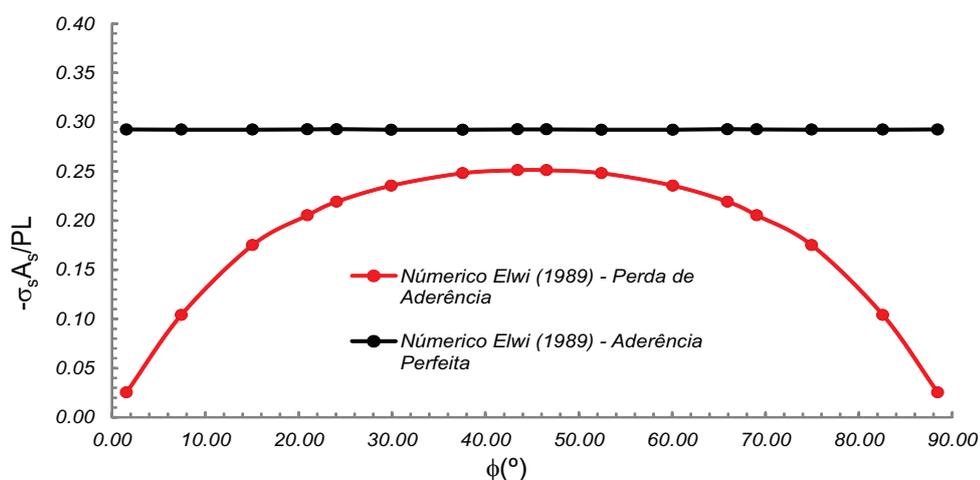


Figura 5.6: Resultados de Elwi e Hrudehy (1988).

Apresenta-se em continuação os modelos analisados com o sistema **INSANE**

### 5.2.1 Modelo de Armadura Embutida

O problema proposto foi analisado considerando aderência perfeita e perda de aderência. Nos dois casos, foram utilizadas 3 malhas distintas com as seguintes descrições:

**Malha M1:** malha com 4 elementos planos, geometria regular, elemento pai representado por 8 nós, camadas de armadura representadas por 3 nós (Figura 5.7 (a));

**Malha M2:** malha com 4 elementos planos, geometria regular, elemento pai representado por 8 nós, camadas de armadura representadas por 4 nós (Figura 5.7 (b));

**Malha M3:** Malha com 4 elementos planos, geometria irregular, elemento pai representado por 8 nós, camadas de armadura representadas por 4 nós (Figura 5.7 (c)).

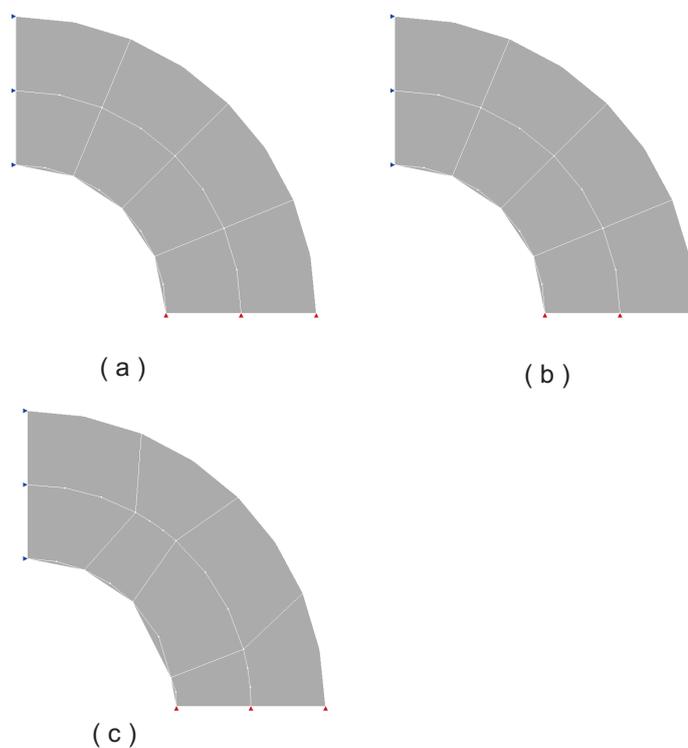


Figura 5.7: Malhas Elaboradas para solucionar o problema Proposto.

Em todas as malhas adotou-se  $L = 1m$ ,  $P = 100N/m^2$ ,  $t = 0.1m$ ,  $E_s = 200GPa$ .

A elaboração das malhas “M1” e “M2” objetivam estudar a influência do número de nós internos do elemento de armadura embutida, ao passo que a malha “M3” destina-se a verificar o comportamento do modelo perante malhas distorcidas (Teste de Irons).

Apresenta-se na figura 5.8 a variação da tensão ao longo da camada de armadura para as três malhas elaboradas, suprimindo-se a perda de aderência.

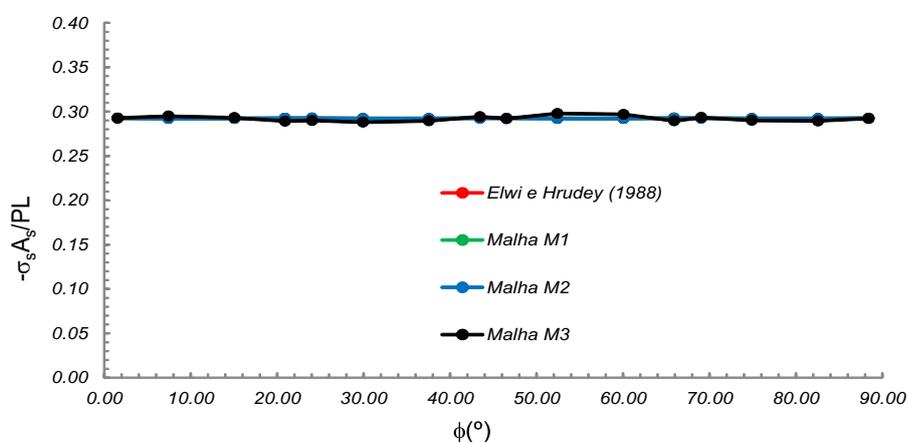


Figura 5.8: Variação da tensão na camada de armadura.

As figuras 5.9, 5.10, 5.11, 5.12, 5.13, 5.14 apresentam o escorregamento da camada de armadura e a tensão de aderência em cada uma das malhas elaboradas.

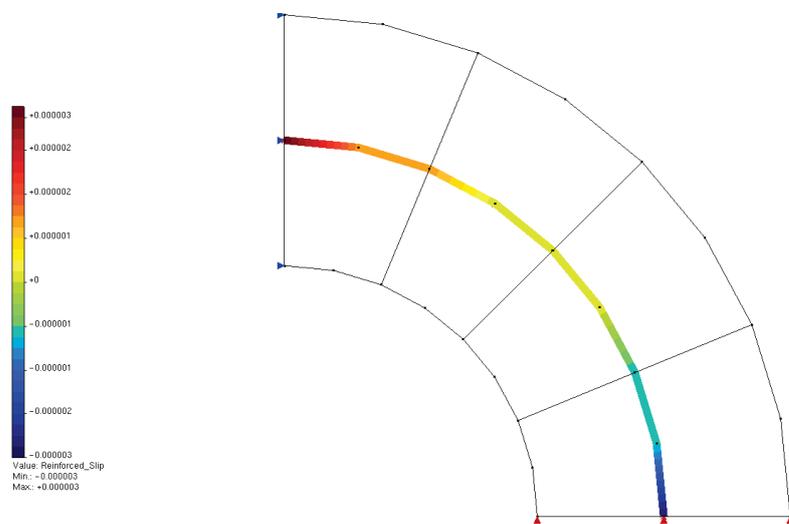


Figura 5.9: Escorregamento da armadura - Malha M1.

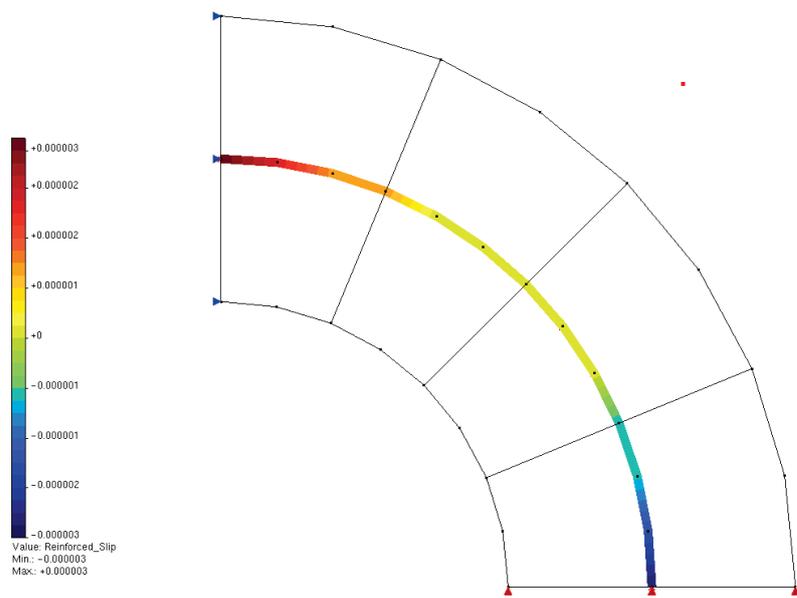


Figura 5.10: Escorregamento da armadura - Malha M2.

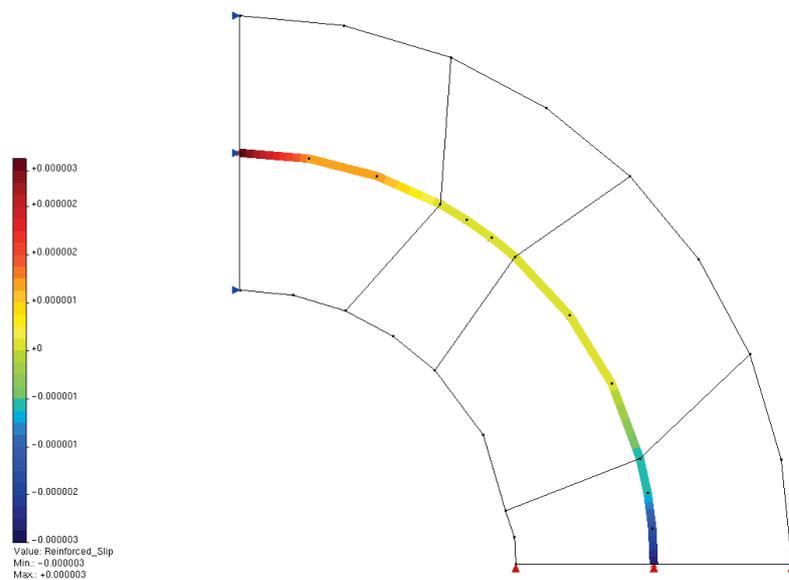


Figura 5.11: Escorregamento da armadura - Malha M3.

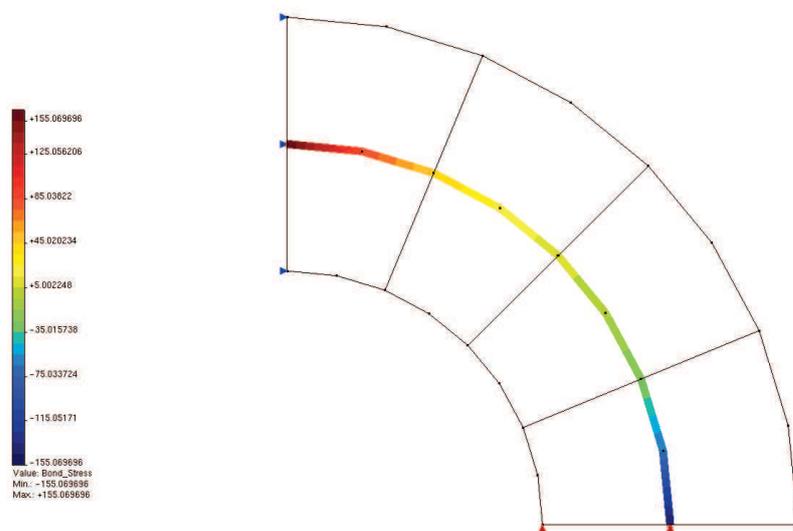


Figura 5.12: Tensão de aderência - Malha M1.

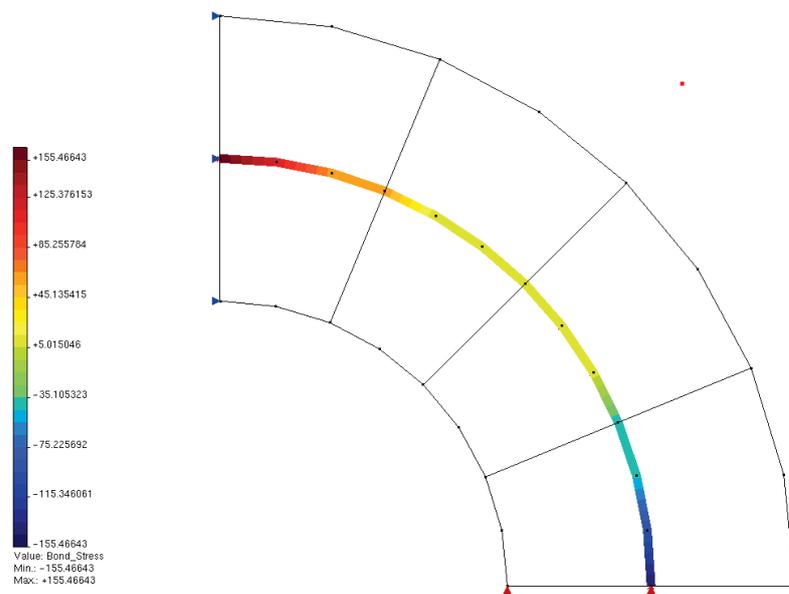


Figura 5.13: Tensão de aderência - Malha M2.

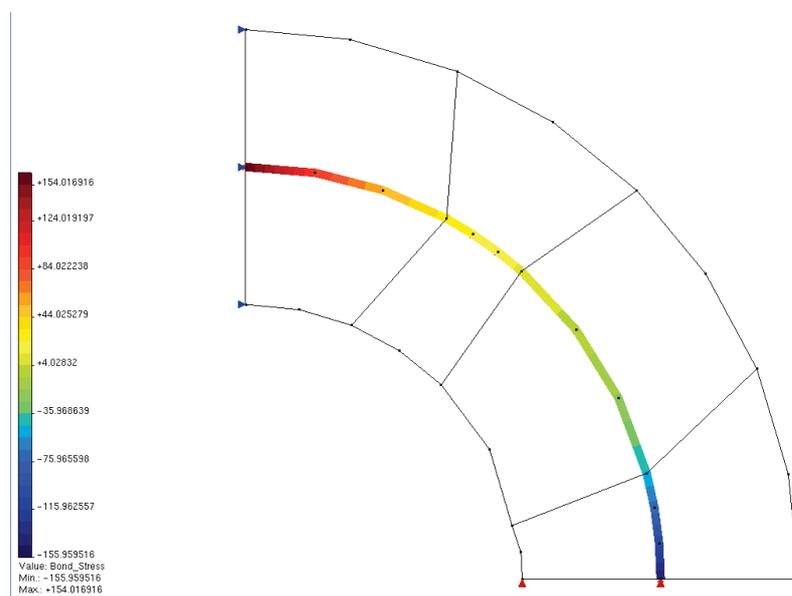


Figura 5.14: Tensão de aderência - Malha M3.

Em continuação, são apresentados nas figuras 5.15 e 5.16, gráficos comparativos dos escorregamentos ao longo da camada de armadura e das tensões de aderência ao longo da camada de armadura.

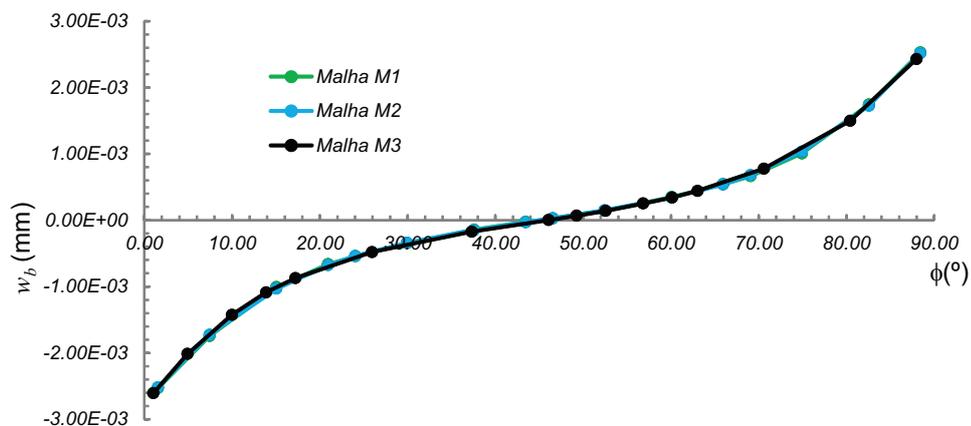


Figura 5.15: Escorregamento da camada de armadura.

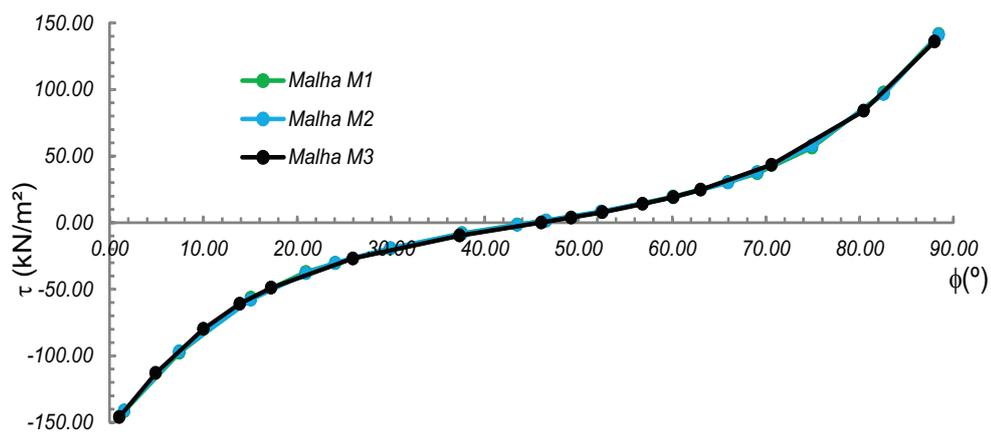


Figura 5.16: Tensão de aderência ao longo da camada de armadura.

Após avaliar o escorregamento e a tensão de aderência em cada uma das malhas elaboradas, estudou-se a evolução da tensão axial na camada de armadura, como pode ser visto nas figuras 5.17, 5.18, 5.19.

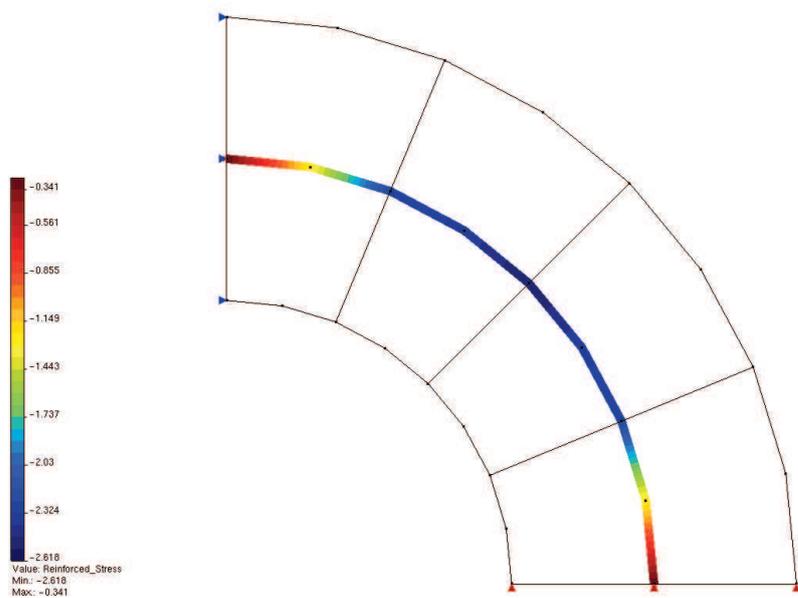


Figura 5.17: Tensão na camada de armadura - Malha M1.

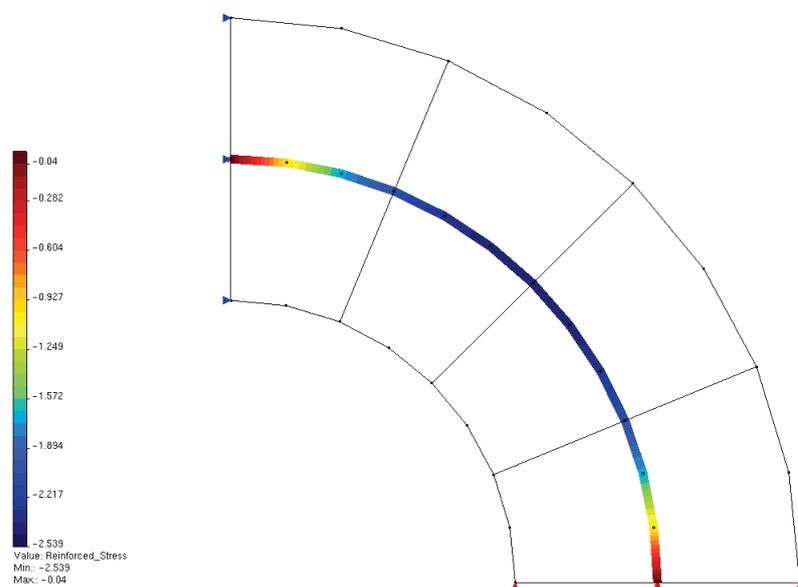


Figura 5.18: Tensão na camada de armadura - Malha M2.

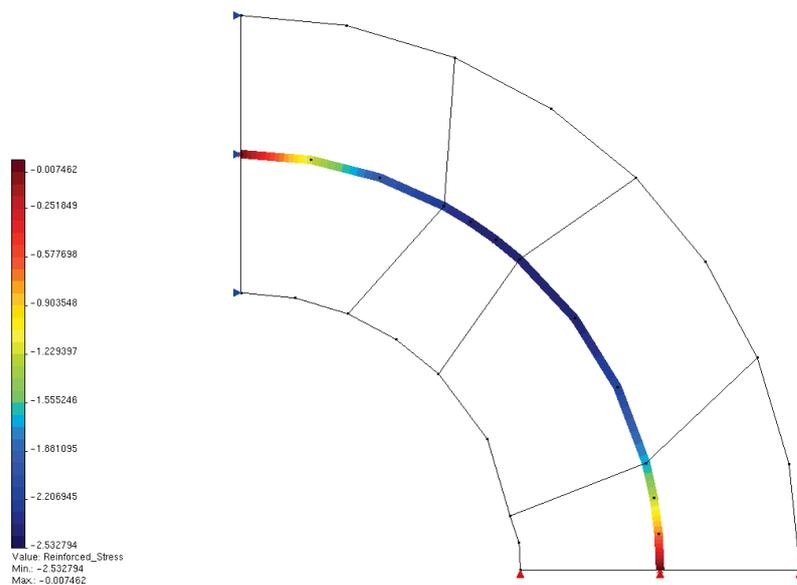


Figura 5.19: Tensão na camada de armadura - Malha M3.

Por fim, os valores de tensão apresentados foram confrontados com os valores apresentados por Elwi e Hrudehy (1988), conforme mostra a 5.20.

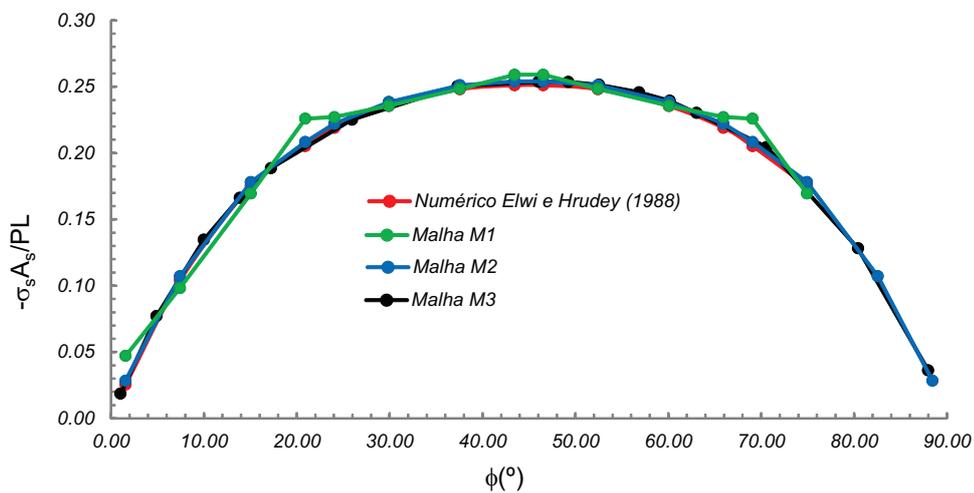


Figura 5.20: Tensão na camada de Armadura.

Pelo gráfico da figura 5.20, conclui-se que todas as malhas elaboradas resultaram em valores próximos dos esperados, onde se destaca os resultados obtidos pela malha “M2”, que são idênticos aos valores apresentados por Elwi e Hrudehy (1988).

Outro ponto importante a ressaltar é o fato da distorção dos elementos de armadura embutida, tais como apresentado pela malha “M3”, não afetam significativamente a acurácia dos resultados.

### 5.2.2 Modelo de Armadura Discreta

Visando validar os elementos de perda de aderência de mola, assim como, comparar o desempenho do modelo de armadura discreta, com o uso destes elementos e o modelo de armadura embutida, o problema proposto nesta seção será novamente analisado. Para tanto, foi elaborado uma malha em que, utilizou-se oito elementos em estado plano de tensão para representar a matriz de concreto e quatro elementos unidimensionais de barra para representar a camada de armadura. Cada um dos elementos planos usados possui oito nós e integração numérica com 3x3 pontos de Gauss. Os elementos unidimensionais utilizados possuem 3 nós e fazem uso de integração numérica com 4 Pontos de Gauss. A figura 5.21 apresenta a configuração da malha elaborada.

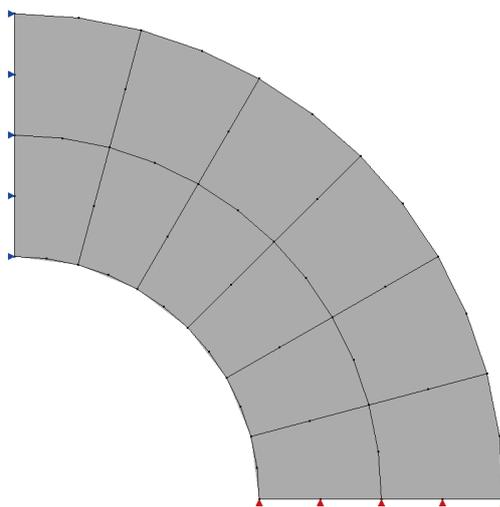


Figura 5.21: Malha de elementos finitos elaborada.

Como já mencionado anteriormente, neste item a perda de aderência será inserida por meio de elementos de mola. Utilizaram-se elementos de mola com dois graus de

liberdade cuja a rigidez é dada em função do coeficiente de proporcionalidade e da região de influência de cada mola.

Nós gráficos das figuras 5.22, 5.23 e 5.24 são apresentados os resultados de escorregamento, tensão de aderência e tensão na camada de armadura obtidos com a malha elaborada.

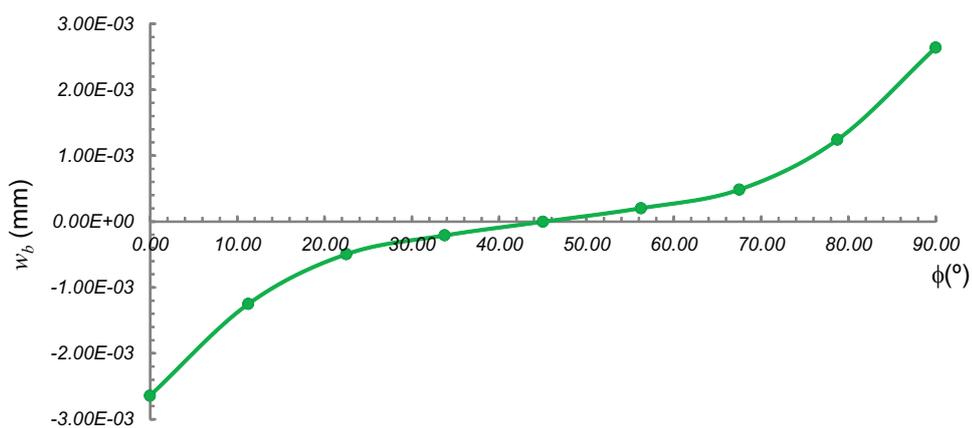


Figura 5.22: Escorregamento da camada de armadura com uso de elemento de molas.

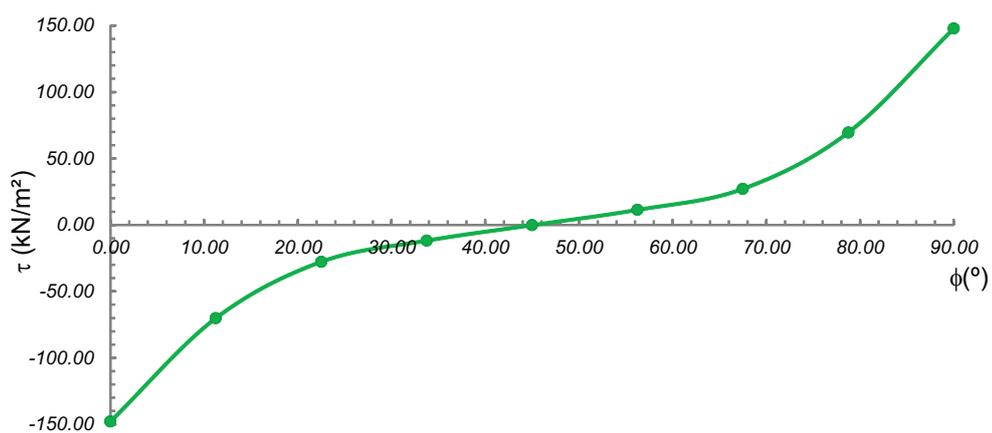


Figura 5.23: Tensão de aderência para o modelo com elemento de molas.

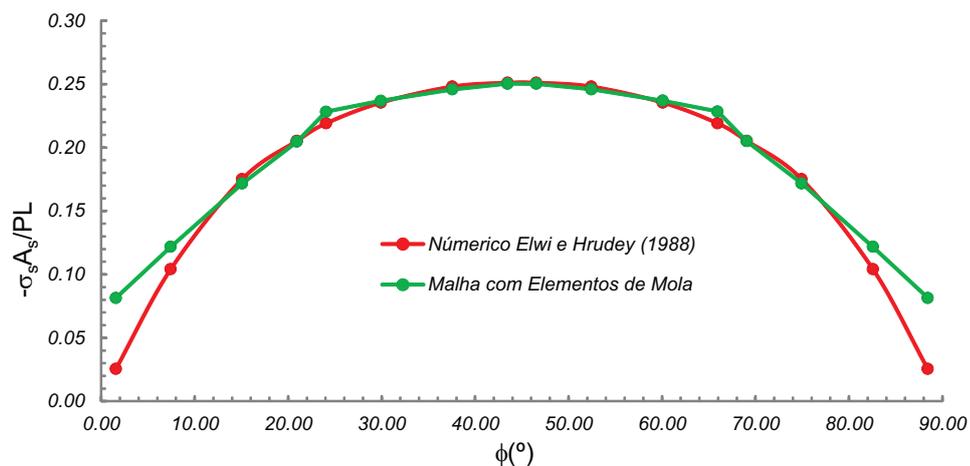


Figura 5.24: Tensão na camada de armadura para o modelo com elemento de molas.

Por fim, os resultados obtidos com os modelos discretos foram confrontados com os resultados obtidos com os modelos de armadura embutida, conforme as figuras 5.25 e 5.26.

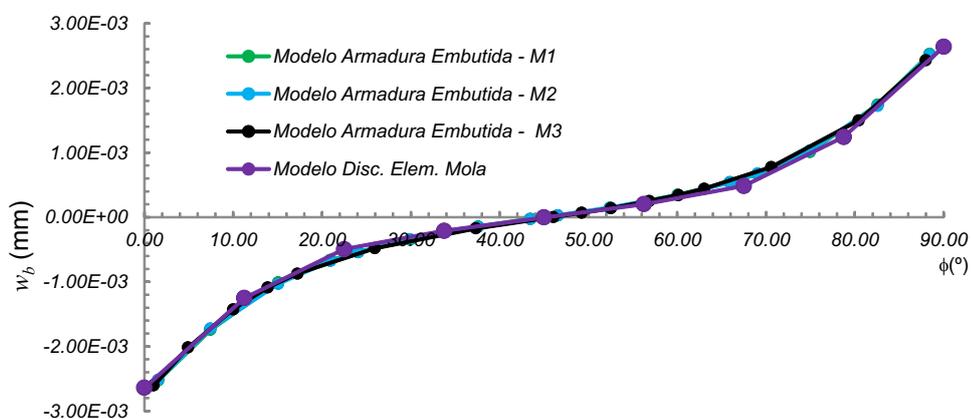


Figura 5.25: Escorregamento ao longo da camada de armadura.

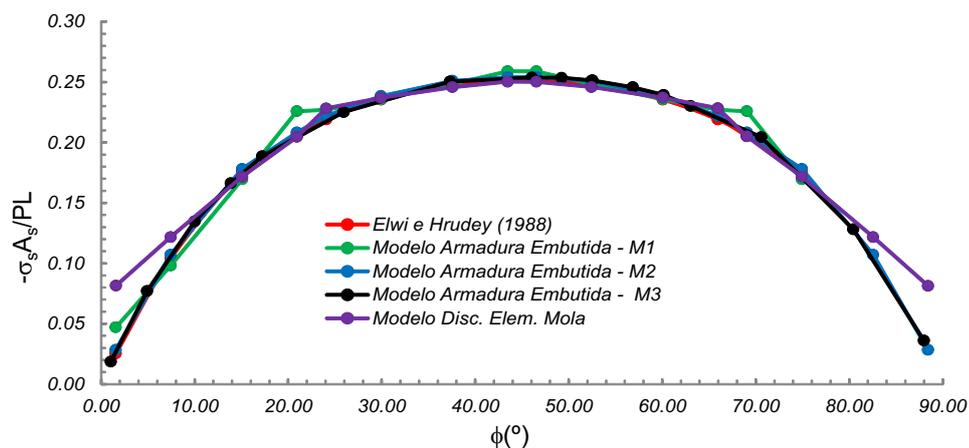


Figura 5.26: Tensão ao longo da camada de armadura.

Ao analisar os gráficos comparativos, percebe-se que os modelos de armadura embutida e o modelo de armadura discreta possuem um comportamento muito semelhante aos resultados apresentados por Elwi e Hruvey (1988).

### 5.3 Anel com duas Camadas de Armadura

Neste item propõe-se analisar um anel semelhante ao analisado no item 5.2, sendo a única diferença o fato do anel em estudo possuir duas camadas de armadura, conforme apresentado na figura 5.27

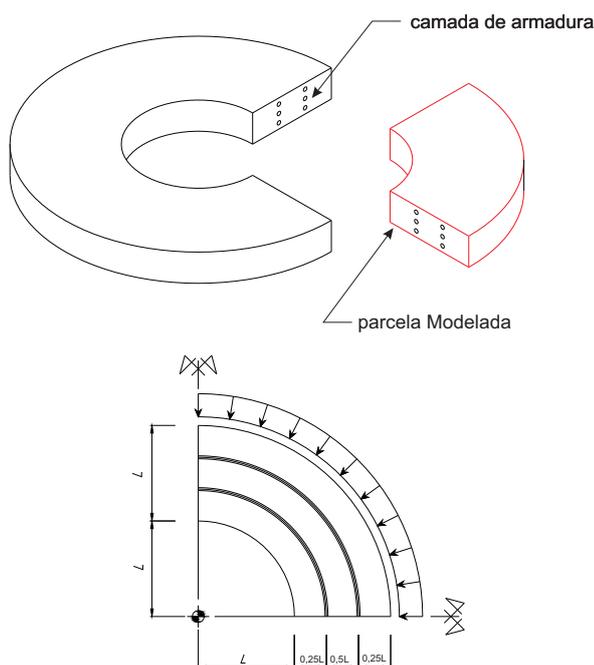


Figura 5.27: Geometria do problema proposto.

O problema proposto também foi analisado numericamente por Elwi e Hrudehy (1988), onde foram utilizados os mesmos parâmetros apresentados no item 5.2. Para este caso, espera-se que a variação de tensão nas camadas de armadura seja descrito conforme apresentado na figura 5.28.

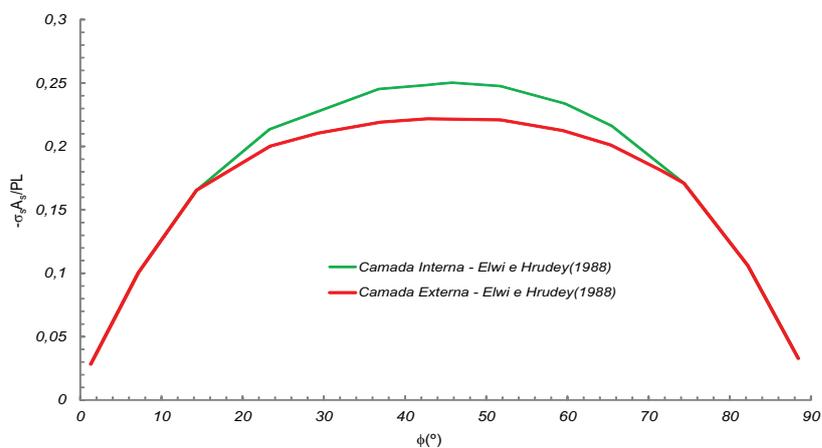


Figura 5.28: Tensão ao longo da camada de armadura - Elwi e Hrudehy (1988).

### 5.3.1 Modelo de Armadura Embutida Plano

A simulação deste problema usando o modelo de armadura embutida plano foi realizada usando as seguintes malhas:

**Malha M1:** Malha com 8 elementos planos, geometria regular, elemento pai representado por 8 nós, camadas de armadura representada por 3 nós (Figura 5.29);

**Malha M2:** Malha com 8 elementos planos, geometria regular, elemento pai representado por 8 nós, camada de armadura representada por 4 nós (Figura 5.30);

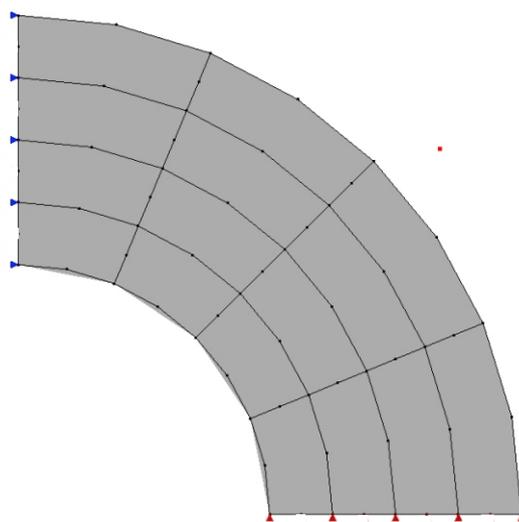


Figura 5.29: Malha elaborada - M1.

Os resultados obtidos com o processamento das malhas M1 e M2 são apresentados na figura 5.31.

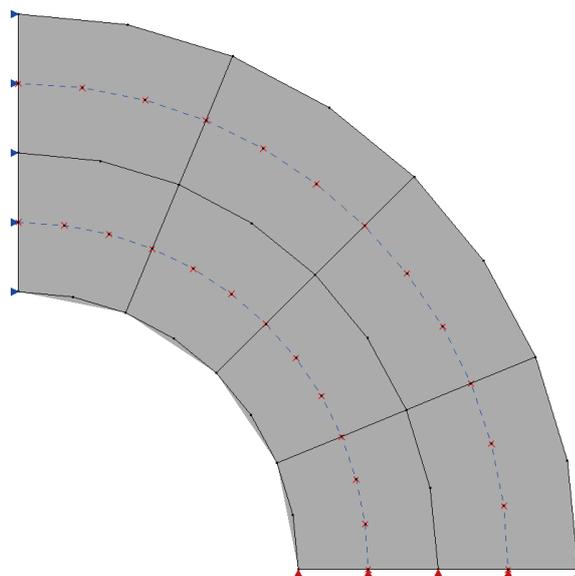


Figura 5.30: Malha elaborada - M2.

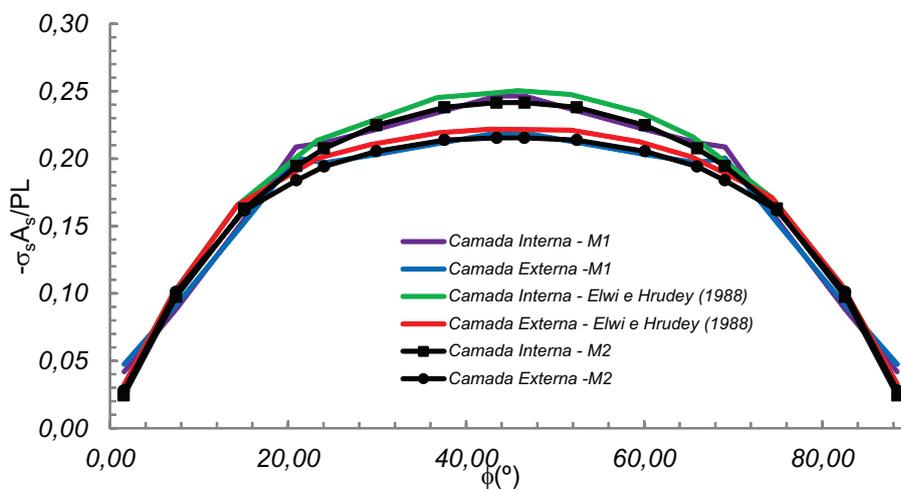


Figura 5.31: Variação da tensão ao longo da camada de armadura.

### 5.3.2 Modelo de Armadura Discreta

Análogo ao feito no item 5.2.2, foi elaborado uma malha plana com o modelo de armadura discreta sendo usados 16 elementos Q8 em estado plano de tensão para representar a matriz de concreto e 8 elementos unidimensionais de 3 nós para modelar a camada de armadura (Figura 5.32). A inclusão da perda de aderência foi

feita com o uso de elementos de mola, cada mola apresenta dois graus de liberdade conectando nó a nó os elementos.

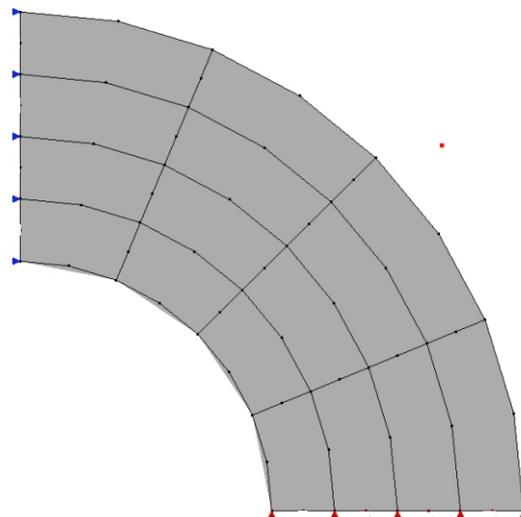


Figura 5.32: Malha elaborada.

As figuras 5.33 apresentam a variação de tensão ao longo da camada de armadura em cada uma das malhas elaboradas.

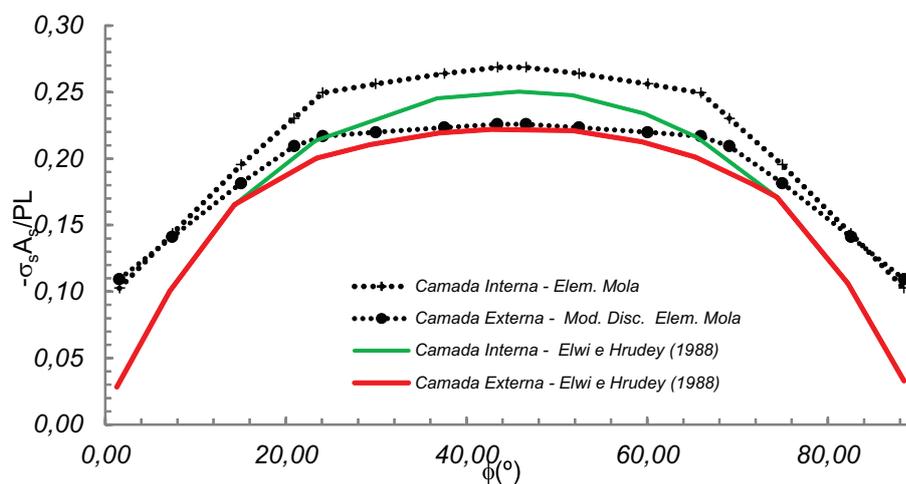


Figura 5.33: Variação das tensões ao longo da camada de armadura.

Ao analisar o gráfico comparativo, percebe-se que os modelos de armadura embutida e de armadura discreta possuem um comportamento muito semelhante ao

apresentado por Elwi e Hrudey (1988). Observa-se também, que a malha de armadura onde a camada é aproximada com 4 nós descreve a variação de tensão ao longo da camada de armadura de forma mais suave, aproximando-se mais ao comportamento apresentado Elwi e Hrudey (1988). Desta forma, conclui-se que pode-se obter uma melhor representação do problema da perda de aderência sem redefinir toda a malha, mas sim, aumentando a discretização apenas da camada de armadura.

## 5.4 Ensaio de Arrancamento

Neste item, apresenta-se a simulação numérica do ensaio de arrancamento direto (pull-out test). Este ensaio é normalizado pelo RILEM/CEB/FIB (1983) e consiste em arrancar uma barra de aço solidarizada a um corpo de prova de concreto. Como o ensaio tem o objetivo de estudar a relação entre a tensão de aderência e o escorregamento da barra, as duas extremidades da barra de aço são projetadas para fora do corpo de prova, para que assim, seja possível aplicar a força de arrancamento em uma das extremidades enquanto o escorregamento é medido na extremidade oposta (Figura 5.34).

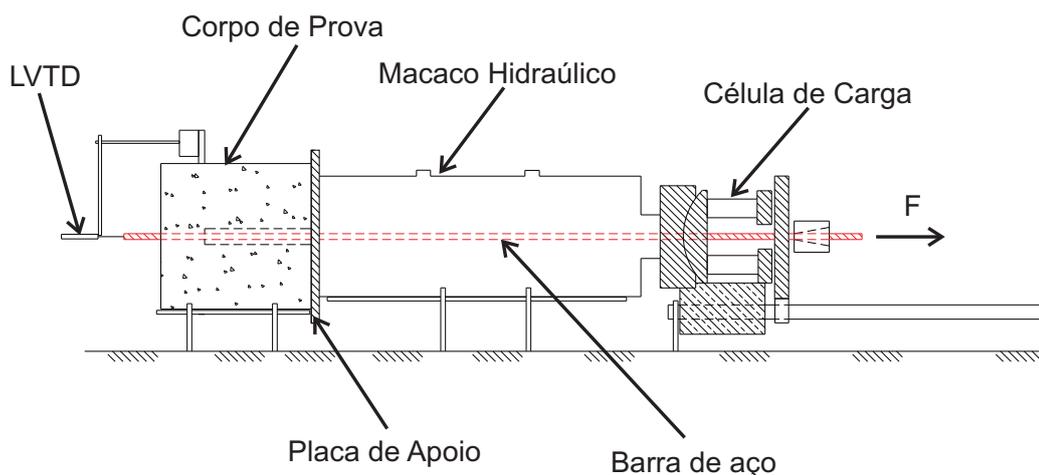


Figura 5.34: Caracterização do ensaio de arrancamento.

Segundo as recomendações do RILEM/CEB/FIB (1983), o corpo de prova deve

ter a configuração geométrica apresentada na Figura 5.35.

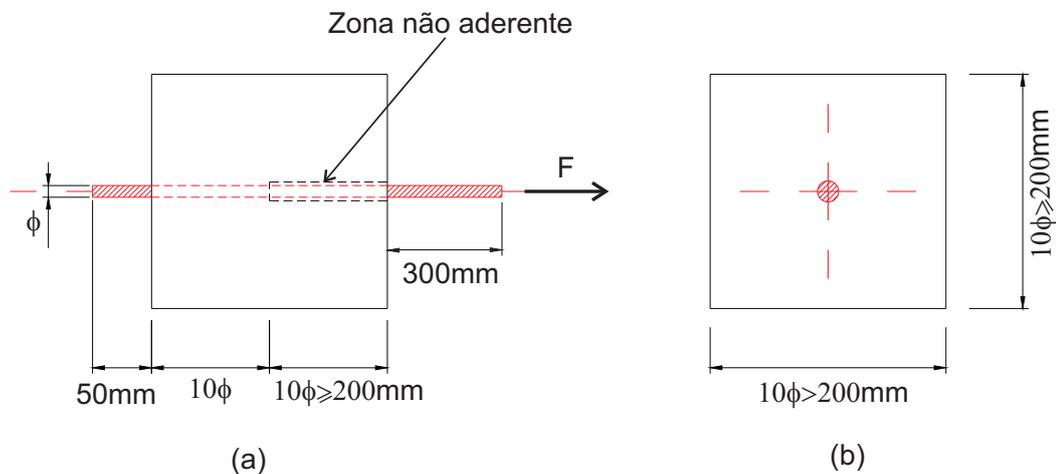


Figura 5.35: Geometria padrão para o ensaio de arrancamento.

O modelo numérico elaborado objetivou simular o ensaio apresentado por Silva (2010), cuja a geometria é apresentada na figura 5.36.

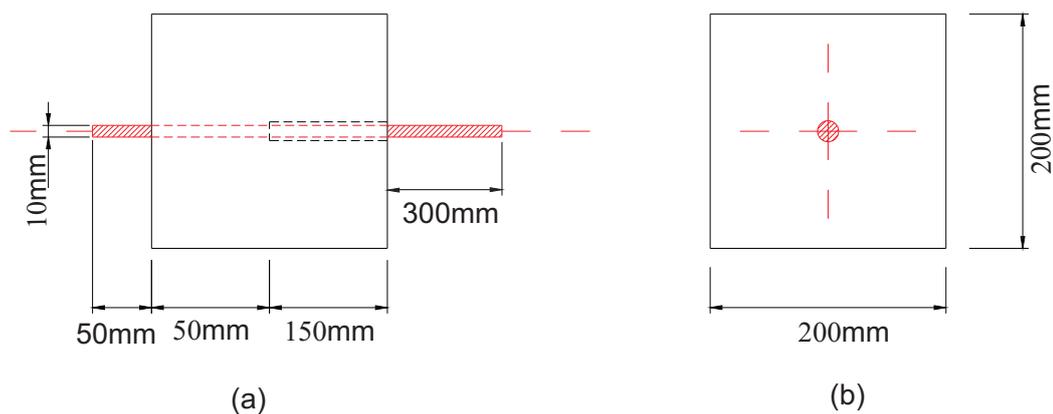


Figura 5.36: Geometria do ensaio em estudo.

O modelo elaborado fez uso de 132 elementos quadriláteros de 4 nós de estado plano de tensões e 15 elementos de armadura embutida de estado plano de tensões, onde o elemento pai é representado por um quadrilátero de 4 nós e a barra de

armadura é representada por 2 nós para cada elemento (Figura 5.37). Para realizar a integração numérica dos elementos, foram utilizados 2x2 pontos de Gauss para integração o elemento pai e 2 pontos de Gauss para a barra de armadura.

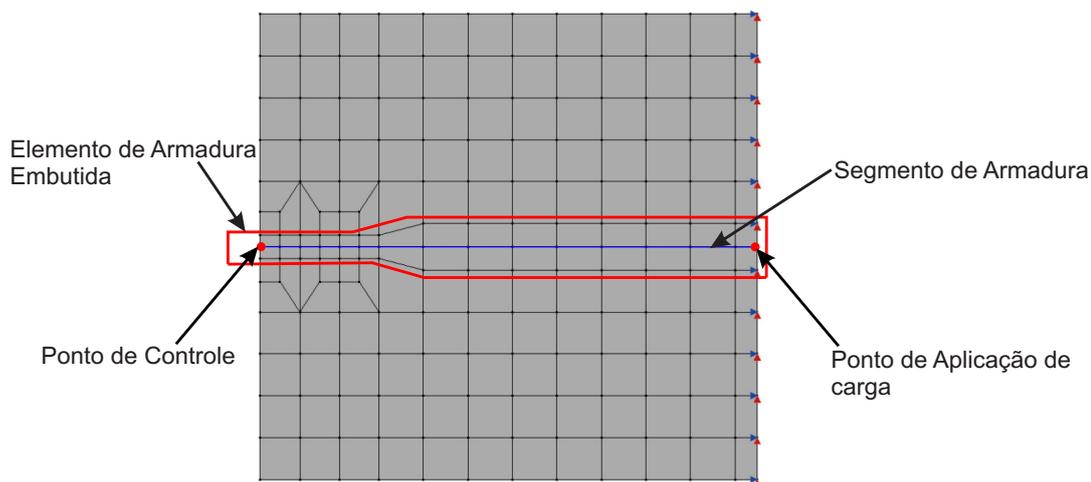


Figura 5.37: Malha de elementos finitos elaborada.

O modelo constitutivo adotado para o concreto foi o modelo de fissuração distribuída, usando dos seguintes parâmetros:  $E_0 = 36100MPa$ ;  $\nu = 0,15$ ,  $f_c = 27,80MPa$ ;  $f_t = 3,28MPa$ ,  $\epsilon_c = 0,002$ ;  $G_f = 66N/m$ ;  $h = 0,05m$  e  $\beta = 0,2$ . Para simular o comportamento da barra de aço, adotou-se o modelo elastoplástico com os seguintes parâmetros:  $E_s = 21000MPa$ ;  $f_y = 500MPa$ . A perda de aderência foi incluída segundo a lei “*tensão de aderência-escorregamento*” proposta por Eligehausen et al. (1983), cujos os parâmetros se encontram apresentados na tabela 5.1.

Tabela 5.1: Parâmetros adotados para a lei de escorregamento.

Parâmetro	Valores
$w_{b1}(mm)$	0,5
$w_{b2}(mm)$	1
$w_{b3}(mm)$	5
$\alpha$	0,4
$\tau_{max.}(MPa)$	21
$\tau_f(MPa)$	6

Na solução do modelo, adotou-se o método de deslocamento generalizado com fator de carga inicial igual à 0,5, uma tolerância de  $1,0 \times 10^{-3}$  e carga de referência  $P = 35kN$ .

A figura 5.38 apresenta a trajetória de equilíbrio correspondente ao escorregamento do ponto de controle.

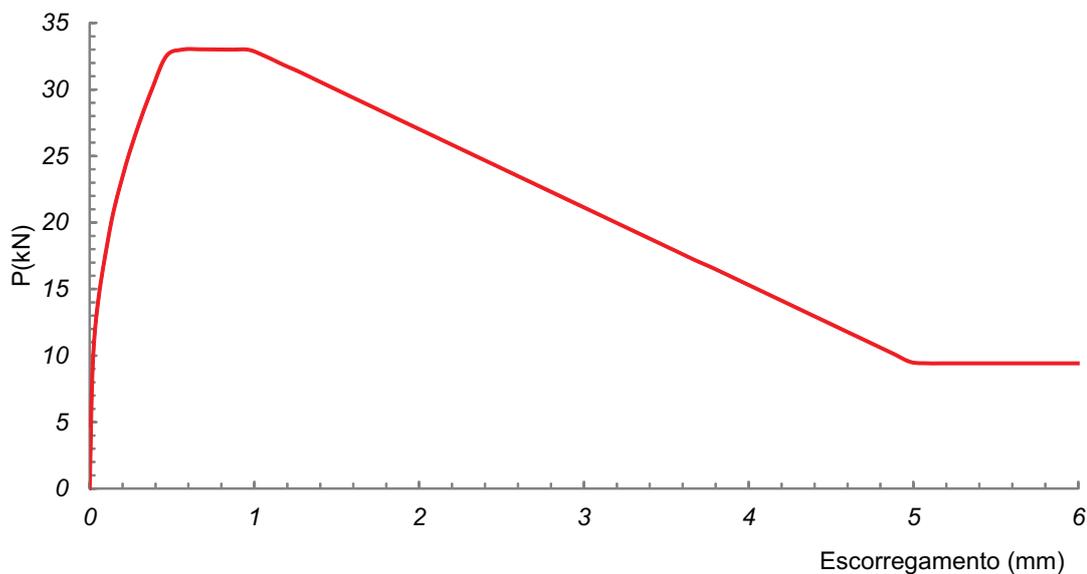


Figura 5.38: Trajetória de equilíbrio no ponto de controle de escorregamento -

$$P_{max} = 33kN.$$

A curva *tensão de aderência-escorregamento* do ponto de controle foi comparada com os resultados experimentais apresentados por Silva (2010), conforme pode ser visto na figura 5.39.

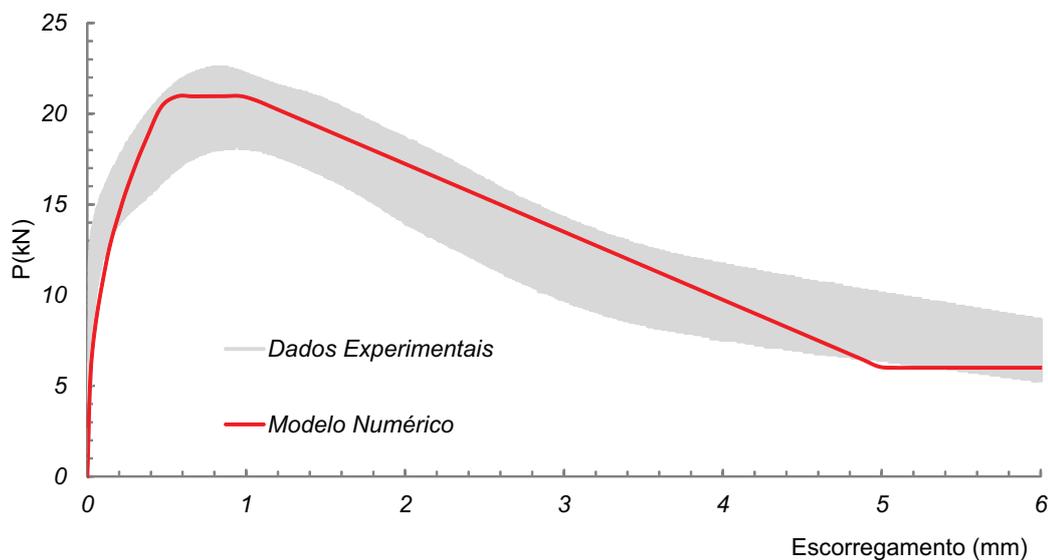


Figura 5.39: Curva tensão de aderência-escorregamento.

Ao analisar a figura 5.39, verifica-se uma boa concordância entre os resultados experimentais e os resultados obtidos pelo modelo numérico, comprovando assim, que o modelo implementado consegue representar o fenômeno da perda de aderência com uma boa precisão.

Para a carga máxima atingida na simulação ( $P = 33kN$ ), a deformação da matriz de concreto, o escorregamento ao longo da barra de armadura, a variação da tensão axial da armadura e a variação da tensão normal horizontal no concreto podem ser vistas nas figuras 5.40, 5.41, 5.42 e 5.43, respectivamente.

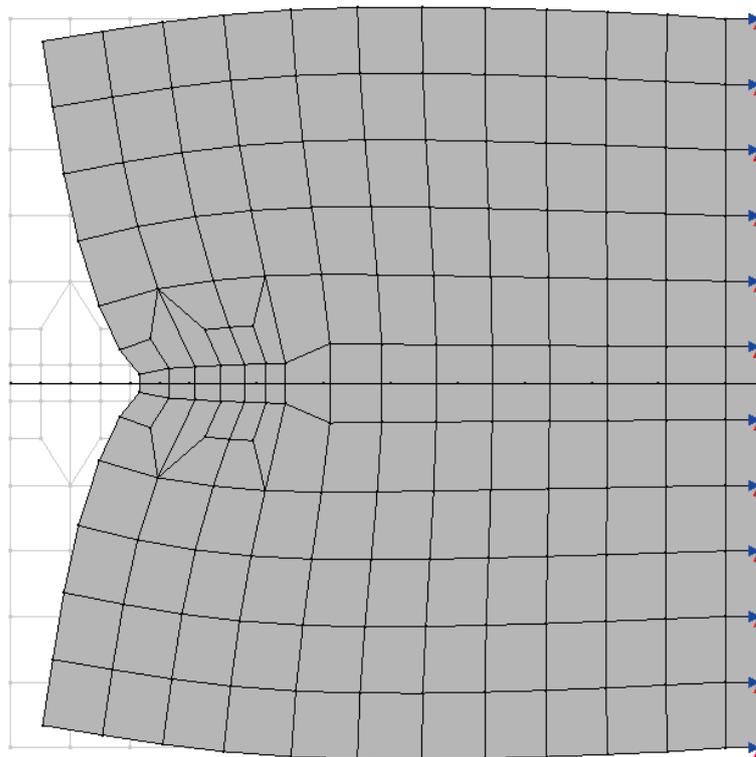


Figura 5.40: Deformação para  $P = 32,9\text{kN}$ .

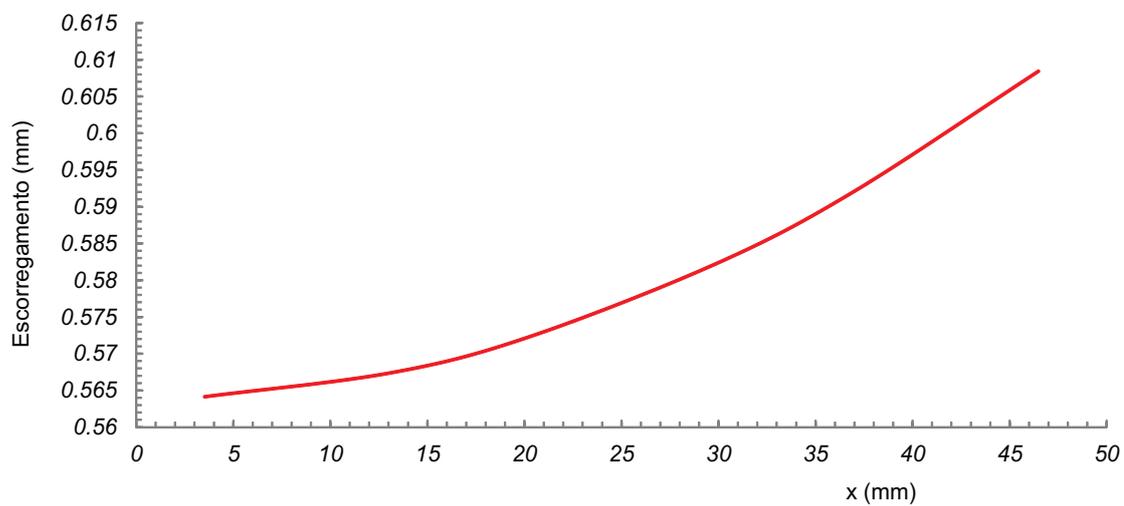


Figura 5.41: Escorregamento ao longo da barra de armadura para  $P = 32,9\text{kN}$ .

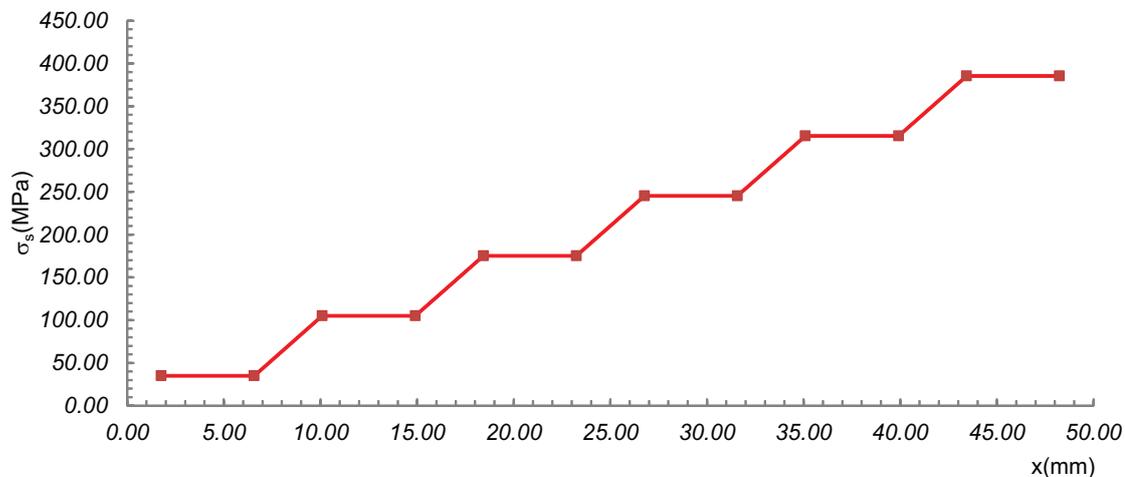


Figura 5.42: Tensão axial ao longo da barra de armadura para  $P = 32,9\text{kN}$ .

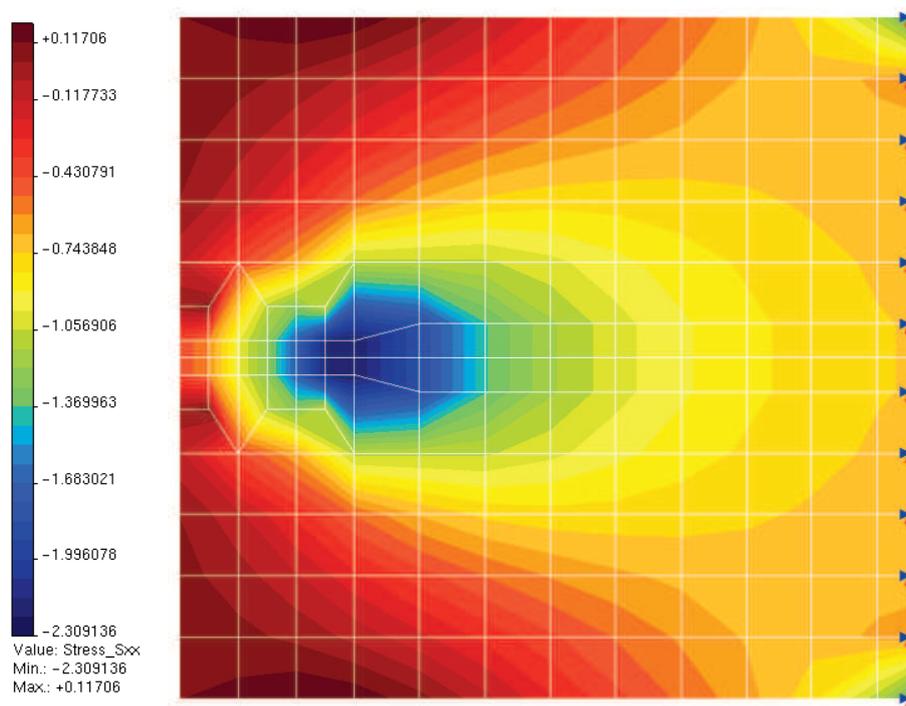


Figura 5.43: Tensão normal no concreto ao longo do corpo de prova para  $P = 32,9\text{kN}$ .

Ao analisar as figuras 5.41, 5.42 e 5.43, nota-se que há um elevado nível de tensão na camada de armadura nos pontos onde o escorregamento é mais pronunciado. Em

contra partida, observa-se que as máximas tensões no concreto estão situadas na região de interface entre o início da ancoragem e o trecho livre da barra, caracterizando assim, o comportamento típico deste tipo de ensaio. Desta forma, conclui-se que o modelo apresentou uma boa representação do comportamento real do ensaio.

## 5.5 Viga de Concreto Armado - Alvares (1993)

Neste exemplo será apresentada a modelagem numérica realizada da viga estudada por Alvares (1993).

Em seu trabalho, Alvares (1993) apresenta um estudo numérico e experimental realizado em vigas de concreto armado, sujeitas à flexão em quatro pontos. Os detalhes geométricos da viga estudada são apresentados na figura 5.44.

Nas modelagens numéricas apresentadas por Alvares (1993), somente o concreto apresentava comportamento não-linear. Para tanto, fez-se uso do modelo constitutivo proposto por Mazars (1984) *apud* Alvares (1993), cujos parâmetros foram obtidos por meio de ensaios experimentais.

No presente trabalho, a viga foi modelada com o uso de elementos de armadura discreta e elementos de armadura embutida, planos e tridimensionais.

Em todas as simulações foi adotado um modelo de plasticidade, segundo uma lei elastoplástica, para representar o aço da armadura, adotando-se  $f_y = 420N/mm^2$ . Para o concreto, foi utilizado o modelo de dano volumétrico proposto por Penna (2011) com função de dano polinomial. Para os modelos de armadura embutida planos, além do modelo de dano volumétrico para representar o concreto, foi utilizado o modelo de microplanos proposto por Leukart e Ramm (2006), incorporado ao sistema **INSANE** por Wolenski (2013), com função de dano bilinear. Para o modelo de armadura embutida tridimensional, foi utilizado somente o modelo de dano volumétrico para representar o concreto. Nas tabelas 5.2 e 5.3 são apresentados os parâmetros adotados nos modelos elaborados.

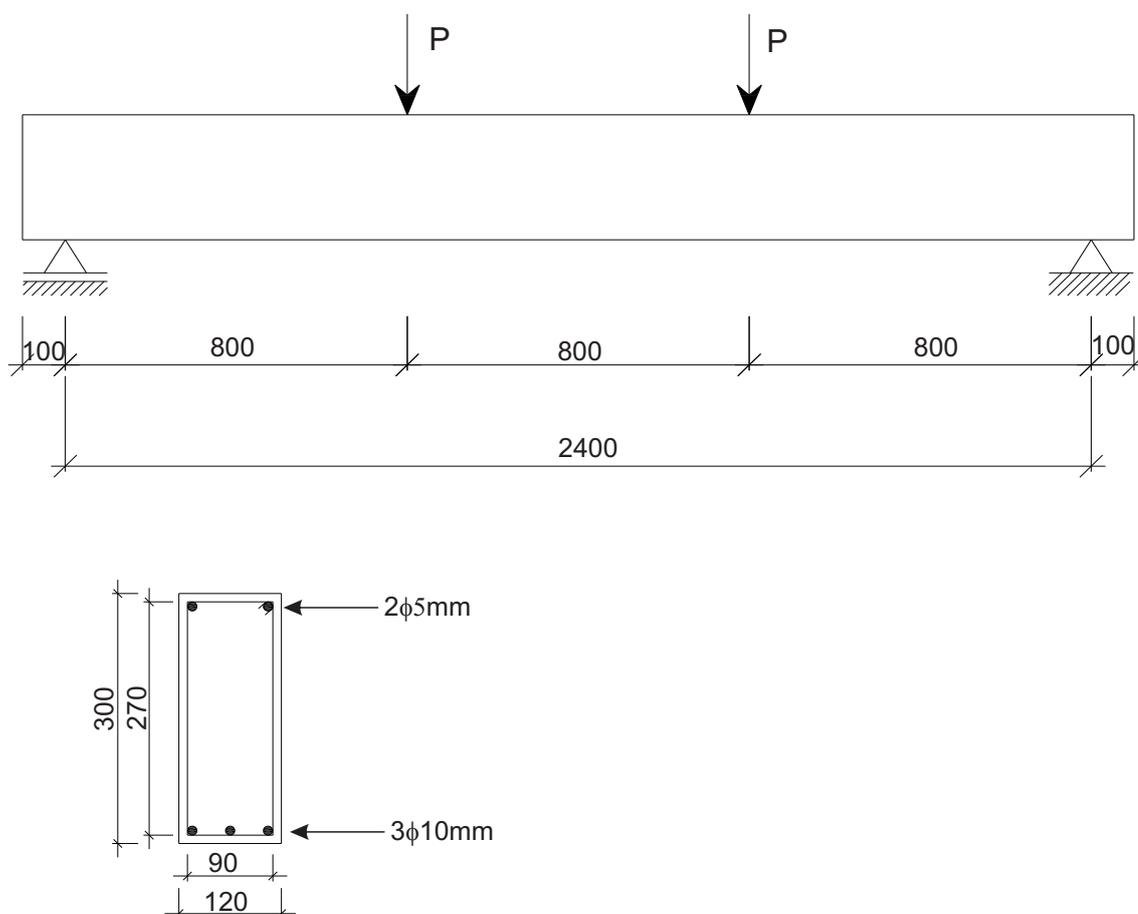


Figura 5.44: Detalhes geométricos e da disposição das armaduras da viga estudada (dimensões em mm).

Tabela 5.2: Parâmetros para o modelo de Dano Volumétrico.

Parâmetro	Tração	Compressão
$f_e(N/mm^2)$	0,945	11,2
$\kappa_0$	0,000094	0,0017
$E(N/mm^2)$	16222,22	16222,22

Tabela 5.3: Parâmetros para o modelo de Microplanos.

Parâmetro	Valor
$f_u^{mic.}$	0,00
$f_{cr}^{mic.}$	1,950
$f_0^{mic.}$	2,960
$\kappa_u^{mic.}$	0,00120
$\kappa_{cr}^{mic.}$	0,00032
$\kappa_0^{mic.}$	0,000103

Em todos os modelos, foi considerada a perda de aderência segundo a lei “*tensão de aderência-escorregamento*” proposta por Eligehausen et al. (1983), cujos os parâmetros se encontram apresentados na tabela 5.4.

Tabela 5.4: Parâmetros adotados para a lei de escorregamento.

Parâmetro	Barras Superiores	Barras Inferiores
$w_{b1}(mm)$	1	1
$w_{b2}(mm)$	3	3
$w_{b3}(mm)$	3,25	6,5
$\alpha$	13,11	13,11
$\tau_{max.}(MPa)$	5,24	5,24
$\tau_f(MPa)$	0,4	0,4

As malhas foram elaboradas valendo-se da simetria. Desta forma, as malhas planas representam metade da viga (simetria longitudinal) e as malhas sólidas representam 1/4 da viga (simetria longitudinal e transversal). A figura 5.45 ilustra as simetrias adotadas na modelagem.

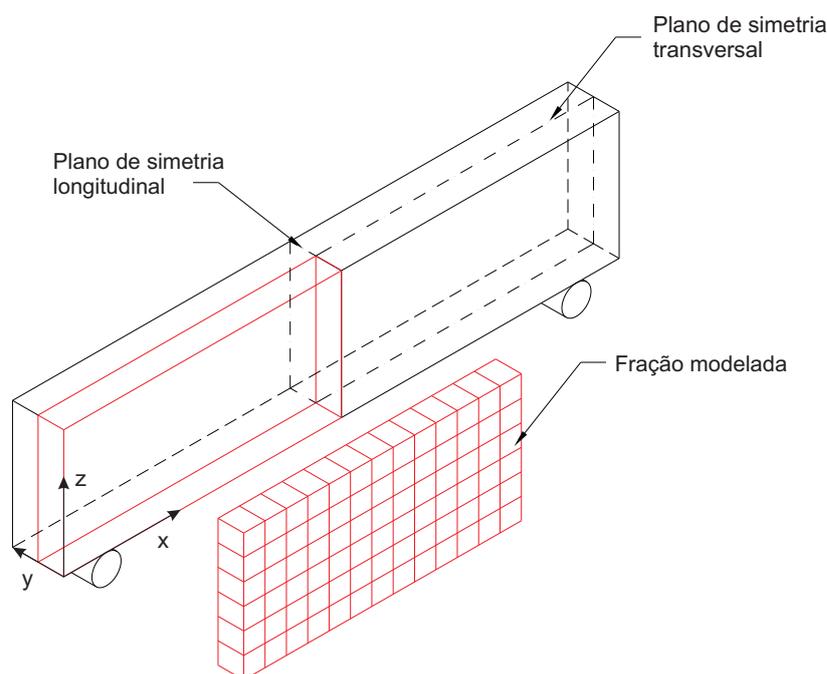


Figura 5.45: Geometria e malha.

### 5.5.1 Modelos de Armadura Discreta Planos

Para a viga em estudo, foram elaborados duas malhas com as seguintes características:

**Malha M1:** Malha composta de 156 elementos planos de quatro nós para representar a matriz de concreto, 54 elementos unidimensionais de dois nós para representar a armadura longitudinal, 56 elementos unidimensionais de mola para introduzir a perda de aderência (Figura 5.46);

**Malha M2:** Malha composta de 156 elementos planos de quatro nós para representar a matriz de concreto, 54 elementos unidimensionais de dois nós para representar a armadura longitudinal, 54 elementos de contato unidimensionais para introduzir a perda de aderência (Figura 5.46);

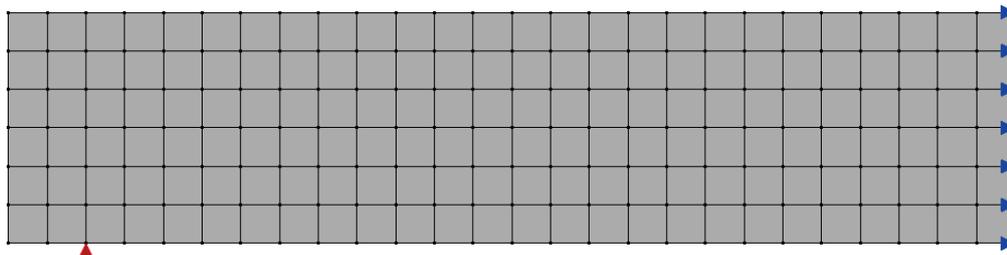


Figura 5.46: Malha de Elementos Finitos Elaborada - M1 E M2.

Para a obtenção das trajetórias de equilíbrio, adotou-se o método de controle de deslocamento generalizado, fator de carga inicial igual a 1125, tolerância para convergência em deslocamento de 0,001 e carga de referência  $P = 1,0N$ .

As trajetórias de equilíbrio, correspondentes ao deslocamento vertical da seção do meio do vão, medido na face inferior da viga, obtidas com cada uma das malhas elaboradas, foram confrontadas com os valores experimentais obtidos por Alvares (1993) e estão apresentadas na figura 5.47.

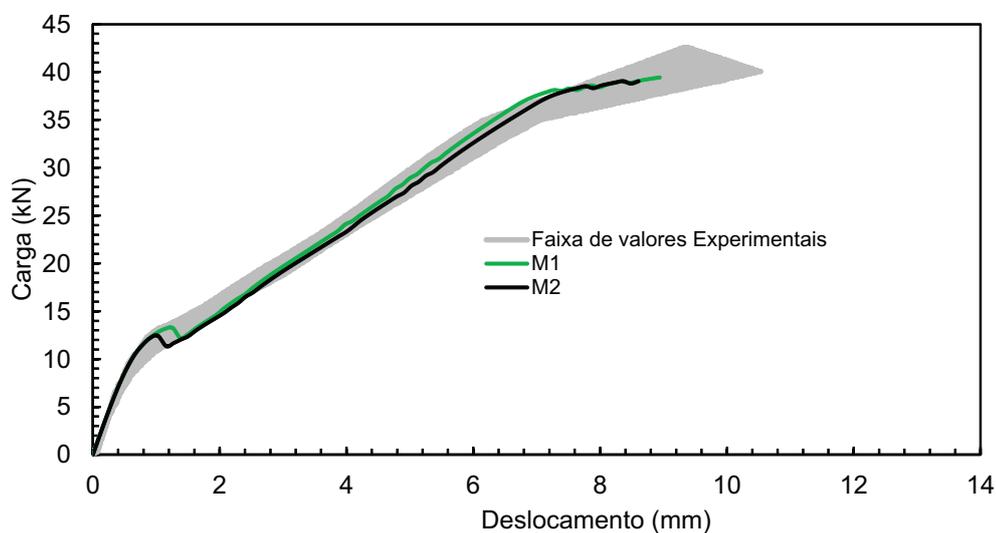


Figura 5.47: Trajetória de equilíbrio correspondente ao deslocamento no meio do vão.

Ao se observar os resultados apresentados, percebe-se que os modelos de armadura discreta apresentam bons resultados e uma estabilidade numérica muito boa.

Observa-se também que o modelo é capaz de captar a intensificação do processo de fissuração, sem com isso perder a estabilidade numérica.

### 5.5.2 Modelos de Armadura Discreta Tridimensionais

Para a viga em estudo, foram elaboradas duas malhas com as seguintes características:

**Malha M3:** Malha composta de 156 elementos sólidos de oito nós para representar a matriz de concreto, 54 elementos do estado plano de tensões para representar a camada de armadura, 54 elementos de contato bidimensional para introduzir a perda de aderência (Figura 5.48);

**Malha M4:** Malha composta de 156 elementos sólidos de oito nós para representar a matriz de concreto, 162 elementos unidimensionais de dois nós para representar a armadura, 162 elementos de contato unidimensionais para introduzir a perda de aderência (Figura 5.48);

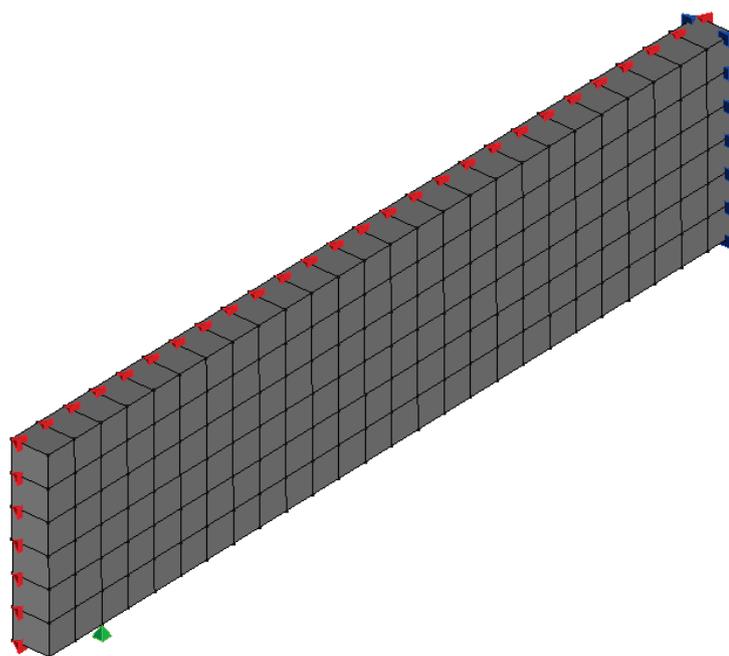


Figura 5.48: Malha de Elementos Finitos - M3 e M4.

Para a obtenção das trajetórias de equilíbrio, correspondentes ao deslocamento vertical da seção do meio do vão, medido na face inferior da viga, adotou-se o método de controle de deslocamentos generalizado, fator de carga inicial igual a 1125, tolerância para convergência em deslocamento de 0,001 e carga de referência  $P = 1,0N$ .

As trajetórias de equilíbrio obtidas com cada uma das malhas foram confrontadas com os valores experimentais obtidos por Alvares (1993) e estão apresentadas na figura 5.49.

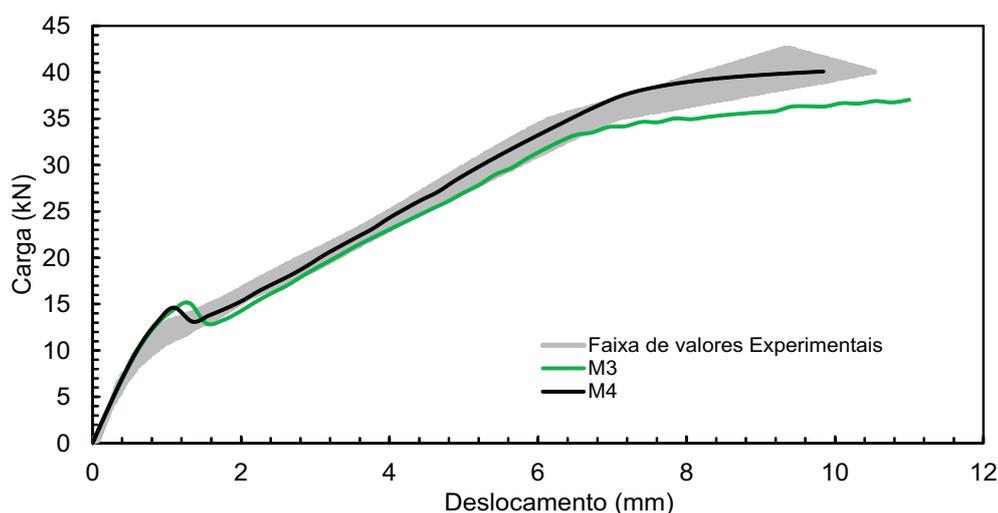


Figura 5.49: Trajetória de equilíbrio correspondente ao deslocamento no meio do vão.

Os resultados apresentados na figura 5.49 demonstram que o modelo de armadura discreta tridimensional se apresenta ligeiramente menos rígido que o modelo plano, porém ele é mais sensível a oscilações de carga. Entretanto, os resultados obtidos com este modelo se encontram dentro da faixa de valores esperados.

### 5.5.3 Modelos de Armadura Embutida Planos

Utilizando o modelo de armadura embutida plano, foram elaborados quatro malhas com as seguintes características:

**Malha M5:** Malha composta de 102 elementos quadriláteros de quatro nós em estado plano de tensões, 54 elementos de armadura embutida plano com 4 nós para representar a matriz de concreto e 4 nós para representar a camada de armadura; uso do modelo de dano volumétrico para representar o comportamento do concreto (Figura 5.50);

**Malha M6:** Malha composta de 273 elementos quadriláteros de quatro nós em estado plano de tensões, 78 elementos de armadura embutida plano com 4 nós para representar a matriz de concreto e 4 nós para representar a camada de armadura; uso do modelo de dano volumétrico para representar o comportamento do concreto (Figura 5.51);

**Malha M7:** Malha composta de 102 elementos quadriláteros de quatro nós em estado plano de tensões, 54 elementos de armadura embutida plano com 4 nós para representar a matriz de concreto e 4 nós para representar a camada de armadura; uso do modelo de microplanos para representar o comportamento do concreto (Figura 5.50);

**Malha M8:** Malha composta de 273 elementos quadriláteros de quatro nós em estado plano de tensões, 78 elementos de armadura embutida plano com 4 nós para representar a matriz de concreto e 4 nós para representar a camada de armadura; uso do modelo de microplanos para representar o comportamento do concreto (Figura 5.51);

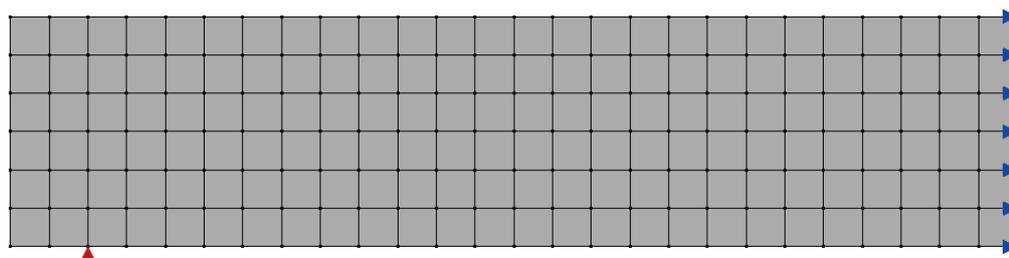


Figura 5.50: Malha de Elementos Finitos - M5 e M7.

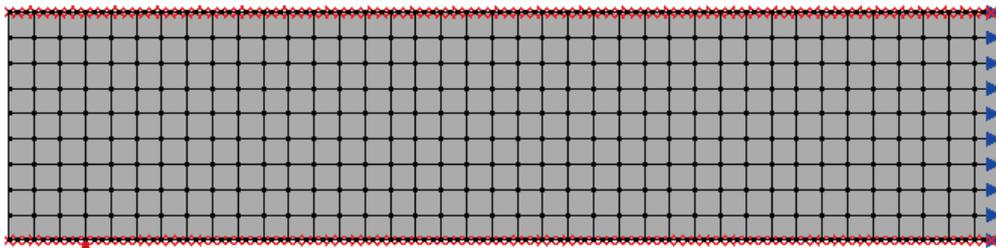


Figura 5.51: Malha de Elementos Finitos - M6 e M8.

Para a obtenção das trajetórias de equilíbrio, adotou-se o método de controle de deslocamentos generalizado, fator de carga igual a 1125, tolerância para convergência em deslocamento de 0,001 e carga de referência  $P = 1,0N$ .

As trajetórias de equilíbrio obtidas com cada uma das malhas foram confrontadas com os valores experimentais obtidos por Alvares (1993) e estão apresentadas na figuras 5.52.

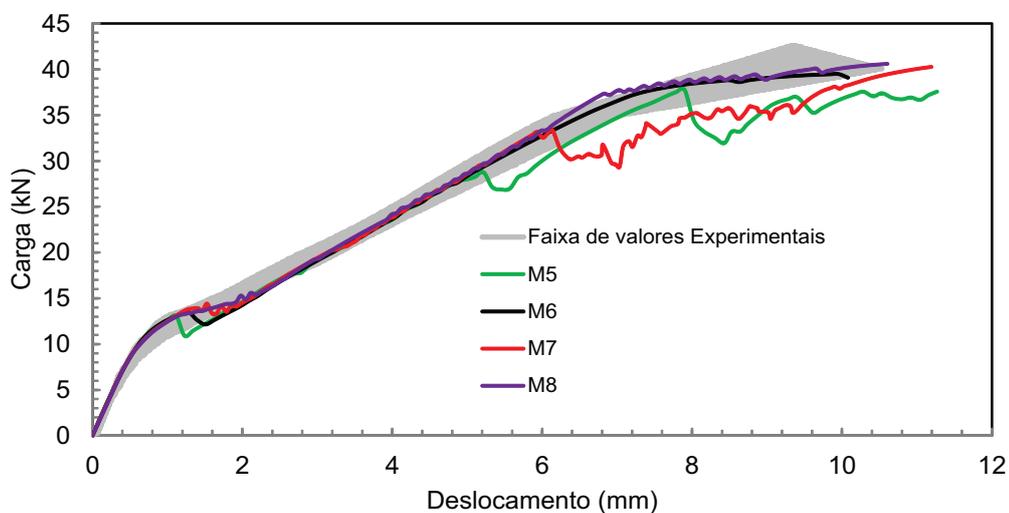


Figura 5.52: Trajetória de equilíbrio correspondente ao deslocamento no meio do vão.

Os resultados apresentados na Figura 5.52 demonstram que o modelo de armadura embutida apresenta bons resultados, mesmo observando que, para níveis mais

elevados de tensão, as malhas M5 e M7 apresentaram uma ligeira instabilidade numérica, exigindo assim, uma maior discretização (malhas M6 e M8). Salienta-se que, as malhas que fizeram uso do modelo constitutivo de microplanos se apresentaram numericamente mais estáveis, até mesmo, para níveis mais elevados de tensão.

A Figura 5.53(a) apresenta as isoformas de dano para a malha M7, considerando-se aderência perfeita. A Figura 5.53(b) apresenta as isoformas de dano para a malha M7, considerando-se a perda de aderência. Ao comparar as duas figuras, percebe-se que a evolução do dano se dá de forma mais intensa no modelo que considera a perda de aderência. Este comportamento é esperado, uma vez que, a gradativa perda de aderência entre a armadura e o concreto, minimiza a transferência de esforços entre estes dois materiais, intensificando assim, o processo de degradação do concreto.

Na Figura 5.53(c) pode ser observada a variação da tensão de aderência ao longo da armadura. Nota-se que, a região de maior dano apresenta picos de tensão de aderência, acompanhados de quedas bruscas de tensão. Este comportamento é esperado, tendo em vista a intensificação de transferência de esforço nas interfaces entre as zonas fissuradas e zonas integras. Desta forma, conclui-se que o modelo de armadura embutida consegue representar de forma fiel o comportamento da perda de aderência entre armadura e o concreto.

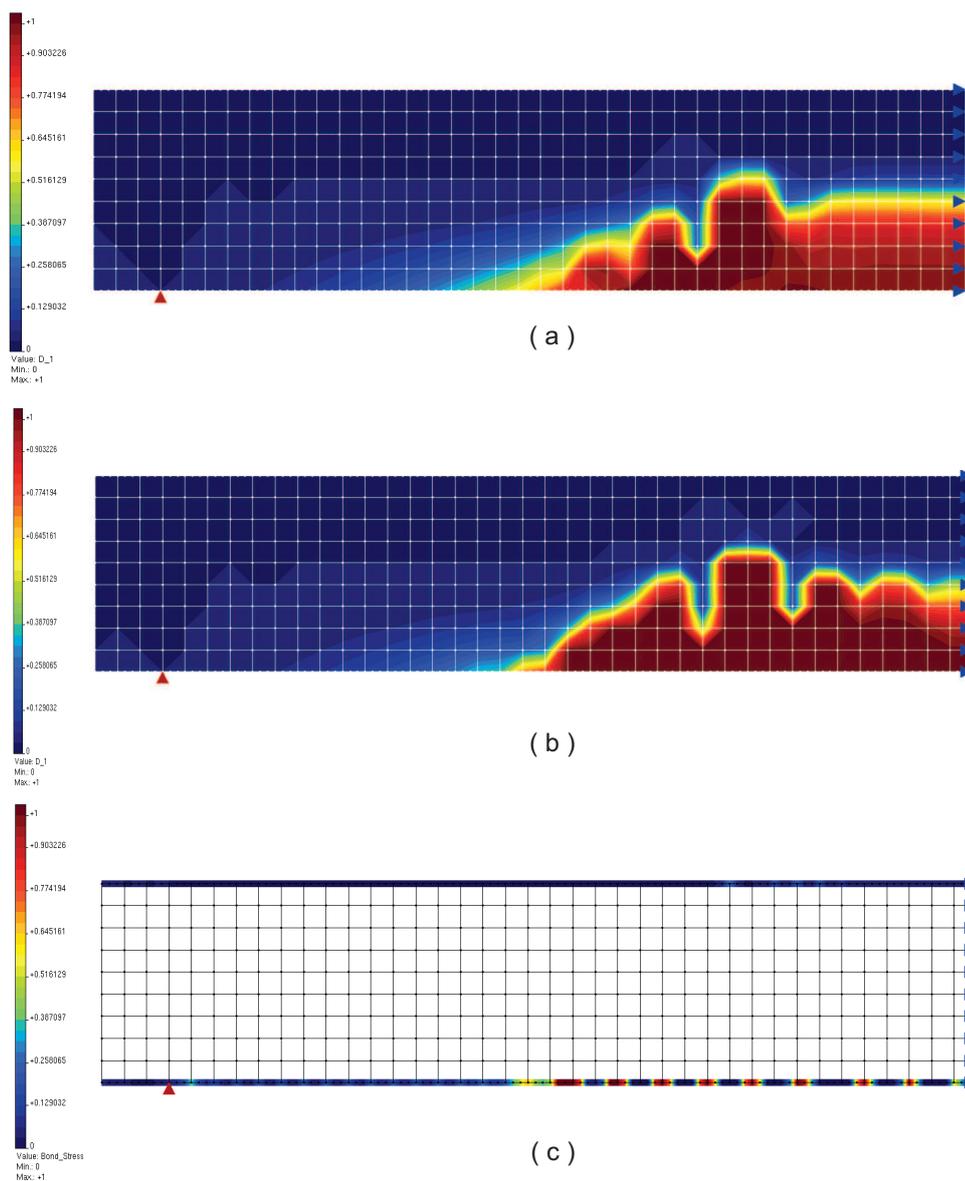


Figura 5.53: Variações de grandezas na malha M7 para o passo referente à carga de 13kN: (a) Isofaixas de dano para o modelo com aderência perfeita; (b) Isofaixas de dano para o modelo com perda de aderência e (c) Tensões de aderência ao longo da armadura.

#### 5.5.4 Modelos de Armadura Embutida Tridimensionais

Utilizando o modelo de armadura embutida tridimensional, foi elaborada uma malha com as seguintes características:

**Malha M9:** Malha composta de 102 elementos sólidos de oito nós, 54 elementos de armadura embutida sólidos com 8 nós para representar a matriz de concreto e quatro nós para representar a camada de armadura; uso do modelo de dano volumétrico para representar o comportamento do concreto;

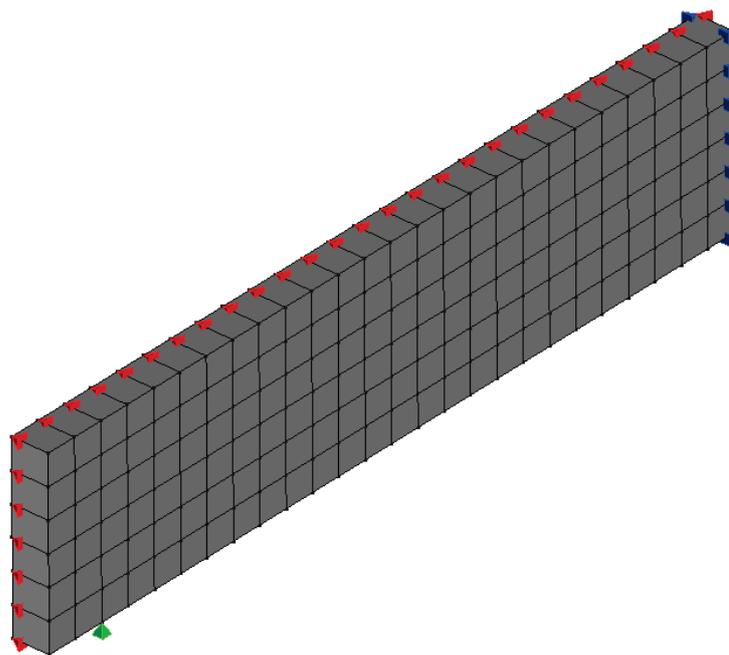


Figura 5.54: Malha de Elementos Finitos - M9.

Para a obtenção das trajetórias de equilíbrio, adotou-se o método de controle de deslocamento generalizado, fator de carga igual a 1125, tolerância para convergência em deslocamento de 0,001 e carga de referência  $P = 1,0N$ .

As trajetórias de equilíbrio obtidas com cada uma das malhas foram confrontadas com os valores experimentais obtidos por Alvares (1993) e estão apresentadas na figuras 5.55.

Assim, como os modelos planos, o modelo de armadura embutida tridimensional geraram bons resultados, porém, se apresenta mais estável numericamente.

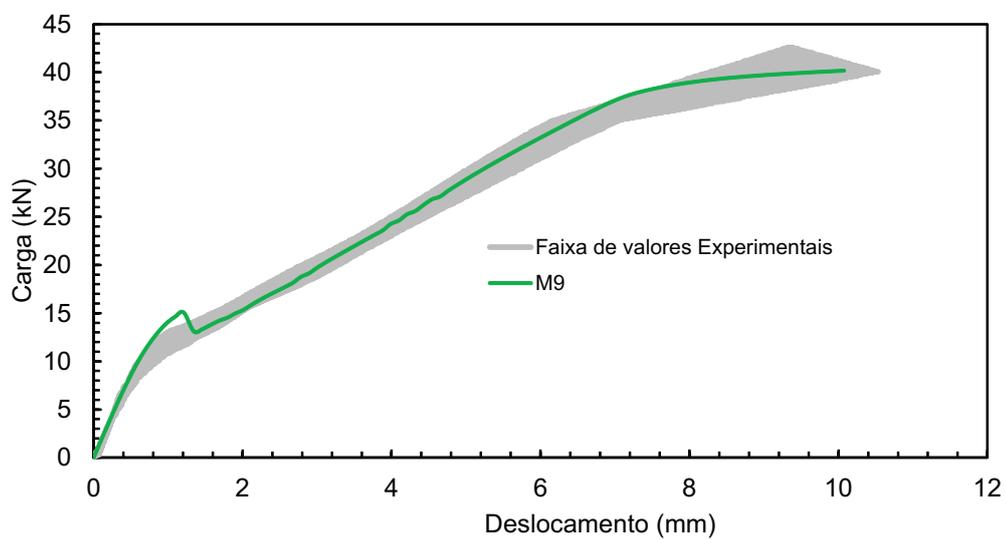


Figura 5.55: Trajetória de equilíbrio correspondente ao deslocamento no meio do vão.

# Capítulo 6

## Considerações Finais

O trabalho apresentado teve como objetivo inserir no sistema computacional **INSANE** modelos que possibilitassem o uso do sistema em análises de estruturas de concreto armado com a inclusão da perda de aderência. Desta forma, foram apresentadas as formulações dos modelos inseridos, um projeto orientado a objetos que visou a inserção dos modelos apresentados de forma a aproveitar todos os recursos existentes, com o mínimo de alteração possível, e, por fim, a validação dos modelos elaborados.

Durante a fase de implementação computacional, ficou evidente o potencial de expansão que o sistema **INSANE** oferece. Isto se deve, ao fato do sistema ter se estruturado seguindo o paradigma da programação orientada a objetos, possibilitando assim, a inclusão de novos modelos com reaproveitamento dos recursos já implementados e baixo impacto no sistema.

Ressalta-se ainda, que o sistema **INSANE** possui um framework de modelos constitutivos para concreto com uma extensa biblioteca de modelos. Tal framework possibilita a ampliação da referida biblioteca existente sem interferência com os modelos já existentes, ou em alguns casos, com poucas modificações.

No processo de validação dos modelos implementados, notou-se que todos os

modelos implementados apresentaram resultados coerentes com os resultados numéricos e experimentais existentes na literatura, contudo, com era de se esperar, cada modelo apresentou um comportamento distinto.

Os modelos de armadura discreta cuja a perda de aderência é inserida por meio de molas, apresentou em todos os exemplos de validação bons resultados e uma boa estabilidade numérica. Contudo, este enfoque possui a grande inconveniência de condicionamento da malha à geometria da armadura, dificultando assim, a realização de possíveis ajustes na malha, assim como, o uso de um maior número de elementos finitos. Outra desvantagem que este enfoque apresenta é o fato de sua rigidez ser dependente da região de influência da mola. Este fato pode trazer um trabalho extremamente despendioso em malhas irregulares ou em malhas mais refinadas.

Os modelos de armadura discreta, com a perda de aderência inserida com o uso de elementos de contato, apresentou as mesmas desvantagens daqueles que usam elemento de mola, no que tange à dependência entre a geometria da malha e a geometria da armadura. Entretanto, este enfoque possui a grande vantagem de calcular a rigidez sem a necessidade de informar a região de influência do elemento. Na maioria das simulações realizadas os elementos de contato e de mola apresentaram comportamento semelhante.

Os modelos de armadura embutida apresentaram bons resultados em todas as situações, ressaltando-se a grande vantagem de não condicionar a malha à geometria da armadura, além de possibilitar o aumento da aproximação da camada de armadura sem que, com isso, seja necessário reformular toda a malha. Outra vantagem apresentada por este enfoque é a facilidade de pós processamento de informação como escorregamento, tensão de aderência e tensão atuante ao longo das camadas de armadura.

A extensa biblioteca de modelos constitutivos do **INSANE** possibilita a elaboração de uma diversidade de modelos para análise de estruturas de concreto armado, podendo assim, combinar de diferentes modelos constitutivos para o aço, para o

concreto e para aderência.

De uma forma geral, todos os modelos apresentados foram validados pelos exemplos elaborados, porém, sugere-se implementações complementares e estudos adicionais. Dentre tais sugestões, citam-se:

1. A implementação de um pré processador que permita a geração de automática de malhas que possuam elementos de armadura embutida, elementos de contato ou elementos de mola;
2. Embora os elementos de contato tenham sido empregados para simular a aderência entre a armadura e o concreto, ele pode ser usado para simular qualquer interface coesiva, desde que para isso, seja utilizadas leis que representem o comportamento da interface. Sendo assim, sugere-se que novas leis para interfaces sejam implementadas e outras simulações sejam realizadas com o objetivo de expandir e estudar, o uso dos elementos de contato em problemas de outra natureza;
3. A implementação da classe `CompositeElement` foi idealizada de forma a buscar a máxima generalização de um elemento composto. Desta forma, sugere-se estudar o uso desta implementação em outras situações que necessitam de elementos composto;
4. Nos exemplos apresentados, utilizou-se a lei de aderência proposta por Eligehausen et al. (1983), desta forma sugere-se estudar outras leis de aderência e se possível, formular novas leis e comparar com dados experimentais.

# Referências Bibliográficas

- Allwood, R. J. e Bajarwan, A. A., 1989. ‘A new method for modelling reinforcement and bond in finite element analysis of reinforced concrete’. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol. 28, pp. 833 – 844.
- Alvares, M. D. S., 1993. Estudo de um modelo de dano para o concreto: formulação, identificação paramétrica e aplicação com emprego do método dos elementos finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil.
- Balakrishna, S. e Murray, D. W., 1987. ‘Prediction of response of concrete beams and panels by nonlinear finite element analysis’. *IABSE Reports*, pp. 393–404.
- Barzegar, F. e Maddipudi, S., 1997. ‘Three-dimensional modeling of concrete structures.ii: Reinforced concrete’. *Journal of Structural Engineering*, vol. 123, pp. 1347–1355.
- Bresler, B. e Bertero, V., 1966. ‘Influence of load history on cracking in reinforced concrete’. *Report to california Division of Highways, Departament of civil Engineering, Division of Structural Engineering and Structural Mechanics, University of California (Berkeley)*, p. 30.
- CEB/FIB, 2010. *Model Code 2010*. International Federation for Structural Concrete, Germany.

- Doerr, K., 1988. ‘Bond behaviour of ribbed reinforcement under transversal pressure’. *Nonlinear behaviour of reinforced concrete spatial structures*, vol. 1, pp. 13 – 29.
- Eligehausen, R., Popov, E. P. e Bertoro, V. V., 1983. ‘Local bond stress-slip relationships of deformed bars under generalized excitations.’. *Report 82/23, Earthquake Engineering Research Centre, University of California, Berkely*, p. 169.
- Elwi, A. E. e Hrudey, T. M., 1988. ‘Finite element model for curved embedded reinforcement’. *Journal of Engineering Mechanics* 115(4), vol. 115, pp. 740 754.
- Fonseca, F. T., 2008. Sistema computacional para análise dinâmica geometricamente não linear através do método dos elementos finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Fonseca, M. T., 2006. Aplicação orientada a objetos para análise fisicamente não-linear com modelos reticulados de seções transversais compostas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Fuina, J. S., 2009. Formulações de modelos constitutivos de microplanos para contínuos generalizados. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Goto, Y., 1992. ‘Cracks formed in concrete around deformed tension bars’. *ACI Journal*, vol. 68, pp. 244.
- Hawkins, N. M., Lin, I. J. e Jeang, F. L., 1982. *Local Bond Strength of Concrete for Cyclic Reversed Loadings*.
- Hoshino, M., 1974. Ein Beitrag zur Untersuchung des Spannungszustandes an Arbeitsfugen mit Spannglied-Kopplungen von abschnittsweise in Ortbeton hergestellten Spannbetonbrücken. Tese de Doutorado, Technischeltoch Schale, Darmstadt, Germany.

- Keuser, M. e Mehlhorn, G., 1987. 'Finite element for bond problems'. *Journal of Structural Engineering*, vol. 113- No.10.
- Leonhardt, F. e Monnig, E., 1977. *Construções de Concreto, Vol. 1*. Interciência, Brasil.
- Leukart, M. e Ramm, E., 2006. 'Identification and interpretation of microplane material laws'. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 132(3), pp. 295–305.
- Mazars, J., 1984. Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non lineaire et à rupture du béton de structure. Tese de Doutorado, Université Paris, Paris, França. Citado em Alvares (1993).
- Ngo, D. e Scordelis, A. C., 1967. 'Finite element analysis of reinforced concrete beams'. *Journal of ACI*, vol. 64, pp. 152–163.
- Nilson, A. H., 1968. 'Nonlinear analysis of concrete by the finite element method'. *Journal of American Concrete Institute*, vol. 65, pp. 757–766.
- Nilson, A. H., 1972. 'Internal measurement of bond slip'. *Journal of ACI*, vol. 69, Title No. 7, pp. 439–441.
- Penna, S. S., 2011. Formulação multipotencial para modelos de degradação elástica: Unificação teórica, proposta de novo modelo, implementação computacional e modelagem de estruturas de concreto. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- RILEM/CEB/FIB, 1983. *bond test for reinforcing steel : pull-out test*. Comité Euro-International Du Béton, Paris.
- Rosa, W. A., 1994. Modelagem do deslizamento entre o aço e o concreto com tensão de aderência não-linear. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

- Schafer, H., (1975), A contribution to the solution of contact problems with the aid of bond elements, In Computer methods in applied mechanics and engineering, Vol. 6, pp. 335-354, North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
- Silva, B. V., 2010. Investigação do potencial dos ensaios apulot e pull-out para estimativa da resistência a compressão do concreto. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista - Júlio Mesquita Filho, Ilha Solteida, SP, Brasil.
- Wolenski, A. R. V., 2013. Ambiente teórico-computacional unificado para modelos constitutivos: Inclusão de modelos de microplanos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Yang, Y. B. e Shieh, M. S., 1990. 'Solution method for nonlinear problems with multiple critical points'. , vol. 28, pp. 2110–2116.