

**SISTEMA COMPUTACIONAL PARA ANÁLISE DINÂMICA
GEOMETRICAMENTE NÃO-LINEAR ATRAVÉS DO MÉTODO
DOS ELEMENTOS FINITOS**

Flavio Torres da Fonseca

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

**“SISTEMA COMPUTACIONAL PARA ANÁLISE DINÂMICA
GEOMETRICAMENTE NÃO-LINEAR ATRAVÉS DO MÉTODO
DOS ELEMENTOS FINITOS”**

Flavio Torres da Fonseca

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de “Mestre em Engenharia de Estruturas”.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Roque Luiz da Silva Pitangueira
DEES - UFMG (Orientador)

Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira
UFOP

Prof. Dr. Evandro Parente Júnior
UFC

Belo Horizonte, 29 de Agosto de 2008

*O limite extremo da sabedoria, eis
o que o público chama de insanidade.*

Jean Cocteau

Poeta e dramaturgo francês

- Aqui estou, senhores!

Phileas Fogg

*Personagem do livro “A Volta ao Mundo em 80 Dias”
de Jules Verne, ao entrar no salão do Clube Reformador
três segundos antes de terminar seu prazo.*

A meus avós.

Índice

| | |
|---|----------|
| Índice | ii |
| Lista de Tabelas | vi |
| Lista de Figuras | x |
| Lista de Abreviaturas e Siglas | xi |
| Resumo | xiii |
| Abstract | xiv |
| Agradecimentos | xv |
| 1 INTRODUÇÃO | 1 |
| 1.1 Objetivos | 2 |
| 1.2 Organização do Texto | 2 |
| 2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA ANÁLISE DE VIBRAÇÕES | 4 |
| 2.1 Discretização das Equações de Movimento | 4 |
| 2.2 Considerações Sobre o Amortecimento | 9 |
| 2.2.1 Amortecimento Modal | 10 |
| 2.2.2 Amortecimento Devido ao Material | 12 |
| 2.2.3 Amortecimento de Rayleigh | 12 |
| 2.3 Métodos de Análise Modal | 13 |
| 2.3.1 Método de Superposição de Deslocamentos Modais | 18 |
| 2.3.2 Método de Superposição de Acelerações Modais | 20 |
| 2.4 Métodos de Integração Direta | 21 |
| 2.4.1 Método da Diferença Central | 22 |
| 2.4.2 Método <i>Newmark-β</i> | 24 |
| 2.4.3 Método Hilber-Hughes-Taylor | 27 |
| 2.4.4 Método <i>Wilson-θ</i> | 28 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 3 | MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA ANÁLISE GEOMETRICAMENTE NÃO-LINEAR | 30 |
| 3.1 | Medidas de Deformações e Tensões | 33 |
| 3.1.1 | Tensor de Deformações de Green-Lagrange | 34 |
| 3.1.2 | Tensor de Deformações Incrementais de Green | 36 |
| 3.1.3 | Tensor de Deformações Incrementais de Green Atualizado | 39 |
| 3.1.4 | Segundo Tensor de Tensões de Piola-Kirchhoff | 39 |
| 3.1.5 | Tensor de Tensões de Cauchy | 41 |
| 3.1.6 | Tensor de Tensões de Kirchhoff Atualizado | 42 |
| 3.2 | Formulações Lagrangeanas Total e Atualizada | 43 |
| 3.3 | Discretização das Equações de Movimento | 49 |
| 4 | MÉTODOS DE SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO NÃO-LINEARES | 54 |
| 4.1 | Análise Estática | 55 |
| 4.1.1 | Obtenção de um ponto de equilíbrio | 55 |
| 4.1.2 | Obtenção das trajetórias de equilíbrio | 56 |
| 4.2 | Análise Dinâmica | 60 |
| 5 | PROJETO ORIENTADO A OBJETOS DO NÚCLEO NUMÉRICO DO SISTEMA INSANE | 65 |
| 5.1 | Tecnologias Utilizadas | 66 |
| 5.2 | Visão Geral | 67 |
| 5.3 | Interface <code>Assembler</code> | 69 |
| 5.4 | Classe Abstrata <code>Solution</code> | 71 |
| 5.5 | Interface <code>Model</code> | 75 |
| 5.6 | Interface <code>Shape</code> | 79 |
| 5.7 | Pacote <code>MaterialMedia</code> | 81 |
| 5.8 | Classe Abstrata <code>AnalysisModel</code> | 85 |
| 5.9 | Classe Abstrata <code>ContinuousPointModel</code> | 87 |
| 5.10 | Interface <code>Persistence</code> | 87 |
| 5.11 | Pacote <code>Load</code> | 88 |
| 5.12 | Classe Abstrata <code>EigenvalueSolver</code> | 90 |
| 6 | PROBLEMAS DINÂMICOS LINEARES | 92 |
| 6.1 | Sistema Massa-Mola | 93 |
| 6.2 | Sistema Massa-Mola-Amortecedor | 100 |
| 6.3 | Barra com Massa Consistente | 108 |
| 6.4 | Chaminé Submetida a Carga Degrau | 113 |
| 6.5 | Treliça Plana de Duas Barras | 118 |
| 6.6 | Treliça Plana de Três Barras | 123 |
| 6.7 | Viga Biapoiada Submetida a Carga Degrau | 127 |
| 6.8 | Viga Biengastada Submetida a Carga Degrau | 129 |
| 6.9 | Placa Fina Quadrada em Vibração Livre | 133 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 7 | PROBLEMAS ESTÁTICOS NÃO-LINEARES | 138 |
| 7.1 | Domo Abatido | 139 |
| 7.2 | Pórtico de Williams | 142 |
| 7.3 | Coluna Engastada e Livre | 143 |
| 7.4 | Pórtico de Lee | 145 |
| 8 | PROBLEMAS DINÂMICOS NÃO-LINEARES | 148 |
| 8.1 | Pórtico de Williams Submetido a Carga Degrau | 149 |
| 8.2 | Viga Biengastada Submetida a Carga Degrau | 151 |
| 9 | CONSIDERAÇÕES FINAIS | 156 |
| A | Histórico do Projeto INSANE | 158 |
| A.1 | Trabalhos Desenvolvidos | 161 |
| B | Matrizes dos Elementos Finitos de Barra | 172 |
| B.1 | Treliça Plana | 172 |
| B.2 | Viga | 173 |
| B.3 | Grelha | 174 |
| B.4 | Pórtico Plano | 176 |
| B.5 | Treliça Espacial | 178 |
| B.6 | Pórtico Espacial | 180 |
| C | Funções de Forma | 185 |
| C.1 | LinearCubic1DCart | 185 |
| C.2 | L2 | 186 |
| C.3 | L3 | 186 |
| C.4 | L4 | 186 |
| C.5 | Q4 | 187 |
| C.6 | Q8 | 188 |
| C.7 | Q9 | 189 |
| C.8 | T3 | 190 |
| C.9 | T6 | 190 |
| C.10 | T10 | 191 |
| C.11 | H8 | 192 |
| C.12 | H20 | 193 |
| C.13 | Tetra4 | 194 |
| C.14 | Tetra10 | 194 |
| D | Matrizes dos Elementos Finitos Paramétricos | 195 |
| D.1 | Linha com 1 Grau de Liberdade | 195 |
| D.2 | Linha com 2 Graus de Liberdade | 196 |
| D.3 | Linha com 3 Graus de Liberdade | 197 |
| D.4 | Estado Plano de Tensões | 198 |
| D.5 | Estado Plano de Deformações | 200 |

| | | |
|----------|---|------------|
| D.6 | Axissimétrico | 202 |
| D.7 | Sólido | 204 |
| E | Integração Numérica | 206 |
| E.1 | Domínios Unidimensionais | 207 |
| E.2 | Domínios Quadrilaterais | 207 |
| E.3 | Domínios Hexaédricos | 208 |
| E.4 | Domínios Triangulares | 209 |
| E.5 | Domínios Tetraédricos | 209 |
| F | Métodos de Solução de Problemas de Autovalor | 212 |
| F.1 | Quociente de Rayleigh | 214 |
| F.2 | Método da Iteração Inversa | 215 |
| F.3 | Método da Iteração no Subespaço | 217 |
| | Referências Bibliográficas | 219 |

Lista de Tabelas

| | | |
|------|---|-----|
| 3.1 | Formulação Lagrangeana Total. | 45 |
| 3.2 | Formulação Lagrangeana Atualizada. | 46 |
| 3.3 | Matrizes para Elementos Finitos | 52 |
| 6.1 | Métodos utilizados. | 92 |
| 6.2 | Resultados obtidos pelo método $N\beta_4$ | 115 |
| 6.3 | Resultados obtidos pelo método $N\beta_6$ | 116 |
| 6.4 | Resultados obtidos pelo método $W\theta$ | 117 |
| 6.5 | Resultados obtidos pelo método CD. | 120 |
| 6.6 | Resultados obtidos pelo método $N\beta_4$ | 121 |
| 6.7 | Resultados obtidos pelo método $N\beta_6$ | 122 |
| 6.8 | Resultados obtidos pelo método SDM. | 125 |
| 6.9 | Resultados obtidos pelo método HHT. | 126 |
| 6.10 | Frequências naturais da viga biapojada. | 128 |
| 6.11 | Frequências naturais da viga biengastada. | 131 |
| 6.12 | Frequências naturais da placa fina. | 134 |
| 7.1 | Formulações e métodos de iteração utilizados. | 138 |
| E.1 | Quadratura de Gauss. | 210 |
| E.2 | Integração numérica em domínios triangulares. | 211 |
| E.3 | Integração numérica em domínios tetraédricos. | 211 |

Lista de Figuras

| | | |
|------|---|----|
| 2.1 | Elemento finito tridimensional. | 5 |
| 2.2 | Forças de corpo aplicadas e inerciais. | 7 |
| 2.3 | Vibração livre de sistemas superamortecido, criticamente amortecido e subamortecido. | 11 |
| 3.1 | Deslocamento do sólido em um espaço tridimensional. | 32 |
| 3.2 | Definição do segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff. | 40 |
| 3.3 | Definição do tensor de tensões de Cauchy. | 41 |
| 3.4 | Definição do tensor de tensões de Kirchhoff atualizado. | 43 |
| 4.1 | Método de Newton-Raphson. | 55 |
| 4.2 | Trajetórias de equilíbrio típicas em problemas não-lineares. | 56 |
| 4.3 | Diagrama de atividades do algoritmo genérico para métodos de controle. | 59 |
| 4.4 | Processos incrementais iterativos. | 60 |
| 4.5 | Diagrama de atividades do algoritmo para análise dinâmica geometricamente não-linear. | 64 |
| 5.1 | Exemplo de representação em UML. | 66 |
| 5.2 | Organização do núcleo numérico do INSANE. | 68 |
| 5.3 | Diagrama de classe para Assembler | 70 |
| 5.4 | Diagrama de classe para Solution | 71 |
| 5.5 | Diagrama de classe para Step | 73 |
| 5.6 | Diagrama de classe para IterativeStrategy | 74 |
| 5.7 | Diagrama de classe para Model | 75 |
| 5.8 | Diagrama de classe para Node | 76 |
| 5.9 | Diagrama de classe para Element | 77 |
| 5.10 | Diagrama de classe para ProblemDriver | 78 |
| 5.11 | Diagrama de classe para Shape | 80 |

| | | |
|------|---|-----|
| 5.12 | Diagrama de classe para <code>Material</code> | 82 |
| 5.13 | Diagrama de classe para <code>MaterialPoint</code> | 83 |
| 5.14 | Diagrama de classe para <code>ConstitutiveModel</code> | 84 |
| 5.15 | Diagrama de classe para <code>Degeneration</code> | 84 |
| 5.16 | Diagrama de classe para <code>AnalysisModel</code> | 86 |
| 5.17 | Diagrama de classe para <code>ContinuousPointModel</code> | 86 |
| 5.18 | Diagrama de classe para <code>Persistence</code> | 88 |
| 5.19 | Diagrama de classe para <code>Loading</code> , <code>LoadCase</code> e <code>LoadCombination</code> . . . | 89 |
| 5.20 | Diagrama de classe para <code>ScalarFunction</code> | 89 |
| 5.21 | Diagrama de classe para <code>EigenvalueSolver</code> | 91 |
| 6.1 | Sistema massa-mola. | 93 |
| 6.2 | Carregamentos dinâmicos e condições iniciais não-nulas. | 94 |
| 6.3 | Resposta do sistema massa-mola à carga degrau. | 95 |
| 6.4 | Resposta do sistema massa-mola à carga de rampa. | 96 |
| 6.5 | Resposta do sistema massa-mola à carga harmônica. | 97 |
| 6.6 | Resposta do sistema massa-mola à carga harmônica. | 98 |
| 6.7 | Resposta do sistema massa-mola ao deslocamento inicial. | 99 |
| 6.8 | Sistema massa-mola-amortecedor. | 100 |
| 6.9 | Resposta do sistema massa-mola-amortecedor à carga degrau. | 102 |
| 6.10 | Respostas amortecida e não-amortecida à carga degrau ($N\beta_4$). | 102 |
| 6.11 | Resposta do sistema massa-mola-amortecedor à carga harmônica. . . | 105 |
| 6.12 | Respostas amortecida e não-amortecida à carga harmônica ($N\beta_4$). . . | 105 |
| 6.13 | Resposta do sistema massa-mola-amortecedor à carga harmônica. . . | 106 |
| 6.14 | Respostas amortecida e não-amortecida à carga harmônica ($N\beta_4$). . . | 106 |
| 6.15 | Resposta do sistema massa-mola-amortecedor ao deslocamento inicial. | 107 |
| 6.16 | Respostas amortecida e não-amortecida ao deslocamento inicial ($N\beta_4$). | 107 |
| 6.17 | Barra com massa consistente. | 108 |
| 6.18 | Resposta do 1GDL com massa consistente à carga degrau. | 111 |
| 6.19 | Resposta amortecida do 1GDL com massa consistente à carga degrau. | 111 |
| 6.20 | Comparação das respostas do sistema massa-mola e do sistema 1GDL com massa consistente à carga degrau ($N\beta_4$). | 112 |
| 6.21 | Comparação das respostas do sistema massa-mola-amortecedor e do sistema 1GDL amortecido com massa consistente à carga degrau ($N\beta_4$). | 112 |

| | | |
|------|---|-----|
| 6.22 | Chaminé submetida a carga degrau. | 113 |
| 6.23 | Resultados obtidos pelo método $N\beta_4$ | 115 |
| 6.24 | Resultados obtidos pelo método $N\beta_6$ | 116 |
| 6.25 | Resultados obtidos pelo método $W\theta$ | 117 |
| 6.26 | Treliça plana de duas barras. | 118 |
| 6.27 | Resultados obtidos pelo método CD. | 120 |
| 6.28 | Resultados obtidos pelo método $N\beta_4$ | 121 |
| 6.29 | Resultados obtidos pelo método $N\beta_6$ | 122 |
| 6.30 | Treliça plana de três barras. | 123 |
| 6.31 | Resultados obtidos pelo método SDM. | 125 |
| 6.32 | Resultados obtidos pelo método HHT. | 126 |
| 6.33 | Viga biapoiada submetida a carga degrau. | 127 |
| 6.34 | Resposta da viga biapoiada à carga degrau. | 128 |
| 6.35 | Viga biengastada submetida a carga degrau. | 129 |
| 6.36 | Malhas utilizadas na análise. | 130 |
| 6.37 | Resposta da viga biengastada à carga degrau - Malha 1. | 132 |
| 6.38 | Resposta da viga biengastada à carga degrau - Malha 2. | 132 |
| 6.39 | Placa fina quadrada. | 133 |
| 6.40 | Malhas utilizadas na análise. | 135 |
| 6.41 | Primeiro modo de vibração. | 136 |
| 6.42 | Segundo modo de vibração. | 136 |
| 6.43 | Terceiro modo de vibração. | 136 |
| 6.44 | Quarto modo de vibração. | 137 |
| 6.45 | Quinto modo de vibração. | 137 |
| 6.46 | Sexto modo de vibração. | 137 |
| 7.1 | Domo abatido. | 139 |
| 7.2 | Trajectoria de equilíbrio para o deslocamento vertical do nó 1. | 140 |
| 7.3 | Trajectoria de equilíbrio para o deslocamento vertical do nó 2. | 141 |
| 7.4 | Trajectoria de equilíbrio para o deslocamento horizontal do nó 2. | 141 |
| 7.5 | Pórtico de Williams. | 142 |
| 7.6 | Trajectoria de equilíbrio para o deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga. | 143 |
| 7.7 | Coluna engastada e livre. | 144 |

| | | |
|------|--|-----|
| 7.8 | Trajectoria de equilíbrio para o deslocamento horizontal do ponto de aplicação da carga. | 145 |
| 7.9 | Pórtico de Lee. | 146 |
| 7.10 | Trajectoria de equilíbrio para o deslocamento horizontal do ponto de aplicação da carga. | 147 |
| 7.11 | Trajectoria de equilíbrio para o deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga. | 147 |
| 8.1 | Pórtico de Williams submetido a carga degrau. | 149 |
| 8.2 | Resposta do Pórtico de Williams à carga degrau - LT. | 150 |
| 8.3 | Resposta do Pórtico de Williams à carga degrau - LA. | 150 |
| 8.4 | Comparativo das respostas - $N\beta_4$ -NRP. | 151 |
| 8.5 | Viga biengastada submetido a carga degrau. | 151 |
| 8.6 | Resposta da viga biengastada à carga degrau - LT. | 152 |
| 8.7 | Resposta da viga biengastada à carga degrau - LA. | 153 |
| 8.8 | Comparativo das respostas - $N\beta_4$ -NRP. | 153 |
| 8.9 | Comparativo das respostas com diferentes passos de tempo. | 154 |
| 8.10 | Comparativo das respostas linear e não-linear. | 155 |
| A.1 | Logomarcas do INSANE. | 159 |
| F.1 | Espectro de autovalores. | 216 |

Lista de Abreviaturas e Siglas

| | |
|-------------|--|
| CILAMCE | <i>Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering</i> |
| CNPq | Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico |
| DC | Método da Diferença Central |
| DEES | Departamento de Engenharia de Estruturas |
| FAPEMIG | Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais |
| HTML | <i>Hypertext Markup Language</i> |
| HHT | Método <i>Hilber-Hughes-Taylor</i> |
| INSANE | <i>Interactive Structural Analysis Environment</i> |
| LA | Formulação Lagrangeana Atualizada |
| LT | Formulação Lagrangeana Total |
| MEF | Método dos Elementos Finitos |
| NRM | Método de Newton-Raphson Modificado |
| NRP | Método de Newton-Raphson Padrão |
| N/β_4 | Método da Aceleração Média |
| N/β_6 | Método da Aceleração Linear |
| PIBIC | Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica |
| POO | Programação Orientada a Objetos |
| SAM | Método de Superposição de Acelerações Modais |

| | |
|-----------|--|
| SDM | Método de Superposição de Deslocamentos Modais |
| <i>uc</i> | Unidade de Comprimento Genérica |
| <i>uf</i> | Unidade de Força Genérica |
| UFMG | Universidade Federal de Minas Gerais |
| <i>um</i> | Unidade de Massa Genérica |
| UML | <i>Unified Modeling Language</i> |
| <i>ut</i> | Unidade de Tempo Genérica |
| XML | <i>Extensible Markup Language</i> |
| $W\theta$ | Método <i>Wilson-θ</i> |

Resumo

Esta dissertação de mestrado refere-se à implementação computacional, segundo o paradigma orientado a objetos, da solução de problemas estruturais dinâmicos geometricamente não-lineares através do Método dos Elementos Finitos. São discutidas algumas formas de se considerar o amortecimento na análise dinâmica. Diversos métodos de solução dinâmica são apresentados, tanto baseados em superposição modal, quanto em integração direta. As formulações Lagrangeanas Total e Atualizada para a análise não-linear são discutidas. Os métodos de solução das equações não-lineares também são apresentados. A referida implementação é feita no núcleo numérico do sistema computacional INSANE, desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas da UFMG. O projeto orientado a objetos deste sistema é apresentado, assim como as alterações necessárias para acrescentar o tipo de solução proposto. Várias simulações numéricas são apresentadas de maneira a validar a implementação, comparando os resultados obtidos pela implementação realizada com resultados analíticos e numéricos encontrados na literatura.

Palavras-Chave: *Método dos Elementos Finitos, Análise Dinâmica Geometricamente Não-Linear, Programação Orientada a Objetos*

Abstract

This master's thesis refers to the computational implementation, according to the object-oriented programming, of dynamic geometrically non-linear solution of Finite Element Method models. Some ways of considering damping in dynamic analysis are discussed. Many methods of dynamic solution are presented, not only those based on modal superposition, but also those based on direct integration. The Total Lagrangean and Updated Lagrangean formulations for non-linear analysis are discussed. Methods for solution of non-linear equations are also presented. The implementation is done in the numerical nucleus of INSANE computational system, which is developed in the Structural Department of UFMG. The object-oriented project of this system is presented, as well as the necessary modifications to add the proposed solution. Many numerical simulations are presented to validate the implementation, comparing the results obtained by the implementation with analytical and numerical results found in literature.

Keywords: *Finite Element Method, Dynamic Non-Linear Analysis, Object-Oriented Programming*

Agradecimentos

A *Deus*, que me proporcionou tudo que sou e que tenho.

A *meus pais*, por sempre me incentivarem e fazerem de mim a pessoa que sou.

A *meus irmãos*, pelo apoio e por me darem sossego quando precisei.

À *Raquel*, pelo empurrão na reta final.

A meu orientador, *Roque Pitangueira*, pelos ensinamentos, amizade e paciência.

A *meus amigos*, por sempre me incentivarem e cobrarem um trabalho bem feito.

A *meus colegas de mestrado*, especialmente *Rafaela* e *Janaína*, pelos bons momentos que passamos juntos.

A *meus colegas do projeto INSANE*, por ajudarem a tornar o estudo tão divertido.

Ao *Gaspar*, meu cachorro, pela companhia fiel nas horas de estudos.

Aos *professores e funcionários* do Departamento de Engenharia de Estruturas da UFMG pela disponibilidade e atenção em todos os momentos.

A todos aqueles que contribuíram para a realização deste trabalho.

Ao *CNPq* e à *FAPEMIG* pelo apoio financeiro.

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

As possibilidades oferecidas pelos recursos tecnológicos para desenvolvimento de software constituem amplo campo de pesquisa na área de métodos numéricos e computacionais aplicados à engenharia.

O domínio destes recursos e a aplicação dos mesmos no aprimoramento progressivo dos modelos requer um ambiente computacional segmentado, amigável a mudanças e cuja complexidade possa ser aumentada de forma gradual, como proposto pelo programa INSANE (*Interactive Structural Analysis Environment*), desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais e disponível em <http://www.insane.dees.ufmg.br>.

Apoiando-se na implementação de modelos estruturais de elementos finitos existente no programa, é possível ampliar complexidades a partir dos conceitos já consolidados, sem ter que recomeçar o processo a cada novo aperfeiçoamento.

O ambiente computacional do INSANE é constituído de três grandes aplicações: pré-processador, processador e pós-processador, todas implementadas em linguagem Java. O pré e o pós-processador são aplicações gráficas interativas que disponibilizam respectivamente, ferramentas de pré e pós-processamento de diferentes modelos discretos. O processador é a aplicação que representa o núcleo numérico do sistema e é a responsável pela obtenção dos resultados de diferentes modelos discretos de análise estrutural.

O núcleo numérico do INSANE vem sendo desenvolvido há alguns anos por

diversos colaboradores, como Fonseca et al. (2004), Fuina (2004), Pitangueira e Caldas (2005), Almeida (2005), Germanio (2005), Fonseca (2006), Saliba (2007). Um histórico do projeto é apresentado no apêndice A.

1.1 Objetivos

Com o objetivo de acrescentar novas funcionalidades ao sistema, propôs-se estudar e implementar formulações do Método dos Elementos Finitos (MEF) para análise dinâmica geometricamente não-linear de estruturas.

Não é um objetivo deste trabalho implementar formulações recentes que representem o estado da arte do Método dos Elementos Finitos. O objetivo primordial é complementar o INSANE com formulações clássicas da análise dinâmica geometricamente não-linear, de forma a criar um arcabouço computacional para pesquisas futuras.

Também não é um objetivo fazer uma análise crítica dos resultados encontrados nos exemplos de validação. Tais resultados são utilizados apenas para comparação com respostas analíticas ou encontradas na literatura.

Um objetivo secundário foi recuperar o trabalho feito por Germanio (2005) que, disponível na primeira versão do núcleo numérico, não foi introduzido no sistema quando de sua refatoração por Fonseca (2006).

1.2 Organização do Texto

Este trabalho está organizado em 9 capítulos.

No capítulo 2 são apresentados métodos de solução de problemas dinâmicos através do MEF. São discutido tanto métodos baseados em superposição modal quanto métodos baseados em integração direta.

Em seguida, são apresentadas no capítulo 3 vários tipos de medidas de tensões e deformações. Uma vez definidas estas medidas, apresentam-se as formulações

Lagrangeana Total e Atualizada, utilizadas na análise geometricamente não-linear através MEF. As equações de movimentos obtidas a partir destas formulações também são apresentadas.

Os métodos de solução destas equações de movimento são discutidos no capítulo 4, com ênfase nos métodos de Newton-Raphson Padrão e Modificado.

O projeto orientado a objetos do núcleo numérico do INSANE é apresentado no capítulo 5 segundo as abstrações necessárias para as formulações propostas. São discutidos os detalhes da implementação, destacando-se a organização de classes e as principais atividades do núcleo numérico.

Os capítulos 6, 7 e 8 apresentam exemplos de validação para os métodos e formulações apresentados anteriormente para análises dinâmica linear, estática geometricamente não-linear e dinâmica geometricamente não-linear, respectivamente.

Conclusões, bem como sugestões para futuros trabalhos de pesquisa, são apresentadas no capítulo 9.

Capítulo 2

MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA ANÁLISE DE VIBRAÇÕES

O objetivo da análise de vibrações é determinar a resposta de uma estrutura a excitações dependentes do tempo, tais como cargas dinâmicas e mudanças nas condições de contorno, dentre outras. Neste capítulo são apresentadas algumas formas de se fazer esta análise.

2.1 Discretização das Equações de Movimento

Utilizando-se o princípio dos trabalhos virtuais, pode-se determinar as equações de movimento para elementos finitos. Na demonstração que se segue, considera-se, sem perda de generalidade, somente os deslocamentos translacionais em um elemento finito tridimensional, sem amortecimento (Figura 2.1).

Define-se $\mathbf{u}(t)$ como o vetor de deslocamentos genéricos dependente do tempo em qualquer ponto do elemento, em que u , v , e w são as translações nas direções x , y e z , respectivamente, ou seja:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}^T \quad (2.1)$$

Se o elemento está sujeito a forças de corpo, também variáveis ao longo do tempo,

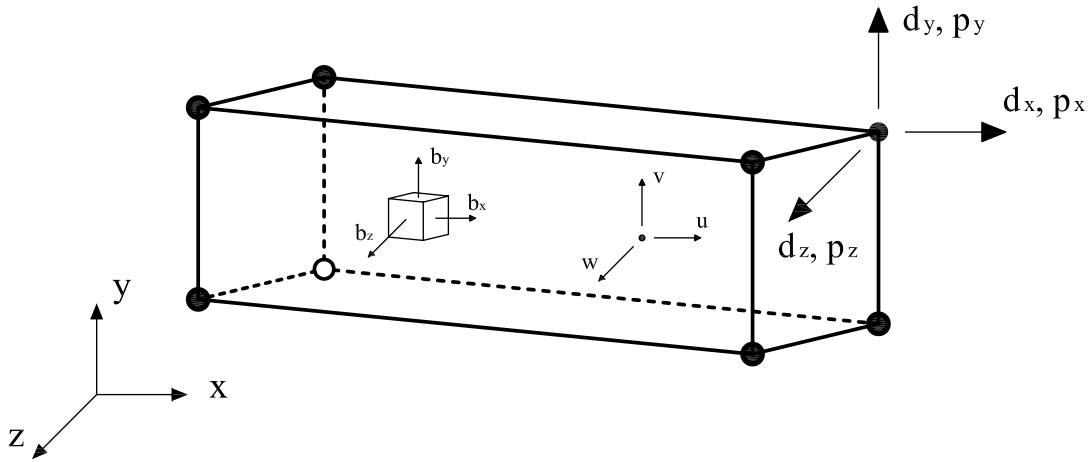


Figura 2.1: Elemento finito tridimensional.

define-se o vetor $\mathbf{b}(t)$ dessas forças como:

$$\mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} b_x & b_y & b_z \end{bmatrix}^T \quad (2.2)$$

O vetor de deslocamentos nodais variáveis ao longo do tempo $\mathbf{d}(t)$, considerando apenas as translações, é definido como:

$$\mathbf{d}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_i(t) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

em que i varia de 1 ao número de nós do elemento e

$$\mathbf{d}_i(t) = \begin{bmatrix} d_{xi} & d_{yi} & d_{zi} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} u_i & v_i & w_i \end{bmatrix}^T \quad (2.4)$$

Do mesmo modo, as ações nodais variáveis com o tempo $\mathbf{p}(t)$ também são consideradas apenas nas direções x , y e z nos nós:

$$\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_i(t) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

em que

$$\mathbf{p}_i(t) = \begin{bmatrix} p_{xi} & p_{yi} & p_{zi} \end{bmatrix}^T \quad (2.6)$$

Sendo \mathbf{N} a matriz das funções de forma¹, tem-se a relação entre os deslocamentos nodais e os deslocamentos genéricos:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{N} \mathbf{d}(t) \quad (2.7)$$

¹As funções de forma são apresentadas no apêndice C.

As relações deformações-deslocamentos são obtidas pela derivação dos deslocamentos genéricos $\mathbf{u}(t)$. Definindo \mathbf{L} como um operador de derivação, pode-se estabelecer a seguinte relação:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \mathbf{L} \mathbf{u}(t) \quad (2.8)$$

Substituindo (2.7) em (2.8) tem-se:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \mathbf{B} \mathbf{d}(t) \quad (2.9)$$

em que

$$\mathbf{B} = \mathbf{L} \mathbf{N} \quad (2.10)$$

Considerando o material linear elástico, tem-se a seguinte relação tensão-deformação:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}(t) \quad (2.11)$$

em que \mathbf{E} é a matriz das propriedades elásticas do material.

Substituindo (2.8) em (2.11), tem-se:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbf{E} \mathbf{B} \mathbf{d}(t) \quad (2.12)$$

O princípio do trabalho virtual diz que: *Se uma estrutura em equilíbrio dinâmico sofre pequenos deslocamentos virtuais com um estado de deformações compatível, o trabalho virtual das forças externas é igual à energia de deformação virtual das tensões internas* (Weaver Jr. e Johnston, 1987).

Aplicando esse princípio a um elemento finito, tem-se:

$$\delta U_e = \delta W_e \quad (2.13)$$

em que δU_e é a energia de deformação virtual das tensões internas e δW_e é o trabalho virtual das forças externas sobre o elemento.

Sendo i um inteiro variando de 1 ao número de nós, define-se o vetor de pequenos deslocamentos virtuais $\delta \mathbf{d}$:

$$\delta \mathbf{d} = \left[\delta \mathbf{d}_i \right]^T \quad (2.14)$$

De (2.7), conclui-se que o vetor de deslocamentos genéricos virtuais é:

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{N} \delta \mathbf{d} \quad (2.15)$$

Através da relação deformações-deslocamentos, obtém-se:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \delta \mathbf{d} \quad (2.16)$$

Portanto, a energia de deformação virtual das tensões internas, δU_e , pode ser escrita como:

$$\delta U_e = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}(t) dV \quad (2.17)$$

Para a determinação do trabalho virtual externo, considera-se um elemento infinitesimal no qual são aplicadas as forças de corpo $b_x(t) dV$, $b_y(t) dV$ e $b_z(t) dV$ (Figura 2.2).

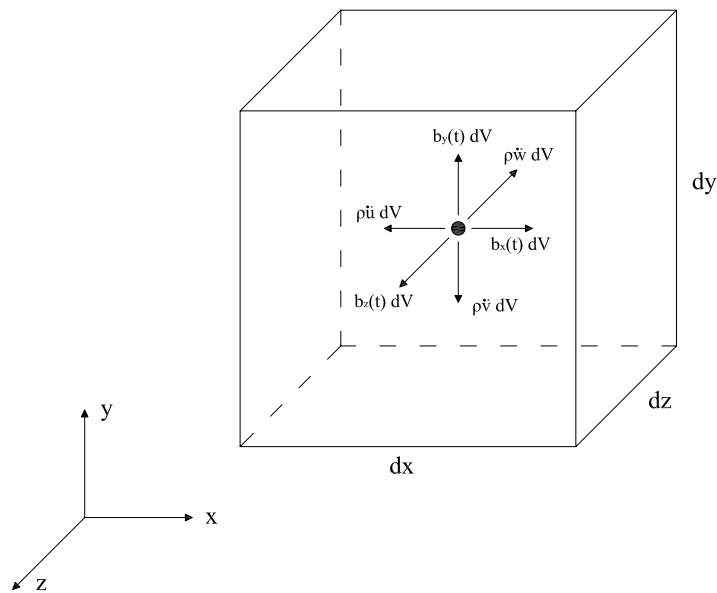


Figura 2.2: Forças de corpo aplicadas e inerciais.

É importante ressaltar o aparecimento das *forças de corpo inerciais* $\rho \ddot{u} dV$, $\rho \ddot{v} dV$ e $\rho \ddot{w} dV$, sendo ρ a densidade do material. Estas forças surgem em razão das acelerações \ddot{u} , \ddot{v} e \ddot{w} , respectivamente. Enfatiza-se o fato de que as forças inerciais atuam em direções opostas às acelerações. Então, pode-se calcular o trabalho virtual

externo δW_e como a soma dos trabalhos virtuais das forças de corpo e das forças nodais, isto é:

$$\delta W_e = \delta \mathbf{d}^T \mathbf{p}(t) + \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b}(t) dV - \int_V \delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} dV \quad (2.18)$$

Substituindo (2.17) e (2.18) em (2.13) tem-se:

$$\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}(t) dV = \delta \mathbf{d}^T \mathbf{p}(t) + \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b}(t) dV - \int_V \delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} dV \quad (2.19)$$

Assumindo que

$$\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{N} \ddot{\mathbf{d}} \quad (2.20)$$

e substituindo (2.12) e (2.20) em (2.19) e usando as transpostas de (2.15) e (2.16) obtém-se:

$$\delta \mathbf{d}^T \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV \mathbf{d} = \delta \mathbf{d}^T \mathbf{p}(t) + \delta \mathbf{d}^T \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{b}(t) dV - \delta \mathbf{d}^T \int_V \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \ddot{\mathbf{d}} \quad (2.21)$$

$$\delta \mathbf{d}^T \left(\int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV \mathbf{d} - \mathbf{p}(t) - \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{b}(t) dV + \int_V \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \ddot{\mathbf{d}} \right) = 0 \quad (2.22)$$

Como $\delta \mathbf{d}^T$ contém deslocamentos nodais virtuais, portanto arbitrários, (2.22) é genericamente satisfeita se

$$\int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV \mathbf{d} - \mathbf{p}(t) - \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{b}(t) dV + \int_V \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \ddot{\mathbf{d}} = \mathbf{0} \quad (2.23)$$

Reordenando os termos de (2.23), obtém-se o sistema de equações de movimento:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{p}(t) + \mathbf{p}_b(t) \quad (2.24)$$

sendo

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV \quad (2.25)$$

$$\mathbf{M} = \int_V \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \quad (2.26)$$

$$\mathbf{p}_b(t) = \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{b}(t) dV \quad (2.27)$$

A matriz \mathbf{K} é denominada *matriz de rigidez* do elemento finito. À matriz \mathbf{M} calculada segundo a expressão (2.26) dá-se o nome de *matriz de massa consistente*, pois as funções de aproximação utilizadas em seu cálculo são as mesmas usadas no cálculo da matriz de rigidez. E o vetor $\mathbf{p}_b(t)$ é o chamado *vetor de forças nodais equivalentes às cargas de corpo*.

Uma forma simplificada da matriz \mathbf{M} é a *matriz de massa discreta*, em que a massa é idealizada concentrada nos nós. A massa discreta em um nó é a porção da massa total que pode ser atribuída a ele. Esta matriz é sempre uma matriz diagonal.

2.2 Considerações Sobre o Amortecimento

O amortecimento é o fenômeno de dissipação da energia mecânica de um sistema em vibração através de vários mecanismos. Normalmente, mais de um mecanismo atuam ao mesmo tempo. Alguns desses mecanismos são o atrito em conexões de estruturas metálicas, a abertura e fechamento de microfissuras no concreto, o atrito entre a estrutura e elementos não-estruturais como paredes de vedação, dentre outros.

É praticamente impossível identificar e descrever matematicamente cada um desses fenômenos de dissipação. Conseqüentemente, o amortecimento de um sistema estrutural é, normalmente, representado de uma maneira extremamente idealizada e aproximada. Essa dificuldade em se modelar o amortecimento é compensada pelo fato de que a maioria dos sistemas estruturais possui baixo nível de amortecimento, podendo esse ser negligenciado em problemas práticos.

De uma maneira geral, pode-se dizer que as forças dissipativas \mathbf{f}_d atuantes em um sistema são calculadas da seguinte forma:

$$\mathbf{f}_d = \mathbf{C} \dot{\mathbf{d}} \quad (2.28)$$

em que \mathbf{C} é a *matriz de amortecimento* do sistema. Essa idealização do amortecimento é chamada de *amortecimento viscoso linear*, pois as forças dissipativas

mantêm uma relação linear com a velocidade.

Como o próprio nome diz, essa idealização não é adequada a sistemas não-lineares, pois ela modela de forma satisfatória a dissipação de energia apenas dentro do limite elástico de uma estrutura. A não-linearidade do amortecimento não é usualmente considerada na análise dinâmica, podendo ser incluída pela adoção de uma matriz de amortecimento apropriada para a amplitude esperada de deformações.

Adicionando (2.28) à equação de equilíbrio do elemento (2.24), tem-se:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{p}(t) + \mathbf{p}_b^*(t) \quad (2.29)$$

sendo $\mathbf{p}_b^*(t)$ o vetor de forças nodais equivalentes às cargas de corpo externas (desconsiderando as forças de amortecimento).

A seguir são apresentadas algumas maneiras de se calcular a matriz \mathbf{C} .

2.2.1 Amortecimento Modal

Define-se a *razão de amortecimento* do i -ésimo modo de vibração ζ_i como a razão entre o amortecimento existente e o *amortecimento crítico* para tal modo. Entende-se por amortecimento crítico o menor valor do amortecimento que inibe completamente a oscilação do sistema.

O sistema é dito criticamente amortecido quando $\zeta = 1$, superamortecido para $\zeta > 1$ e subamortecido para $\zeta < 1$. A figura 2.3 apresenta a resposta de um sistema de um grau de liberdade e condições iniciais não nulas ($\dot{\mathbf{d}}$ e $\mathbf{d} \neq 0$) para essas três condições.

Observa-se que apenas o sistema subamortecido apresenta movimento oscilatório. Para as outras duas situações, o sistema retorna à posição de equilíbrio sem oscilar, sendo que o sistema superamortecido o faz mais lentamente.

Os valores de ζ_i não podem ser calculados a partir das propriedades geométricas e físicas do sistema, devendo ser obtidos experimentalmente. A partir de dados de

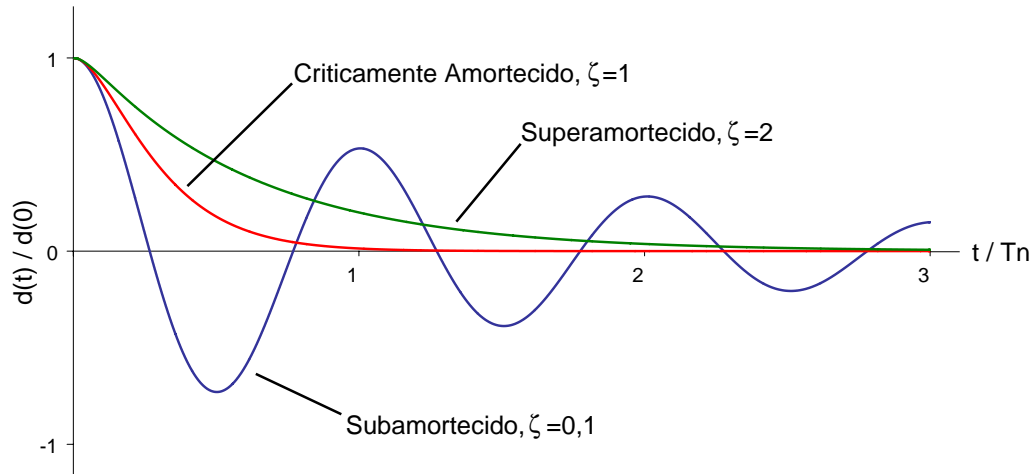


Figura 2.3: Vibração livre de sistemas superamortecido, criticamente amortecido e subamortecido.

ensaios de vibração livre, pode-se calcular ζ_i como:

$$\zeta_i = \frac{1}{2\pi k} \ln \left(\frac{d_j}{d_{j+k}} \right) \quad (2.30)$$

em que d_j e d_{j+k} são os deslocamentos máximos de um grau de liberdade qualquer no j -ésimo e k -ésimo períodos de vibração, respectivamente. Na equação (2.30) os deslocamentos podem ser substituídos pelas respectivas acelerações, que são grandezas mais fáceis de serem medidas experimentalmente.

O amortecimento modal pode ser diretamente utilizado na análise modal sem o cálculo da matriz \mathbf{C} , pois esta é posteriormente transformada para coordenadas principais, conforme será visto na seção 2.3. Nestes casos, a matriz de amortecimento principal, é obtida da seguinte forma:

$$\mathbf{C}_p = [c_{ij}] \quad c_{ij} = 2 \zeta_i \omega_i \delta_{ij} \quad (2.31)$$

sendo δ_{ij} o delta de Kronecker e ω_i é a frequência natural do i -ésimo modo de vibração.

Caso se deseje utilizar estes valores em métodos de integração direta, recomenda-se o uso do *amortecimento de Rayleigh*, cujas constantes podem ser determinadas a partir das razões de amortecimento modais (Seção 2.2.3). Desta maneira, evita-se solucionar um problema de autovalor apenas para o cálculo de \mathbf{C} .

2.2.2 Amortecimento Devido ao Material

Assumindo que seja possível determinar uma constante a para representar o amortecimento viscoso intrínseco ao material, pode-se mostrar que:

$$\mathbf{C} = \int_V a \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \quad (2.32)$$

Observa-se que esta equação é bem similar à equação para a matriz de massa consistente (2.26). Isto faz com que a matriz de amortecimento não seja uma matriz diagonal, porém garante que ela seja positiva definida. Esta última característica é importante para a análise modal, conforme será visto na seção 2.3.

2.2.3 Amortecimento de Rayleigh

Rayleigh (1945) propõe uma matriz de amortecimento proporcional a uma combinação linear entre as matrizes de rigidez e de massa:

$$\mathbf{C} = a_{r_1} \mathbf{M} + a_{r_2} \mathbf{K} \quad (2.33)$$

em que a_{r_1} e a_{r_2} são constantes. Esta matriz de amortecimento também é positiva definida, pois é baseada nas matrizes de massa e de rigidez, que também o são.

A razão de amortecimento do i -ésimo modo de vibração é dada por:

$$\zeta_i = \frac{a_{r_1} + a_{r_2} \omega_i^2}{2\omega_i} \quad (2.34)$$

em que ω_i é a frequência natural do i -ésimo modo de vibração.

As constantes a_{r_1} e a_{r_2} podem ser determinadas a partir das razões de amortecimento ζ_i e ζ_j conhecidas para o i -ésimo e j -ésimo modos de vibração, respectivamente, através do seguinte sistema de equações lineares:

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1/\omega_i & \omega_j \\ 1/\omega_j & \omega_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{r_1} \\ a_{r_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \zeta_i \\ \zeta_j \end{Bmatrix} \quad (2.35)$$

Segundo dados experimentais, é razoável supor que os dois modos têm a mesma razão de amortecimento ζ (Chopra, 1995). Portanto, tem-se que:

$$a_{r_1} = \zeta \left(\frac{2 \omega_i \omega_j}{\omega_i + \omega_j} \right) \quad a_{r_2} = \zeta \left(\frac{2}{\omega_i + \omega_j} \right) \quad (2.36)$$

2.3 Métodos de Análise Modal

Quando as forças externas atuantes sobre uma estrutura são nulas, diz-se que ela está em vibração livre. Considerando que as forças dissipativas também são nulas, o sistema de equações de movimento é:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (2.37)$$

Assume-se a seguinte solução para este sistema:

$$\mathbf{d} = \cos \omega t \mathbf{Y} \quad (2.38)$$

em que ω é um escalar e \mathbf{Y} é um vetor ainda a serem determinados. Ressalta-se que a solução proposta é harmônica de frequência ω .

Levando (2.38) em (2.37), obtém-se o problema de autovalor generalizado do sistema:

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{Y} = \mathbf{0} \quad (2.39)$$

Sendo:

$$\lambda = \omega^2 \quad (2.40)$$

tem-se:

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}) \mathbf{Y} = \mathbf{0} \quad (2.41)$$

Para que (2.41) possua solução não-trivial, deve-se ter:

$$|\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}| = 0 \quad (2.42)$$

A equação (2.42) é denominada *equação característica do problema* e a determinação de suas raízes constitui um *problema de autovalor*. Alguns métodos de solução para este tipo de problema são apresentados no apêndice F.

Denomina-se \mathbf{Y}_i o i -ésimo vetor que satisfaz (2.41) para um dado ω^2 . Esse vetor, conhecido como *autovetor* ou *modo natural de vibração*, não é único, pois ele admite uma única direção, mas a sua magnitude pode variar livremente. Trabalha-se, então,

com autovetores normalizados. Uma normalização bastante utilizada é feita com relação à matriz de massa, como segue:

$$\boldsymbol{\varphi}_i = c_i \mathbf{Y}_i \quad (2.43)$$

em que:

$$c_i = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{Y}_i^T \mathbf{M} \mathbf{Y}_i}} \quad (2.44)$$

e $\boldsymbol{\varphi}_i$ é o autovetor normalizado.

Fisicamente, os autovetores \mathbf{Y}_i ou $\boldsymbol{\varphi}_i$ são os modos de vibração livre do sistema mecânico. Para a normalização adotada, tem-se que:

$$\boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_i = 1 \quad (2.45)$$

A matriz modal normalizada $\boldsymbol{\Phi}$ é aquela na qual os autovetores normalizados são arranjados em colunas na ordem crescente dos respectivos autovalores:

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_1 & \boldsymbol{\varphi}_2 & \cdots & \boldsymbol{\varphi}_n \end{bmatrix} \quad \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \quad (2.46)$$

Uma das propriedades fundamentais dos autovetores é a sua ortogonalidade em relação às matrizes de massa e de rigidez:

$$\boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_j = \boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_j = 0 \quad i \neq j \quad (2.47)$$

A equação (2.42) é um polinômio de grau n denominado polinômio característico e os autovalores (2.40) são as raízes desse polinômio. A equação (2.42) pode apresentar raízes múltiplas, de modo que um sistema com n graus de liberdade possua m autovalores diferentes, sendo $m \leq n$. Isso significa dizer que um sistema mecânico discreto tem m frequências naturais. Porém, é sempre possível obter um conjunto de n autovetores que satisfaçam as equações (2.45) e (2.47).

Combinando as equações (2.47) e (2.45) obtém-se o seguinte resultado:

$$\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{I} \quad (2.48)$$

em que \mathbf{I} é a matriz identidade.

O resultado obtido em (2.48) deriva diretamente da escolha feita para a normalização dos autovetores. No caso geral, o resultado da operação feita em (2.48) sobre a matriz \mathbf{M} será uma matriz diagonal denominada *matriz de massa modal ou principal*, \mathbf{M}_p .

Analogamente, a *matriz de rigidez principal* \mathbf{K}_p e a *matriz de amortecimento principal* \mathbf{C}_p são definidas por:

$$\mathbf{K}_p = \Phi^T \mathbf{K} \Phi \quad (2.49)$$

$$\mathbf{C}_p = \Phi^T \mathbf{C} \Phi \quad (2.50)$$

sendo que \mathbf{K}_p e \mathbf{C}_p também são matrizes diagonais.

Para o caso do amortecimento modal, \mathbf{C}_p pode ser obtida diretamente da equação (2.31). Para o amortecimento de Rayleigh, a proporcionalidade adotada em (2.33) é mantida nas coordenadas principais. Logo:

$$\mathbf{C}_p = a_{r1} \mathbf{M}_p + a_{r2} \mathbf{K}_p \quad (2.51)$$

Para a normalização em relação à matriz de massa:

$$\mathbf{C}_p = a_{r1} \mathbf{I} + a_{r2} \mathbf{K}_p \quad (2.52)$$

Tomando a equação (2.41) com $\mathbf{Y} = \varphi_i$:

$$(\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M}) \varphi_i = \mathbf{0} \quad (2.53)$$

a pré-multiplicação por φ_i^T resulta em:

$$\varphi_i^T \mathbf{K} \varphi_i = \omega_i^2 \quad (2.54)$$

Levando (2.54) em (2.49) conclui-se que os elementos $k_{p_{ii}}$, da diagonal principal de \mathbf{K}_p , para a normalização em relação à matriz de massa adotada, são dados por:

$$k_{p_{ii}} = \lambda_i = \omega_i^2 \quad (2.55)$$

em que ω_i são as frequências naturais do sistema.

Seja a variável auxiliar η_i definida por:

$$\eta_i = \varepsilon_i \cos \omega_i t \quad (2.56)$$

em que ε_i é um escalar arbitrário. Substituindo (2.38), (2.43), (2.54) e (2.56) em (2.37), tem-se:

$$\mathbf{M} \varphi_i \ddot{\eta}_i + \mathbf{K} \varphi_i \eta_i = \mathbf{0} \quad (2.57)$$

Pré-multiplicando (2.57) por φ_i^T , obtém-se:

$$\ddot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i = 0 \quad (2.58)$$

A equação (2.58) mostra que, no modo φ_i , é possível escrever a equação de movimento discretizada segundo o Método dos Elementos Finitos como uma única equação diferencial de segunda ordem na variável η_i .

Sabe-se que um sistema mecânico livre de forças externas que realizem trabalho sobre si oscila em torno do seu ponto de equilíbrio de maneira que a energia mecânica do sistema permute entre as formas cinética e potencial. Pode-se concluir a partir da equação (2.58) que essa permutação só é possível em modos específicos φ_i e com frequências específicas ω_i associadas a eles.

Fica implícito, também, que todo o trabalho de uma força externa realizado segundo um dos modos naturais da estrutura será totalmente convertido em energia mecânica interna do sistema, pois o sistema absorve toda a energia mecânica aplicada sobre ele quando se movimenta conforme seus modos naturais. Isso é o fenômeno da *ressonância*. Uma força que realize trabalho fora dos modos ou frequências naturais da estrutura resultará no agente dessa força tendo que absorver a energia não absorvida pelo sistema ao oscilar fora de seu modo natural.

Considerando agora que existem forças externas atuando sobre o sistema e ainda desconsiderando as forças dissipativas, tem-se:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{F} \quad (2.59)$$

em que \mathbf{F} é a soma dos vetores de forças nodais e forças equivalentes às cargas de corpo.

Considerando que \mathbf{d} possa ser escrito como:

$$\mathbf{d} = \boldsymbol{\varphi}_i \eta_i \quad (2.60)$$

substituindo (2.60) em (2.59) e pré-multiplicando o resultado por $\boldsymbol{\varphi}_i^T$, tem-se:

$$\ddot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta = f_{p_i} \quad (2.61)$$

sendo f_{p_i} a *força principal* do i-ésimo modo dada por:

$$f_{p_i} = \boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{F} \quad (2.62)$$

A equação (2.61) é uma equação diferencial linear de segunda ordem não-homogênea na variável η_i . A solução desta equação pode ser obtida pela *integral de Duhamel* (Craig Jr., 1987):

$$\eta_i = \frac{1}{\omega_i} \int_0^t f_{p_i} \text{sen} [\omega_i (t - \tau)] d\tau \quad (2.63)$$

em que τ é uma variável de integração muda.

Por fim, considera-se o caso mais geral, em que há forças externas atuantes e forças dissipativas internas à estrutura. Admitindo amortecimento viscoso linear (conforme seção 2.2), tem-se:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{F} \quad (2.64)$$

Analogamente ao caso anterior, tem-se:

$$\ddot{\eta}_i + 2 \zeta_i \omega_i \dot{\eta} + \omega_i^2 \eta = f_{p_i} \quad (2.65)$$

Esta também é uma equação diferencial linear de segunda ordem não-homogênea na variável η_i , cuja solução pode ser obtida pela seguinte forma da *integral de Duhamel* (Craig Jr., 1987):

$$\eta_i = \frac{1}{\omega_{di}} \int_0^t f_{p_i} e^{-\zeta_i \omega_i (t-\tau)} \text{sen} [\omega_{di} (t - \tau)] d\tau \quad (2.66)$$

sendo que ω_{di} é a *freqüência natural de vibração amortecida* do i -ésimo modo que é calculada por:

$$\omega_{di} = \omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2} \quad (2.67)$$

A seguir são apresentados dois métodos para solução da equação (2.65), o *método de superposição de deslocamentos modais* e o *método de superposição de acelerações modais*.

2.3.1 Método de Superposição de Deslocamentos Modais

O sistema representado pela equação (2.65) é linear, portanto sua solução pode ser escrita como a combinação linear de todas as soluções modais do problema:

$$\mathbf{d} = \sum_{i=1}^n \varphi_i \eta_i \quad (2.68)$$

ou em forma matricial:

$$\mathbf{d} = \Phi \boldsymbol{\eta} \quad (2.69)$$

Por se basear em uma combinação linear de soluções, este método não é adequado para a análise de sistemas não-lineares.

Substituindo (2.69) em (2.64) e pré-multiplicando o resultado por Φ^T , tem-se:

$$\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{C}_p \dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{K}_p \boldsymbol{\eta} = \mathbf{F}_p \quad (2.70)$$

Sendo \mathbf{Z} e $\mathbf{\Lambda}$, matrizes diagonais contendo os valores das razões de amortecimento e dos autovalores de (2.42), respectivamente, tem-se:

$$\mathbf{K}_p = \mathbf{\Lambda} \quad (2.71)$$

$$\mathbf{C}_p = 2 \mathbf{Z} \mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}} \quad (2.72)$$

Substituindo (2.71) e (2.72) em (2.70):

$$\ddot{\boldsymbol{\eta}} + 2 \mathbf{Z} \mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}} \dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{\Lambda} \boldsymbol{\eta} = \mathbf{F}_p \quad (2.73)$$

Como \mathbf{Z} e $\mathbf{\Lambda}$ são matrizes diagonais, o sistema (2.73) representa n equações desacopladas. Portanto, utilizar este método (assim como qualquer método baseado na análise modal), equivale a se resolver n sistemas de um grau de liberdade.

A velocidade modal $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ pode ser obtida resolvendo-se a equação (2.66) e, em seguida, derivando-a uma vez em relação ao tempo:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \frac{\zeta \omega \mathbf{F}_p}{\zeta^2 \omega^2 + \omega_d^2} \quad (2.74)$$

e a aceleração modal $\ddot{\boldsymbol{\eta}}$ pode ser isolada na equação (2.73), obtendo:

$$\ddot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{F}_p - \mathbf{\Lambda} \boldsymbol{\eta} - 2 \mathbf{Z} \mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}} \dot{\boldsymbol{\eta}} \quad (2.75)$$

Sabe-se que, para um movimento arbitrário, os primeiros modos de vibração natural (associados às frequências mais baixas) são predominantes, armazenando a maior parte da energia do sistema. Uma técnica que permite aumentar significativamente o desempenho deste método é a *truncamento modal*. Esta técnica consiste em levar em consideração na expansão dada por (2.68) apenas os modos relevantes, ou seja:

$$\mathbf{d} \approx \widehat{\boldsymbol{\Phi}} \widehat{\boldsymbol{\eta}} \quad (2.76)$$

em que

$$\widehat{\boldsymbol{\Phi}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_1 & \boldsymbol{\Phi}_2 & \cdots & \boldsymbol{\Phi}_N \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

e

$$\widehat{\boldsymbol{\eta}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_1 & \boldsymbol{\eta}_2 & \cdots & \boldsymbol{\eta}_N \end{bmatrix}^T \quad (2.78)$$

sendo N menor que o número total de modos de vibração.

Não se deve necessariamente utilizar os N primeiros modos. Pode-se incluir, de maneira conveniente, os modos que melhor descrevem um movimento particular do sistema. Utilizando a solução modal truncada, escreve-se a equação (2.73) da seguinte forma:

$$\widehat{\ddot{\boldsymbol{\eta}}} + 2 \widehat{\mathbf{Z}} \widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{\frac{1}{2}} \widehat{\dot{\boldsymbol{\eta}}} + \widehat{\boldsymbol{\Lambda}} \widehat{\boldsymbol{\eta}} = \widehat{\mathbf{F}}_p \quad (2.79)$$

em que:

$$\widehat{\Lambda} = \widehat{\Phi} \mathbf{K} \widehat{\Phi}^T \quad (2.80)$$

$$2 \widehat{\mathbf{Z}} \widehat{\Lambda}^{\frac{1}{2}} = \widehat{\Phi} \mathbf{C} \widehat{\Phi}^T \quad (2.81)$$

$$\widehat{\mathbf{F}}_p = \widehat{\Phi}^T \mathbf{F} \quad (2.82)$$

A equação (2.79) implica que é possível resolver de forma aproximada um sistema com n modos de vibração a partir de N modos (sendo $N < n$). O número de modos a serem considerados depende da precisão desejada e das particularidades de cada problema. Quando $N = n$, obtém-se a solução exata do problema discreto.

Craig Jr. (1987) observa que, no processo de discretização, o erro nos modos superiores é relativamente maior do que o erro nos primeiros modos. Hughes (2000) salienta que os últimos modos de um sistema discreto não têm relação com o sistema real, tratando-se de um efeito espúrio do processo de modelagem. Portanto, caso o sistema discreto seja resultado de uma discretização de um sistema contínuo, os modos superiores devem ser necessariamente desconsiderados.

2.3.2 Método de Superposição de Acelerações Modais

O método de superposição de acelerações modais é uma derivação do método de superposição de deslocamentos modais que, além de requerer um menor número de modos de vibração para obter uma boa convergência, é exato para carregamentos estáticos, independentemente do número de modos considerados.

Isolando \mathbf{d} na equação (2.64), tem-se:

$$\mathbf{d} = \mathbf{K}^{-1} \left(\mathbf{F} - \mathbf{C} \dot{\mathbf{d}} - \mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}} \right) \quad (2.83)$$

Aplicando a propriedade distributiva e substituindo os vetores velocidade e aceleração por combinações lineares análogas à equação (2.68):

$$\mathbf{d} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F} - \mathbf{K}^{-1} \mathbf{C} \sum_{i=1}^N \varphi_i \dot{\eta}_i - \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \sum_{i=1}^N \varphi_i \ddot{\eta}_i \quad (2.84)$$

De (2.41), (2.50), (2.71) e (2.72), tem-se que:

$$\mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} = \mathbf{\Lambda}^{-1} \quad (2.85)$$

$$\mathbf{K}^{-1} \mathbf{C} = 2 \mathbf{Z} \mathbf{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \quad (2.86)$$

Substituindo (2.85) e (2.86) em (2.84) e escrevendo as combinações lineares de forma matricial:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_{pe} - 2 \mathbf{Z} \mathbf{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{\Phi} \dot{\boldsymbol{\eta}} - \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{\Phi} \ddot{\boldsymbol{\eta}} \quad (2.87)$$

em que \mathbf{d}_{pe} é a *resposta pseudo-estática* do problema dada por:

$$\mathbf{d}_{pe} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F} \quad (2.88)$$

A equação (2.87) é a expressão geral para o método de superposição de acelerações modais. A resposta pseudo-estática \mathbf{d}_{pe} é a responsável por este método obter resultados exatos para carregamentos estáticos. Este fato é importante para carregamentos dinâmicos que possuem uma parcela constante.

Assim como o método de superposição de deslocamentos modais, este método é baseado em uma combinação linear de soluções modais. Portanto, ele também não é adequado para a análise de sistemas não-lineares. A técnica do truncamento modal apresentada anteriormente também pode ser aplicada a este método.

2.4 Métodos de Integração Direta

Os métodos de integração direta, como o próprio nome sugere, resolvem diretamente a equação diferencial sem manipulações adicionais como os métodos baseados na decomposição modal. No caso da análise dinâmica de estruturas, isso significa resolver diretamente a equação de movimento do problema discreto (2.29), tratando de forma idêntica qualquer tipo de problema: amortecido ou não, com carregamento ou não, dentre outros. Estes métodos também são mais facilmente empregados na solução de problemas não-lineares.

Os métodos de integração direta podem ser classificados como explícitos ou implícitos. Um método de integração explícita tem a forma:

$$\mathbf{d}^{(i+1)} = f \left(\mathbf{d}^{(i)}, \dot{\mathbf{d}}^{(i)}, \ddot{\mathbf{d}}^{(i)}, \mathbf{d}^{(i-1)}, \dots \right) \quad (2.89)$$

enquanto os métodos de integração implícita possuem a forma:

$$\mathbf{d}^{(i+1)} = f \left(\dot{\mathbf{d}}^{(i+1)}, \ddot{\mathbf{d}}^{(i+1)}, \mathbf{d}^{(i)}, \dots \right) \quad (2.90)$$

Os métodos explícitos dependem dos valores de deslocamentos e suas derivadas obtidos no passo de tempo anterior ao passo corrente para se atualizar o deslocamento. Já os métodos implícitos dependem das derivadas dos deslocamentos do passo corrente para atualizar o deslocamento. Outra diferença entre eles é o fato de a matriz de rigidez não ser utilizada pelos métodos explícitos no cálculo da matriz de rigidez efetiva $\widetilde{\mathbf{K}}$, como será visto posteriormente.

Para simplificação da formulação, a soma dos vetores de forças nodais e forças equivalentes às cargas de corpo será denominada \mathbf{F} . Assim, tem-se uma nova forma para a equação do movimento discretizada segundo o método dos elementos finitos:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{F} \quad (2.91)$$

Assumindo que as condições iniciais $\mathbf{d}^{(0)}$ e $\dot{\mathbf{d}}^{(0)}$ são conhecidas, a aceleração inicial $\ddot{\mathbf{d}}^{(0)}$ pode ser calculada através da relação:

$$\ddot{\mathbf{d}}^{(0)} = \mathbf{M}^{-1} \left(\mathbf{F}^{(0)} - \mathbf{C} \dot{\mathbf{d}}^{(0)} - \mathbf{K} \mathbf{d}^{(0)} \right) \quad (2.92)$$

A partir dessas condições iniciais a resposta do sistema às solicitações dinâmicas pode ser calculada pelos diversos métodos apresentados nas seções seguintes. O método mais adequado a cada caso é dependente do problema e as limitações de cada método devem ser observadas.

2.4.1 Método da Diferença Central

Este método baseia-se em uma aproximação por diferenças finitas das derivadas temporais do deslocamento (velocidade e aceleração). Adotando um passo de tempo

$\Delta t = t^{(i+1)} - t^{(i)}$ constante, as expressões de diferença central para a velocidade e a aceleração são:

$$\dot{\mathbf{d}}^{(i)} = \frac{1}{2 \Delta t} (\mathbf{d}^{(i+1)} - \mathbf{d}^{(i-1)}) \quad (2.93)$$

e

$$\ddot{\mathbf{d}}^{(i)} = \frac{1}{(\Delta t)^2} (\mathbf{d}^{(i+1)} - 2 \mathbf{d}^{(i)} + \mathbf{d}^{(i-1)}) \quad (2.94)$$

Substituindo essas expressões em (2.91) e colocando o resultado em função de $\mathbf{d}^{(i+1)}$, tem-se:

$$\widetilde{\mathbf{K}}^{(i)} \mathbf{d}^{(i+1)} = \widetilde{\mathbf{F}}^{(i)} \quad (2.95)$$

em que:

$$\widetilde{\mathbf{K}}^{(i)} = \frac{1}{(\Delta t)^2} \mathbf{M} + \frac{1}{2 \Delta t} \mathbf{C} \quad (2.96)$$

e

$$\widetilde{\mathbf{F}}^{(i)} = \mathbf{F}^{(i)} - \left(\frac{1}{(\Delta t)^2} \mathbf{M} - \frac{1}{2 \Delta t} \mathbf{C} \right) \mathbf{d}^{(i-1)} - \left(\mathbf{K}^{(i)} - \frac{2}{(\Delta t)^2} \mathbf{M} \right) \mathbf{d}^{(i)} \quad (2.97)$$

Para o cálculo de $\mathbf{d}^{(1)}$, utiliza-se $\mathbf{d}^{(0)}$ e $\mathbf{d}^{(-1)}$. O primeiro deve ser informado (condição inicial), enquanto o segundo é calculado por:

$$\mathbf{d}^{(-1)} = \mathbf{d}^{(0)} - \Delta t \dot{\mathbf{d}}^{(0)} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \ddot{\mathbf{d}}^{(0)} \quad (2.98)$$

Pelas equações acima, conclui-se que este é um método de integração explícita, pois calcula-se $\mathbf{d}^{(i+1)}$ a partir dos valores obtidos nos passos anteriores ($\mathbf{d}^{(i)}$ e $\mathbf{d}^{(i-1)}$). A não-utilização da matriz de rigidez \mathbf{K} no cálculo da matriz de rigidez efetiva $\widetilde{\mathbf{K}}$ é demonstrada na Eq. (2.96).

O método da diferença central requer o uso de um passo de tempo Δt menor que um valor crítico para garantir sua convergência. Portanto, a seguinte limitação deve ser obedecida (Weaver Jr. e Johnston, 1987; Chopra, 1995):

$$\Delta t \leq \frac{T_n}{\pi} = \frac{2}{\omega_n} \quad (2.99)$$

em que ω_n é maior frequência angular do modelo analítico e T_n o correspondente menor período de vibração natural.

2.4.2 Método *Newmark-β*

Considerando a aceleração no intervalo $\Delta t = t^{(i+1)} - t^{(i)}$ como sendo a média entre a aceleração no começo e no final do intervalo, tem-se:

$$\ddot{\mathbf{d}} = \frac{1}{2} \left(\ddot{\mathbf{d}}^{(i)} + \ddot{\mathbf{d}}^{(i+1)} \right) \quad (2.100)$$

Integrando a equação (2.100) no intervalo Δt duas vezes, tem-se:

$$\dot{\mathbf{d}}^{(i+1)} = \dot{\mathbf{d}}^{(i)} + \frac{\Delta t}{2} \left(\ddot{\mathbf{d}}^{(i)} + \ddot{\mathbf{d}}^{(i+1)} \right) \quad (2.101)$$

e

$$\mathbf{d}^{(i+1)} = \mathbf{d}^{(i)} + \dot{\mathbf{d}}^{(i)} \Delta t + \frac{(\Delta t)^2}{4} \left(\ddot{\mathbf{d}}^{(i)} + \ddot{\mathbf{d}}^{(i+1)} \right) \quad (2.102)$$

Reescrevendo (2.91) em termos das variações de estado, tem-se:

$$\mathbf{M} \Delta \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C} \Delta \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K} \Delta \mathbf{d} = \Delta \mathbf{F} \quad (2.103)$$

Combinando as equações (2.101), (2.102) e (2.103), chega-se à seguinte equação:

$$\widetilde{\mathbf{K}}^{(i)} \Delta \mathbf{d}^{(i)} = \Delta \widetilde{\mathbf{F}}^{(i)} \quad (2.104)$$

em que:

$$\widetilde{\mathbf{K}}^{(i)} = \mathbf{K}^{(i)} + \frac{4}{(\Delta t)^2} \mathbf{M} + \frac{2}{\Delta t} \mathbf{C} \quad (2.105)$$

e

$$\Delta \widetilde{\mathbf{F}}^{(i)} = \Delta \mathbf{F}^{(i)} + \left(\frac{4}{\Delta t} \mathbf{M} + 2 \mathbf{C} \right) \dot{\mathbf{d}}^{(i)} + 2 \mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}}^{(i)} \quad (2.106)$$

$$\Delta \dot{\mathbf{d}}^{(i)} = \frac{2}{\Delta t} \Delta \mathbf{d}^{(i)} - 2 \dot{\mathbf{d}}^{(i)} - \Delta t \ddot{\mathbf{d}}^{(i)} \quad (2.107)$$

$$\Delta \ddot{\mathbf{d}}^{(i)} = \frac{4}{(\Delta t)^2} \Delta \mathbf{d}^{(i)} - \frac{4}{\Delta t} \dot{\mathbf{d}}^{(i)} - 2 \ddot{\mathbf{d}}^{(i)} \quad (2.108)$$

Esse método, também denominado *método da aceleração média*, possui precisão de primeira ordem, pois representa uma aproximação linear para a velocidade.

Considerando que a aceleração varia linearmente em Δt :

$$\dot{\mathbf{d}}^{(i+1)} = \dot{\mathbf{d}}^{(i)} + \frac{\Delta t}{2} \left(\ddot{\mathbf{d}}^{(i)} + \ddot{\mathbf{d}}^{(i+1)} \right) \quad (2.109)$$

$$\mathbf{d}^{(i+1)} = \mathbf{d}^{(i)} + \dot{\mathbf{d}}^{(i)} \Delta t + \frac{(\Delta t)^2}{6} \left(2\ddot{\mathbf{d}}^{(i)} + \ddot{\mathbf{d}}^{(i+1)} \right) \quad (2.110)$$

$$\widetilde{\mathbf{K}}^{(i)} \Delta \mathbf{d}^{(i)} = \Delta \widetilde{\mathbf{F}}^{(i)} \quad (2.111)$$

$$\widetilde{\mathbf{K}}^{(i)} = \mathbf{K}^{(i)} + \frac{6}{(\Delta t)^2} \mathbf{M} + \frac{3}{\Delta t} \mathbf{C} \quad (2.112)$$

$$\Delta \widetilde{\mathbf{F}}^{(i)} = \Delta \mathbf{F}^{(i)} + \left(\frac{6}{\Delta t} \mathbf{M} + 3 \mathbf{C} \right) \dot{\mathbf{d}}^{(i)} + \left(3 \mathbf{M} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{C} \right) \ddot{\mathbf{d}}^{(i)} \quad (2.113)$$

$$\Delta \dot{\mathbf{d}}^{(i)} = \frac{3}{\Delta t} \Delta \mathbf{d}^{(i)} - 3 \dot{\mathbf{d}}^{(i)} - \frac{\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{d}}^{(i)} \quad (2.114)$$

$$\Delta \ddot{\mathbf{d}}^{(i)} = \frac{6}{(\Delta t)^2} \Delta \mathbf{d}^{(i)} - \frac{6}{\Delta t} \dot{\mathbf{d}}^{(i)} - 3 \ddot{\mathbf{d}}^{(i)} \quad (2.115)$$

Essa formulação é conhecida como *método da aceleração linear*. Este é um método de integração implícita, conforme pode ser observado nas equações (2.109) a (2.113), e possui precisão de segunda ordem.

Os métodos de aceleração média e aceleração linear podem ser expressos por um único conjunto de equações, como segue:

$$\dot{\mathbf{d}}^{(i+1)} = \dot{\mathbf{d}}^{(i)} + \left[(1 - \gamma) \ddot{\mathbf{d}}^{(i)} + \gamma \ddot{\mathbf{d}}^{(i+1)} \right] \Delta t \quad (2.116)$$

$$\mathbf{d}^{(i+1)} = \mathbf{d}^{(i)} + \dot{\mathbf{d}}^{(i)} \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{d}}^{(i)} + \beta \ddot{\mathbf{d}}^{(i+1)} \right] (\Delta t)^2 \quad (2.117)$$

$$\widetilde{\mathbf{K}}^{(i)} \Delta \mathbf{d}^{(i)} = \Delta \widetilde{\mathbf{F}}^{(i)} \quad (2.118)$$

$$\widetilde{\mathbf{K}}^{(i)} = \mathbf{K}^{(i)} + \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{C} \quad (2.119)$$

$$\Delta \widetilde{\mathbf{F}}^{(i)} = \Delta \mathbf{F}^{(i)} + \mathbf{M} \mathbf{Q}^{(i)} + \mathbf{C} \mathbf{R}^{(i)} \quad (2.120)$$

$$\mathbf{Q}^{(i)} = \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{d}}^{(i)} + \frac{1}{2\beta} \ddot{\mathbf{d}}^{(i)} \quad (2.121)$$

$$\mathbf{R}^{(i)} = \frac{\gamma}{\beta} \dot{\mathbf{d}}^{(i)} + \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \Delta t \ddot{\mathbf{d}}^{(i)} \quad (2.122)$$

$$\Delta \dot{\mathbf{d}}^{(i)} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta \mathbf{d}^{(i)} - \mathbf{R}^{(i)} \quad (2.123)$$

$$\Delta \ddot{\mathbf{d}}^{(i)} = \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} \Delta \mathbf{d}^{(i)} - \mathbf{Q}^{(i)} \quad (2.124)$$

Pela Eq. (2.119), vê-se que a matriz de rigidez efetiva $\widetilde{\mathbf{K}}$ depende da matriz de rigidez \mathbf{K} , o que enfatiza que este é um método de integração implícita.

Ao se fixar $\gamma = \frac{1}{2}$ e fazer $\beta = \frac{1}{4}$ ou $\beta = \frac{1}{6}$, as equações (2.118) a (2.122) resultam no método da aceleração média ou no método da aceleração linear, respectivamente. O método de *Newmark- β* consiste em variar livremente γ e β de modo a determinar empiricamente com qual par (γ, β) obtém-se a melhor relação entre precisão e estabilidade numérica. Zienkiewicz e Taylor (2000) demonstram que o método de *Newmark- β* corresponde a aplicar uma discretização pelo Método dos Elementos Finitos da variável t , utilizando elementos finitos de tempo de segunda ordem.

Para $\gamma \neq \frac{1}{2}$, observa-se um amortecimento artificial, denominado amortecimento numérico. Esse amortecimento diminui a precisão do resultado, e poder-se-ia supor indesejado. Porém, uma certa quantidade de amortecimento numérico é desejável para reduzir o efeito espúrio dos modos mais altos em sistemas não amortecidos ou com baixo amortecimento (Cook et al., 1989). Para que o amortecimento numérico seja positivo, deve-se escolher um valor de γ tal que $\gamma > \frac{1}{2}$. Cook et al. (1989)

também salientam que o método de *Newmark- β* possui precisão de segunda ordem para $\gamma = \frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{1}{6}$, e para qualquer outra escolha do par (γ, β) , o resultado tem precisão inferior à de segunda ordem.

Os métodos de integração direta podem apresentar problemas de estabilidade numérica à medida que o passo de tempo Δt é aumentado. Dependendo do par (γ, β) selecionado, o método de *Newmark- β* pode ser incondicionalmente convergente, condicionalmente convergente ou sempre divergente. Zienkiewicz e Taylor (2000) demonstram que as seguintes relações devem ser respeitadas para que o método de *Newmark- β* seja incondicionalmente convergente:

$$\beta \geq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \gamma \right)^2 \quad (2.125)$$

$$\gamma \geq \frac{1}{2} \quad (2.126)$$

Caso o par (γ, β) seja tal que ainda se tenha estabilidade condicional, existe um passo de tempo Δt a partir do qual o método é convergente. Para isso, a seguinte relação deve ser respeitada:

$$\Delta t \leq \frac{T_n}{\pi \sqrt{2(\gamma - 2\beta)}} \quad (2.127)$$

em que T_n é o menor período de vibração natural do modelo analítico.

Para o método da aceleração média ($\gamma = \frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{1}{4}$), tem-se que $\Delta t < \infty$, ou seja, ele é incondicionalmente convergente.

Já para o método da aceleração linear ($\gamma = \frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{1}{6}$), tem-se que $\Delta t < 0.551 T_n$, ou seja, ele é condicionalmente convergente.

2.4.3 Método Hilber-Hughes-Taylor

Hilber et al. (1977) derivaram equações similares às derivadas para a obtenção do método de *Newmark- β* , porém com a aceleração variando quadraticamente ou cubicamente no passo de tempo Δt , ou seja, a precisão máxima possível é de quarta

ordem. Zienkiewicz e Taylor (2000) demonstram que o método *Hilber- α* equivale a se adotar um elemento finito de tempo de quarta ordem. Este método também é conhecido como *Método HHT* ou *Método α* .

As expressões para o método *Hilber-Hughes-Taylor* são:

$$\widetilde{\mathbf{K}}_{\alpha}^{(i)} \Delta \mathbf{d}^{(i)} = \Delta \widetilde{\mathbf{F}}_{\alpha}^{(i)} \quad (2.128)$$

em que:

$$\widetilde{\mathbf{K}}_{\alpha}^{(i)} = \widetilde{\mathbf{K}}^{(i)} + \alpha \mathbf{K} \quad (2.129)$$

e

$$\Delta \widetilde{\mathbf{F}}_{\alpha}^{(i)} = \Delta \widetilde{\mathbf{F}}^{(i)} + \alpha \mathbf{K} \Delta \mathbf{d}^{(i-1)} \quad (2.130)$$

A variável α é o grau de liberdade introduzido para expandir a interpolação da variável de tempo até a quarta ordem. Logo, a melhor precisão possível para esse método é a de quarta ordem. O método *HHT* consiste em deixar a tríade (α, β, γ) variar livremente de modo semelhante ao feito para o método *Newmark- β* . Para $\alpha = 0$, o método *HHT* se resume ao método *Newmark- β* .

Weaver Jr. e Johnston (1987) realizaram uma análise comparativa entre alguns métodos de integração direta e concluíram que, de maneira geral, o método *Hilber-Hughes-Taylor* leva a melhores resultados. Além disso, eles apontam $\alpha = -0,1$, $\beta = 0,3025$ e $\gamma = 0,6$ como uma seleção ótima para um caso geral.

2.4.4 Método *Wilson- θ*

Wilson et al. (1973) estenderam o *método da aceleração linear* (*Newmark- β* com $\gamma = \frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{1}{6}$) de maneira a torná-lo incondicionalmente convergente. A hipótese básica do método *Wilson- θ* é que a aceleração $\ddot{\mathbf{d}}$ varia linearmente em um período estendido de tempo $\Delta t_{\theta} = \theta \Delta t$. Durante esse passo de tempo a aceleração incremental é $\Delta \ddot{\mathbf{d}}_{\theta} = \theta \Delta \ddot{\mathbf{d}}$.

O parâmetro θ deve ser sempre maior que 1, sendo que para $\theta \geq 1,37$ o método é incondicionalmente convergente. O valor ótimo de θ é de 1,420815, podendo ser

arredondado para 1,42 (Weaver Jr. e Johnston, 1987; Chopra, 1995). Para $\theta = 1$, o método se resume ao *método da aceleração linear*.

Este método tende a introduzir um amortecimento numérico nos modos mais altos do sistema. Em problemas em que estes modos são importantes, os erros introduzidos são grandes. Além disso, as equações de equilíbrio dinâmico não são satisfeitas. Devido a estas deficiências, Wilson (2006) não recomenda seu uso.

O conjunto de equações que representam esse método é o seguinte:

$$\dot{\mathbf{d}}^{(i+1)} = \dot{\mathbf{d}}^{(i)} + \frac{\Delta t}{2} \left(\ddot{\mathbf{d}}^{(i)} + \ddot{\mathbf{d}}^{(i+1)} \right) \quad (2.131)$$

$$\mathbf{d}^{(i+1)} = \mathbf{d}^{(i)} + \dot{\mathbf{d}}^{(i)} \Delta t + \frac{(\Delta t)^2}{6} \left(2\ddot{\mathbf{d}}^{(i)} + \ddot{\mathbf{d}}^{(i+1)} \right) \quad (2.132)$$

$$\widetilde{\mathbf{K}}_{\theta}^{(i)} \Delta \mathbf{d}_{\theta}^{(i)} = \Delta \widetilde{\mathbf{F}}_{\theta}^{(i)} \quad (2.133)$$

$$\widetilde{\mathbf{K}}_{\theta}^{(i)} = \mathbf{K}^{(i)} + \frac{6}{(\theta \Delta t)^2} \mathbf{M} + \frac{3}{\theta \Delta t} \mathbf{C} \quad (2.134)$$

$$\Delta \widetilde{\mathbf{F}}_{\theta}^{(i)} = \theta \Delta \mathbf{F}^{(i)} + \left(\frac{6}{\theta \Delta t} \mathbf{M} + 3 \mathbf{C} \right) \dot{\mathbf{d}}^{(i)} + \left(3 \mathbf{M} + \frac{\theta \Delta t}{2} \mathbf{C} \right) \ddot{\mathbf{d}}^{(i)} \quad (2.135)$$

$$\Delta \ddot{\mathbf{d}}^{(i)} = \frac{1}{\theta} \Delta \ddot{\mathbf{d}}_{\theta}^{(i)} \quad (2.136)$$

$$\Delta \dot{\mathbf{d}}^{(i)} = \Delta t \ddot{\mathbf{d}}^{(i)} + \frac{\Delta t}{2} \Delta \ddot{\mathbf{d}}^{(i)} \quad (2.137)$$

$$\Delta \mathbf{d}^{(i)} = \Delta t \dot{\mathbf{d}}^{(i)} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \ddot{\mathbf{d}}^{(i)} + \frac{(\Delta t)^2}{6} \Delta \ddot{\mathbf{d}}^{(i)} \quad (2.138)$$

Capítulo 3

MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA ANÁLISE GEOMETRICAMENTE NÃO-LINEAR

No Método dos Elementos Finitos, ao se assumir que os deslocamentos são pequenos e que as condições de contorno não variam ao longo do tempo, assim como as cargas aplicadas, o sistema de equações de equilíbrio é da forma:

$$\mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{F} \quad (3.1)$$

em que \mathbf{K} é a rigidez do sistema, \mathbf{d} é o vetor de deslocamentos nodais e \mathbf{F} é o vetor de forças totais nos nós.

Observa-se que esse sistema é linear, ou seja, \mathbf{d} é uma função linear de \mathbf{F} . Se o vetor de cargas nodais totais fosse $\alpha\mathbf{F}$, o vetor de deslocamentos seria $\alpha\mathbf{d}$. Nos sistemas não-lineares, isto não ocorre.

A não-linearidade geométrica caracteriza-se por assumir que os deslocamentos e as deformações são de grande monta, o que contraria as hipóteses assumidas anteriormente para a análise linear.

Para o caso de cargas que variam ao longo do tempo, a resposta do sistema é calculada através de uma análise incremental iterativa, que se reduz à análise de um passo para um caso estático. Entretanto, por razões computacionais, mesmo um caso estático requer uma solução com vários passos. Bathe (1982) recomenda o

uso do *método iterativo de Newton-Raphson modificado* para a solução do sistema de equações não-lineares. Porém, o *método iterativo de Newton-Raphson padrão* é mais estável, apesar de demandar um esforço computacional maior.

Como não poderia deixar de ser, a análise geometricamente não-linear tem como fundamento os princípios básicos da mecânica. As formulações *Euleriana* e *Lagrangeana* são propostas para a descrição do movimento de sólidos. Na formulação Euleriana as coordenadas espaciais, associadas ao corpo deformado, são utilizadas como referência, enquanto na formulação Lagrangeana empregam-se as coordenadas materiais, associadas com o corpo antes de ser deformado.

A formulação Lagrangeana é particularmente adequada para a análise não-linear incremental iterativa de sólidos, em que o interesse é a trajetória de deformações de cada ponto do sólido durante o processo de carregamento. Em contraponto, a formulação Euleriana tem sido amplamente adotada na análise de problemas de mecânica dos fluidos, em que a atenção é focada no movimento de material através de volumes de controle específicos (Bathe, 1982; Yang e Kuo, 1994).

A formulação das teorias incrementais para a análise não-linear começa com a divisão da trajetória de carregamento de um sólido em um certo número de configurações de equilíbrio. Como mostrado na figura 3.1, três configurações do sólido podem ser definidas em termos de um sistema de coordenadas cartesianas estacionárias: a configuração inicial indeformada (C_0), a última configuração deformada conhecida (C_1) e a configuração deformada atual (C_2). Assume-se que todas as variáveis de estado, tais como tensões, deformações e deslocamentos, assim como a trajetória de carregamento, são conhecidas até a configuração (C_1).

O problema resume-se em formular um teoria incremental para determinar todas essas variáveis na configuração deformada atual C_2 , assumindo que as forças externas atuantes no sólido em C_1 foram acrescidas de uma pequena quantidade. O passo que caracteriza o aumento de deformação do sólido de C_1 a C_2 é denominado *passo incremental*. Enquanto as deformações neste passo são tidas como pequenas, as

deformações do sólido acumuladas de C_0 a C_1 ou C_2 podem ser grandes.

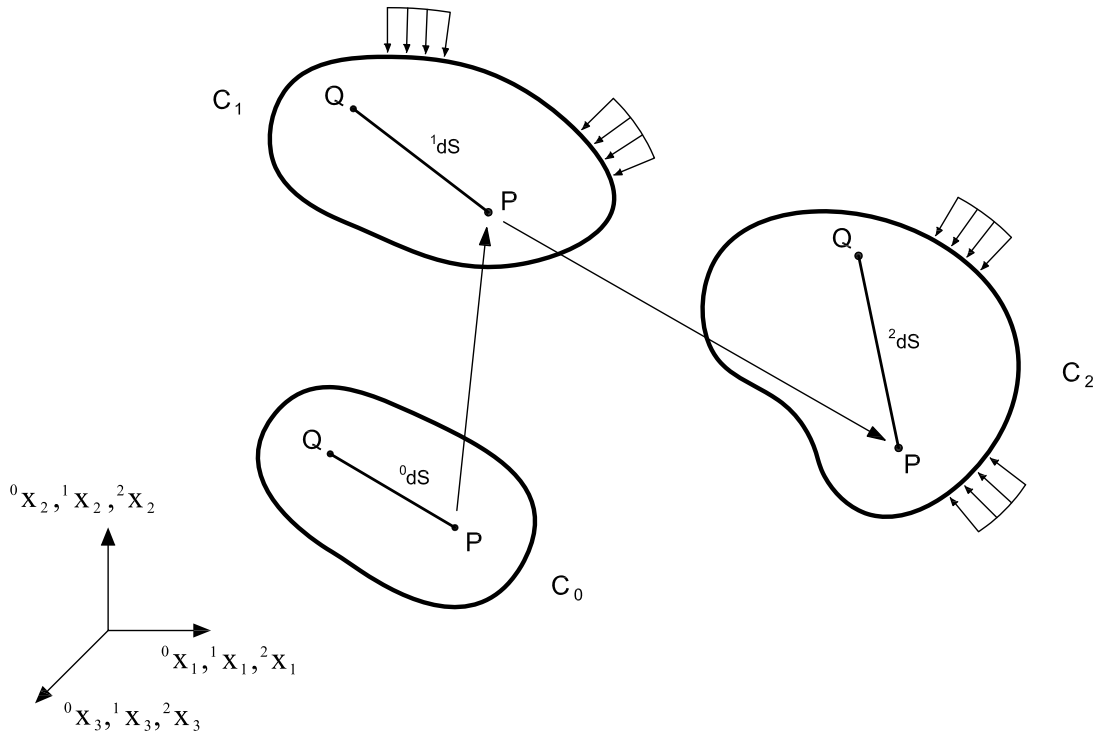


Figura 3.1: Deslocamento do sólido em um espaço tridimensional.

A notação tensorial usada por Bathe (1982), com as modificações propostas por Yang e Kuo (1994) será adotada ao longo do texto e explicada a seguir. Também será adotada a notação indicial de Einstein para os termos tensoriais, com o uso do índice mudo. Ou seja, quando o mesmo índice aparecer duas vezes em um termo matemático, deverá ser atribuído a ele todos os valores possíveis e os resultados somados entre si.

A descrição do movimento do sólido é baseada nas três configurações anteriormente apresentadas, C_0 , C_1 e C_2 . Em um símbolo, tanto o subscrito quanto o sobrescrito esquerdo indicam essas configurações. O sobrescrito esquerdo indica em qual configuração a grandeza ocorre. Sua ausência indica que a grandeza é um incremento entre C_1 e C_2 . O subscrito esquerdo indica em relação a qual configuração a grandeza é medida. Porém, se a grandeza em consideração ocorre na mesma configuração em que é medida, o subscrito esquerdo pode ser omitido. As tensões de Cauchy em C_2 podem ser escritas como ${}^2\tau_{ij}$ ou ${}^2\tau_{ij}$, por exemplo.

Quando um sólido muda sua configuração de C_0 para C_2 , através de C_1 , devido a alguma ação física (Figura 3.1), admite-se que as mudanças são contínuas. Denomina-se o volume do sólido nas três configurações como 0V , 1V e 2V , a área de sua superfície por 0A , 1A , 2A e sua densidade por ${}^0\rho$, ${}^1\rho$ e ${}^2\rho$.

Denominam-se as coordenadas de um ponto material arbitrário P dentro do sólido nas três configurações por $({}^0x_1, {}^0x_2, {}^0x_3)$, $({}^1x_1, {}^1x_2, {}^1x_3)$ e $({}^2x_1, {}^2x_2, {}^2x_3)$, em que o subscrito direito se refere ao eixos coordenados (Figura 3.1). A notação para os deslocamentos do ponto P pode ser definida de maneira similar. Utiliza-se a notação $({}^1u_1, {}^1u_2, {}^1u_3)$ e $({}^2u_1, {}^2u_2, {}^2u_3)$ para denominar os deslocamentos totais do ponto P nas configurações C_1 e C_2 , respectivamente. Portanto, as coordenadas do ponto P em C_1 e C_2 são escritas como:

$${}^1x_i = {}^0x_i + {}^1u_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.2)$$

$${}^2x_i = {}^0x_i + {}^2u_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.3)$$

e o deslocamento incremental do ponto P , de C_1 a C_2 , é dado por:

$$u_i = {}^2u_i - {}^1u_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.4)$$

Definida a notação para as coordenadas e deslocamentos, pode-se passar para a definição de algumas medidas de deformações e tensões que serão utilizadas na formulação apresentada neste capítulo.

3.1 Medidas de Deformações e Tensões

A princípio, diversos tensores de deformações e tensões podem ser empregados no estudo da não-linearidade geométrica de sólidos. Entretanto, se o objetivo é estabelecer um procedimento efetivo para análise geral através de elementos finitos, apenas algumas poucas medidas de deformações e tensões precisam ser consideradas.

Neste trabalho serão consideradas apenas as deformações de Green-Lagrange e as tensões de Piola-Kirchhoff e de Cauchy.

3.1.1 Tensor de Deformações de Green-Lagrange

Considera-se uma linha PQ de comprimento 0ds na configuração original C_0 que passou a ter comprimento 1ds na configuração C_1 e 2ds na configuração C_2 (Figura 3.1). Os *tensores de deformações de Green-Lagrange* ${}^2_0\epsilon_{ij}$ e ${}^1_0\epsilon_{ij}$ do sólido nas configurações C_2 e C_1 , respectivamente, em relação à configuração C_0 , podem ser definidos por:

$$2 \, {}^2_0\epsilon_{ij} \, d^0x_i \, d^0x_j = ({}^2ds)^2 - ({}^0ds)^2 \quad (3.5)$$

$$2 \, {}^1_0\epsilon_{ij} \, d^0x_i \, d^0x_j = ({}^1ds)^2 - ({}^0ds)^2 \quad (3.6)$$

em que

$$({}^2ds)^2 = d^2x_i \, d^2x_i \quad (3.7)$$

$$({}^1ds)^2 = d^1x_i \, d^1x_i \quad (3.8)$$

$$({}^0ds)^2 = d^0x_i \, d^0x_i \quad (3.9)$$

Como

$$d^2x_i = \frac{\partial^2x_i}{\partial^0x_j} \, d^0x_j \quad (3.10)$$

$$d^1x_i = \frac{\partial^1x_i}{\partial^0x_j} \, d^0x_j \quad (3.11)$$

pode-se escrever que

$$({}^2ds)^2 = \frac{\partial^2x_k}{\partial^0x_i} \frac{\partial^2x_k}{\partial^0x_j} \, d^0x_i \, d^0x_j \quad (3.12)$$

$$({}^1ds)^2 = \frac{\partial^1x_k}{\partial^0x_i} \frac{\partial^1x_k}{\partial^0x_j} \, d^0x_i \, d^0x_j \quad (3.13)$$

Substituindo (3.9), (3.12) e (3.13) em (3.5) e (3.6), derivam-se as seguintes expressões para o tensor de deformações de Green-Lagrange:

$${}^2_0\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2x_k}{\partial^0x_i} \frac{\partial^2x_k}{\partial^0x_j} - \delta_{ij} \right) \quad (3.14)$$

$${}^1_0\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial {}^1x_k}{\partial {}^0x_i} \frac{\partial {}^1x_k}{\partial {}^0x_j} - \delta_{ij} \right) \quad (3.15)$$

em que δ_{ij} é o delta de Kronecker.

Utilizando (3.2) e (3.3), pode-se expressar as deformações em termos das componentes de deslocamentos:

$${}^2_0\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial {}^2u_i}{\partial {}^0x_j} + \frac{\partial {}^2u_j}{\partial {}^0x_i} + \frac{\partial {}^2u_k}{\partial {}^0x_i} \frac{\partial {}^2u_k}{\partial {}^0x_j} \right) \quad (3.16)$$

$${}^1_0\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial {}^1u_i}{\partial {}^0x_j} + \frac{\partial {}^1u_j}{\partial {}^0x_i} + \frac{\partial {}^1u_k}{\partial {}^0x_i} \frac{\partial {}^1u_k}{\partial {}^0x_j} \right) \quad (3.17)$$

Nota-se que a simetria do tensor de deformações permanece, já que ${}^2_0\epsilon_{ij} = {}^2_0\epsilon_{ji}$ e ${}^1_0\epsilon_{ij} = {}^1_0\epsilon_{ji}$

Utilizando notação cartesiana padrão, substitui-se os deslocamentos em C_2 (${}^2u_1, {}^2u_2, {}^2u_3$) por ${}^2u, {}^2v$ e 2w e as coordenadas em C_2 (${}^2x_1, {}^2x_2, {}^2x_3$) por ${}^2x, {}^2y$ e 2z . Substituições análogas são feitas para C_1 . Então, as componentes do tensor de deformações de Green-Lagrange ${}^2_0\epsilon_{ij}$ na configuração C_2 são explicitamente expressas por:

$${}^2_0\epsilon_{xx} = \frac{\partial {}^2u}{\partial {}^0x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial {}^2u}{\partial {}^0x} \right)^2 + \left(\frac{\partial {}^2v}{\partial {}^0x} \right)^2 + \left(\frac{\partial {}^2w}{\partial {}^0x} \right)^2 \right] \quad (3.18)$$

$${}^2_0\epsilon_{yy} = \frac{\partial {}^2u}{\partial {}^0y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial {}^2u}{\partial {}^0y} \right)^2 + \left(\frac{\partial {}^2v}{\partial {}^0y} \right)^2 + \left(\frac{\partial {}^2w}{\partial {}^0y} \right)^2 \right] \quad (3.19)$$

$${}^2_0\epsilon_{zz} = \frac{\partial {}^2u}{\partial {}^0z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial {}^2u}{\partial {}^0z} \right)^2 + \left(\frac{\partial {}^2v}{\partial {}^0z} \right)^2 + \left(\frac{\partial {}^2w}{\partial {}^0z} \right)^2 \right] \quad (3.20)$$

$$2 {}^2_0\epsilon_{xy} = \frac{\partial {}^2u}{\partial {}^0y} + \frac{\partial {}^2v}{\partial {}^0x} + \frac{\partial {}^2u}{\partial {}^0x} \frac{\partial {}^2u}{\partial {}^0y} + \frac{\partial {}^2v}{\partial {}^0x} \frac{\partial {}^2v}{\partial {}^0y} + \frac{\partial {}^2w}{\partial {}^0x} \frac{\partial {}^2w}{\partial {}^0y} \quad (3.21)$$

$$2 {}^2_0\epsilon_{yz} = \frac{\partial {}^2v}{\partial {}^0z} + \frac{\partial {}^2w}{\partial {}^0y} + \frac{\partial {}^2u}{\partial {}^0y} \frac{\partial {}^2u}{\partial {}^0z} + \frac{\partial {}^2v}{\partial {}^0y} \frac{\partial {}^2v}{\partial {}^0z} + \frac{\partial {}^2w}{\partial {}^0y} \frac{\partial {}^2w}{\partial {}^0z} \quad (3.22)$$

$$2 \, {}_0^2\epsilon_{zx} = \frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 z} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 z} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 v}{\partial^2 z} \frac{\partial^2 v}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 w}{\partial^2 z} \frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} \quad (3.23)$$

$$2 \, {}_0^2\epsilon_{xy} = 2 \, {}_0^2\epsilon_{yx} \quad 2 \, {}_0^2\epsilon_{zy} = 2 \, {}_0^2\epsilon_{yz} \quad 2 \, {}_0^2\epsilon_{xz} = 2 \, {}_0^2\epsilon_{zx} \quad (3.24)$$

As componentes do tensor ${}_0^1\epsilon_{ij}$ na configuração C_1 são obtidas alterando o sobrescrito esquerdo em cada símbolo das equações (3.18) a (3.24) de 2 para 1.

3.1.2 Tensor de Deformações Incrementais de Green

Em uma formulação incremental, a diferença entre as deformações ${}_0^2\epsilon_{ij}$ e ${}_0^1\epsilon_{ij}$ é definida como o *tensor de deformações incrementais de Green* ${}_0\epsilon_{ij}$:

$${}_0\epsilon_{ij} = {}_0^2\epsilon_{ij} - {}_0^1\epsilon_{ij} \quad (3.25)$$

que é equivalente a

$$2 \, {}_0\epsilon_{ij} \, d^0 x_i \, d^0 x_j = ({}^2 ds)^2 - ({}^1 ds)^2 \quad (3.26)$$

Substituindo (3.16) e (3.17) em (3.25), pode-se escrever:

$${}_0\epsilon_{ij} = {}_0e_{ij} + {}_0\eta_{ij} \quad (3.27)$$

em que as *componentes lineares* ${}_0e_{ij}$ são definidas por

$${}_0e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial^0 x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial^0 x_i} + \frac{\partial^1 u_k}{\partial^0 x_i} \frac{\partial u_k}{\partial^0 x_j} + \frac{\partial u_k}{\partial^0 x_i} \frac{\partial^1 u_k}{\partial^0 x_j} \right) \quad (3.28)$$

e as *componentes não-lineares* ${}_0\eta_{ij}$ por

$${}_0\eta_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_k}{\partial^0 x_i} \frac{\partial u_k}{\partial^0 x_j} \quad (3.29)$$

É importante observar que nas equações (3.28) e (3.29) a grandeza ${}^1 u_i$ representa os deslocamentos totais do sólido de C_0 a C_1 e a grandeza u_i os deslocamentos incrementais de C_1 a C_2 .

Para o caso especial da análise linear, não há deslocamento inicial 1u_i , ou seja, as configurações C_1 e C_0 são idênticas e o tensor de deformações de Green-Lagrange se anula (${}^1_0\epsilon_{ij} = 0$). Além disso, assume-se que os deslocamentos incrementais u_i são tão pequenos que os quadrados e produtos de suas primeiras derivadas podem ser desprezados. Para esses casos, a distinção entre as configurações C_1 e C_2 deixa de existir, pois não há diferença em se calcular as derivadas na posição antes ou depois da deformação.

Ao se desprezar as componentes não-lineares e os efeitos dos deslocamentos iniciais, o tensor de deformações incrementais de Green ${}^0\epsilon_{ij}$ se reduz ao *tensor de deformações incrementais* ${}^0e_{ij}$:

$${}^0e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.30)$$

em que todos os sobrescritos à esquerda para os deslocamentos e coordenadas foram retirados. Em notação cartesiana padrão, tem-se:

$${}^0e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.31)$$

$${}^0e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3.32)$$

$${}^0e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3.33)$$

$$2 {}^0e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 2 {}^0e_{yx} \quad (3.34)$$

$$2 {}^0e_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 2 {}^0e_{zy} \quad (3.35)$$

$$2 {}^0e_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 2 {}^0e_{xz} \quad (3.36)$$

Na engenharia, o dobro das componentes ${}^0e_{ij}$, para $i \neq j$, são denominadas *deformações angulares* γ_{ij} e representam o ângulo formado pelos lados paralelos aos eixos x_i e x_j .

Entretanto, o conceito de tensor de deformações infinitesimais não é restrito ao caso linear como descrito anteriormente. Considera-se agora o caso geral de um sólido se movendo de C_0 a C_1 por alguns passos incrementais e então de C_1 a C_2 por um único passo incremental. Apesar de os deslocamentos acumulados 1u_i do sólido de C_0 a C_1 poderem ser arbitrariamente grandes, os deslocamentos incrementais u_i no passo incremental de C_1 a C_2 são pequenos por definição. Neste caso, quando se faz referência às deformações na configuração C_2 , define-se o *tensor de deformações de Euler* ${}^2e_{ij}$ (também denominado *tensor de deformações de Almansi*) para o sólido em C_2 , em relação aos eixos na mesma configuração C_2 como:

$${}^2e_{ij} d^2x_i d^2x_j = ({}^2ds)^2 - ({}^1ds)^2 \quad (3.37)$$

Substituindo (3.7) e (3.8) em (3.37) e sabendo que

$$d^1x_i = \frac{\partial^1x_i}{\partial^2x_j} d^2x_j \quad (3.38)$$

obtém-se

$${}^2e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \frac{\partial^1x_k}{\partial^2x_i} \frac{\partial^1x_k}{\partial^2x_j} \right) \quad (3.39)$$

Das equações (3.2) a (3.4), tem-se:

$${}^1x_i = {}^2x_i - u_i \quad (3.40)$$

que pode ser substituído em (3.39) para se obter

$${}^2e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial^2x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial^2x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial^2x_i} \frac{\partial u_k}{\partial^2x_j} \right) \quad (3.41)$$

Neste caso, a parte linear do tensor de deformações de Euler ${}^2e_{ij}$ é o tensor de deformações infinitesimais ${}^2e_{ij}$:

$${}^2e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial^2x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial^2x_i} \right) \quad (3.42)$$

idêntico ao tensor de deformações infinitesimais ${}^0e_{ij}$ definido em (3.30), à exceção de que a configuração de referência é a C_2 .

3.1.3 Tensor de Deformações Incrementais de Green Atualizado

O tensor de deformações de Green-Lagrange descrito anteriormente para o sólido em C_2 tem como referência a configuração original C_0 , o que é útil para a formulação Lagrangeana total, que será apresentada na seção 3.2. Para a formulação Lagrangeana atualizada, o tensor de deformações do sólido em C_2 deve ter como referência a configuração C_1 . Este tensor, representado por ${}_1\epsilon_{ij}$ ou ${}_1^2\epsilon_{ij}$, é denominado *tensor de deformações incrementais de Green atualizado* e é definido por:

$${}_2\epsilon_{ij} d^1x_i d^1x_j = ({}^2ds)^2 - ({}^1ds)^2 \quad (3.43)$$

Seguindo procedimento análogo ao adotado de (3.37) a (3.41), deriva-se as deformações incrementais ${}_1\epsilon_{ij}$:

$${}_1\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial {}^1x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial {}^1x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial {}^1x_i} \frac{\partial u_k}{\partial {}^1x_j} \right) \quad (3.44)$$

As deformações incrementais ${}_1\epsilon_{ij}$ podem ser decompostas em duas parcelas:

$${}_1\epsilon_{ij} = {}_1e_{ij} + {}_1\eta_{ij} \quad (3.45)$$

em que as componentes lineares ${}_1e_{ij}$ são definidas por

$${}_1e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial {}^1x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial {}^1x_i} \right) \quad (3.46)$$

e as componentes não-lineares ${}_1\eta_{ij}$ por

$${}_1\eta_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_k}{\partial {}^1x_i} \frac{\partial u_k}{\partial {}^1x_j} \quad (3.47)$$

3.1.4 Segundo Tensor de Tensões de Piola-Kirchhoff

O *segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff* é o conjugado energético do tensor de deformações de Green-Lagrange. Para defini-lo, considera-se um ponto P

cercado por um paralelepípedo infinitesimal retangular na configuração inicial C_0 com as seis superfícies seguintes (Figura 3.2):

$${}^0x_i = \text{constante}, \quad {}^0x_i + d \, {}^0x_i = \text{constante} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.48)$$

Quando o sólido que contém o ponto P se move de C_0 a C_1 e então para C_2 , observa-se que esse paralelepípedo infinitesimal retangular transforma-se em um paralelepípedo infinitesimal deformado (não mais retangular) nas configurações C_1 e C_2 (Figura 3.2). As tensões de Piola-Kirchhoff são definidas como as forças internas por unidade de área atuantes na direção normal e nas duas direções tangenciais de cada superfície lateral do paralelepípedo nas configurações deformadas (Washizu, 1982). Apenas as tensões atuantes em um lado do paralelepípedo são mostradas na figura 3.2.

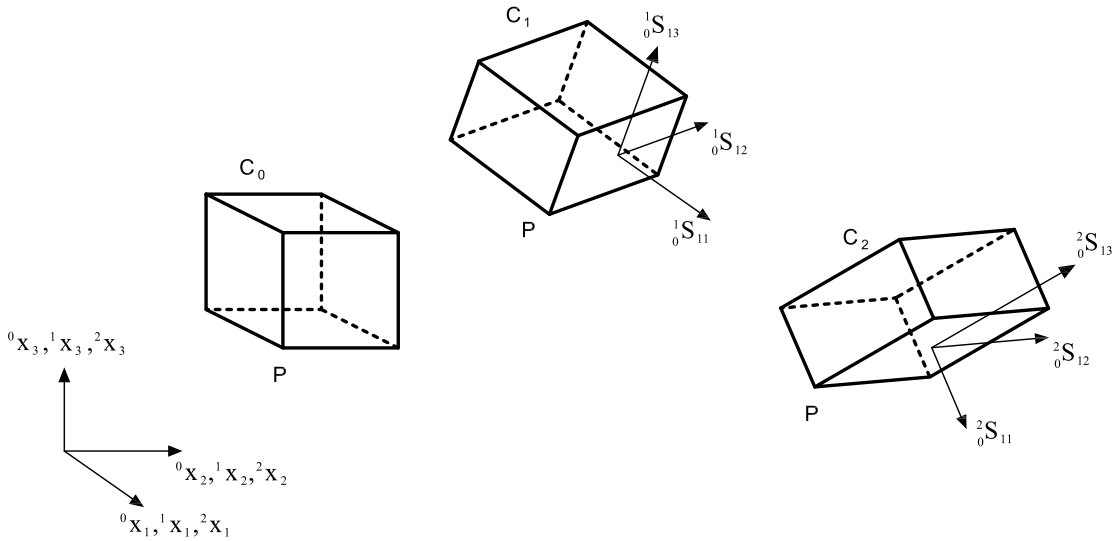


Figura 3.2: Definição do segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff.

O segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff nas configurações C_2 e C_1 são representados por ${}^2S_{ij}$ e ${}^1S_{ij}$, respectivamente.

Em uma análise incremental, este tensor, na configuração C_2 , pode ser decomposto em

$${}^2S_{ij} = {}^1S_{ij} + {}_0S_{ij} \quad (3.49)$$

em que ${}_0S_{ij}$ é denominado o *tensor de tensões incrementais de Piola-Kirchhoff*.

3.1.5 Tensor de Tensões de Cauchy

O *tensor de tensões de Cauchy* é caracterizado pelo fato de ser sempre expresso em relação à configuração em que a tensão ocorre. Ele também é conhecido como *tensor de tensões de Euler*. O significado físico das tensões de Cauchy é facilmente visto na figura 3.3. Considera-se novamente o movimento de um ponto genérico P cercado por um paralelepípedo infinitesimal retangular em C_1 com as seis superfícies seguintes:

$${}^1x_i = \text{constante}, \quad {}^1x_i + d \, {}^1x_i = \text{constante} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.50)$$

e em C_2 por outro paralelepípedo infinitesimal retangular com as seis superfícies seguintes:

$${}^2x_i = \text{constante}, \quad {}^2x_i + d \, {}^2x_i = \text{constante} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.51)$$

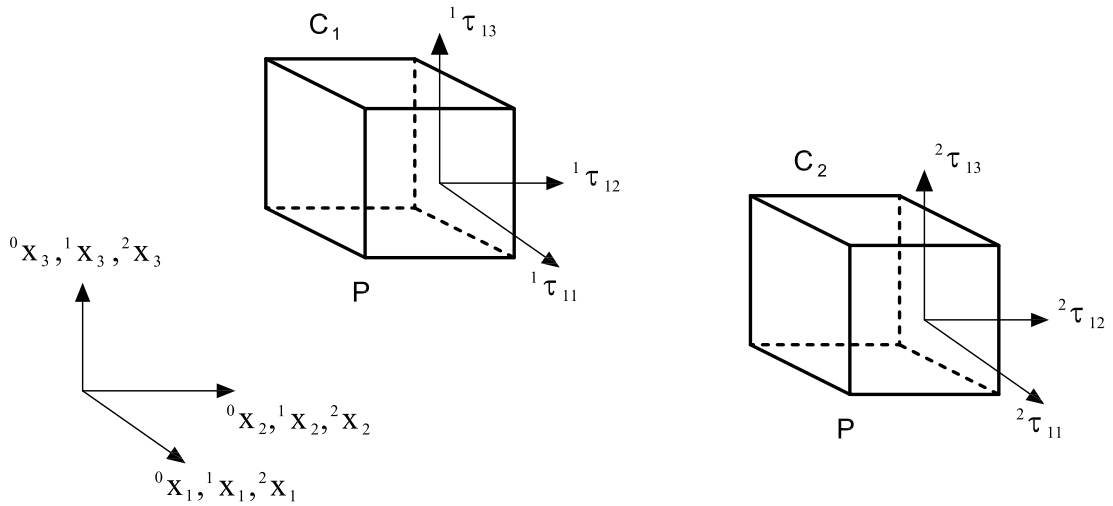


Figura 3.3: Definição do tensor de tensões de Cauchy.

As tensões de Cauchy ${}^1\tau_{ij}$ e ${}^2\tau_{ij}$ são definidas como as forças internas por unidade de área atuantes na direção normal e nas duas direções tangenciais de cada superfície lateral do paralelepípedo nas configurações C_1 e C_2 , respectivamente.

O tensor de tensões de Cauchy é um conceito físico natural, mas é inconveniente para a análise não-linear, em que é necessário relacionar tensões a deformações. Se as

deformações são referidas à configuração inicial de um meio contínuo, deve-se definir as tensões em relação a essa mesma configuração. Yang e Kuo (1994) apresenta uma relação entre o tensor de tensões de Cauchy ${}^2\tau_{ij}$ e o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff ${}^2_0S_{ij}$:

$${}^2_0S_{ij} = \frac{{}^0\rho}{{}^2\rho} \frac{\partial {}^0x_i}{\partial {}^2x_p} \frac{\partial {}^0x_j}{\partial {}^2x_q} {}^2\tau_{pq} \quad (3.52)$$

$${}^2\tau_{ij} = \frac{{}^2\rho}{{}^0\rho} \frac{\partial {}^2x_i}{\partial {}^0x_p} \frac{\partial {}^2x_j}{\partial {}^0x_q} {}^2_0S_{pq} \quad (3.53)$$

em que ${}^0\rho$ e ${}^2\rho$ representam a densidade do material nas configurações C_0 e C_2 , respectivamente.

3.1.6 Tensor de Tensões de Kirchhoff Atualizado

Um terceiro tipo de tensor de tensões é o *tensor de tensões de Kirchhoff atualizado*. Considera-se o paralelepípedo infinitesimal retangular que contém o ponto P em C_1 definido pelas seis superfícies dadas pela equação (3.50), conforme apresentado na figura 3.4. As tensões de Cauchy atuantes neste paralelepípedo retangular são representadas por ${}^1\tau_{ij}$. Conforme o sólido que contém o ponto P se move de C_1 para C_2 , este paralelepípedo retangular se transforma em um paralelepípedo infinitesimal não mais retangular. Neste caso, as coordenadas 1x_i do corpo em C_1 são utilizadas como o sistema de coordenadas materiais para o sólido na configuração C_2 . As tensões de Kirchhoff atualizadas ${}^2_1S_{ij}$ são definidas como as forças internas por unidade de área atuantes na direção normal e nas duas direções tangenciais de cada superfície lateral do paralelepípedo em C_2 (Washizu, 1982). Em uma análise incremental, as tensões de Kirchhoff atualizadas ${}^2_1S_{ij}$ podem ser decompostas como:

$${}^2_1S_{ij} = {}^1\tau_{ij} + {}^1S_{ij} \quad (3.54)$$

em que ${}^1\tau_{ij}$ são as tensões de Kirchhoff atuando em e referidas à configuração C_1 , ou seja, ${}^1\tau_{ij} = {}^1S_{ij}$. O tensor ${}^1S_{ij}$ é denominado *tensor de tensões incrementais de Kirchhoff*.

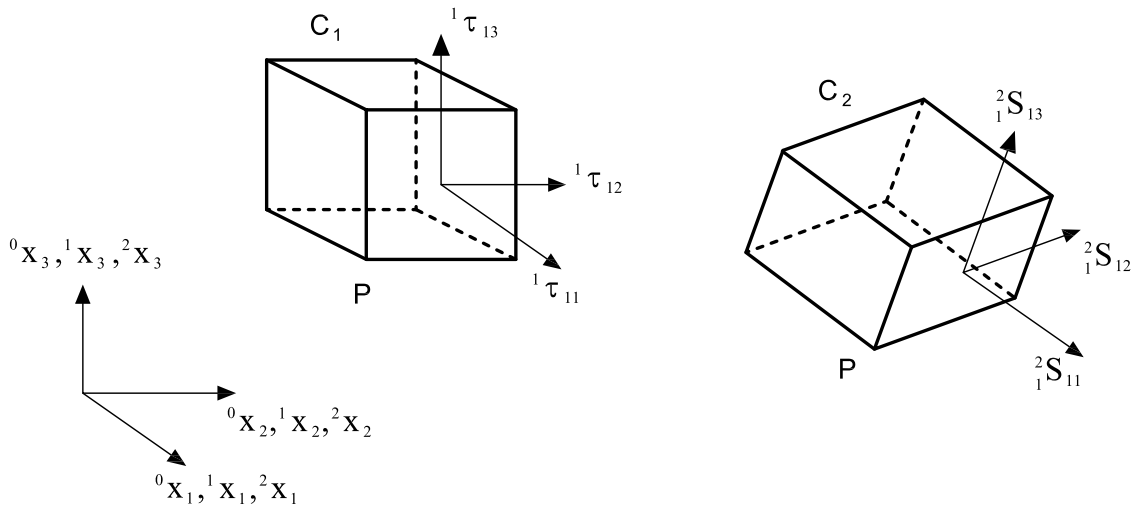


Figura 3.4: Definição do tensor de tensões de Kirchhoff atualizado.

3.2 Formulações Lagrangeanas Total e Atualizada

Considerando grandes deformações, não é possível resolver o sistema de equações de equilíbrio e de compatibilidade de um corpo na configuração C_2 diretamente. Calcula-se então uma solução aproximada utilizando para isso resultados previamente calculados para outra configuração de equilíbrio e linearizando a equação resultante. Essa solução é refinada através de iterações. As formulações Lagrangeanas total e atualizada são duas formas de se obter essa solução.

Na formulação Lagrangeana total todas as variáveis estáticas e cinemáticas são referidas à configuração inicial do corpo C_0 . A formulação Lagrangeana atualizada é baseada nos mesmos procedimentos da anterior, mas as variáveis são referidas à configuração C_1 . Ambas formulações incluem os efeitos cinemáticos não-lineares devidos aos grandes deslocamentos e grandes deformações. Entretanto, as relações constitutivas assumidas é que dirão se o comportamento devido às grandes deformações está bem modelado. A escolha entre uma ou outra formulação deve ser feita observando-se qual delas apresenta melhor eficiência computacional para o modelo a ser analisado.

Sendo S_{ij} e ε_{ij} as componentes do segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff e do tensor de deformações de Green-Lagrange, respectivamente, Bathe (1982) mostra

que o princípio do trabalho virtual escrito segundo essas grandezas é dado por

$$\int_{0V} {}^2S_{ij} \delta {}^2\varepsilon_{ij} {}^0dV = {}^2\mathfrak{R} \quad (3.55)$$

para a formulação Lagrangeana total e por

$$\int_{1V} {}^2S_{ij} \delta {}^2\varepsilon_{ij} {}^1dV = {}^2\mathfrak{R} \quad (3.56)$$

para a formulação Lagrangeana atualizada.

Nas equações (3.55) e (3.56) ${}^2\mathfrak{R}$ é o trabalho virtual externo, que é dado por:

$${}^2\mathfrak{R} = \int_{2V} {}^2f_i^B \delta u_i {}^2dV + \int_{2S} {}^2f_i^S \delta u_i {}^2dS \quad (3.57)$$

em que f_i^B e f_i^S são as componentes dos vetores de forças de corpo e de superfície aplicadas, respectivamente, e δu_i é a i -ésima componente do vetor dos deslocamentos virtuais.

Conforme dito anteriormente, soluções aproximadas para (3.55) e (3.56) podem ser obtidas através de linearização. As tabelas (3.1) e (3.2) resumem as relações usadas para se obter as equações de movimento para as formulações Lagrangeanas total e atualizada, respectivamente.

Nestas tabelas, tem-se que ε_{ij} e τ_{ij} são as componentes cartesianas do tensor de deformações utilizado e do tensor de tensões de Cauchy, respectivamente.

As equações de equilíbrio para as formulações Lagrangeanas total e atualizada são, respectivamente:

$$\int_{0V} {}^0C_{ijrs} {}^0e_{rs} \delta {}^0e_{ij} {}^0dV + \int_{0V} {}^0S_{ij} \delta {}^0\eta_{ij} {}^0dV = {}^2\mathfrak{R} - \int_{0V} {}^0S_{ij} \delta {}^0e_{ij} {}^0dV \quad (3.58)$$

$$\int_{1V} {}^1C_{ijrs} {}^1e_{rs} \delta {}^1e_{ij} {}^1dV + \int_{1V} {}^1\tau_{ij} \delta {}^1\eta_{ij} {}^1dV = {}^2\mathfrak{R} - \int_{1V} {}^1\tau_{ij} \delta {}^1e_{ij} {}^1dV \quad (3.59)$$

sendo ${}^0C_{ijrs}$ e ${}^1C_{ijrs}$ tensores incrementais das propriedades do material na configuração C_1 referidas às configurações C_0 e C_1 , respectivamente; ${}^0S_{ij}$ e ${}^1\tau_{ij}$ são valores conhecidos das tensões de Piola-Kirchhoff e de Cauchy na configuração C_1 ; e ${}^0e_{ij}$, ${}^0\eta_{ij}$ e ${}^1e_{ij}$, ${}^1\eta_{ij}$ são as deformações incrementais lineares e não-lineares referidas às configurações C_0 e C_1 , respectivamente.

Tabela 3.1: Formulação Lagrangeana Total (Bathe, 1982).

1. *Equação de Movimento*

$$\int_{0V} {}^2_0S_{ij} \delta {}^2_0\varepsilon_{ij} {}^0dV = {}^2\mathfrak{R}$$

2. *Decomposições Incrementais*

(a) Tensões

$${}^2_0S_{ij} = {}^1_0S_{ij} + {}^0_0S_{ij}$$

(b) Deformações

$${}^2_0\varepsilon_{ij} = {}^1_0\varepsilon_{ij} + {}^0_0\varepsilon_{ij}$$

$${}^0_0\varepsilon_{ij} = {}^0_0e_{ij} + {}^0_0\eta_{ij}$$

$${}^0_0e_{ij} = \frac{1}{2} ({}^0_0d_{i,j} + {}^0_0d_{j,i} + {}^1_0d_{k,i} {}^0_0d_{k,j} + {}^0_0d_{k,i} {}^1_0d_{k,j})$$

$${}^0_0\eta_{ij} = \frac{1}{2} {}^0_0d_{k,i} {}^0_0d_{k,j}$$

3. *Equação de Movimento com Decomposições Incrementais*

Observando que $\delta {}^2_0\varepsilon_{ij} = \delta {}^1_0\varepsilon_{ij} + \delta {}^0_0\varepsilon_{ij}$, a equação de movimento é:

$$\int_{0V} {}^0_0S_{ij} \delta {}^1_0\varepsilon_{ij} {}^0dV + \int_{0V} {}^1_0S_{ij} \delta {}^0_0\varepsilon_{ij} {}^0dV = {}^2\mathfrak{R} - \int_{0V} {}^1_0S_{ij} \delta {}^0_0e_{ij} {}^0dV$$

4. *Linearização da Equação de Movimento*

Usando as aproximações ${}^0_0S_{ij} = {}^0_0C_{ijrs} {}^0_0e_{rs}$ e $\delta {}^0_0\varepsilon_{ij} = \delta {}^0_0e_{ij}$ obtém-se a seguinte equação de movimento aproximada:

$$\int_{0V} {}^0_0C_{ijrs} {}^0_0e_{rs} \delta {}^0_0e_{ij} {}^0dV + \int_{0V} {}^1_0S_{ij} \delta {}^0_0\eta_{ij} {}^0dV = {}^2\mathfrak{R} - \int_{0V} {}^1_0S_{ij} \delta {}^0_0e_{ij} {}^0dV$$

Tabela 3.2: Formulação Lagrangeana Atualizada (Bathe, 1982).

1. *Equação de Movimento*

$$\int_{1V} {}^2_1S_{ij} \delta {}^2_1\varepsilon_{ij} {}^1dV = {}^2\mathfrak{R}$$

2. *Decomposições Incrementais*

(a) Tensões

$${}^2_1S_{ij} = {}^1\tau_{ij} + {}^1S_{ij} \quad \text{Nota-se que } {}^1_1S_{ij} \equiv {}^1\tau_{ij}$$

(b) Deformações

$${}^2_1\varepsilon_{ij} = {}^1\varepsilon_{ij}$$

$${}^1\varepsilon_{ij} = {}^1e_{ij} + {}^1\eta_{ij}$$

$${}^1e_{ij} = \frac{1}{2} ({}^1d_{i,j} + {}^1d_{j,i})$$

$${}^1\eta_{ij} = \frac{1}{2} ({}^1d_{k,i} - {}^1d_{k,j})$$

3. *Equação de Movimento com Decomposições Incrementais*

$$\int_{1V} {}^1S_{ij} \delta {}^1\varepsilon_{ij} {}^1dV + \int_{1V} {}^1\tau_{ij} \delta {}^1\eta_{ij} {}^1dV = {}^2\mathfrak{R} - \int_{1V} {}^1\tau_{ij} \delta {}^1e_{ij} {}^1dV$$

4. *Linearização da Equação de Movimento*

Usando as aproximações ${}^1S_{ij} = {}^1C_{ijrs} {}^1e_{rs}$ e $\delta {}^1\varepsilon_{ij} = \delta {}^1e_{ij}$ obtém-se a seguinte equação de movimento aproximada:

$$\int_{1V} {}^1C_{ijrs} {}^1e_{rs} \delta {}^1e_{ij} {}^1dV + \int_{1V} {}^1\tau_{ij} \delta {}^1\eta_{ij} {}^1dV = {}^2\mathfrak{R} - \int_{1V} {}^1\tau_{ij} \delta {}^1e_{ij} {}^1dV$$

Comparando-se as duas formulações, observa-se que elas são análogas e que a única diferença teórica entre elas é a escolha de diferentes configurações de referência para as variáveis estáticas e cinemáticas. Utilizando-se tensores constitutivos adequados, serão obtidos resultados idênticos com as duas formulações.

Também deve-se observar que as decomposições incrementais das tensões e deformações só são possíveis porque em cada uma das formulações todas as tensões e deformações são referidas à mesma configuração.

A escolha entre a formulação Lagrangeana total e a atualizada depende, na prática, da sua eficiência computacional relativa, o que por sua vez depende do elemento finito e da relação constitutiva utilizada. Porém, em geral, observa-se que as deformações incrementais lineares ${}_0e_{ij}$ na formulação Lagrangeana total contêm um efeito devido ao deslocamento inicial que leva a uma matriz de transformação deformações-deslocamentos mais complexa do que na formulação atualizada.

Através das equações (3.58) e (3.59) pode-se calcular o incremento dos deslocamentos, que é então usado para se estimar uma aproximação para os deslocamentos, deformações e tensões na configuração C_2 . Os deslocamentos aproximados em C_2 são obtidos pela soma dos incrementos aos deslocamentos em C_1 . As deformações aproximadas podem ser calculadas através das relações apresentadas nas tabelas 3.1 e 3.2. Já as tensões aproximadas dependem da relação constitutiva utilizada.

Tendo estas grandezas estimadas, calcula-se a diferença entre os valores dos trabalhos virtuais externo e interno, ou seja, o erro da aproximação devido à linearização. Repete-se então o processo de obtenção destas aproximações até que o erro obtido seja menor que um valor pré-estabelecido. As equações correspondentes à iteração k ($k = 1, 2, 3, \dots$) para as formulações Lagrangeanas Total e Atualizada, são, respectivamente:

$$\begin{aligned}
\int_{0V} {}_0C_{ijrs} \Delta {}_0e_{rs}^{(k)} \delta {}_0e_{ij} {}^0dV + \int_{0V} {}_0S_{ij} \delta \Delta {}_0\eta_{ij}^{(k)} {}^0dV = \\
= {}^2\mathfrak{R} - \int_{0V} {}_0^2S_{ij}^{(k-1)} \delta {}_0^2\varepsilon_{ij}^{(k-1)} {}^0dV
\end{aligned} \tag{3.60}$$

$$\begin{aligned}
\int_{1V} {}_1C_{ijrs} \Delta {}_1e_{rs}^{(k)} \delta {}_1e_{ij} {}^1dV + \int_{1V} {}_1\tau_{ij} \delta \Delta {}_1\eta_{ij}^{(k)} {}^1dV = \\
= {}^2\mathfrak{R} - \int_{2V^{(k-1)}} {}_2\tau_{ij}^{(k-1)} \delta {}_2e_{ij}^{(k-1)} {}^2dV
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Os deslocamentos são atualizados da seguinte forma:

$${}^2d_i^{(k)} = {}^2d_i^{(k-1)} + \Delta d_i^{(k)}; \quad {}^2d^{(0)} = {}^1d \tag{3.62}$$

As equações (3.60) a (3.62) correspondem ao método iterativo de Newton-Raphson modificado. A iteração é feita sem se atualizar as componentes dos tensores constitutivos e de tensão do lado esquerdo das equações, o que corresponde ao uso de uma matriz de rigidez tangente constante durante toda a iteração.

Na formulação apresentada, assumiu-se que o trabalho virtual externo, \mathfrak{R} , é calculado pela relação expressa em (3.57). Isto faz com que sejam contemplados apenas alguns tipo de carregamento, como cargas concentradas cuja direção não se altera em função das deformações. Utilizando-se elementos finitos isoparamétricos, uma outra importante forma de carregamento pode ser modelada de maneira análoga à apresentada em (3.57): o carregamento devido às forças inerciais, de extrema importância na análise dinâmica. Neste caso, tem-se:

$$\int_{2V} {}^2\rho {}^2\ddot{d}_i \delta d_i {}^2dV = \int_{0V} {}^0\rho {}^2\ddot{d}_i \delta d_i {}^0dV \tag{3.63}$$

podendo a matriz de massa ser avaliada usando-se a configuração inicial do corpo. Ou seja, na análise dinâmica, as matrizes de massa de elementos isoparamétricos podem ser calculadas anteriormente à solução iterativa.

Considerando-se um amortecimento viscoso linear e supondo possível associar alguma propriedade de amortecimento intrínseco ao material, a força de amortecimento é obtida pela relação:

$$f_v = a \, {}^1\dot{d}_i \quad (3.64)$$

sendo a uma constante.

De maneira análoga às forças inerciais, tem-se para as forças de amortecimento:

$$\int_{{}^2V} {}^2a \, {}^2\dot{d}_i \, \delta d_i \, {}^2dV = \int_{{}^0V} {}^0a \, {}^2\dot{d}_i \, \delta d_i \, {}^0dV \quad (3.65)$$

Assim como a matriz de massa, a matriz de amortecimento também pode ser avaliada segundo a configuração inicial do corpo e antes da primeira iteração.

Ao se fazer uma análise dinâmica em regime de grandes deslocamentos e deformações através de um método de integração explícita, as equações governantes para as formulações Lagrangeanas total e atualizada são, respectivamente:

$$\int_{{}^0V} {}^1S_{ij} \, \delta_0^1 \varepsilon_{ij} \, {}^0dV = {}^1\mathfrak{R} \quad (3.66)$$

$$\int_{{}^1V} {}^1\tau_{ij} \, \delta_1 e_{ij} \, {}^1dV = {}^1\mathfrak{R} \quad (3.67)$$

Nesta análise, o trabalho virtual externo, \mathfrak{R} , deve incluir as forças inerciais na configuração C_1 .

3.3 Discretização das Equações de Movimento

O princípio básico da análise não-linear utilizando a formulação paramétrica do Método dos Elementos Finitos é o mesmo da análise linear. Deve-se obter as funções de interpolação (funções de forma) para o elemento finito desejado e, a partir delas, calculam-se as matrizes necessárias para a análise.

É importante que se utilize as mesmas funções de interpolação para as coordenadas e para os deslocamentos durante todo intervalo de tempo analisado. Como as

novas coordenadas dos elementos são obtidas pela adição dos deslocamentos às coordenadas originais, o uso das mesmas funções de interpolação garante a consistência da solução.

Escrevendo no formato tradicional da formulação do Método dos Elementos Finitos as equações para o método iterativo de Newton-Raphson modificado deduzidas na seção anterior, tem-se (Bathe, 1982):

Para formulação Lagrangeana total:

Análise estática:

$$({}^1_0\mathbf{K}_L + {}^1_0\mathbf{K}_{NL}) \Delta \mathbf{d}^{(j)} = {}^2\mathbf{R} - {}^2_0\mathbf{F}^{(j-1)} \quad (3.68)$$

Análise dinâmica, integração temporal implícita:

$$\mathbf{M} {}^2\ddot{\mathbf{d}}^{(j)} + \mathbf{C} {}^2\dot{\mathbf{d}}^{(j)} + ({}^1_0\mathbf{K}_L + {}^1_0\mathbf{K}_{NL}) \Delta \mathbf{d}^{(j)} = {}^2\mathbf{R} - {}^2_0\mathbf{F}^{(j-1)} \quad (3.69)$$

Análise dinâmica, integração temporal explícita:

$$\mathbf{M} {}^1\ddot{\mathbf{d}}^{(j)} + \mathbf{C} {}^1\dot{\mathbf{d}}^{(j)} = {}^1\mathbf{R} - {}^1_0\mathbf{F} \quad (3.70)$$

Para formulação Lagrangeana atualizada:

Análise estática:

$$({}^1_1\mathbf{K}_L + {}^1_1\mathbf{K}_{NL}) \Delta \mathbf{d}^{(j)} = {}^2\mathbf{R} - {}^2_2\mathbf{F}^{(j-1)} \quad (3.71)$$

Análise dinâmica, integração temporal implícita:

$$\mathbf{M} {}^2\ddot{\mathbf{d}}^{(j)} + \mathbf{C} {}^2\dot{\mathbf{d}}^{(j)} + ({}^1_1\mathbf{K}_L + {}^1_1\mathbf{K}_{NL}) \Delta \mathbf{d}^{(j)} = {}^2\mathbf{R} - {}^2_2\mathbf{F}^{(j-1)} \quad (3.72)$$

Análise dinâmica, integração temporal explícita:

$$\mathbf{M} {}^1\ddot{\mathbf{d}}^{(j)} + \mathbf{C} {}^1\dot{\mathbf{d}}^{(j)} = {}^1\mathbf{R} - {}^1_1\mathbf{F} \quad (3.73)$$

Sendo:

- \mathbf{M} = Matriz de massa independente do tempo
- \mathbf{C} = Matriz de amortecimento independente do tempo
- ${}^1\mathbf{K}$ = Matriz de rigidez incremental de deformações lineares, não inclui os efeitos de deslocamentos iniciais
- ${}^1_0\mathbf{K}_L, {}^1_1\mathbf{K}_L$ = Matrizes de rigidez incrementais de deformações lineares
- ${}^1_0\mathbf{K}_{NL}, {}^1_1\mathbf{K}_{NL}$ = Matrizes de rigidez incrementais de deformações não-lineares
- ${}^2\mathbf{R}$ = Vetor de cargas nodais externas aplicadas na configuração C_2 ; também utilizado para a configuração C_1 na integração temporal explícita
- ${}^1\mathbf{F}, {}^1_0\mathbf{F}, {}^1_1\mathbf{F}$ = Vetores de forças nodais equivalentes às tensões nos elementos na configuração C_1 ; também utilizados para a configuração C_2 na iteração $(j - 1)$
- $\Delta\mathbf{d}^{(j)}$ = Vetor de incrementos dos deslocamentos nodais na j-ésima iteração: ${}^2\mathbf{d}^{(j)} = {}^2\mathbf{d}^{(j-1)} + \Delta\mathbf{d}^{(j)}$
- ${}^1\dot{\mathbf{d}}$ = Vetor de velocidades nodais na configuração C_1 ; também utilizado para a configuração C_2 na iteração $(j - 1)$
- ${}^1\ddot{\mathbf{d}}$ = Vetor de acelerações nodais na configuração C_1 ; também utilizado para a configuração C_2 na iteração $(j - 1)$

Na formulação acima, assumiu-se que o carregamento aplicado é independente da deformação, ou seja, o vetor de carregamentos pode ser calculado antes da análise incremental.

As matrizes apresentadas são calculadas como na análise linear. A tabela (3.3) apresenta um resumo das integrais consideradas e as matrizes correspondentes a elas. Apresenta-se apenas o vetor de forças nodais correspondentes às tensões nos elementos para a configuração C_1 , pois os vetores para a configuração C_2 e iteração i são calculados de maneira análoga.

No apêndice B são apresentadas as matrizes da tabela 3.3 para diversos tipos de elementos finitos de barra. As matrizes para elementos finitos paramétricos são reproduzidas no apêndice D.

Tabela 3.3: Matrizes para Elementos Finitos (Bathe, 1982).

| <i>Tipo de Análise</i> | <i>Integral</i> | <i>Matriz Correspondente</i> |
|-----------------------------------|--|---|
| | $\int_{0V} {}^0\rho {}^2\ddot{d}_i \delta d_i {}^0dV$ | $M {}^2\ddot{\mathbf{d}} = {}^0\rho \left(\int_{0V} N^T N {}^0dV \right) {}^2\ddot{\mathbf{d}}$ |
| Ambas Formulações | $\int_{0V} {}^0a {}^2\dot{d}_i \delta d_i {}^0dV$ | $C {}^2\dot{\mathbf{d}} = {}^0a \left(\int_{0V} N^T N {}^0dV \right) {}^2\dot{\mathbf{d}}$ |
| | ${}^2\mathfrak{R} = \int_{0S} {}^2f_i^S \delta d_i^S {}^0dS + \int_{0V} {}^2f_i^B \delta d_i {}^0dV$ | ${}^2\mathbf{R} = \int_{0S} N_S^T {}^2\mathbf{f}^S {}^0dS + \int_{0V} N^T {}^2\mathbf{f}^B {}^0dV$ |
| | $\int_{0V} {}^0C_{ijrs} {}^0e_{rs} \delta {}^0e_{ij} {}^0dV$ | ${}^1\mathbf{K}_L \hat{\mathbf{d}} = \left(\int_{0V} {}^1\mathbf{B}_L^T {}^0\mathbf{E} {}^1\mathbf{B}_L {}^0dV \right) \hat{\mathbf{d}}$ |
| Formulação Lagrangeana Total | $\int_{0V} {}^1S_{ij} \delta {}^0\eta_{ij} {}^0dV$ | ${}^1\mathbf{K}_{NL} \hat{\mathbf{d}} = \left(\int_{0V} {}^1\mathbf{B}_{NL}^T {}^1\mathbf{S} {}^1\mathbf{B}_{NL} {}^0dV \right) \hat{\mathbf{d}}$ |
| | $\int_{0V} {}^1S_{ij} \delta {}^0e_{ij} {}^0dV$ | ${}^1\mathbf{F} = \int_{0V} {}^1\mathbf{B}_L^T {}^1\hat{\mathbf{S}} {}^0dV$ |
| | $\int_{1V} {}^1C_{ijrs} {}^1e_{rs} \delta {}^1e_{ij} {}^1dV$ | ${}^1\mathbf{K}_L \hat{\mathbf{d}} = \left(\int_{1V} {}^1\mathbf{B}_L^T {}^1\mathbf{E} {}^1\mathbf{B}_L {}^1dV \right) \hat{\mathbf{d}}$ |
| Formulação Lagrangeana Atualizada | $\int_{1V} {}^1\tau_{ij} \delta {}^1\eta_{ij} {}^1dV$ | ${}^1\mathbf{K}_{NL} \hat{\mathbf{d}} = \left(\int_{1V} {}^1\mathbf{B}_{NL}^T {}^1\boldsymbol{\tau} {}^1\mathbf{B}_{NL} {}^1dV \right) \hat{\mathbf{d}}$ |
| | $\int_{1V} {}^1\tau_{ij} \delta {}^1e_{ij} {}^1dV$ | ${}^1\mathbf{F} = \int_{1V} {}^1\mathbf{B}_L^T {}^1\hat{\boldsymbol{\tau}} {}^1dV$ |

A seguinte notação é utilizada na tabela 3.3:

| | | |
|--|---|---|
| \mathbf{N}_S, \mathbf{N} | = | Matrizes de funções de forma de superfície e de volume |
| ${}^2_0\mathbf{f}^S, {}^2_0\mathbf{f}^B$ | = | Vetores de forças de superfície e de volume definidos por unidade de área e por unidade de volume no tempo 0 |
| $\mathbf{B}_L, {}^1_0\mathbf{B}_L, {}^1_1\mathbf{B}_L$ | = | Matrizes de transformação deformações-deslocamentos lineares; \mathbf{B}_L é igual a ${}^1_0\mathbf{B}_L$ quando os efeitos de deslocamentos iniciais são desprezados |
| ${}^1_0\mathbf{B}_{NL}, {}^1_1\mathbf{B}_{NL}$ | = | Matrizes de transformação deformações-deslocamentos não-lineares |
| \mathbf{E} | = | Matriz da relação tensão-deformação do material (incremental ou total) |
| ${}^0\mathbf{E}, {}^1\mathbf{E}$ | = | Matrizes incrementais da relação tensão-deformação do material |
| ${}^0\boldsymbol{\tau}, {}^1\hat{\boldsymbol{\tau}}$ | = | Matriz e vetor das tensões de Cauchy |
| ${}^t_0\mathbf{S}, {}^1\hat{\mathbf{S}}$ | = | Matriz e vetor das tensões do segundo tensor de Piola-Kirchhoff |

Para o cálculo computacional destas matrizes, utiliza-se um algoritmo de integração numérica, como a *Quadratura de Gauss*. Os métodos de integração numérica adotados neste trabalho são apresentados no apêndice E.

Capítulo 4

MÉTODOS DE SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO NÃO-LINEARES

Em uma análise estática, ao se resolver o sistema de equações de equilíbrio não-lineares, obtém-se uma *configuração de equilíbrio* ou um *ponto de equilíbrio*. Ou seja, encontram-se os deslocamentos correspondentes ao carregamento aplicado. Entretanto, é usual o cálculo da *trajetória de equilíbrio* da estrutura analisada. Esta trajetória é o conjunto de pontos de equilíbrio, cada ponto correspondendo a um par diferente de carregamento e deslocamento. Para isso, utilizam-se os denominados *métodos de controle*, que serão explicados neste capítulo. Na análise dinâmica, a obtenção de trajetórias de equilíbrio perde o sentido, uma vez que a carga varia ao longo do tempo. Neste caso, obtém-se a *resposta da estrutura* no intervalo temporal desejado.

Neste capítulo, são apresentados os métodos de solução das equações de equilíbrio não-lineares para os casos estático e dinâmico, assim como os métodos de obtenção da trajetória de equilíbrio para o primeiro caso.

Para melhor visualização das fórmulas, os subscritos e sobrescritos à esquerda serão omitidos. Os sobrescritos à direita indicam o passo no qual a grandeza é calculada, seja ele um passo de tempo (análise dinâmica) ou um incremento do fator de carga (análise estática). Analogamente, os subscritos à direita indicam a iteração

na qual a grandeza é calculada.

4.1 Análise Estática

4.1.1 Obtenção de um ponto de equilíbrio

Para obter uma configuração de equilíbrio, é necessário realizar um processo incremental iterativo, sendo o mais comum o método de Newton-Raphson, esquematizado na figura 4.1. Este método consiste em resolver a equação de equilíbrio incremental do sistema (Equação (4.1)) até que o erro encontrado seja menor que um valor pré-estabelecido.

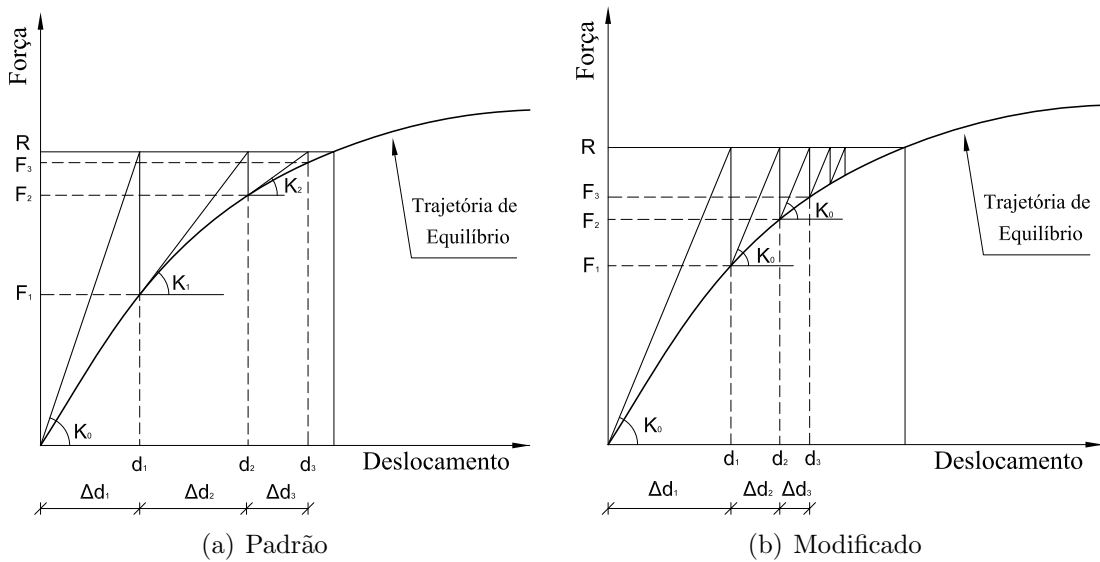


Figura 4.1: Método de Newton-Raphson.

Sendo $\mathbf{K} = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_{NL}$ a matriz de rigidez incremental, ou *matriz de rigidez tangente*, tem-se:

$$\mathbf{K}_{j-1} \Delta \mathbf{d}_j = \mathbf{R} - \mathbf{F}_{j-1} \quad (4.1)$$

Para a obtenção de um único ponto de equilíbrio, parte-se das condições iniciais $\mathbf{F}_{j-1} = 0$ e $\mathbf{K}_{j-1} = \mathbf{K}_L$.

O método de Newton-Raphson padrão (Figura 4.1(a)) pressupõe que a matriz de rigidez tangente é recalculada a cada iteração. Já no método de Newton-Raphson

modificado (Figura 4.1(b)), esta matriz é calculada apenas no início de cada passo, permanecendo constante durante todo ele.

Bathe (1982) recomenda a utilização do método iterativo de Newton-Raphson modificado, pois ele demanda menor esforço computacional. Entretanto, por manter a rigidez constante ao longo do passo, mais iterações são necessárias para se obter o equilíbrio e as chances de divergência da solução são maiores.

4.1.2 Obtenção das trajetórias de equilíbrio

Conforme Fuina (2004), a representação do comportamento estático não-linear de estruturas no espaço parâmetro de carga-deslocamentos envolve fenômenos de aumento de deslocamentos com aumentos de cargas ou mesmo decréscimo de deslocamentos com aumentos de cargas, como mostram as trajetórias de equilíbrio da figura 4.2.

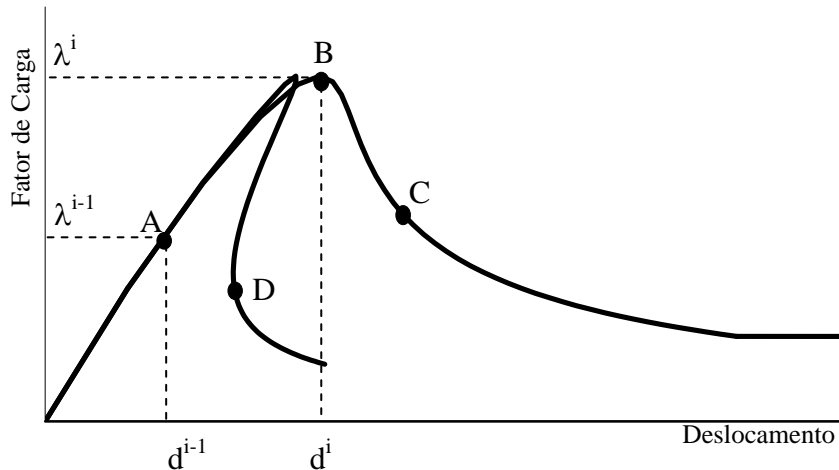


Figura 4.2: Trajetórias de equilíbrio típicas em problemas não-lineares (Fuina, 2004).

Na análise não-linear de uma estrutura, deseja-se obter trajetórias de equilíbrio para determinados graus de liberdade da discretização, executando-se um processo incremental-iterativo nas variáveis do problema, que é necessário para resolver o sistema de $n + 1$ incógnitas (n deslocamentos incrementais e um incremento no fator de carga) e $n + 1$ equações (n equações de equilíbrio e uma equação de restrição).

Assim, dado um campo de deslocamentos \mathbf{d} e um fator de carga proporcional λ , equivalentes a um ponto da trajetória de equilíbrio (ponto A na figura 4.2), deseja-se encontrar outro ponto de equilíbrio (ponto B na figura 4.2) de modo que a variação de determinadas grandezas do problema no passo incremental (do ponto A ao ponto B) seja controlada.

Para a obtenção da trajetória completa, deve-se variar o fator de carga de maneira a obter diversos pontos de equilíbrio. Cada incremento deste fator de carga é um passo da solução. Dentro de cada passo, efetuam-se diversas iterações até ser obtido próximo o ponto de equilíbrio.

Diferentemente do mostrado na figura 4.1, o processo iterativo não mais se inicia na origem, mas na configuração de equilíbrio obtida para o passo anterior.

Sendo $\delta\lambda_j^{(i)}$ o incremento do fator de cargas na iteração j do passo i e \mathbf{P} um vetor de cargas de referência, tem-se que:

$$\delta\lambda_j^{(i)} \mathbf{P} = \mathbf{R}_j^{(i)} - \mathbf{R}_{j-1}^{(i)} \quad (4.2)$$

Define-se o vetor de forças residuais da iteração $j - 1$ do passo i , $\mathbf{Q}_{j-1}^{(i)}$ como:

$$\mathbf{Q}_{j-1}^{(i)} = \mathbf{R}_{j-1}^{(i)} - \mathbf{F}_{j-1}^{(i)} \quad (4.3)$$

Substituindo (4.2) e (4.3) em (4.1), tem-se para a iteração j do passo i a seguinte equação de equilíbrio incremental:

$$\mathbf{K}_{j-1}^{(i)} \delta\mathbf{d}_j^{(i)} = \delta\lambda_j^{(i)} \mathbf{P} + \mathbf{Q}_{j-1}^{(i)} \quad (4.4)$$

em que:

- $\mathbf{K}_{j-1}^{(i)}$ = Matriz de rigidez tangente na iteração $j - 1$ do passo i , função do campo de deslocamentos $\mathbf{d}_{j-1}^{(i)}$
- $\delta\mathbf{d}_j^{(i)}$ = Vetor deslocamentos incrementais da iteração j do passo i

O diagrama de atividades da figura 4.3 mostra os principais passos do algoritmo genérico proposto por Yang e Shieh (1990) para solução de equações incrementais

de equilíbrio. O procedimento que se refere à obtenção do parâmetro de carga $\delta\lambda_j^{(i)}$ depende do método de controle adotado.

Diferentes métodos incrementais têm sido empregados para análise não-linear de estruturas, destacando-se os métodos de *controle de carga*, de *controle direto de deslocamento* (Batoz e Dhat, 1979), de *controle de comprimento de arco* (Ricks, 1972, 1979; Ramm, 1981; Crisfield, 1981, 1983), de *controle de deslocamento generalizado* (Yang e Shieh, 1990), de *controle de trabalho* (Yang e McGuire, 1985) e o de *controle de resíduo ortogonal* (Krenk e Hededal, 1993; Krenk, 1995). A descrição e análise destes métodos não fazem parte do escopo deste trabalho, podendo ser encontradas na literatura citada.

A figura 4.4 apresenta graficamente alguns destes métodos.

O método de controle de cargas (Figura 4.4(a)) possui a carga externa incrementada de um valor constante somente na primeira iteração ($j = 1$) de cada passo. Para as demais iterações, ($j > 1$), o incremento de carga é feito igual a zero, o que torna o carregamento externo constante dentro do passo. Assim, a utilização deste método falha na passagem por pontos limites.

Mesmo utilizando o método de controle direto de deslocamentos (Figura 4.4(b)) não é possível a descrição de trajetórias de equilíbrio pós-crítico, em que ocorra redução de carga acompanhada de redução de deslocamentos, uma vez que este método supõe que as iterações são processadas a um deslocamento constante, cujo parâmetro de controle é uma componente de deslocamento previamente escolhida.

Para solucionar as dificuldades destes métodos, o uso de combinações de deslocamentos e fator de carga para controlar a trajetória de iteração tem sido adotado nos métodos de controle de comprimento de arco (Figura 4.4(c)).

Nos métodos de comprimento de arco, o processo iterativo é controlado através de uma combinação geométrica entre as variáveis deslocamentos e fator de carga proporcional. Dentre as combinações mais utilizadas destacam-se aquelas em que a trajetória de iteração é ortogonal à tangente inicial (Ricks, 1972, 1979) ou à tangente

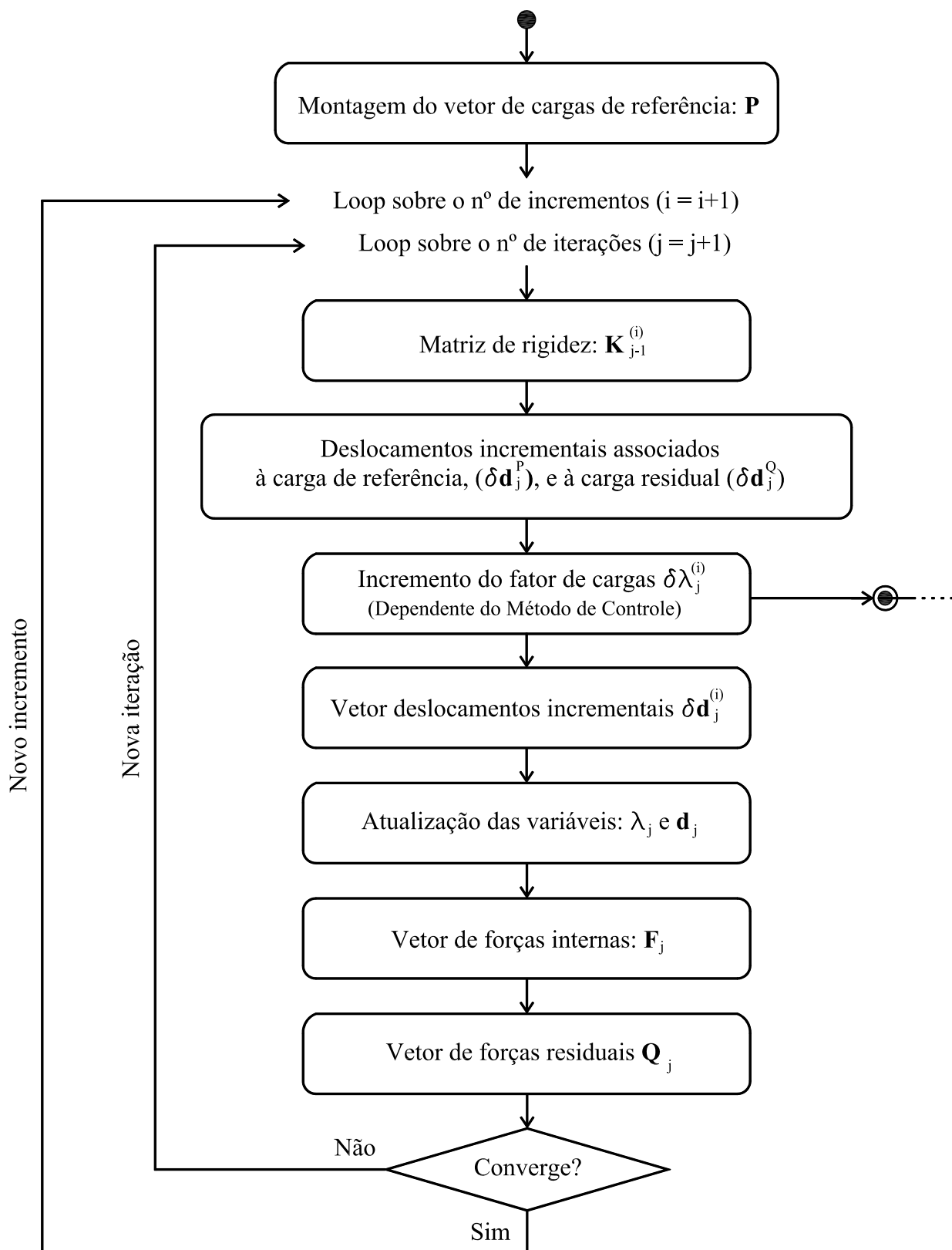


Figura 4.3: Diagrama de atividades do algoritmo genérico para métodos de controle (Fuina, 2004).

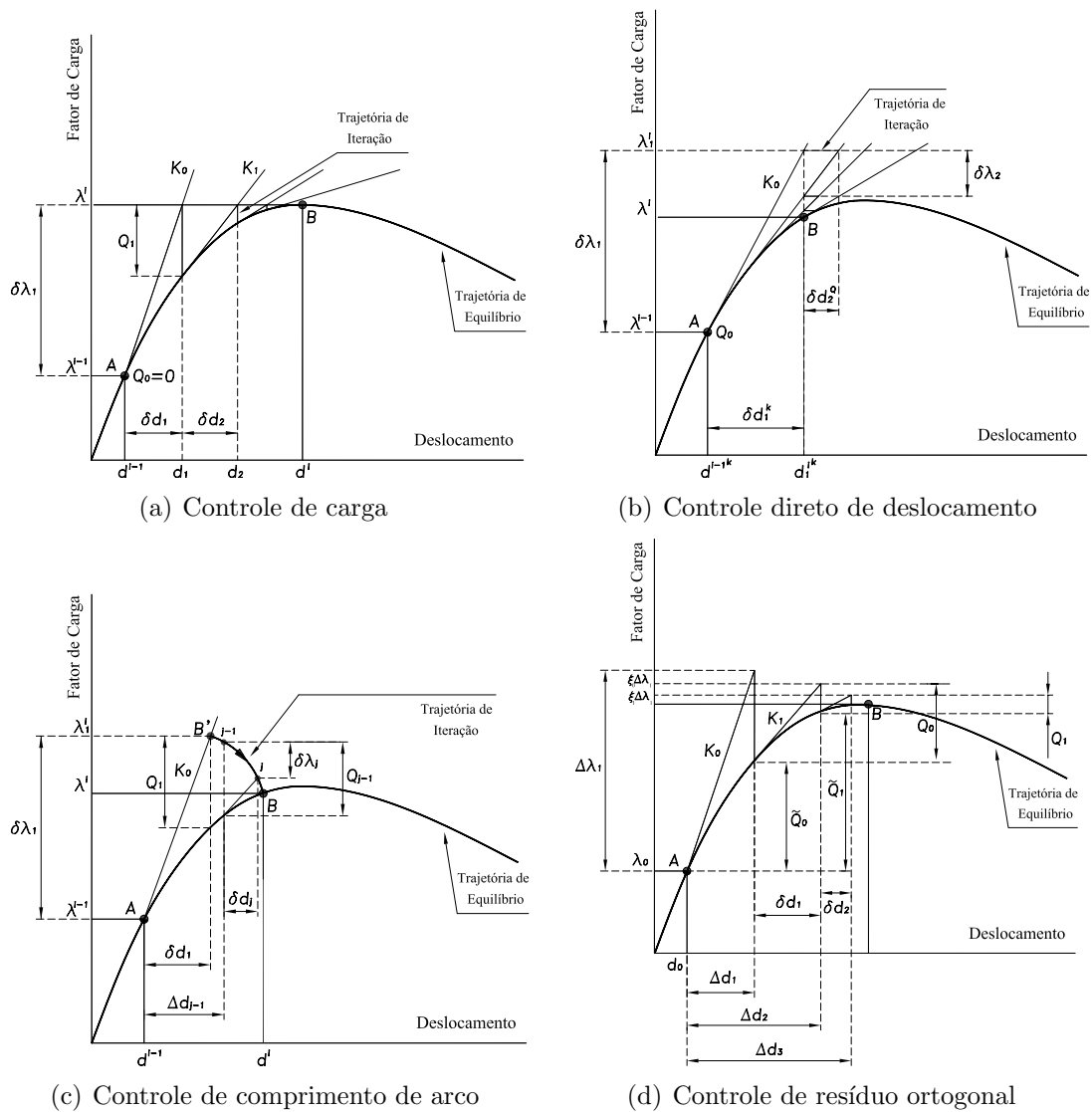


Figura 4.4: Processos incrementais iterativos (Fuina, 2004).

da iteração anterior (Ramm, 1981) ou ainda em que trajetória de iteração é um arco de circunferência (Crisfield, 1981, 1983).

4.2 Análise Dinâmica

A obtenção da resposta dinâmica não-linear de um modelo de elementos finitos é feita mesclando-se as técnicas de integração temporal apresentadas no capítulo 2 e o método iterativo de Newton-Raphson.

Para considerar os efeitos dinâmicos, Bathe (1982) propõe o uso do *método*

Newmark- β para integração implícita e o *método da diferença central* para integração explícita. Craig Jr. (1987) recomenda o uso de métodos de integração explícita por serem mais simples computacionalmente. Apesar dos métodos explícitos exigirem um menor esforço computacional, será adotado neste trabalho o método *Newmark- β* com a variação *Hilber- α* , recomendado por Weaver Jr. e Johnston (1987) e apresentado na seção 2.4.

Para contemplar os efeitos não-lineares, altera-se ligeiramente a formulação apresentada no capítulo 2, obtendo as seguintes fórmulas:

$$\widetilde{\mathbf{K}}^{(i)} \Delta \mathbf{d}^{(i)} = \Delta \widetilde{\mathbf{F}}^{(i)} \quad (4.5)$$

$$\widetilde{\mathbf{K}}^{(i)} = (1 + \alpha) \mathbf{K}^{(i)} + \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{C} \quad (4.6)$$

$$\Delta \widetilde{\mathbf{F}}^{(i)} = \Delta \mathbf{F}^{(i)} + \mathbf{M} \mathbf{Q}^{(i)} + \mathbf{C} \mathbf{R}^{(i)} + \alpha \widetilde{\mathbf{K}}^{(i)} \Delta \mathbf{d}^{(i-1)} \quad (4.7)$$

$$\mathbf{Q}^{(i)} = \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{d}}^{(i)} + \frac{1}{2\beta} \ddot{\mathbf{d}}^{(i)} \quad (4.8)$$

$$\mathbf{R}^{(i)} = \frac{\gamma}{\beta} \dot{\mathbf{d}}^{(i)} + \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \Delta t \ddot{\mathbf{d}}^{(i)} \quad (4.9)$$

$$\Delta \dot{\mathbf{d}}^{(i)} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta \mathbf{d}^{(i)} - \mathbf{R}^{(i)} \quad (4.10)$$

$$\Delta \ddot{\mathbf{d}}^{(i)} = \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} \Delta \mathbf{d}^{(i)} - \mathbf{Q}^{(i)} \quad (4.11)$$

$$\mathbf{d}^{(i+1)} = \mathbf{d}^{(i)} + \Delta \mathbf{d}^{(i)} \quad (4.12)$$

$$\dot{\mathbf{d}}^{(i+1)} = \dot{\mathbf{d}}^{(i)} + \Delta \dot{\mathbf{d}}^{(i)} \quad (4.13)$$

$$\ddot{\mathbf{d}}^{(i+1)} = \ddot{\mathbf{d}}^{(i)} + \Delta \ddot{\mathbf{d}}^{(i)} \quad (4.14)$$

A resolução do sistema expresso por (4.5) é feita através do método de Newton-Raphson padrão ou modificado, cuja formulação é apresentada a seguir.

No início de cada passo determinam-se os valores iniciais:

$$\Delta \mathbf{R}_1 = \Delta \widetilde{\mathbf{F}}^{(i)} \quad \widetilde{\mathbf{K}}_0^{(i)} = \widetilde{\mathbf{K}}^{(i)} \quad (4.15)$$

Procede-se então a cada iteração da seguinte forma:

$$\widetilde{\mathbf{K}}_{j-1}^{(i)} \delta \mathbf{d}_j = \Delta \mathbf{R}_j \quad (4.16)$$

$$\Delta \mathbf{d}_j^{(i)} = \Delta \mathbf{d}_{j-1}^{(i)} + \delta \mathbf{d}_j \quad (4.17)$$

$$\Delta \mathbf{f}_j = \widetilde{\mathbf{K}}_{j-1}^{(i)} \delta \mathbf{d}_j + (\widetilde{\mathbf{K}}_{j-1}^{(i)} - \mathbf{K}^{(i)}) \delta \mathbf{d}_j \quad (4.18)$$

$$\Delta \mathbf{R}_{j+1} = \Delta \mathbf{R}_j - \Delta \mathbf{f}_j \quad (4.19)$$

Para o método de Newton-Raphson padrão, a matriz de rigidez tangente deve ser atualizada a cada iteração.

No fim de cada iteração, deve-se verificar a convergência da solução. Para isso, pode-se adotar várias abordagens. Uma delas é verificar se a razão entre as forças residuais, $\Delta \mathbf{R}_{j+1}$, e as forças efetivas para o passo, $\Delta \widetilde{\mathbf{F}}^{(i)}$, é menor que um limite de tolerância pré-definido, da forma:

$$\frac{\| \Delta \mathbf{R}_{j+1} \|}{\| \Delta \widetilde{\mathbf{F}}^{(i)} \|} < \textit{tolerância} \quad (4.20)$$

Uma outra abordagem verifica se a razão entre a norma do vetor de deslocamentos incrementais da iteração e a norma do vetor de deslocamentos incrementais do passo é menor que um limite de tolerância especificado, da forma:

$$\frac{\| \delta \mathbf{d}_j \|}{\| \Delta \mathbf{d}_j^{(i)} \|} < \textit{tolerância} \quad (4.21)$$

Caso a solução não tenha convergido, passa-se para a próxima iteração. Caso contrário, o equilíbrio no passo de tempo corrente foi encontrado. Calculam-se, então, as novas acelerações, velocidades e deslocamentos, conforme as equações (4.10) a (4.14).

Após calculados os deslocamentos, as velocidades e as acelerações, passa-se para o próximo passo de tempo e repete-se o procedimento. O algoritmo correspondente a esta formulação é apresentado na figura 4.5.

É importante ressaltar que, como o carregamento varia ao longo do tempo, podendo ter seu valor aumentado ou diminuído de um passo de tempo ao outro, o incremento do deslocamento pode ser negativo. A cada passo de tempo encontra-se um ponto de equilíbrio sobre a trajetória e o resultado encontrado é geralmente apresentado em um gráfico deslocamento versus tempo, denominado *resposta do sistema*.

Trabalhos recentes, como os de Rao (2002) e Suk et al. (2003), apresentam modificações neste procedimento, de forma a reduzir o número de iterações e conseqüentemente reduzir o esforço computacional. Tais modificações podem ser facilmente inseridas no algoritmo apresentado após sua implementação.

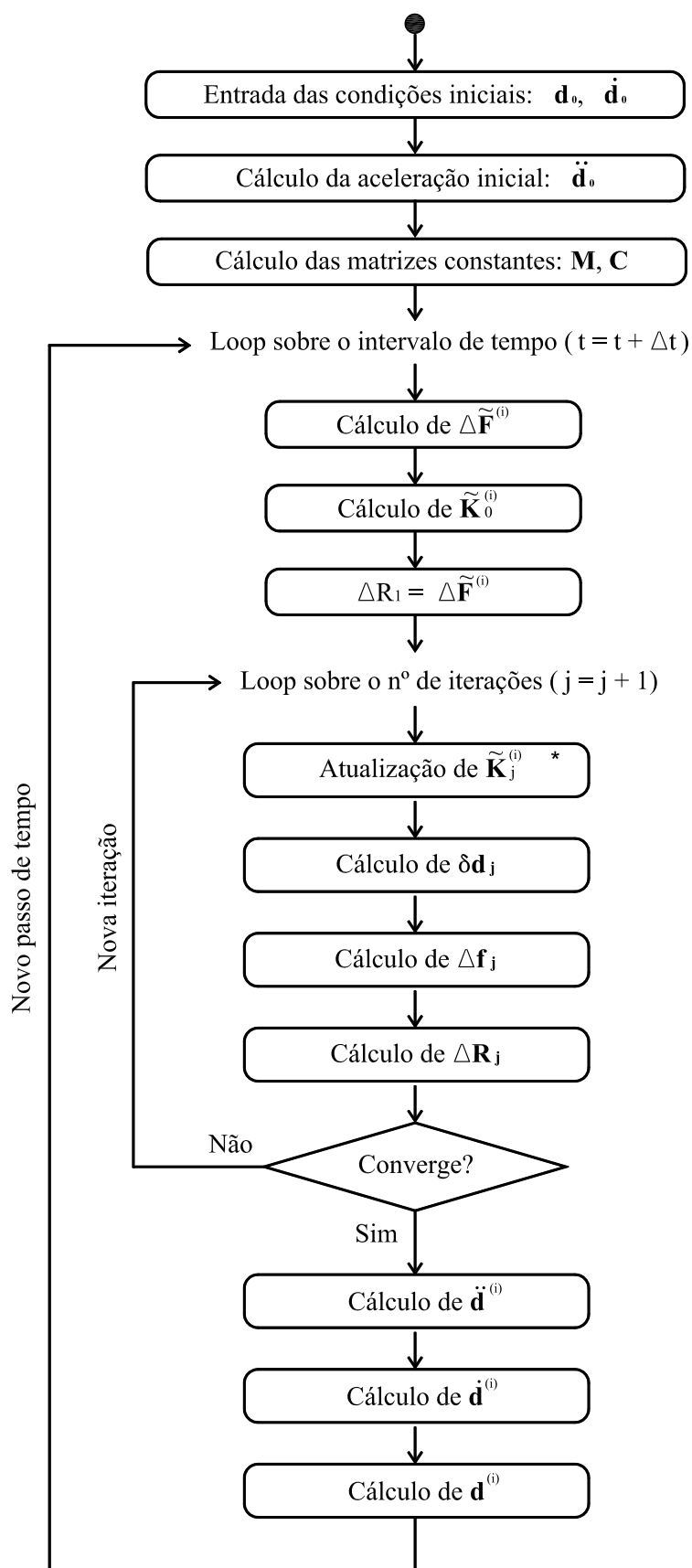


Figura 4.5: Diagrama de atividades do algoritmo para análise dinâmica geometricamente não-linear.

Capítulo 5

PROJETO ORIENTADO A OBJETOS DO NÚCLEO NUMÉRICO DO SISTEMA INSANE

O sistema INSANE é composto por três grandes aplicações: pré-processador, processador e pós-processador. O pré e o pós-processador são aplicações gráficas interativas que disponibilizam, respectivamente, ferramentas de pré e pós-processamento de diferentes modelos discretos. O processador é a aplicação que representa o núcleo numérico do sistema e é o responsável pela obtenção dos resultados de diferentes modelos discretos de análise estrutural.

Neste capítulo, é apresentado o projeto orientado a objetos do núcleo numérico do sistema INSANE, tendo como principal enfoque as formulações propostas neste trabalho. São identificadas as principais classes e instâncias, bem como suas respectivas responsabilidades, destacando-se os atributos e métodos de maior relevância. Para isso, são utilizados diagramas de classes, que permitem conhecer a hierarquia das mesmas e como elas se comunicam para desempenhar suas funções. Estes diagramas seguem a proposta da *Unified Modeling Language* (UML), linguagem padronizada para a modelagem de sistemas de software orientados a objetos (Guedes, 2005).

Para melhor visualização das contribuições deste trabalho ao núcleo numérico

do INSANE, as classes modificadas durante o desenvolvimento são representadas em amarelo e as classes criadas em verde, conforme exemplificado na figura 5.1. Algumas classes necessárias à análise dinâmica foram adaptadas do trabalho desenvolvido por Germanio (2005) e são representadas em azul.



Figura 5.1: Exemplo de representação em UML.

5.1 Tecnologias Utilizadas

Cada uma das aplicações componentes do INSANE é implementada segundo o paradigma de programação orientada a objetos (POO). Esta metodologia é baseada em classes e objetos. Os dados e métodos são encapsulados nos objetos, sendo eles intimamente amarrados entre si. Os objetos apresentam a propriedade de ocultar informações. Ou seja, apesar de eles se comunicarem uns com os outros através de interfaces bem definidas, geralmente um objeto não tem permissão para conhecer como outros objetos são implementados. Isto permite que os programas possam ser divididos em módulos independentes, permitindo o trabalho em conjunto de diversas pessoas em diferentes locais e épocas. Desta forma, a manutenção e expansão do código ficam facilitadas.

A linguagem de programação Java é uma linguagem orientada a objetos, apresentando todas as vantagens deste tipo de programação. Além disso, ela foi desenvolvida de forma a ser independente de plataforma. Essa característica é denominada portabilidade e é um dos principais atrativos desta linguagem. Um programa desenvolvido em Java pode ser compilado em um sistema operacional e executado em outro, sem prejuízos. Devido a todas as vantagens citadas acima, escolheu-se utilizar a linguagem Java, que suporta o paradigma de programação orientada a objetos, para a implementação do sistema.

A persistência de dados entre os diversos segmentos da aplicação é feita através de arquivos XML, sigla esta que é uma abreviação de *eXtensible Markup Language*, ou seja, linguagem de marcação estendida. A XML é uma técnica para criar dados estruturados baseados em um arquivo texto. O que a difere de outras linguagens de marcação, como a HTML, é o fato de as regras de marcação serem definidas pelo programador, podendo ele fazê-las do modo que melhor o atenda. A *eXtensible Markup Language* está sendo adotada como padrão para troca de documentos através da internet. Com a tecnologia dos *Web Services*, praticamente qualquer software ou componente de software (orientado a objetos) pode ser utilizado remotamente, sendo necessário somente que as partes se comuniquem em XML. Assim, a opção de fazer a persistência dos dados em arquivos XML e a segmentação obtida pela utilização de POO permitem que o sistema ou partes deste seja utilizado através da internet.

5.2 Visão Geral

O núcleo numérico do INSANE é o responsável pela obtenção dos resultados de diferentes modelos discretos de análise estrutural. Sua atual implementação é o resultado dos trabalhos de Fonseca et al. (2004), Fuina (2004), Almeida (2005), Fonseca (2006) e Saliba (2007). Ele é formado por interfaces e classes abstratas que representam as diversas abstrações de uma resolução numérica de modelos discretos, cada qual com sua hierarquia de classes responsável por cumprir o seu devido papel no processamento. Sua organização é centrada nas relações entre as interfaces *Assembler*, *Model* e *Persistence*, além da classe abstrata *Solution* (Figura 5.2).

A interface *Assembler* é a responsável por montar o sistema matricial de segunda ordem com o qual é possível representar diversos tipos de problemas discretos:

$$\mathbf{A} \ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{B} \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{C} \mathbf{X} = \mathbf{R} - \mathbf{F} \quad (5.1)$$

em que \mathbf{X} é o vetor de variáveis de estado do problema; $\dot{\mathbf{X}}$ e $\ddot{\mathbf{X}}$ são os vetores com,

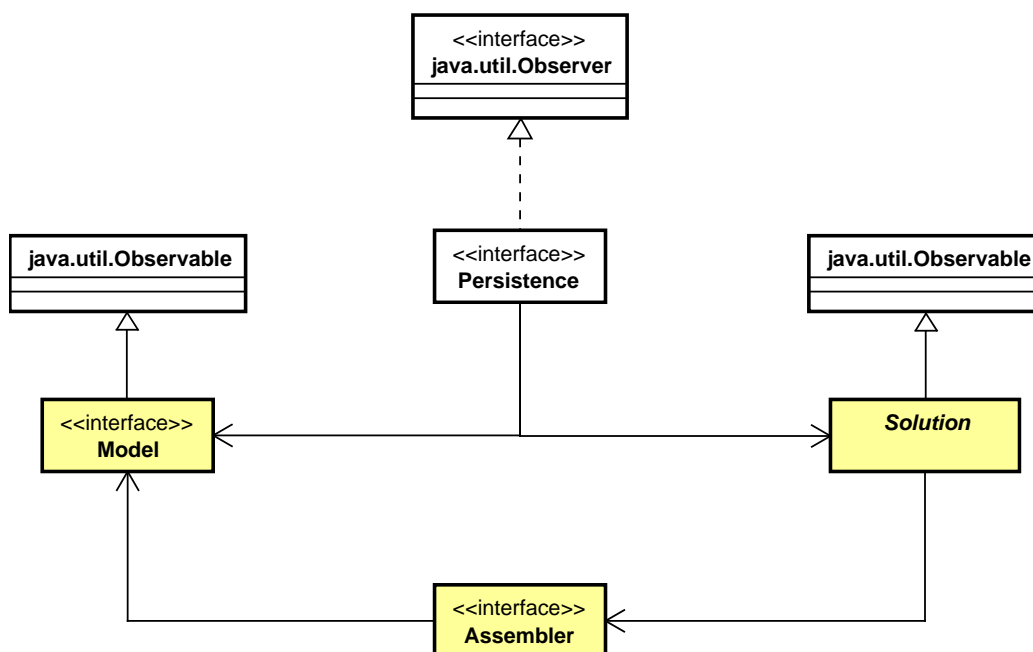


Figura 5.2: Organização do núcleo numérico do INSANE.

respectivamente, a primeira e a segunda variação temporal da variável de estado; \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} são as matrizes dos coeficientes, que podem ou não depender da variável de estado e suas derivadas; e \mathbf{R} e \mathbf{F} representam os termos independentes do sistema de equações.

A classe abstrata `Solution` (Figura 5.2) é quem desencadeia o processo de solução, possuindo os recursos necessários para resolver este sistema matricial, seja o sistema linear ou não-linear.

`Model` possui os dados relativos ao modelo discreto a ser analisado e fornece para `Assembler` todas as informações necessárias para montar a equação do modelo, que será resolvida por `Solution`.

Tanto `Model` como `Solution` se comunicam com a interface `Persistence`, que trata os dados de entrada e, principalmente, persiste os dados de saída para as demais aplicações sempre que observa alterações no estado do modelo discreto.

Este processo de observação de alterações ocorre segundo o padrão de projeto *Observer-Observable*, que é um mecanismo de propagação de mudanças. Quando um objeto dito *observador* (que implementa a interface `java.util.Observer`) é criado,

ele é inscrito na lista de observadores dos objetos ditos *observados* (que estendem a interface `java.util.Observable`). Quando alguma mudança ocorre no estado de um objeto observado, é disparado então o mecanismo de propagação de mudanças, que se encarrega de notificar os objetos observadores para se atualizarem. Isto garante a consistência e a comunicação entre o componente observador (**Persistence**) e os componentes observados (**Solution** e **Model**).

5.3 Interface Assembler

A interface **Assembler** (Figura 5.3) possui os métodos necessários para montar as matrizes e vetores do modelo conforme a equação (5.1). Ela é implementada pela classe **FemAssembler**, que é apropriada aos diversos tipos de problemas que podem ser modelados através do Método dos Elementos Finitos. A classe **FemAssembler** tem como atributo um objeto do tipo **Model**, que é o modelo de elementos finitos para o qual deve montar a equação.

Para o Método dos Elementos Finitos aplicado à análise estática, a equação (5.1) se resume a uma equação de primeira ordem e pode ser representada em termos de sub-matrizes:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{uu} & \mathbf{C}_{up} \\ \mathbf{C}_{pu} & \mathbf{C}_{pp} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_u \\ \mathbf{X}_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_p \\ \mathbf{R}_u \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_p \\ \mathbf{F}_u \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

em que:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{R}_p \\ \mathbf{R}_u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{N}_p \\ \mathbf{N}_u \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{E}_p \\ \mathbf{E}_u \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

A matriz \mathbf{C} é a matriz de rigidez do modelo, \mathbf{X} o vetor de deslocamentos nodais, \mathbf{R} é o vetor de cargas nodais e \mathbf{F} o vetor de forças nodais equivalentes aos esforços internos. O vetor \mathbf{R} é composto por duas parcelas: o vetor \mathbf{N} e o vetor \mathbf{E} que são, respectivamente, o vetor de forças aplicadas diretamente nos nós e o vetor de forças nodais equivalentes às cargas de corpo. Os índices u e p indicam, respectivamente, se a sub-matriz é referente a valores desconhecidos ou prescritos.

Esta mesma subdivisão aplica-se também às matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} , assim como aos vetores $\ddot{\mathbf{X}}$ e $\dot{\mathbf{X}}$ da equação (5.1).

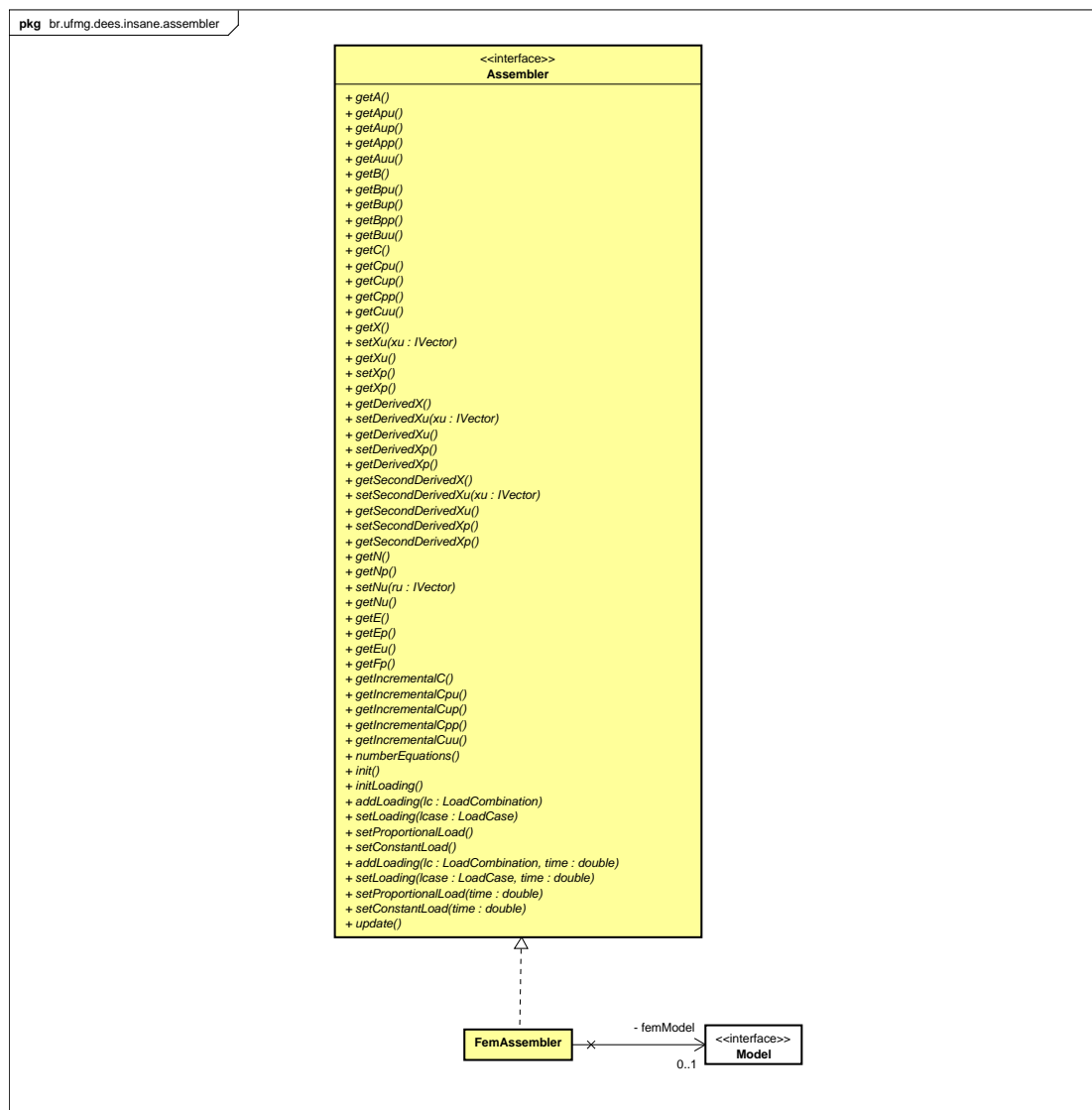


Figura 5.3: Diagrama de classe para `Assembler`.

Na figura 5.3 estão exemplificados alguns métodos da interface `Assembler` que, quando invocados, são capazes de fornecer qualquer uma das partes deste sistema matricial. É importante ainda citar o método `numberEquations()`, que numera as equações do modelo, organizando-as segundo o critério de valores desconhecidos ou prescritos. Desta forma, `Assembler` é capaz de montar, por exemplo, a matriz de rigidez reduzida do modelo (\mathbf{C}_{uu}) para obter os deslocamentos nodais desconhecidos

(\mathbf{X}_u). Os métodos *init()* e *update()* são utilizados durante a análise não-linear como formas de acionar o mecanismo de propagação de mudanças observador-observado e permitir a correta persistência dos dados.

5.4 Classe Abstrata Solution

Uma vez montada a equação do problema, fica a cargo da classe abstrata `Solution` (Figura 5.4) resolvê-la. Esta classe estende a classe `Observable`, uma vez que é observada pela persistência. Seu principal método é denominado *execute()* e é ele quem desencadeia todo o processo de solução.

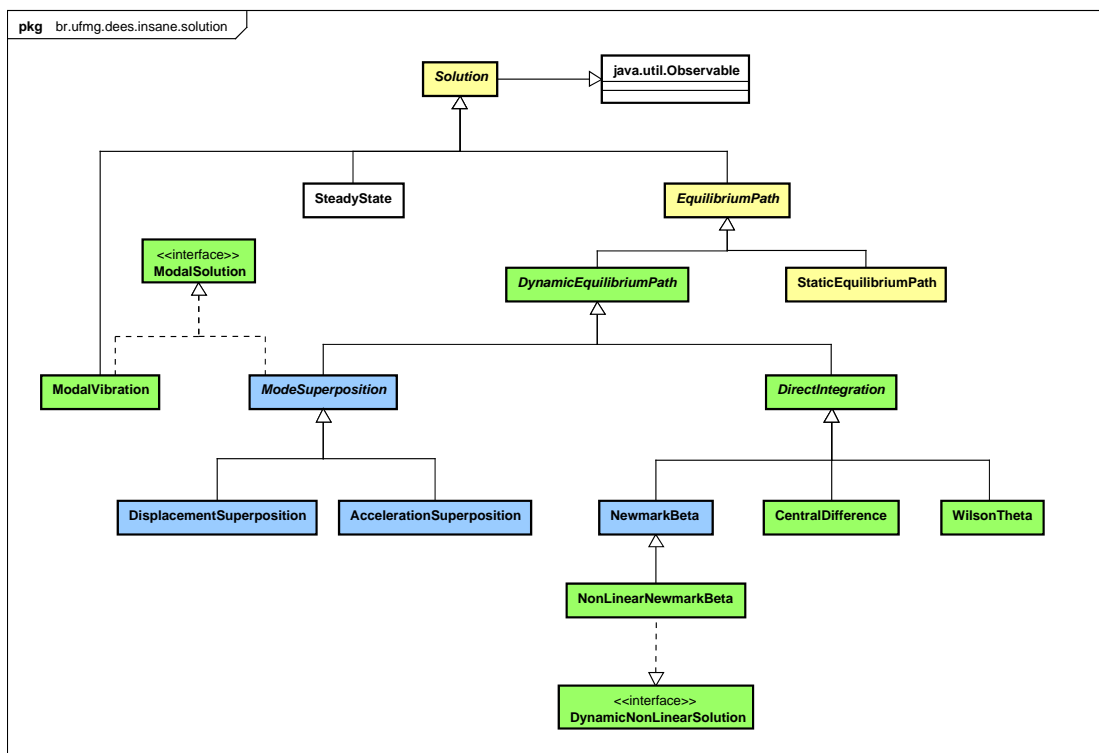


Figura 5.4: Diagrama de classe para `Solution`.

A classe `SteadyState` é a mais simples das subclasses de `Solution`, pois representa a solução de um problema linear estático. Já a classe `ModalVibration` soluciona apenas o problema de autovalor de um modelo, obtendo suas frequências naturais de vibração e seus respectivos modos. Estas duas classes possuem um objeto do tipo `Assembler`, que fornece as informações acerca do modelo.

A classe abstrata `EquilibriumPath` generaliza uma solução cujo objetivo é determinar uma trajetória de equilíbrio. Para o caso de uma análise não-linear estática, esta trajetória é geralmente representada em um gráfico fator de carga x deslocamento. Em uma análise dinâmica, seja ela linear ou não, esta trajetória é obtida em função do tempo (gráfico deslocamento x tempo).

A solução não-linear estática é representada pela classe `StaticEquilibriumPath`. Esta classe possui um objeto do tipo `Step`, que possui os métodos para resolução do processo incremental iterativo, e uma lista de `IterativeStrategy`, informada pelo usuário, que define os métodos de controle para obtenção da trajetória de equilíbrio a serem utilizados. `StaticEquilibriumPath` não possui um objeto do tipo `Assembler`, porém possui o método `setAssembler(Assembler)` que atribui ao seu objeto `Step` um objeto `Assembler` para o qual deve resolver o processo iterativo.

A classe abstrata `DynamicEquilibriumPath` generaliza as soluções de problemas dinâmicos. Estes são subdivididos em dois tipos: `ModeSuperposition` e `DirectIntegration`, que representam as soluções por superposição modal e por integração direta, respectivamente. Os métodos de solução de problemas dinâmicos apresentados no capítulo 2 são representados pelas classes `DisplacementSuperposition`, `AccelerationSuperposition`, `CentralDifference`, `NewmarkBeta` (incluindo a variação *Hilber- α*) e `WilsonTheta`.

A classe `NonLinearNewmarkBeta` estende `NewmarkBeta`, fazendo as modificações necessárias para que os efeitos não-lineares sejam considerados.

As interfaces `ModalSolution` e `DynamicNonLinearSolution` agrupam características comuns a soluções pertencentes a ramos diferentes da herança de `Solution`, de forma a facilitar a persistência de dados.

A figura 5.5 mostra o diagrama de classe para a interface `Step`, implementada pelas classes `StandardNewtonRaphson`, `ModifiedNewtonRaphson` e `OrthogonalResidueStandardNewtonRaphson`. Estas classes implementam, respectivamente, os métodos incrementais iterativos de Newton-Raphson padrão, modificado e padrão

com resíduo ortogonal, e são utilizadas na análise não-linear estática. Na análise dinâmica não-linear, estes métodos são implementados internamente na solução, pois não é necessário utilizar estratégias de iteração nestes casos.

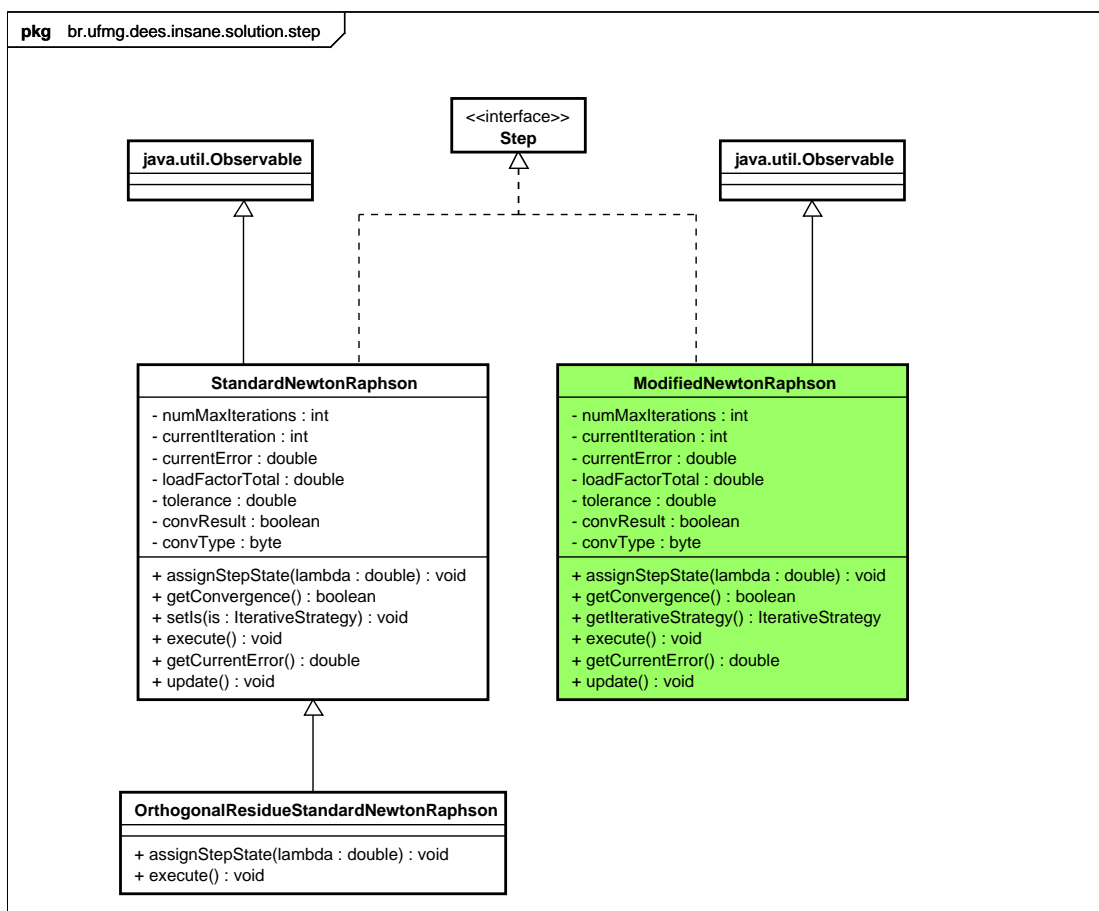


Figura 5.5: Diagrama de classe para `Step`.

Estas três classes têm todos os atributos necessários para obter a convergência no passo, destacando-se um objeto `Assembler`, capaz de informar as matrizes e vetores da equação a ser resolvida em cada iteração do passo; um objeto `LinearEquationSystem`, capaz de resolver o sistema de equações algébricas lineares de cada iteração; e um objeto `IterativeStrategy`, que representa a estratégia de iteração corrente. Elas estendem a classe `Observable`, pois são observadas por `StaticEquilibriumPath`.

A convergência é verificada através dos métodos *getConvergence()* e *setConvergence()*. O método *setConvergence()*, quando invocado, cria um objeto **Convergence**, que, por meio do método *checkConvergence()*, calcula a convergência baseada em força, deslocamento ou ambos, conforme informado pelo usuário.

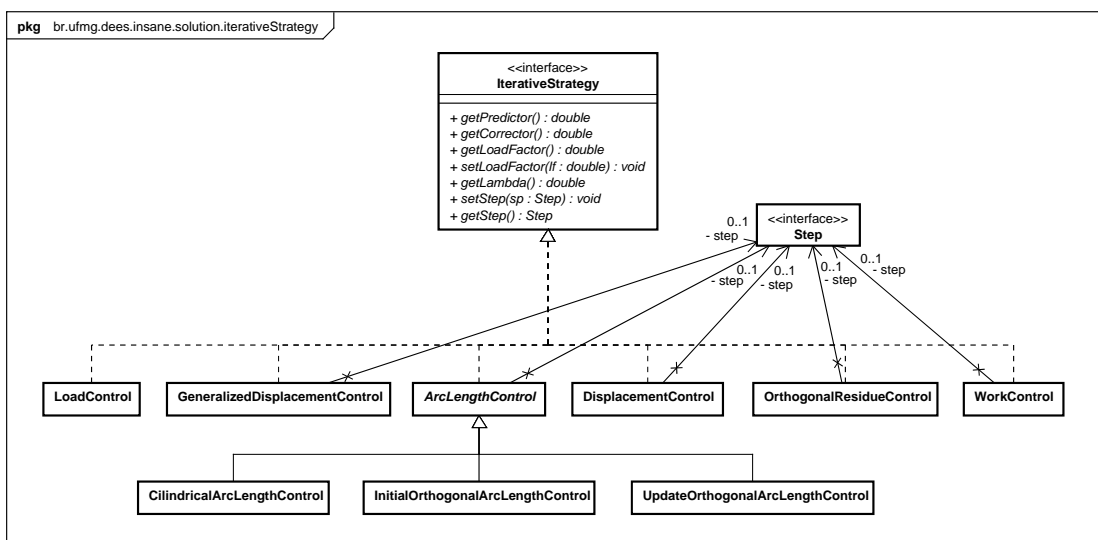


Figura 5.6: Diagrama de classe para *IterativeStrategy*.

O diagrama de classe da interface *IterativeStrategy* é representado na figura 5.6. Em sua hierarquia estão as classes que representam os vários métodos de controle implementados por Fuina (2004): método de controle de carga, método de controle direto de deslocamento, método de controle por trabalho, método de controle de deslocamento generalizado, método de controle de resíduo ortogonal e método de controle de comprimento de arco e suas particularizações. Cada uma destas classes possui os métodos *getPredictor()* e *getCorrector()* que calculam o fator de carga da primeira e das demais iterações, respectivamente. À exceção da classe *LoadControl*, todas as outras classes possuem um objeto do tipo *Step*, pois precisam deste para saber informações sobre a iteração anterior durante o cálculo do fator de carga.

5.5 Interface Model

O modelo discreto a ser analisado é representado no projeto orientado a objetos do núcleo numérico pela interface `Model` (Figura 5.7). A classe que implementa `Model`, para representar da forma mais geral possível um modelo discreto, é constituída por listas de objetos inerentes a este modelo e contém métodos de acesso e manipulação destas listas.

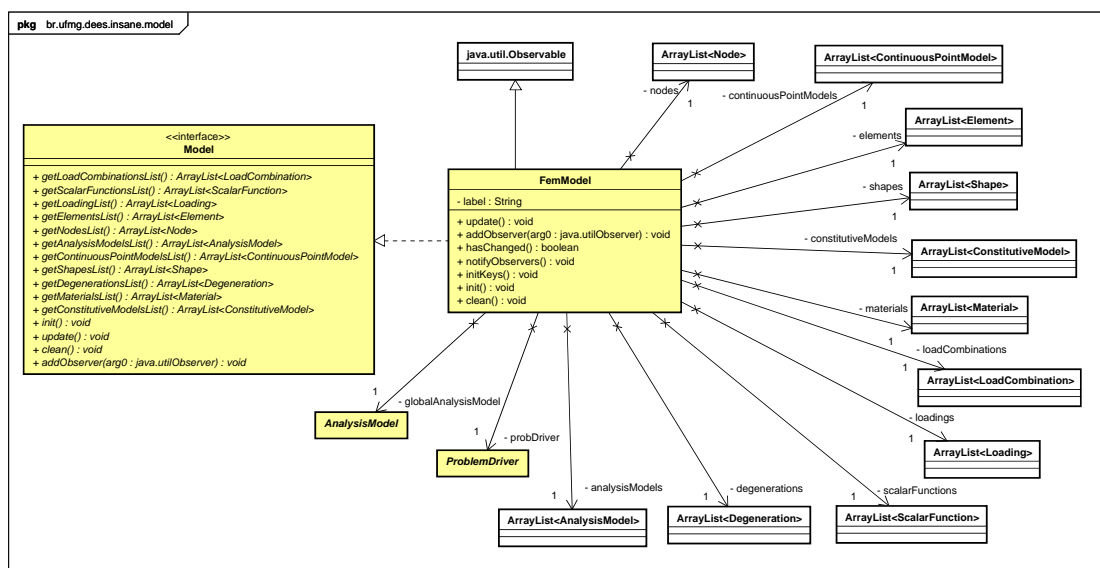


Figura 5.7: Diagrama de classe para `Model`.

`Model` é implementada pela classe `FemModel`, que representa o modelo de elementos finitos propriamente dito. Um objeto `FemModel` tem listas de nós, elementos, funções de forma, carregamentos, combinações de carregamento, funções escalares, modelos de análise, materiais, modelos constitutivos e degenerações (o conceito de degeneração será discutido adiante). Tem ainda dois atributos: um modelo de análise global do tipo `AnalysisModel` e um objeto `ProblemDriver`. `FemModel` estende também a classe `Observable`, pois é observada pela persistência.

Juntamente à interface `Model` estão implementadas as classes `Node`, `Element` e `ProblemDriver`. A figura 5.8 mostra o diagrama de classe para `Node`. Esta possui um `label` e uma coleção de valores do tipo `java.util.HashMap` que armazena as variáveis do nó como, por exemplo, deslocamentos e forças. Além de estender a classe

`IPoint3d` e conseqüentemente possuir todos os métodos e atributos desta classe, `Node` tem também como atributo um objeto deste tipo representando um ponto no espaço. Os métodos herdados são sobrecarregados para que acessem diretamente o objeto `IPoint3d`, e não os atributos herdados. Por exemplo, o método `getCoords()` de `Node` acessa o objeto do tipo `IPoint3d` e invoca seu método `getCoords()`, obtendo diretamente as coordenadas do ponto no espaço que representa o nó. Este encadeamento permite a reutilização do código e simplifica a manipulação de um objeto `Node`.

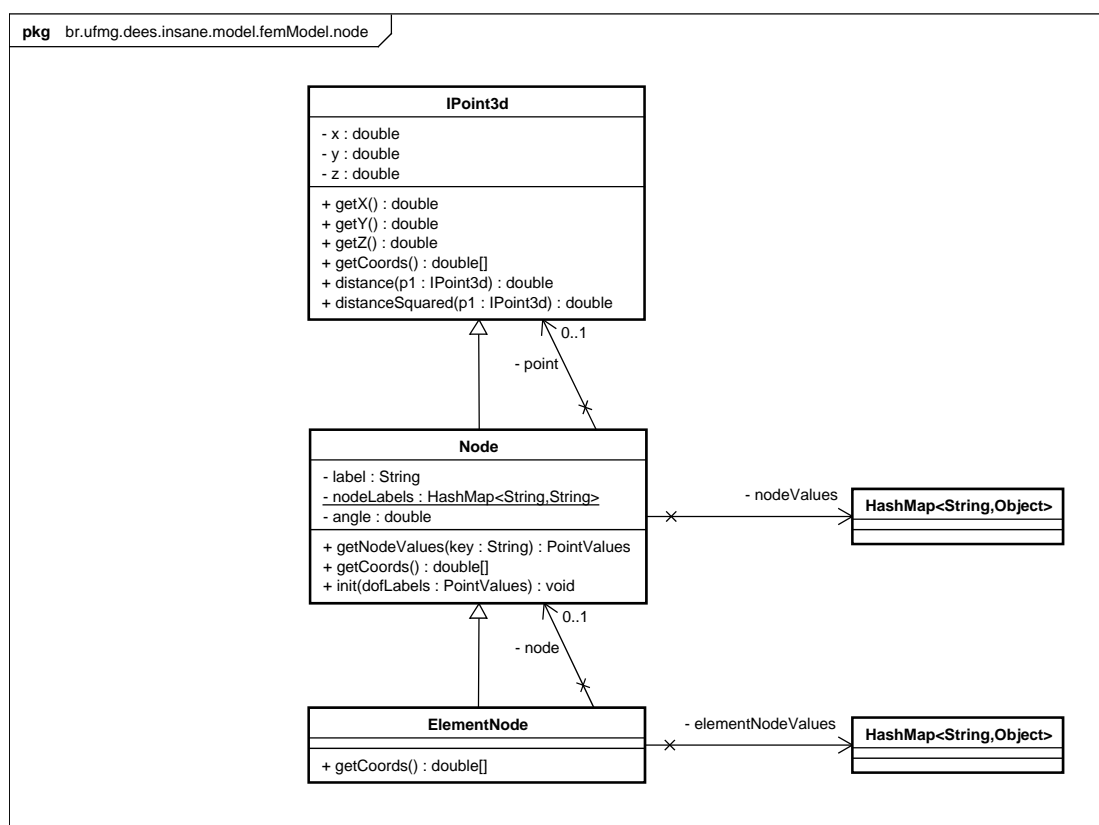


Figura 5.8: Diagrama de classe para `Node`.

Da mesma forma, como especialização do nó, a classe `ElementNode` (Figura 5.8) estende `Node` e também possui um objeto `Node`, além de uma coleção de valores do tipo `HashMap`, que armazena os atributos nodais específicos de um elemento, como as liberações nas extremidades de elementos de barra. `ElementNode` sobrecarrega os métodos herdados, acessando diretamente os atributos de seu objeto `Node`. Como

exemplo, seu método `getCoords()` invoca o método `getCoords()` de seu objeto `Node`, obtendo, através do encadeamento, as coordenadas do nó.

A classe `Element` representa os elementos finitos e é estendida pelas classes `ParametricElement` e sub-classes, `FrameElement` e `ThinPlateElement`, que representam, respectivamente, os elementos finitos paramétricos, de barras e de placas finas, como mostrado na figura 5.9. Um objeto `Element` tem como atributos uma lista de `ElementNode`, que representa sua incidência, uma lista de `Degeneration`, que representa seus pontos de integração e sua constituição geométrica e física, um objeto `AnalysisModel`, que representa seu modelo de análise, um objeto `Shape`, que representa sua função de forma, um objeto `ConstitutiveModel`, que representa seu modelo constitutivo, e um objeto `ProblemDriver`, que armazena informações relativas ao tipo de problema que o elemento modela.

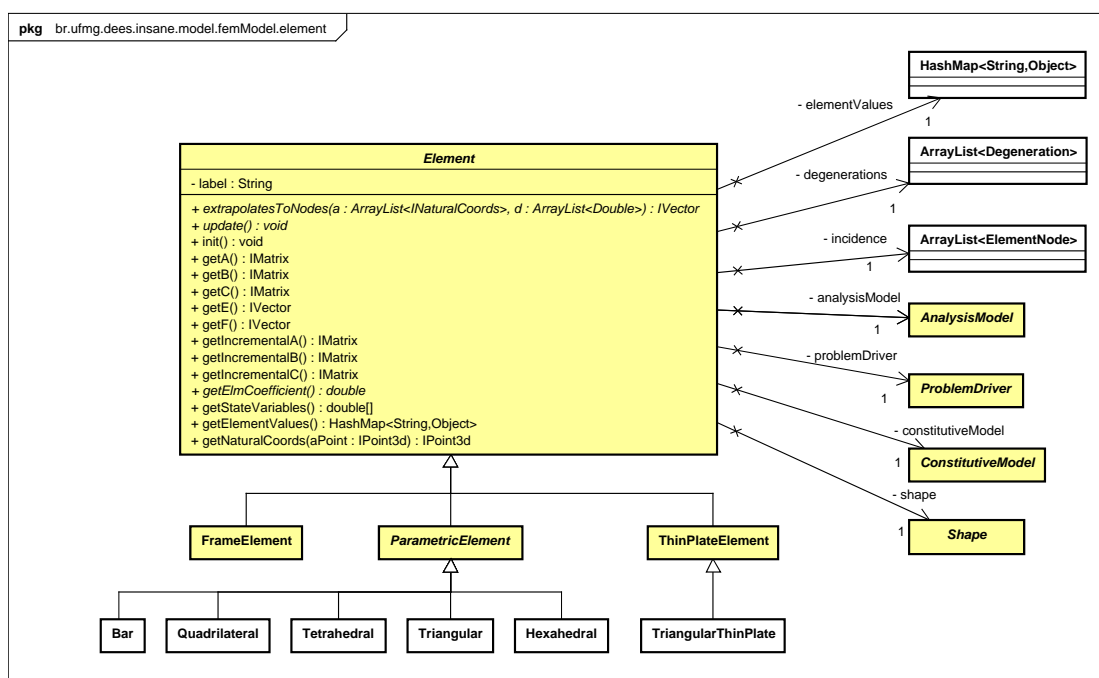


Figura 5.9: Diagrama de classe para `Element`.

A classe `ParametricElement` possui, além dos atributos de `Element`, um objeto `IntegrationOrder` que representa a sua ordem para integração numérica. O valor de `IntegrationOrder` é, por *default*, automaticamente preenchido pela função de

forma do elemento, mas pode ser sobrescrito pelo usuário (o que permite a utilização de ordens de integração reduzidas). Na hierarquia da classe `ParametricElement` estão as classes que representam os elementos finitos paramétricos, separadas de acordo com sua geometria: elementos paramétricos unidimensionais, elementos planos triangulares e quadriláteros, e elementos sólidos tetraédricos e hexaédricos. Estas sub-classes implementam os métodos relativos à integração numérica (*addDegenerations(Degeneration)* e *initDegenerations()*). A classe `ThinPlateElement`, necessária para formulações com integração analítica, é estendida por `TriangularThinPlate`, que representa os elementos finitos de placa fina triangulares.

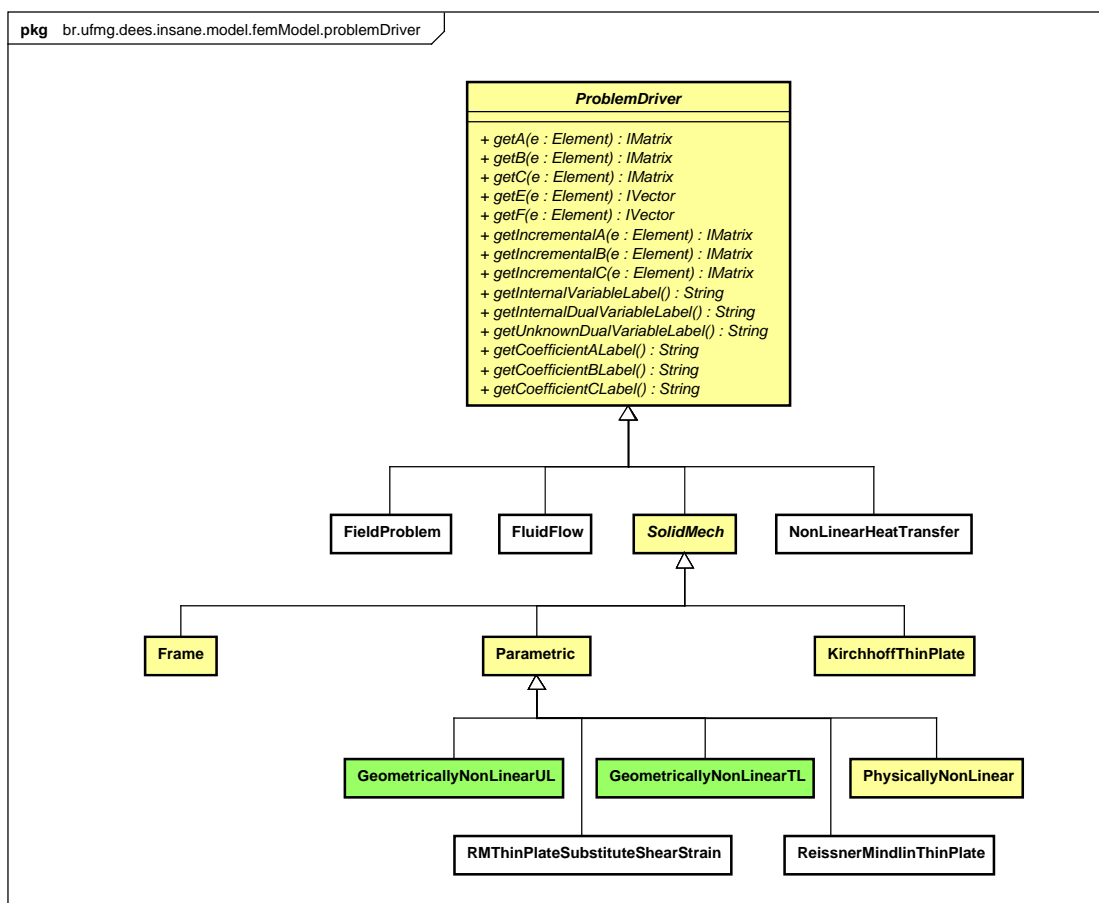


Figura 5.10: Diagrama de classe para `ProblemDriver`.

A interface `ProblemDriver` (Figura 5.10) possui os métodos necessários para informar a `Assembler` as parcelas de cada elemento na equação do modelo, sejam elas incrementais ou totais. Em sua hierarquia são representados diversos tipos de

problemas e formulações de modelos discretos. Desta maneira, a classe `Element` é uma classe bastante geral, independente do problema que representa. Entretanto, todas as informações solicitadas a um objeto `Element` são obtidas através de consulta direta ao objeto `ProblemDriver` do mesmo. Por exemplo, se a classe `Assembler` solicita a um objeto `Element` o cálculo da matriz \mathbf{C} na forma incremental (método `getIncrementalC()` na figura 5.9), o mesmo repassa a tarefa para o objeto `ProblemDriver` correspondente. Se este objeto for uma instância da classe `GeometricallyNonLinearTL` (Figura 5.10), a matriz de rigidez incremental da formulação correspondente será calculada.

5.6 Interface Shape

As funções de aproximação ou funções de forma dos elementos finitos estão agrupadas na hierarquia da interface `Shape` (Figura 5.11), que possui métodos responsáveis por fornecer as funções de forma, suas primeiras derivadas e suas segundas derivadas. A hierarquia é dividida primeiramente segundo o sistema de coordenadas utilizado (cartesiano ou natural).

A única função de forma representada em coordenadas cartesianas é a `LinearCubic1DCart`, que contém tanto as funções lineares quanto as cúbicas para um elemento linear de dois nós.

As funções de forma em coordenadas naturais são divididas de acordo com a geometria dos elementos finitos, por quem são utilizadas, podendo ser unidimensionais, triangulares, quadrilaterais, tetraédricos ou hexaédricos. O terceiro nível de divisão especializa as funções de forma de acordo com o número de nós na incidência dos elementos. Isso mostra mais uma vez a generalidade da classe `Element`, que não depende da continuidade da função de forma e nem do número de nós que possui.

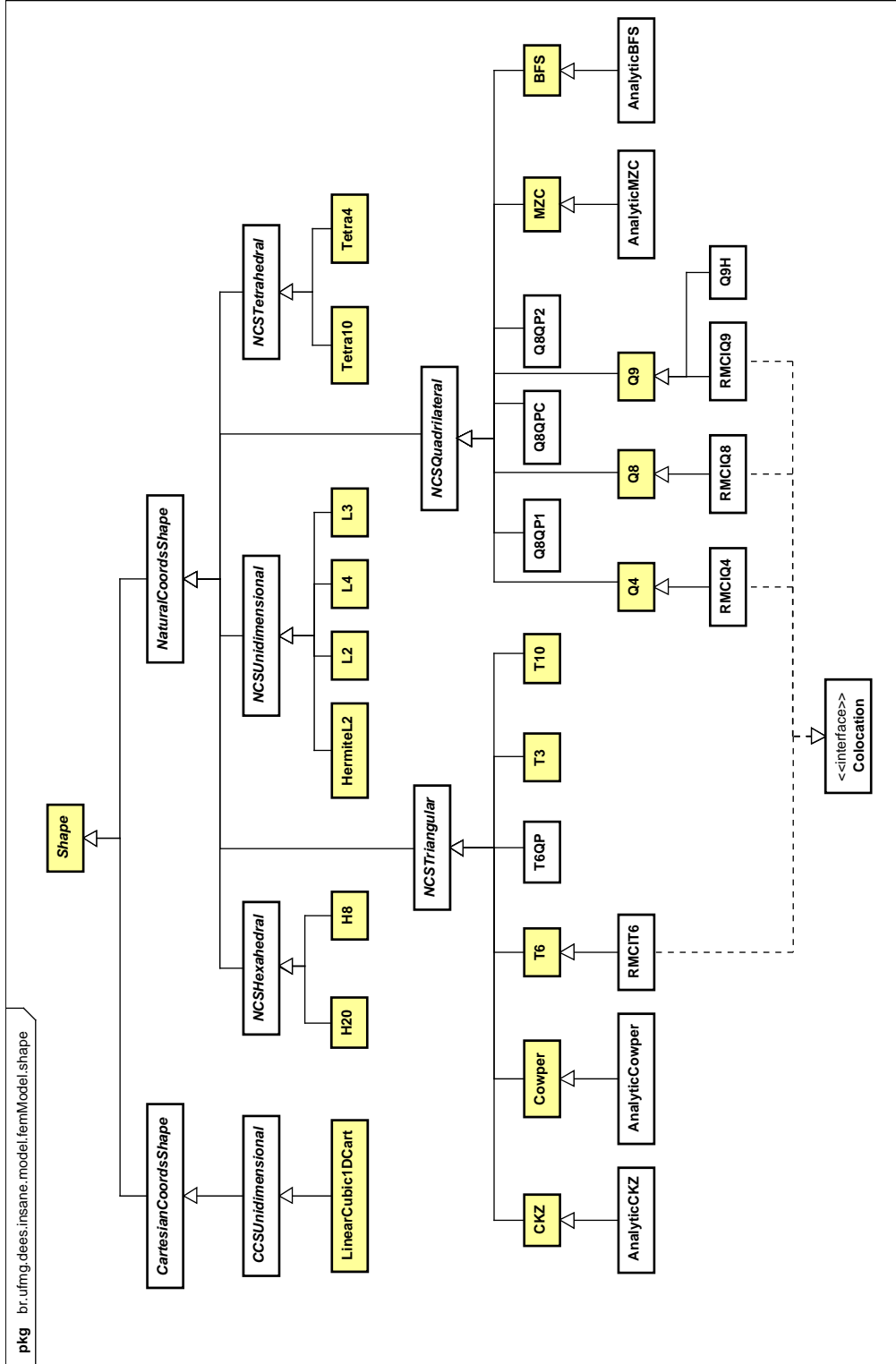


Figura 5.11: Diagrama de classe para Shape.

As mudanças realizadas nas classes que implementam a interface **Shape** não foram diretamente motivadas por este trabalho, mas foram feitas durante seu desenvolvimento. Foi definida em cada classe uma ordem de integração padrão que, quando utilizada, faz com que os valores exatos da integração sejam obtidos. Isto foi feito para minimizar o número de informações a serem informadas pelo usuário, reduzindo o risco de inserção de erros no modelo. Entretanto, a possibilidade de informar uma ordem de integração qualquer continua existindo.

5.7 Pacote **MaterialMedia**

O pacote **MaterialMedia** contém interfaces e classes necessárias para representar da forma mais geral possível a constituição física dos elementos finitos.

A interface **Material** (Figura 5.12) possui os métodos necessários para obter informações sobre as propriedades dos diferentes materiais, sejam elas propriedades secantes, tangentes ou de descarregamento. Os diferentes materiais são representados pelas classes que implementam a interface **Material**, e que têm como atributos seu *label* e uma coleção do tipo **HashMap** com os valores necessários para caracterizar aquele material. A figura 5.12 mostra o diagrama de classe da interface **Material** e algumas de suas sub-classes implementadas para diversos tipos de materiais.

Existe, ainda, a classe **MaterialPoint** (Figura 5.13) que tem o papel de representar um ponto no meio material e que tem como propriedades um *label*, um objeto **IPoint3d**, que o representa como um ponto no espaço, um objeto **IVolume**, que representa sua propriedade geométrica, um objeto **Material**, um objeto **AnalysisModel** e um objeto **ConstitutiveModel**. Possui ainda duas coleções do tipo **HashMap** que armazenam dois tipos de variáveis dependentes do seu modelo constitutivo: as variáveis constitutivas atuais e as variáveis constitutivas prévias.

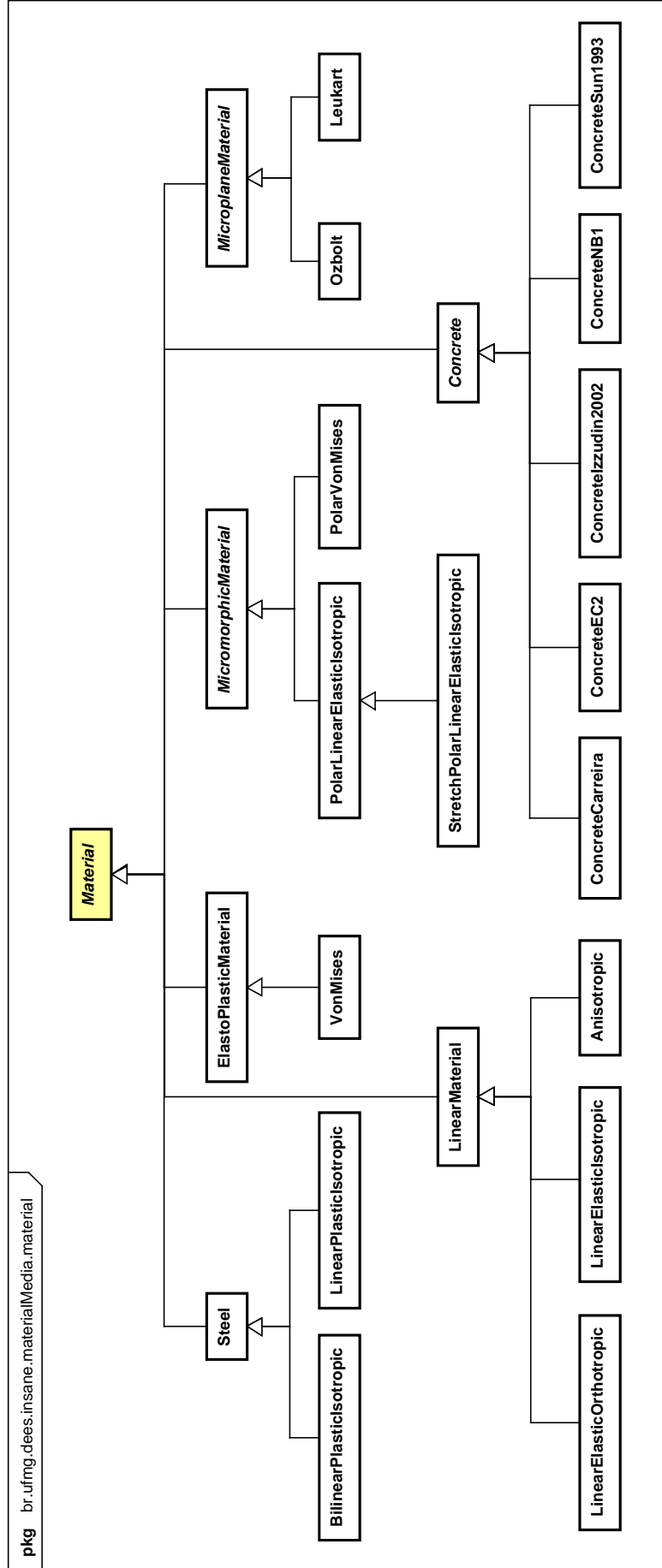


Figura 5.12: Diagrama de classe para Material.

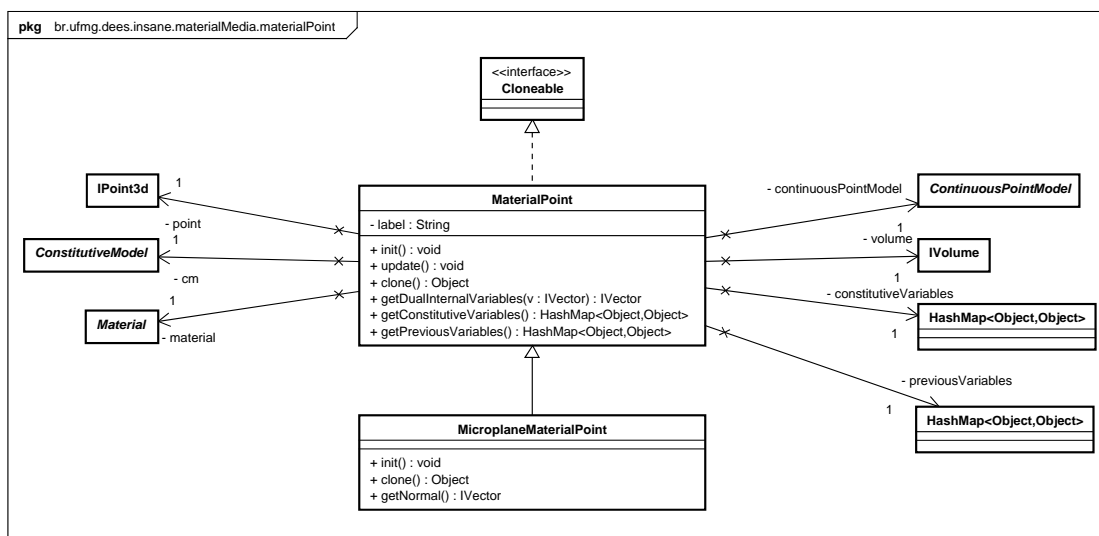


Figura 5.13: Diagrama de classe para `MaterialPoint`.

Estas duas coleções são capazes de informar, durante a análise, o estado do ponto material no momento corrente e no passo anterior. Um objeto `MaterialPoint` implementa a interface `java.lang.Cloneable`, possuindo a propriedade de ser clonado de forma seletiva. Esta propriedade permite a cópia de somente alguns atributos de um objeto `MaterialPoint`, através da implementação do método `clone()`.

A figura 5.14 mostra o diagrama de classe da interface `ConstitutiveModel`, responsável por montar as matrizes constitutivas e calcular as tensões das degenerações e dos pontos materiais através de informações de seus materiais e modelos de análise. Em sua hierarquia, estão implementados alguns modelos constitutivos disponíveis na literatura ou oriundos de recentes pesquisas. Um objeto do tipo `ConstitutiveModel` monta tanto as matrizes constitutivas secantes e tangentes quanto o vetor de tensões referentes às variáveis de estado correntes. É importante ressaltar a importância da dependência do modelo constitutivo quanto aos materiais e modelos de análise, pois sem essas informações não é possível obter as matrizes constitutivas.

Finalmente, a classe `Degeneration` (Figura 5.15) representa a degeneração na geometria do elemento. As degenerações são compostas por uma lista de pontos materiais e são representadas por objetos do tipo `Representation`. O tipo mais simple de degeneração é a `PrescribedDegeneration`, em que as propriedades geométricas

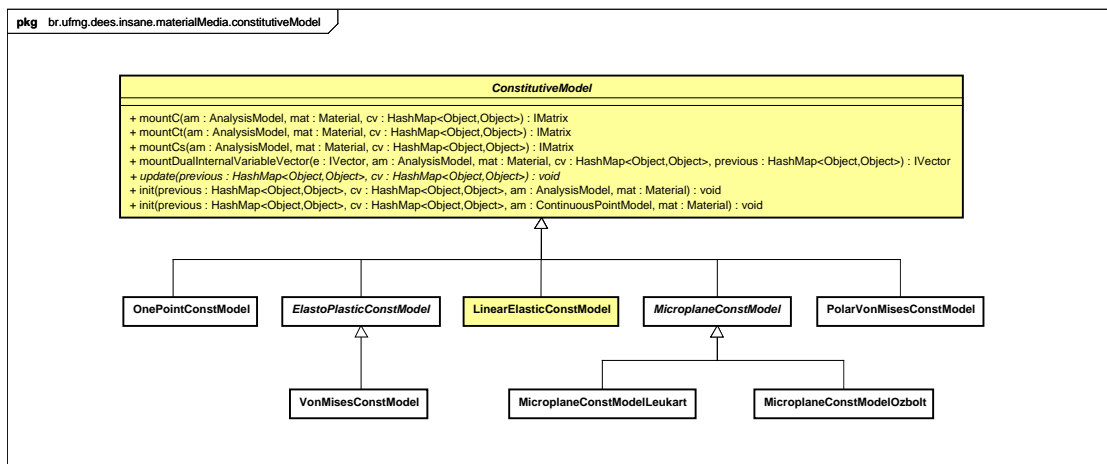


Figura 5.14: Diagrama de classe para ConstitutiveModel.

são prescritas pelo usuário.

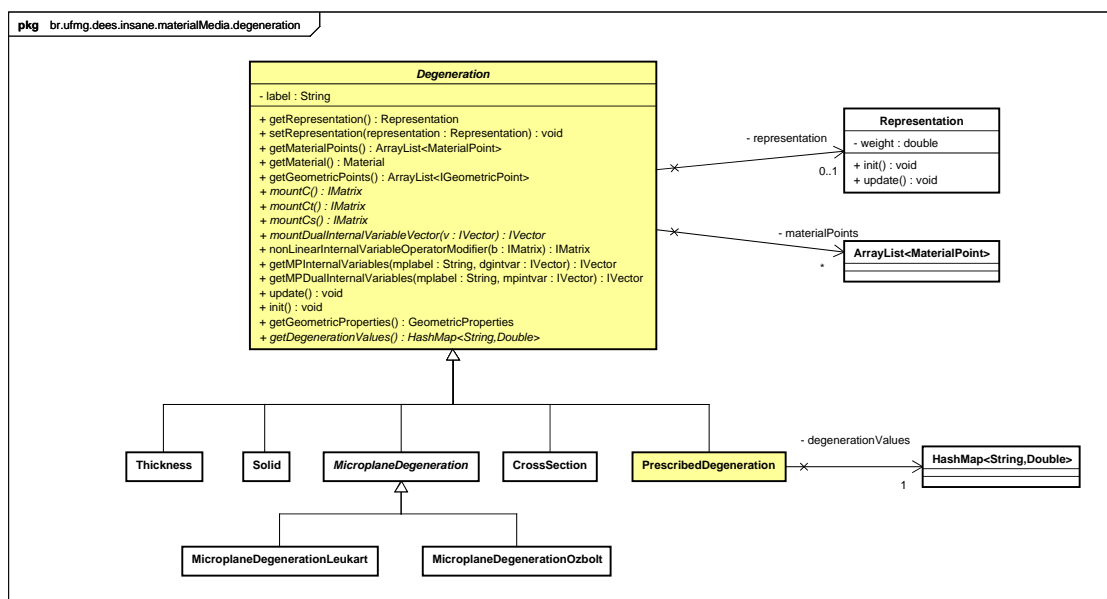


Figura 5.15: Diagrama de classe para Degeneration.

Outro exemplo de Degeneration é a classe **CrossSection** que representa a degeneração causada pela discretização em elementos finitos unidimensionais, na qual simplifica-se uma geometria tridimensional em apenas uma linha. Perdem-se as informações sobre a seção transversal (as duas dimensões que foram simplificadas), principalmente se ela for de geometria qualquer e composta. A classe **CrossSection** contém uma lista de pontos materiais, fornecida pelo usuário, que descreve

de maneira aproximada a geometria e a composição da seção, permitindo que o modelo constitutivo dessa degeneração seja aproximado pelo somatório da contribuição de cada um dos pontos. Para cada ponto de integração do elemento há uma degeneração, o que permite aproximar o modelo constitutivo ao longo do elemento.

Um objeto **Representation**, para representar uma degeneração, possui um modelo constitutivo, um modelo de análise e duas coleções do tipo **HashMap** que armazenam suas variáveis constitutivas atuais e prévias. Estes atributos dizem respeito à degeneração como um todo, representando o comportamento do conjunto de pontos materiais da referida degeneração. A representação cumpre ainda o papel de ponto de integração, possuindo os atributos necessários à integração numérica.

Quando solicitado por seu elemento, um objeto **Degeneration** monta, através de sua lista de pontos materiais e de sua representação, tanto as suas matrizes constitutivas secante e tangente quanto o seu vetor de tensões referente às variáveis de estado correntes.

5.8 Classe Abstrata **AnalysisModel**

A classe abstrata **AnalysisModel** (Figura 5.16) possui os métodos para fornecer as informações, dependentes do modelo de análise, necessárias aos elementos finitos e às representações. Ela é implementada por classes representantes dos diversos modelos de análise. Por exemplo, são os objetos destas classes que informam ao elemento o número de graus de liberdade para cada nó. Em uma degeneração do elemento, o número de deformações generalizadas é informado pelo modelo de análise da representação, que é sempre o mesmo do elemento, já que ela representa um ponto de integração do mesmo.

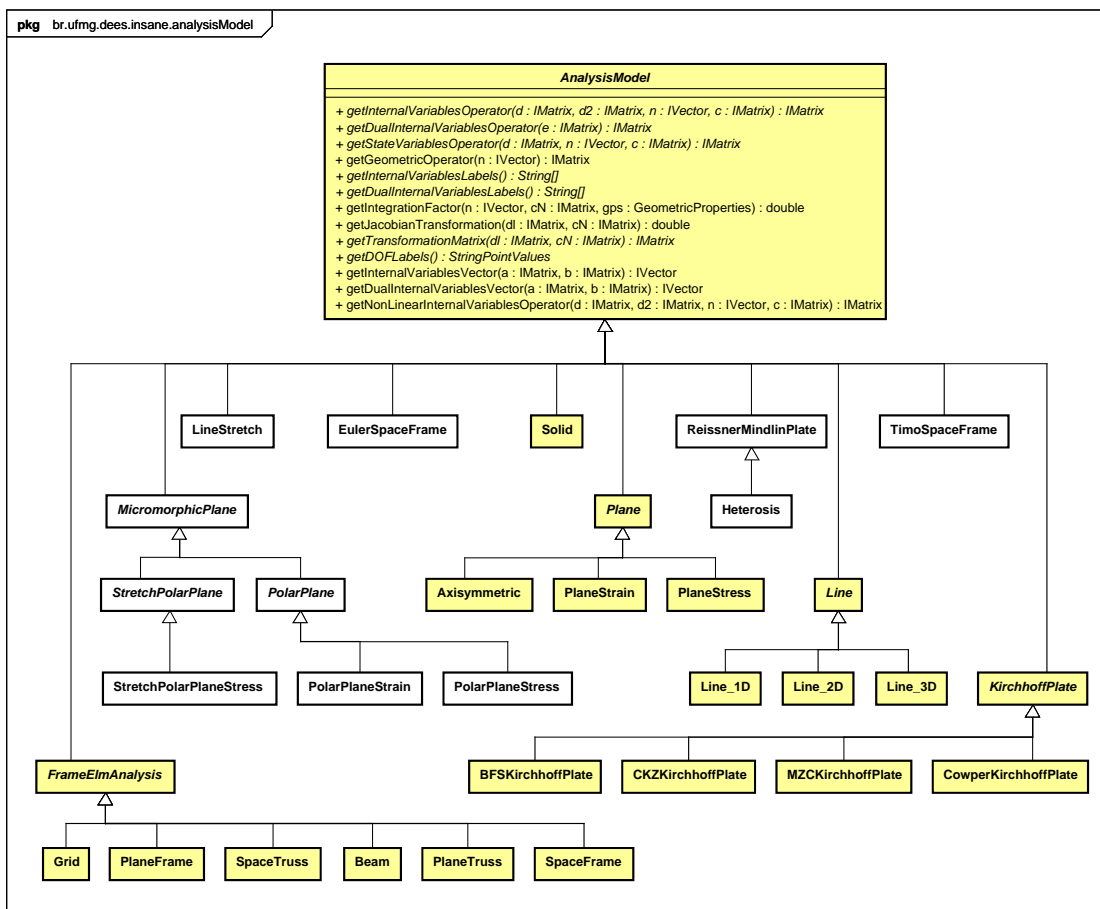


Figura 5.16: Diagrama de classe para AnalysisModel.

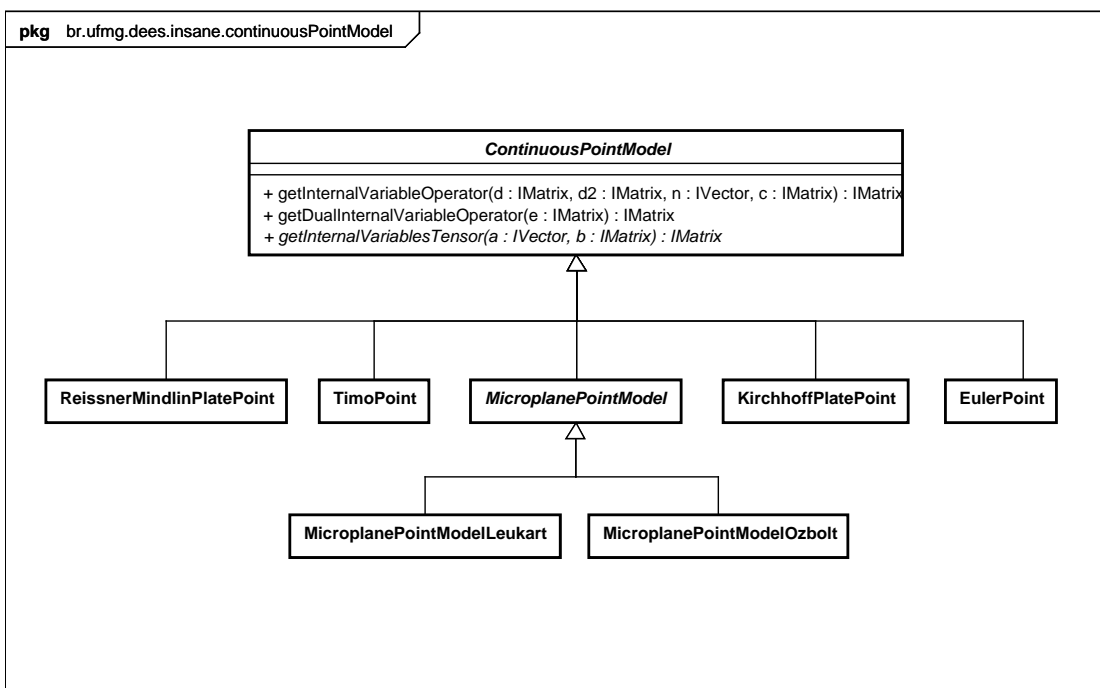


Figura 5.17: Diagrama de classe para ContinuousPointModel.

5.9 Classe Abstrata ContinuousPointModel

A classe abstrata `ContinuousPointModel` (Figura 5.17) pode ser entendida como um `AnalysisModel` para um `MaterialPoint`. Em um ponto material pertencente a uma degeneração, são os objetos das classes que implementam `ContinuousPointModel` que informam os operadores necessários para obtenção das matrizes constitutivas e os operadores que transformam valores generalizados em valores pontuais.

5.10 Interface Persistence

A função da interface `Persistence` (Figura 5.18) é receber dados de entrada através de arquivos, que podem ter sido gerados, por exemplo, por uma aplicação de pré-processamento, e gerar arquivos com os dados de saída gerados pelo núcleo numérico para posterior utilização nas demais aplicações do sistema, como, por exemplo, um pós-processador. Uma vez gerados, os dados necessários à descrição do modelo preenchem o objeto `Model` e os dados necessários à descrição da solução preenchem o objeto `Solution`. Isto torna possível ao objeto `Assembler` montar as matrizes e vetores das equações do modelo e ao objeto `Solution` resolvê-las. Os resultados obtidos são persistidos então em arquivos de saída, sempre que ocorre uma alteração no estado do modelo.

A interface possui métodos que cumprem os papéis de persistência de entrada e de saída e é particularizada segundo o tipo de arquivo a persistir (Figura 5.18). Um objeto do tipo `Persistence` possui um atributo do tipo `Model` e outro do tipo `Solution`, que são os objetos com os quais se comunicam. E ainda implementa a classe `java.util.Observer`, sendo componente observador do mecanismo de propagação de mudanças segundo o padrão *Observador-Observado*.

A persistência de dados mais utilizada é a baseada em arquivos XML, conforme explicado na seção 5.1.

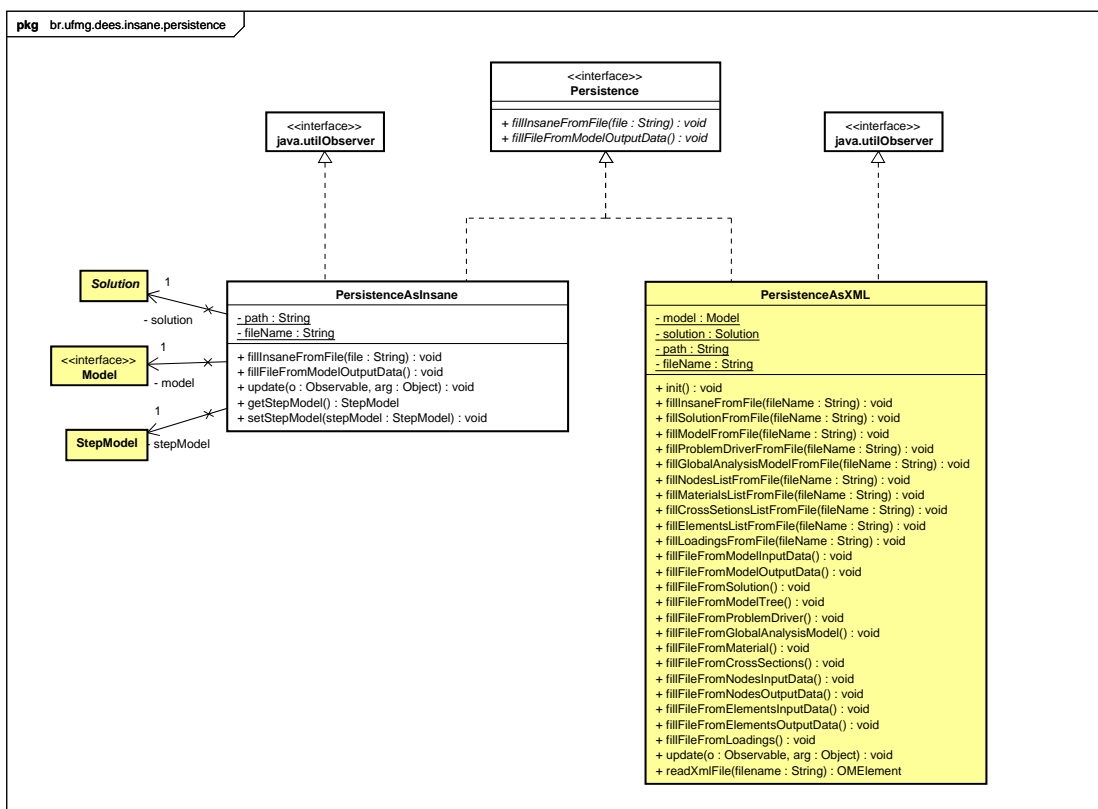


Figura 5.18: Diagrama de classe para Persistence.

5.11 Pacote Load

O pacote Load contém as classes utilizadas para se definir um carregamento. As cargas que atuam em um modelo são representadas pela classe Loading (Figura 5.19). Esta classe possui listas dos diversos tipos de carregamentos possíveis: nodais, concentrados, em linha, em área, no volume e térmico.

Para definir um carregamento dinâmico, foi necessária a criação de classes definindo funções escalares, generalizadas pela classe abstrata `ScalarFunction` (Figura 5.20). Três tipos de função escalar foram implementadas: constante, harmônica e de rampa. Cada uma delas tem os atributos necessários à sua definição. O método `getValue(double)` recebe o valor da variável na qual a função escalar deve ser calculada e retorna o resultado do cálculo.

Fazendo esta função dependente do tempo, obtém-se uma maneira elegante de representar um carregamento dinâmico. Basta definir cargas unitárias (ou outro

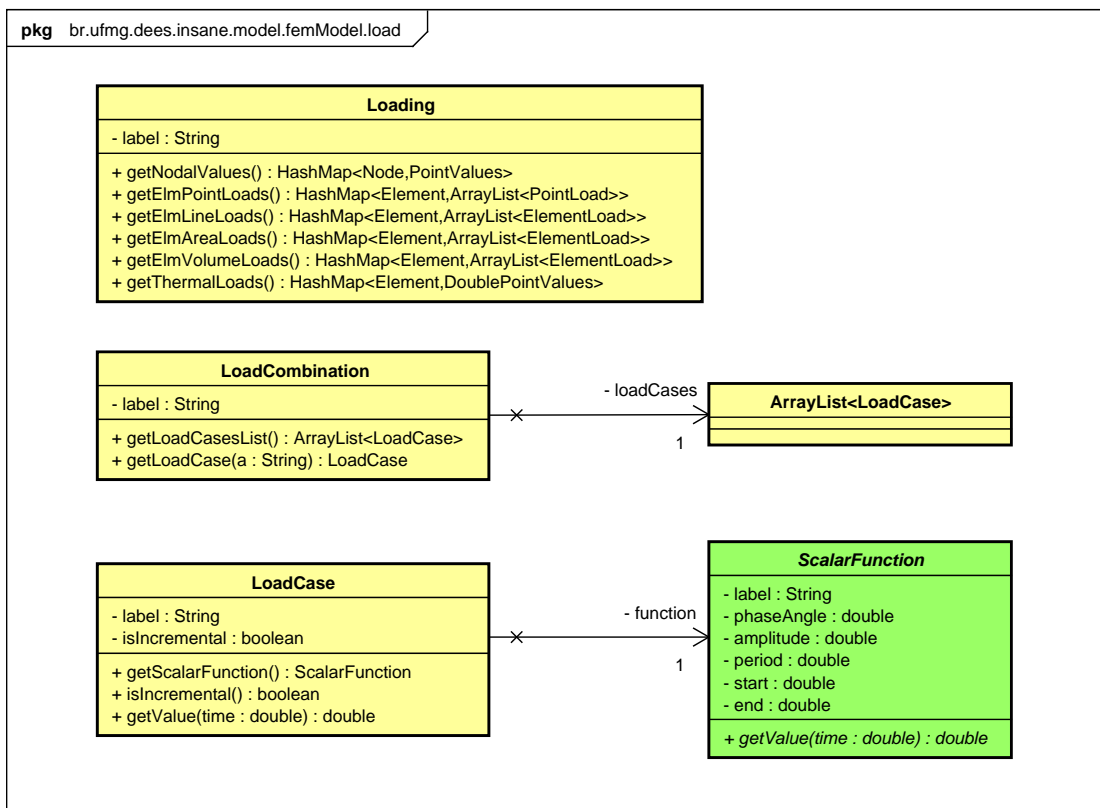


Figura 5.19: Diagrama de classe para Loading, LoadCase e LoadCombination.

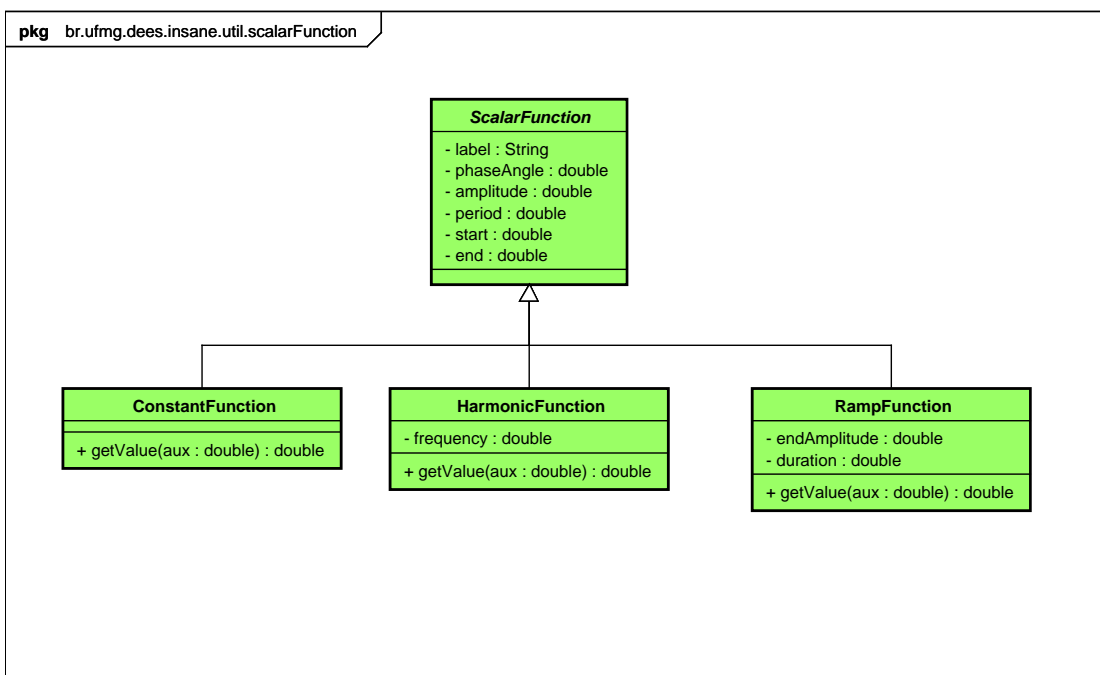


Figura 5.20: Diagrama de classe para ScalarFunction.

valor qualquer, se desejado) e multiplicá-las pelo valor da respectiva função escalar calculada no tempo desejado. Esta conta é feita pela classe `LoadCase`, que define um caso de carregamento. Ela contém uma referência a um `Loading` e um objeto do tipo `ScalarFunction`. Seu método `getValue(double)` chama o método de mesmo nome em `ScalarFunction` e multiplica o valor do carregamento aplicado pelo resultado obtido.

Combinações de carregamentos também podem ser definidas. Para isso utiliza-se a classe `LoadCombination`, que contém uma lista de objetos `LoadCase` que são somados.

5.12 Classe Abstrata `EigenvalueSolver`

A resolução do problema de autovalor, necessária para as soluções do tipo `DisplacementSuperposition` e `AccelerationSuperposition`, é feita por classes derivadas da classe abstrata `EigenvalueSolver` (Figura 5.21). Ela define os parâmetros comuns às duas formulações implementadas, o método da iteração inversa e o método da iteração no subespaço (Apêndice F). Estes dois métodos são implementados pelas classes `InverseIteration` e `SubspaceIteration`, respectivamente.

Conforme pode ser visto na figura 5.21, `SubspaceIteration` contém uma instância de `InverseIteration`, pois um dos passos de sua formulação é executar uma iteração inversa.

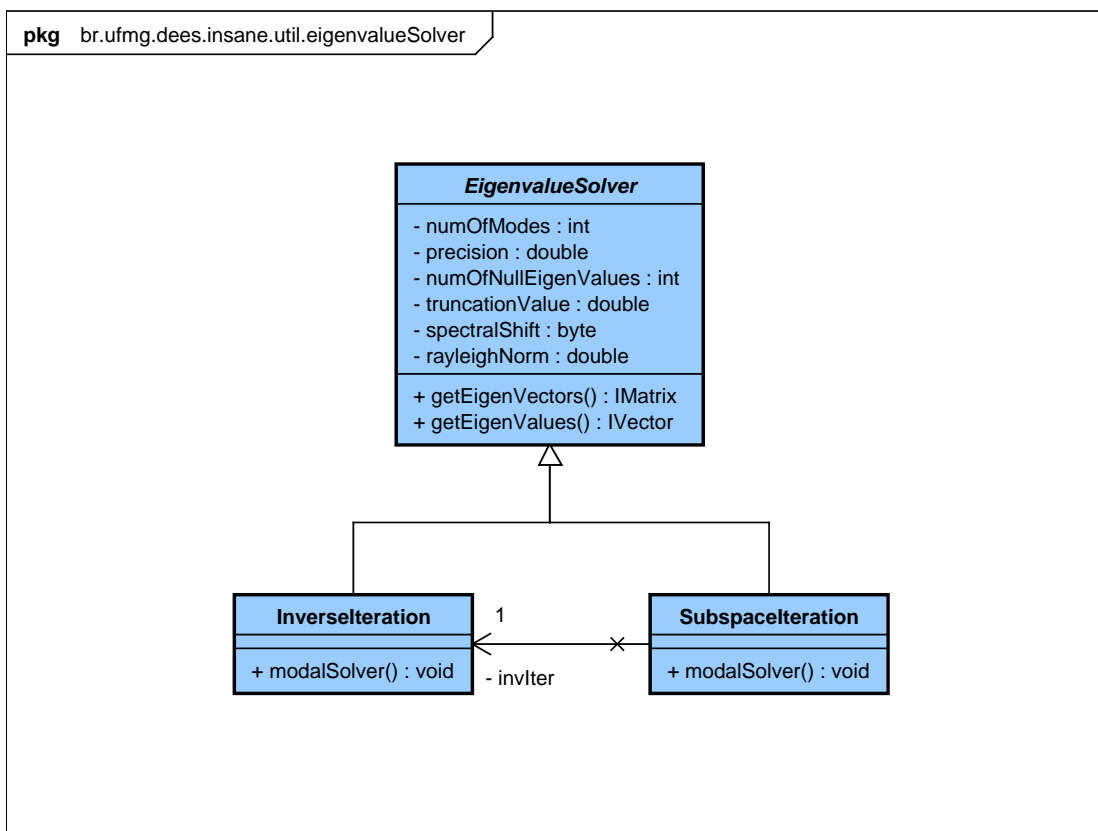


Figura 5.21: Diagrama de classe para EigenvalueSolver.

Capítulo 6

PROBLEMAS DINÂMICOS LINEARES

Com o objetivo de ilustrar e validar a implementação das formulações apresentadas no capítulo 2, são apresentadas a seguir simulações numéricas de problemas dinâmicos, nas quais são empregados os recursos disponibilizados no INSANE.

Os métodos e os parâmetros utilizados nestas simulações são apresentados na tabela 6.1.

Tabela 6.1: Métodos utilizados.

| Sigla | Nome | Parâmetros |
|-------------|---|---|
| N β 4 | Método <i>Newmark-β</i> (Método da Aceleração Média) | $\alpha = 0$ $\gamma = \frac{1}{2}$ $\beta = \frac{1}{4}$ |
| N β 6 | Método <i>Newmark-β</i> (Método da Aceleração Linear) | $\alpha = 0$ $\gamma = \frac{1}{2}$ $\beta = \frac{1}{6}$ |
| HHT | Método <i>Hilber-Hughes-Taylor</i> | $\alpha = -0,1$ $\gamma = 0,6$ $\beta = 0,3025$ |
| DC | Método da Diferença Central | - |
| W θ | Método <i>Wilson-θ</i> | $\theta = 1,42$ |
| SDM | Método de Superposição de Deslocamentos Modais | - |
| SAM | Método de Superposição de Acelerações Modais | - |

6.1 Sistema Massa-Mola

Um sistema massa-mola (Figura 6.1(a)) é um sistema de um grau de liberdade, cuja resposta analítica a excitações dinâmicas pode ser facilmente calculada ou encontrada na literatura. Ele consiste em uma massa m , idealizada concentrada, ligada a uma mola de rigidez k . As excitações dinâmicas podem ser forças externas $F(t)$ ou condições iniciais não-nulas. O amortecimento é considerado inexistente.

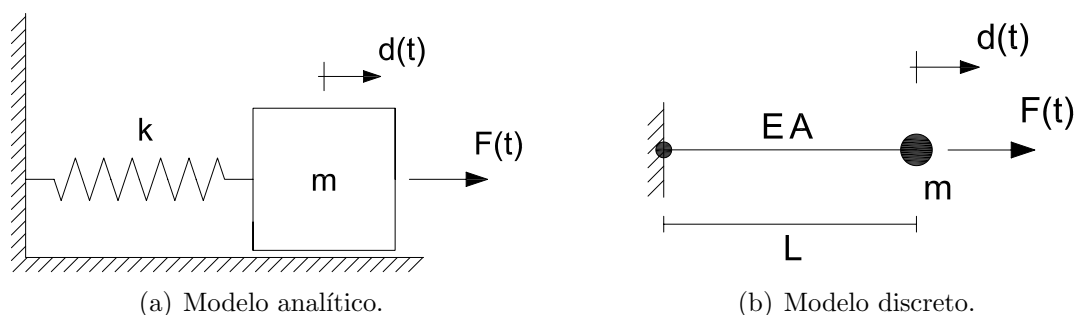


Figura 6.1: Sistema massa-mola.

O modelo discreto adotado para a análise desse sistema no INSANE (Figura 6.1(b)) é constituído por um elemento paramétrico unidimensional com modelo de análise do tipo LINE_1D e função de forma L2 (ver capítulo 5). Seu comprimento é L , seu módulo de elasticidade é E e a área de sua seção transversal é A . Supõe-se que a massa m encontra-se concentrada no nó livre do elemento.

A rigidez k do modelo discreto é obtida pela relação:

$$k = \frac{E A}{L} \quad (6.1)$$

A frequência natural ω_n do sistema massa-mola é dada por:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (6.2)$$

O sistema foi analisado para os carregamentos dinâmicos apresentados nas figuras 6.2(a), 6.2(b) e 6.2(c), partindo do repouso. Para o caso do carregamento harmônico (Figura 6.2(c)), também foi feita uma análise com aceleração inicial não-nula. Além disso, também analisou-se este sistema quando submetido a um deslocamento inicial não-nulo (Figura 6.2(d)).

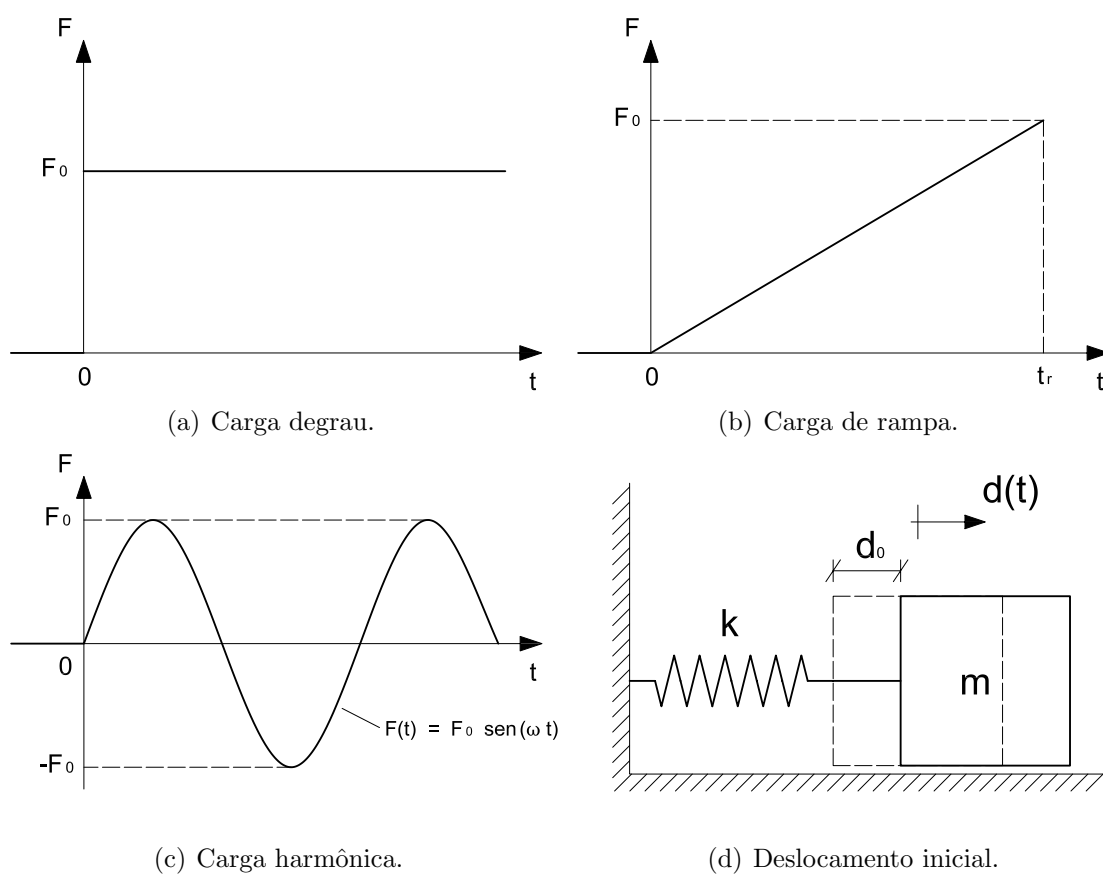


Figura 6.2: Carregamentos dinâmicos e condições iniciais não-nulas.

A fim de possibilitar a comparação dos resultados obtidos pelos diversos métodos, adotou-se um único passo de tempo $\Delta t = 0,016 T_n$, em que T_n é o menor período natural do sistema.

Nas simulações numéricas através de métodos de análise modal, empregou-se para este modelo um modo de vibração (o único existente) e o método da iteração inversa, com precisão de 10^{-6} , para a resolução do problema de autovalor.

A resposta analítica para o sistema submetido a uma carga degrau é dada por Chopra (1995):

$$d(t) = \frac{F_0}{k} [1 - \cos(\omega_n t)] \quad (6.3)$$

O deslocamento que esse sistema sofreria caso a carga fosse aplicada de forma estática, d_{est} , é dado por:

$$d_{est} = \frac{F_0}{k} \quad (6.4)$$

As resposta obtidas através do INSANE, mais a resposta analítica da equação (6.3) e o deslocamento estático da equação (6.4) são apresentadas no gráfico da figura 6.3.

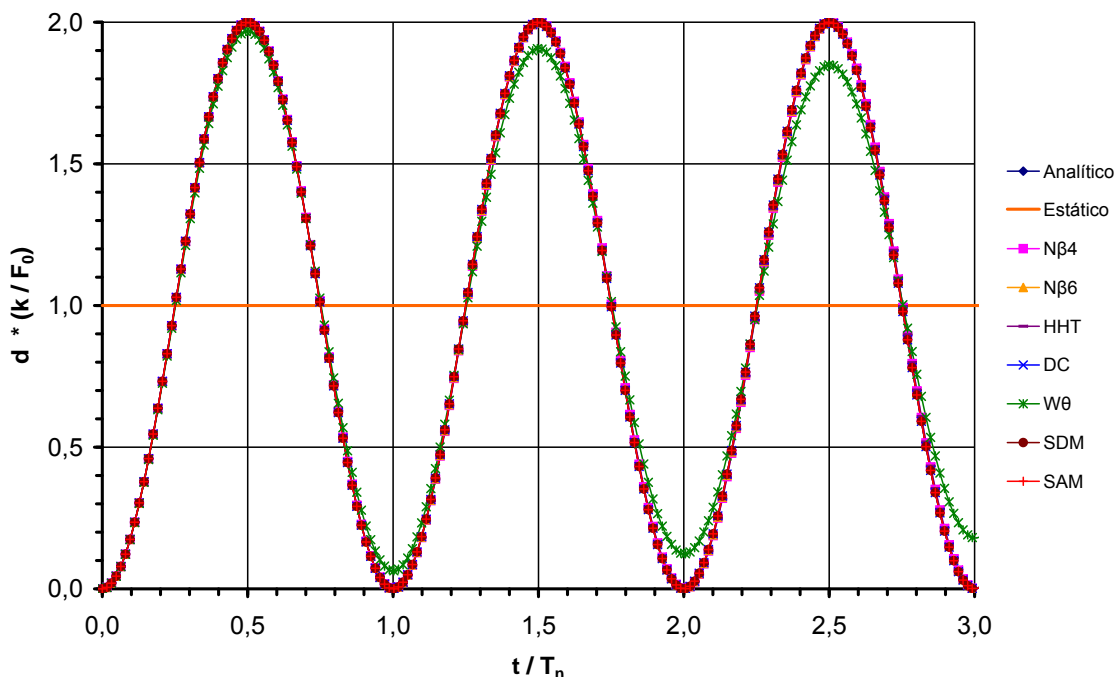


Figura 6.3: Resposta do sistema massa-mola à carga degrau.

Nota-se nesta figura uma excelente concordância entre todos os resultados (analítico e numéricos), com exceção do método *Wilson-θ*. Esta diferença já era esperada, uma vez que este método tem como característica apresentar um amortecimento numérico (Seção 2.4.4).

Observa-se que o sistema oscila em torno de um ponto de equilíbrio igual ao deslocamento estático e que o deslocamento máximo é dado por:

$$d_{m\acute{a}x} = 2 d_{est} \quad (6.5)$$

Chopra (1995) também fornece a resposta analítica para o sistema submetido a uma carga de rampa (Figura 6.2(b)):

$$d(t) = \frac{F_0}{k} \left[\frac{t}{t_r} - \frac{\text{sen}(\omega_n t)}{\omega_n t_r} \right] \quad (6.6)$$

em que t_r é a duração da carga de rampa (Figura 6.2(b)).

Para este caso, a resposta estática em cada instante de tempo $d_{est}(t)$ é dada por:

$$d_{est}(t) = \frac{F(t)}{k} \frac{t}{t_r} \quad (6.7)$$

A figura 6.4 apresenta o gráfico com os valores das respostas analítica, estática e obtidas através do INSANE, para o caso em que $t_r/T_n = 3,0$.

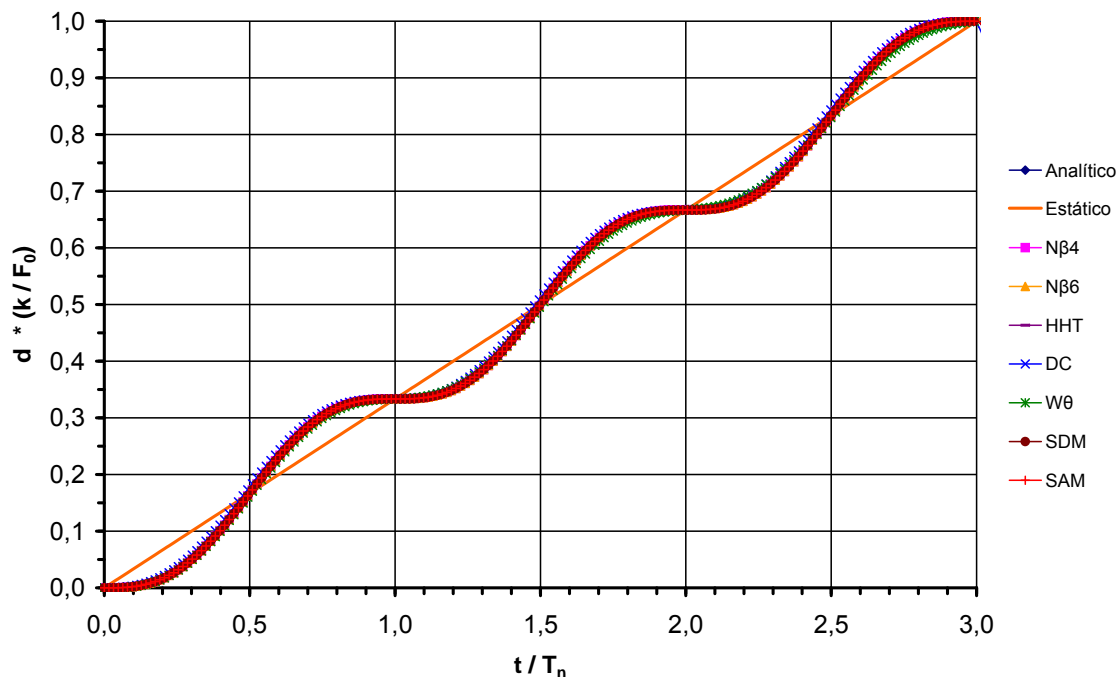


Figura 6.4: Resposta do sistema massa-mola à carga de rampa ($t_r/T_n = 3,0$).

Novamente os resultados obtidos pelos diversos métodos são coincidentes com a resposta analítica, à exceção do método *Wilson-θ*, que apresenta amortecimento numérico.

Assim como no caso da carga degrau, o sistema oscila em torno da resposta estática, que varia ao longo do tempo da mesma maneira que a carga $F(t)$.

A resposta de um sistema massa-mola a uma carga harmônica de frequência ω (Figura 6.2(c)) é dada por Chopra (1995):

$$d(t) = d(0) \cos(\omega_n t) + \left[\frac{\dot{d}(0)}{\omega_n} - \frac{F_0}{k} \frac{\omega/\omega_n}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \right] \sin(\omega_n t) + \frac{F_0}{k} \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \sin(\omega t) \quad (6.8)$$

A equação (6.8) mostra que $d(t)$ tem duas componentes de vibração distintas. A primeira é o termo em $\sin(\omega t)$, que fornece uma oscilação na frequência da carga.

Ela é denominada *vibração forçada*, *vibração estacionária* ou *resposta estacionária*, pois sua presença é devida à carga aplicada, sem influência das condições iniciais. A segunda são os termos em $\sin(\omega_n t)$ e $\cos(\omega_n t)$, que fornecem uma oscilação na frequência natural do sistema. Esta é a *vibração transiente* ou *resposta transiente* e é dependente das condições iniciais. Ressalta-se que este termo existe mesmo para condições iniciais nulas ($d(0) = \dot{d}(0) = 0$).

A figura 6.5 apresenta o gráfico com os valores das respostas analítica, estacionária e obtidas através do INSANE para um sistema cuja relação ω/ω_n é de 0,2. As condições iniciais são $d(0) = 0$ e $\dot{d}(0) = \omega_n F_0/k$.

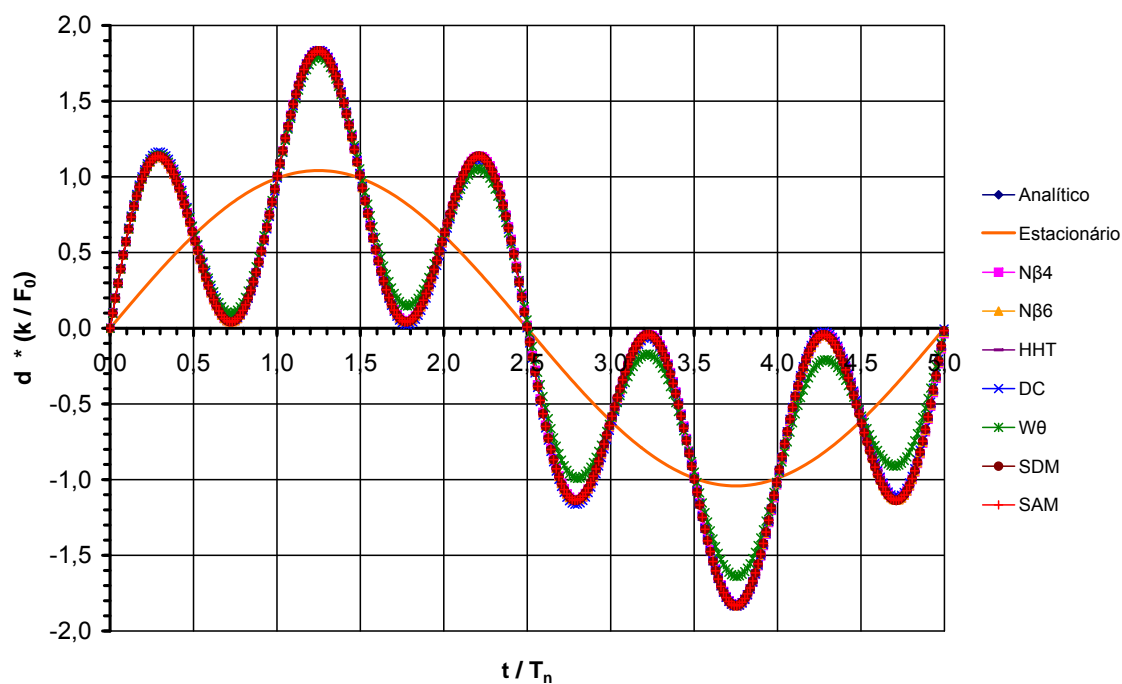


Figura 6.5: Resposta do sistema massa-mola à carga harmônica.
 $(\omega/\omega_n = 0,2; \quad d(0) = 0; \quad \dot{d}(0) = \omega_n F_0/k)$

A resposta transiente pode ser vista no gráfico da figura 6.5 como a diferença entre a resposta do sistema (respostas analítica e numérica) e a resposta estacionária. Como este é um sistema não-amortecido, ela está presente infinitamente, mas será mostrado posteriormente que ela tende a desaparecer devido ao amortecimento, daí o nome *transiente*.

Como esperado, os resultados obtidos pelos diversos métodos são coincidentes

com a resposta analítica e o método *Wilson- θ* apresenta uma pequena diferença, que aumenta ao longo do tempo devido ao amortecimento numérico por ele introduzido.

Um caso especial de carregamento harmônico acontece quando a frequência da carga é igual à frequência natural do sistema ($\omega = \omega_n$). Neste caso, ocorre o fenômeno da *ressonância*, em que a oscilação tende a crescer infinitamente.

Nesta situação, $\omega = \omega_n$, a resposta apresentada na equação (6.8) não é válida, pois a solução particular escolhida na resolução da equação diferencial faz parte da solução complementar (Chopra, 1995). A resposta analítica adequada para este caso, supondo que o sistema parte do repouso, é:

$$d(t) = -\frac{1}{2} \frac{F_0}{k} [\omega_n t \cos(\omega_n t) - \text{sen}(\omega_n t)] \quad (6.9)$$

As respostas analítica e obtidas pelo INSANE são apresentadas na figura 6.6.

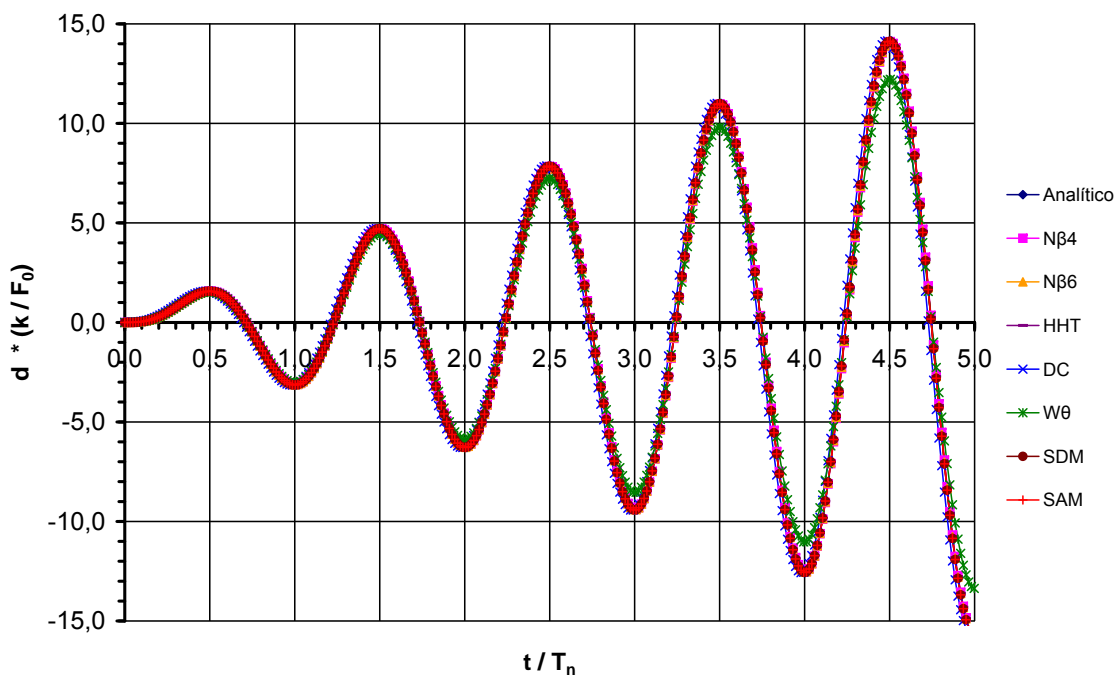


Figura 6.6: Resposta do sistema massa-mola à carga harmônica ($\omega = \omega_n$).

Mais uma vez, os resultados obtidos pelos diversos métodos são coincidentes com a resposta analítica e o método *Wilson- θ* apresenta uma pequena diferença, que aumenta ao longo do tempo devido ao amortecimento numérico por ele introduzido.

Como dito anteriormente e facilmente observável no gráfico da figura 6.6, o deslocamento tende a crescer infinitamente. Entretanto, isto não ocorre em estruturas reais, pois sempre haverá um pequeno amortecimento. Além disso, se o material for frágil, em algum momento a deformação atingirá a deformação limite e o material romperá. Se for um material dúctil, ele irá escoar, diminuindo a rigidez do sistema e, conseqüentemente, a “nova” frequência natural do sistema será diferente da frequência do carregamento.

O último caso estudado para o sistema massa-mola é o sistema submetido a um deslocamento inicial d_0 (Figura 6.2(d)). Neste caso, o sistema está em vibração livre e a resposta analítica é igual à resposta para vibrações harmônicas forçadas, dada pela equação (6.8), com $F_0 = 0$:

$$d(t) = d(0) \cos(\omega_n t) + \frac{\dot{d}(0)}{\omega_n} \text{sen}(\omega_n t) \quad (6.10)$$

O gráfico da figura 6.7 apresenta as respostas analítica e obtidas pelo INSANE.

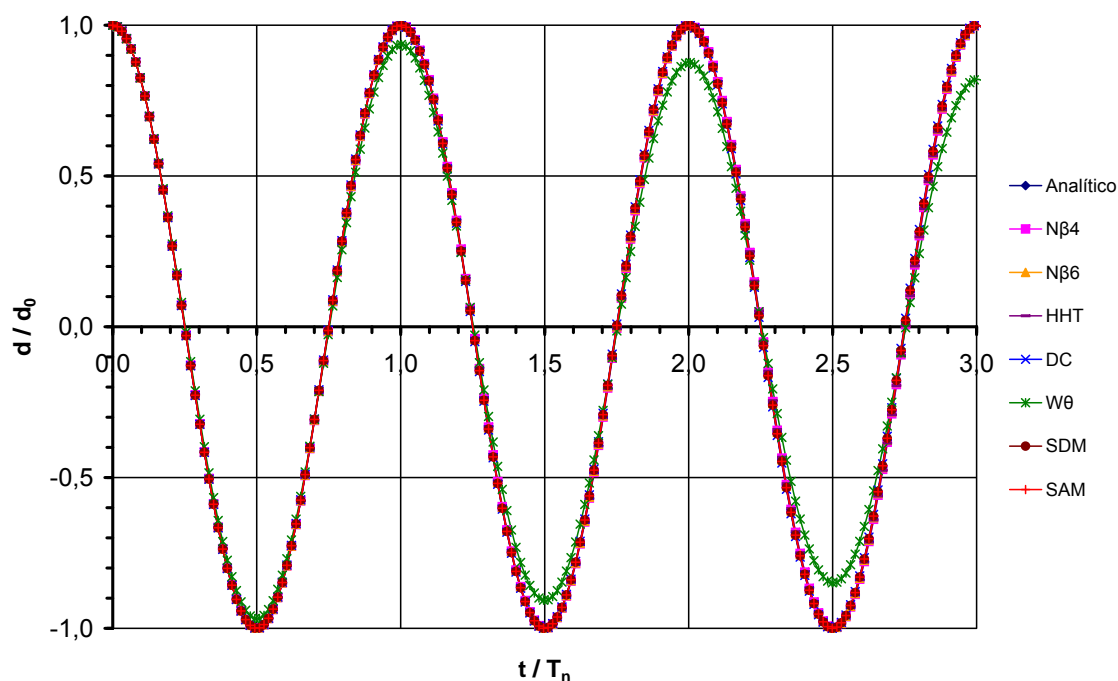


Figura 6.7: Resposta do sistema massa-mola ao deslocamento inicial.

Novamente obteve-se uma excelente concordância entre os resultados obtidos pelos diversos métodos e a resposta analítica, à exceção do método *Wilson-θ*, que

mais uma vez apresenta amortecimento numérico.

Pode-se observar no gráfico da figura 6.7 que o sistema oscila em torno de seu ponto de repouso ($d = 0$) e que o deslocamento máximo é igual ao deslocamento inicial, pois a velocidade inicial foi considerada nula.

Nos cinco exemplos estudados para o sistema massa-mola, encontrou-se ótimos resultados através do INSANE. O erro apresentado pelo método *Wilson- θ* já era esperado, conforme explicado na seção 2.4.4. Este erro é uma das razões pela qual o criador deste método, Prof. Edward Wilson, não mais recomenda sua utilização, sugerindo o uso de métodos mais precisos (Wilson, 2006).

6.2 Sistema Massa-Mola-Amortecedor

Um sistema massa-mola-amortecedor (Figura 6.8(a)) é, como o próprio nome diz, um sistema massa-mola com a adição de um amortecedor.

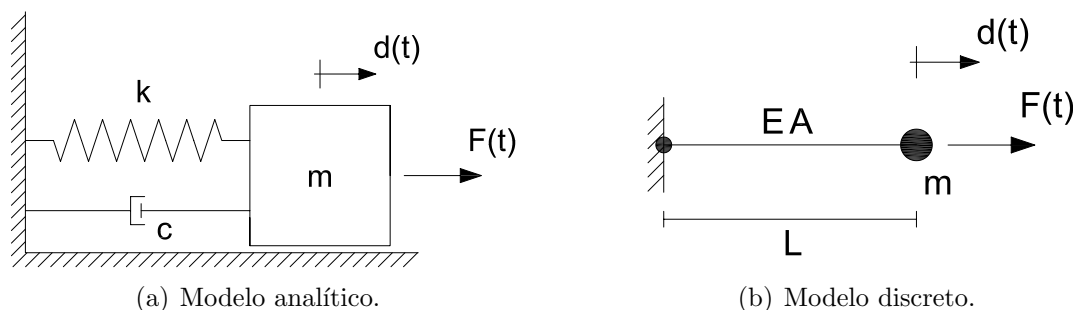


Figura 6.8: Sistema massa-mola-amortecedor.

O modelo discreto adotado para a análise desse sistema no INSANE (Figura 6.8(b)), assim como o adotado para o sistema massa-mola, é constituído por um elemento paramétrico unidimensional com modelo de análise do tipo `LINE_1D` e função de forma `L2`. Seu comprimento é L , seu módulo de elasticidade é E e a área de sua seção transversal é A . Supõe-se que a massa m encontra-se concentrada no nó livre do elemento. A rigidez k do modelo discreto é obtida pela relação (6.1).

O amortecimento considerado foi de $\zeta = 0,1$. Como nos métodos de integração

direta não é possível fornecer diretamente esse valor, calculou-se os coeficientes de Rayleigh correspondentes, de acordo com a equação (2.34). Como só há um modo de vibração para esse sistema, infinitos pares de valores satisfazem esta equação. Adotando $a_{r_1} = 0, 0$, tem-se que $a_{r_2} = 2 \zeta / \omega_n = 0, 2 / \omega_n$.

O sistema foi analisado para os carregamentos dinâmicos apresentados nas figuras 6.2(a) e 6.2(c), partindo do repouso. Assim como para o sistema massa-mola, para o caso do carregamento harmônico (Figura 6.2(c)), também foi feita uma análise com aceleração inicial não-nula. Além disso, também analisou-se este sistema quando submetido a um deslocamento inicial não-nulo (Figura 6.2(d)).

O passo de tempo adotado também foi de $0,016 T_n$, de forma a possibilitar a comparação entre os resultados dos sistemas massa-mola e massa-mola-amortecedor.

Nas simulações numéricas através de métodos de análise modal, empregou-se para este modelo um modo de vibração (o único existente) e o método da iteração inversa, com precisão de 10^{-6} , para a resolução do problema de autovalor.

Uma grandeza de fundamental importância na análise de sistemas amortecidos é a *frequência natural amortecida* ω_d , que é calculada por:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (6.11)$$

A resposta analítica para o sistema amortecido submetido a uma carga degrau é dada por Chopra (1995):

$$d(t) = \frac{F_0}{k} \left\{ 1 - e^{-\zeta \omega_n t} + \left[\cos(\omega_d t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \operatorname{sen}(\omega_d t) \right] \right\} \quad (6.12)$$

O deslocamento que esse sistema sofreria caso a carga fosse aplicada de forma estática, d_{est} , é dado pela equação (6.4).

As resposta obtidas através do INSANE, mais a resposta analítica da equação (6.12) e o deslocamento estático (6.4) são apresentadas no gráfico da figura 6.9.

Nota-se nesta figura uma excelente concordância entre todos os resultados, com exceção do método *Wilson- θ* , que apresenta um amortecimento mais acentuado.

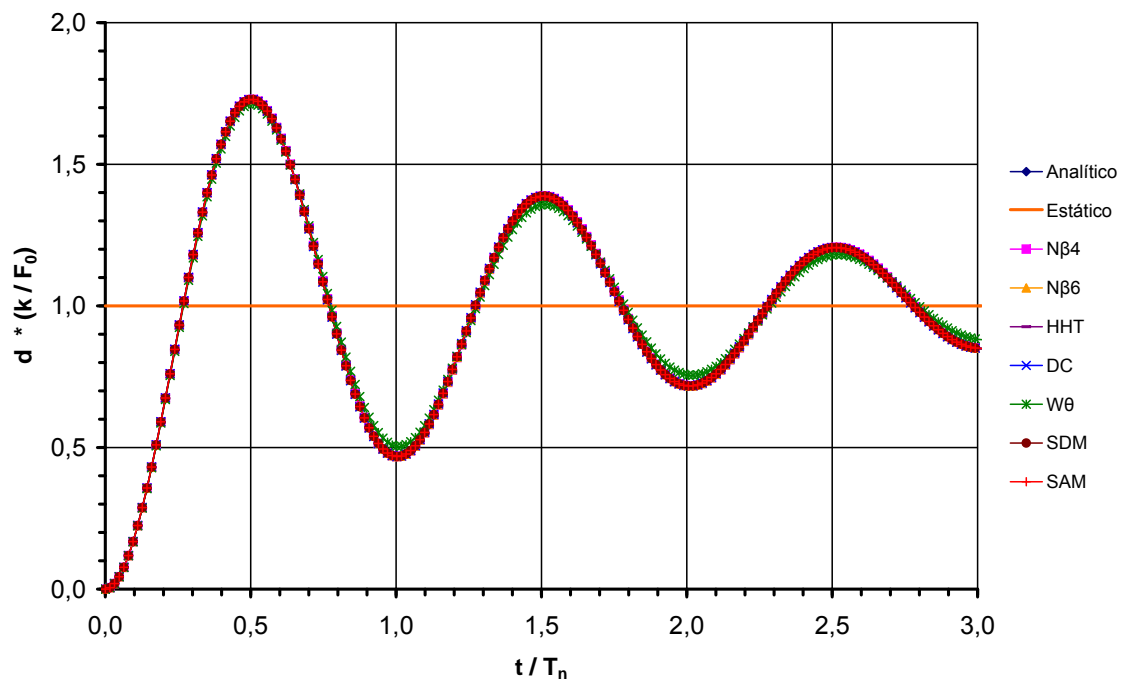


Figura 6.9: Resposta do sistema massa-mola-amortecedor à carga degrau.

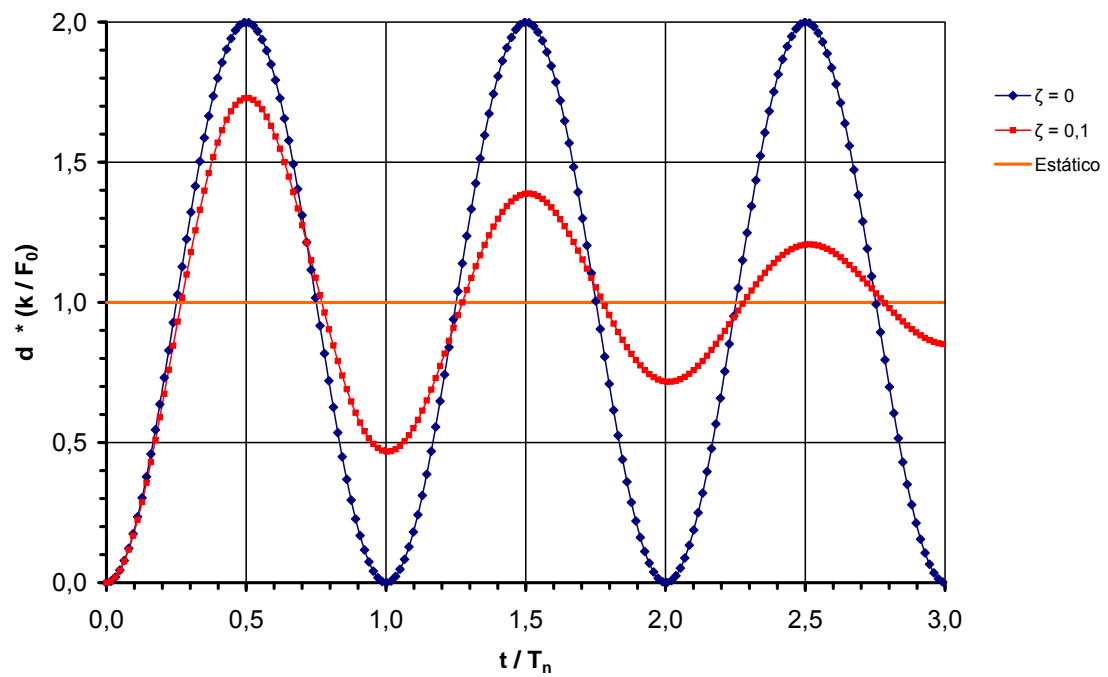


Figura 6.10: Respostas amortecida e não-amortecida à carga degrau ($N\beta_4$).

Como dito anteriormente, este método apresenta um amortecimento numérico (Seção 2.4.4).

Assim como o sistema massa-mola, o sistema massa-mola-amortecedor oscila em torno de um ponto de equilíbrio igual ao deslocamento estático e tende a atingir esta condição de equilíbrio. O deslocamento máximo apresentado é menor do que o do sistema massa-mola.

A figura 6.10 apresenta um gráfico comparativo entre os resultados dos sistemas massa-mola (definido com $\zeta = 0$) e massa-mola-amortecedor, obtidos através do INSANE com o uso do método N β 4.

A resposta de um sistema massa-mola-amortecedor a uma carga harmônica de frequência ω é dada por Chopra (1995):

$$d(t) = e^{-\zeta\omega_n t} [A \cos(\omega_d t) + B \text{sen}(\omega_d t)] + C \text{sen}(\omega t) + D \cos(\omega t) \quad (6.13)$$

em que

$$C = \frac{F_0}{k} \frac{1 - (\omega/\omega_n)^2}{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2} \quad (6.14)$$

$$D = \frac{F_0}{k} \frac{-2\zeta(\omega/\omega_n)}{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2} \quad (6.15)$$

e as constantes A e B são definidas a partir das condições iniciais.

A figura 6.11 apresenta o gráfico com os valores das respostas analítica, estacionária e obtidas através do INSANE para um sistema cuja relação ω/ω_n é de 0,2. As condições iniciais são $d(0) = 0$ e $\dot{d}(0) = \omega_n F_0/k$.

Como esperado, os resultados obtidos pelos diversos métodos são coincidentes com a resposta analítica, exceto o método *Wilson- θ* , que apresenta uma pequena diferença, devido ao amortecimento numérico por ele introduzido.

No gráfico da figura 6.11 é possível ver que a resposta transiente do sistema amortecido tende a se anular no decorrer do tempo, fazendo com que a resposta do sistema seja igual à resposta estacionária.

Um gráfico comparativo entre os resultados dos sistemas massa-mola (definido com $\zeta = 0$) e massa-mola-amortecedor, obtidos através do INSANE com o uso do método N β 4, é apresentado na figura 6.12.

Para o caso especial de carregamento harmônico cuja frequência é igual à frequência natural do sistema ($\omega = \omega_n$), em que ocorre o fenômeno da ressonância, a resposta analítica é dada por Chopra (1995):

$$d(t) = \frac{F_0}{k} \frac{1}{2\zeta} \left\{ e^{-\zeta\omega_n t} \left[\cos(\omega_d t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \operatorname{sen}(\omega_d t) \right] - \cos(\omega_n t) \right\} \quad (6.16)$$

As respostas analítica e obtidas pelo INSANE são apresentadas na figura 6.13.

Mais uma vez, os resultados obtidos pelos diversos métodos são coincidentes com a resposta analítica, exceto o método *Wilson- θ* , que apresenta uma pequena diferença, devido ao amortecimento numérico por ele introduzido.

Diferentemente do sistema massa-mola, em que o deslocamento tende a crescer infinitamente, no sistema amortecido a magnitude do deslocamento é limitada, com o sistema atingindo um estado estacionário. O valor da amplitude do deslocamento neste estado é dado por:

$$d(t)_{max} = \pm \frac{F_0}{2k\zeta} \quad (6.17)$$

Um gráfico comparativo entre os resultados dos sistemas massa-mola (definido com $\zeta = 0$) e massa-mola-amortecedor, obtidos através do INSANE com o uso do método N β 4, é apresentado na figura 6.14.

O último caso estudado para o sistema massa-mola-amortecedor é o sistema submetido a um deslocamento inicial d_0 . Neste caso, o sistema está em vibração livre e a resposta analítica é igual à resposta para vibrações harmônicas forçadas amortecidas, dada pela equação (6.13), com as constantes A e B calculadas de acordo com as condições iniciais e as constantes C e D nulas, pois $F_0 = 0$:

$$d(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left[d(0) \cos(\omega_d t) + \left(\frac{\dot{d}(0) + \zeta \omega_n d(0)}{\omega_d} \right) \operatorname{sen}(\omega_d t) \right] \quad (6.18)$$

O gráfico da figura 6.15 apresenta as respostas analítica e obtidas pelo INSANE.

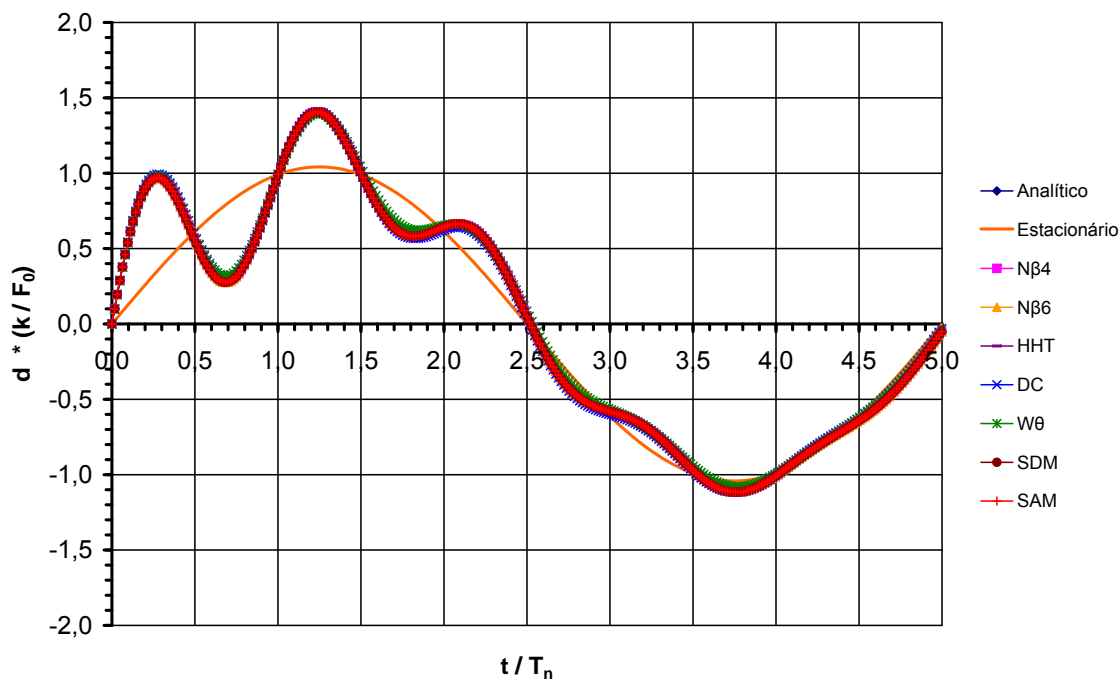


Figura 6.11: Resposta do sistema massa-mola-amortecedor à carga harmônica.
 $(\omega/\omega_n = 0,2; \quad d(0) = 0; \quad \dot{d}(0) = \omega_n F_0/k)$

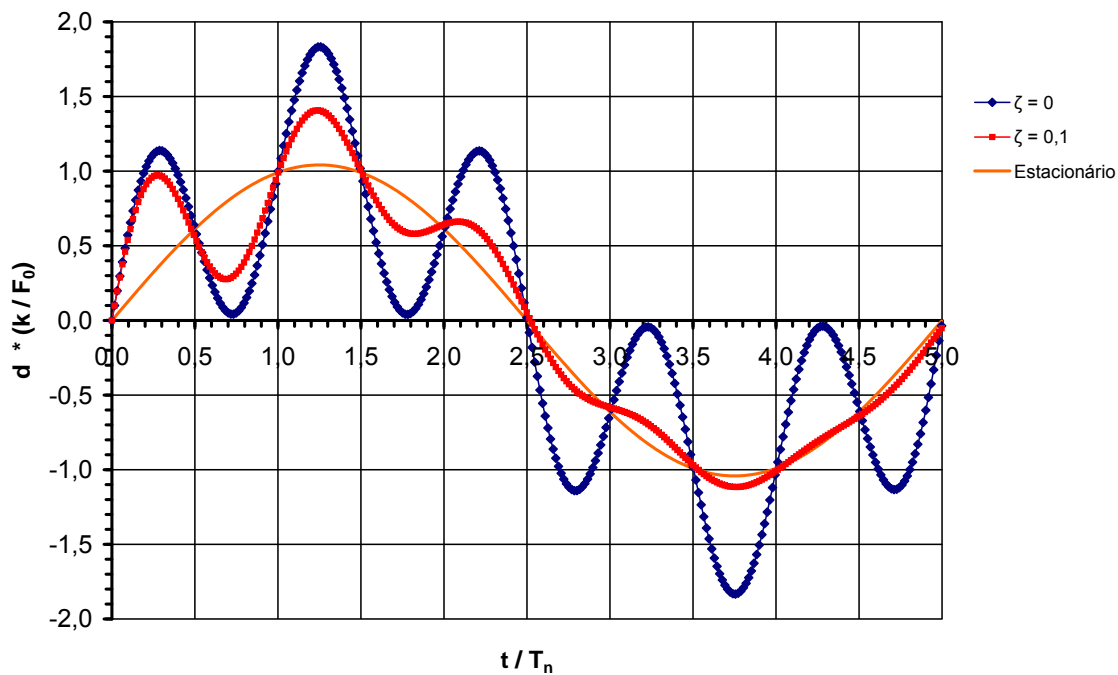


Figura 6.12: Respostas amortecida e não-amortecida à carga harmônica (Nβ4).
 $(\omega/\omega_n = 0,2; \quad d(0) = 0; \quad \dot{d}(0) = \omega_n F_0/k)$

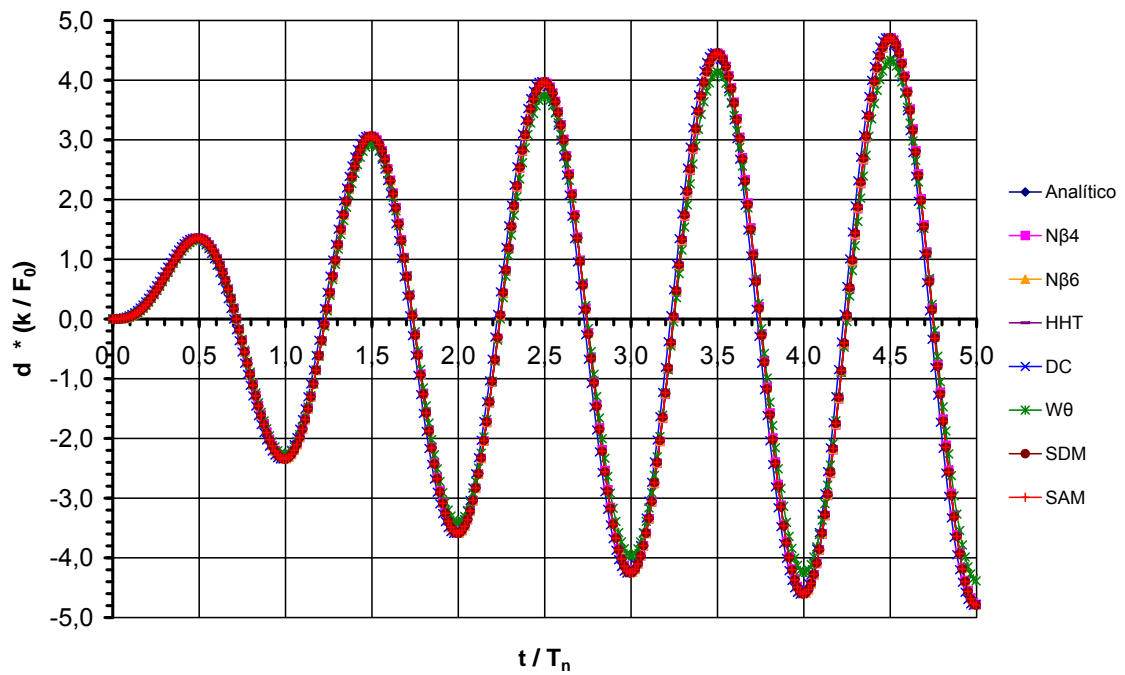


Figura 6.13: Resposta do sistema massa-mola-amortecedor à carga harmônica ($\omega = \omega_n$)

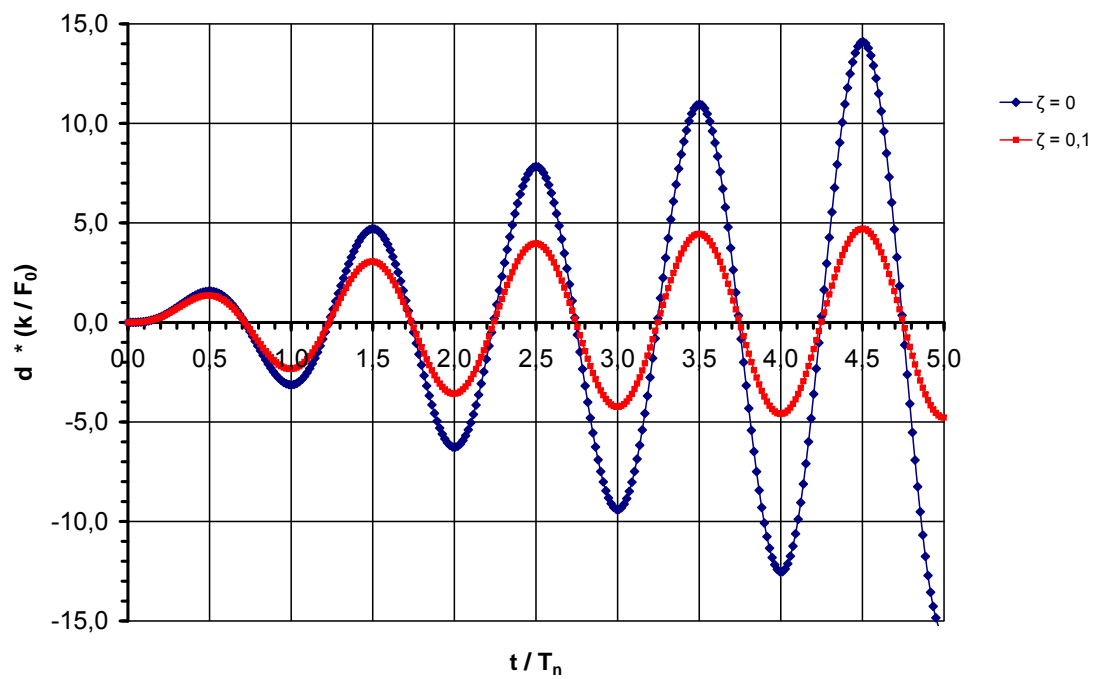


Figura 6.14: Respostas amortecida e não-amortecida à carga harmônica (Nβ4). ($\omega = \omega_n$)

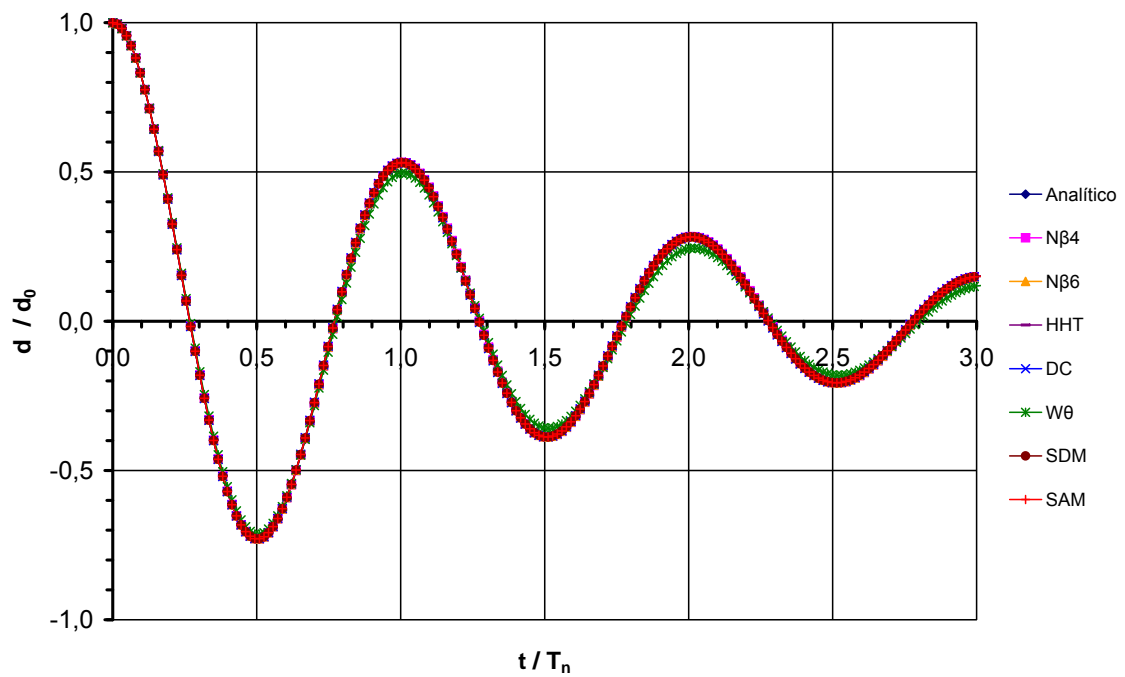


Figura 6.15: Resposta do sistema massa-mola-amortecedor ao deslocamento inicial.

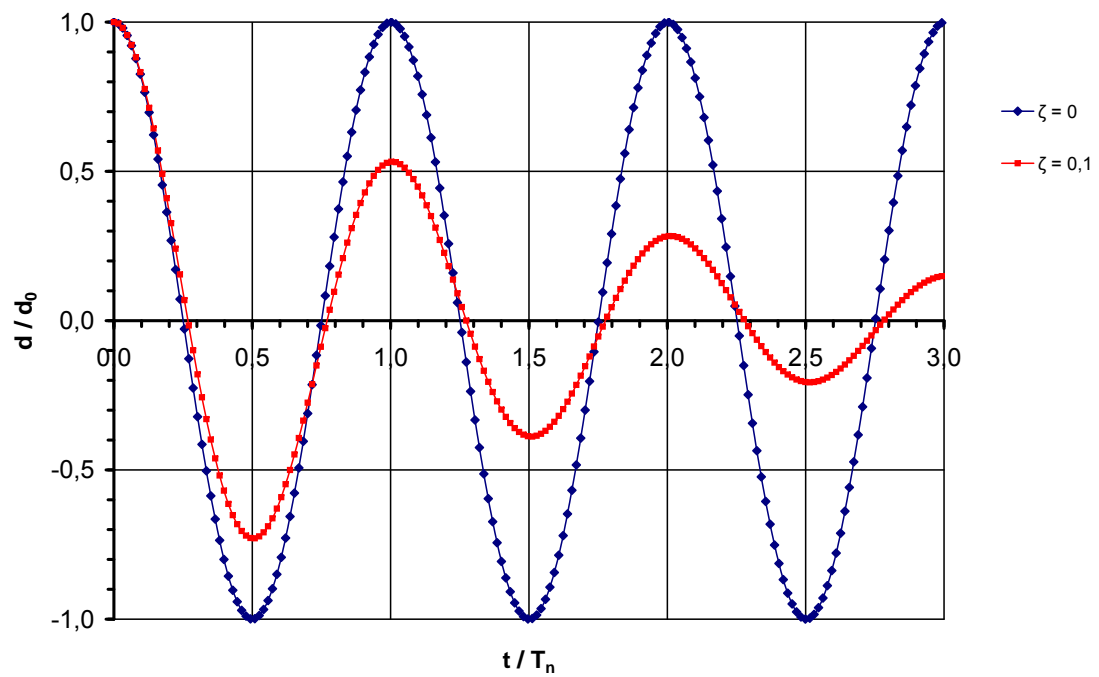


Figura 6.16: Respostas amortecida e não-amortecida ao deslocamento inicial ($N\beta_4$).

Novamente obteve-se uma excelente concordância entre os resultados obtidos pelos diversos métodos e a resposta analítica, à exceção do método *Wilson- θ* , que mais uma vez apresenta amortecimento numérico.

Pode-se observar no gráfico da figura 6.15 que o sistema oscila em torno de seu ponto de repouso ($d = 0$) e que o sistema tende a atingi-lo com o passar do tempo.

Um gráfico comparativo entre os resultados dos sistemas massa-mola (definido com $\zeta = 0$) e massa-mola-amortecedor, obtidos através do INSANE com o uso do método *N β 4*, é apresentado na figura 6.16.

6.3 Barra com Massa Consistente

Uma barra solicitada axialmente por uma carga degrau (Figura 6.17(a)) é analisada, considerando sua massa uniformemente distribuída ao longo de seu comprimento. A discretização da massa é feita segundo a equação (2.26), dita *massa consistente*.

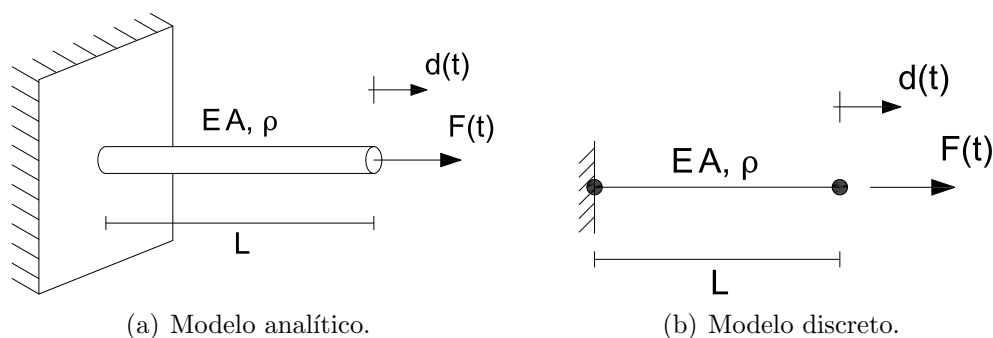


Figura 6.17: Barra com massa consistente.

O modelo discreto adotado para a análise desse sistema no INSANE (Figura 6.17(b)), assim como os adotados nos exemplos anteriores, é constituído por um elemento paramétrico unidimensional com modelo de análise do tipo *LINE_1D* e função de forma *L2*. Seu comprimento é L , seu módulo de elasticidade é E e a área de sua seção transversal é A . Entretanto, ao invés de se supor a massa concentrada no nó livre do elemento, adota-se uma densidade ρ constante em todo o elemento.

A rigidez k do modelo discreto é obtida pela relação (6.1).

Analisou-se este sistema considerando-o não-amortecido e amortecido. Para o segundo caso, o amortecimento considerado foi de $\zeta = 0,1$. Como nos métodos de integração direta não é possível fornecer diretamente esse valor, calculou-se os coeficientes de Rayleigh correspondentes, de acordo com a equação (2.34). Como só há um modo de vibração para esse sistema, infinitos pares de valores satisfazem esta equação. Adotando $a_{r_1} = 0,0$, tem-se que $a_{r_2} = 2 \zeta / \omega_n = 0,2 / \omega_n$.

Conforme dito anteriormente, o sistema foi analisado para um carregamento do tipo degrau (Figura 6.2(a)), partindo do repouso. O passo de tempo adotado também foi de $0,016 T_n$, de forma a possibilitar a comparação com os resultados do sistema massa-mola e massa-mola-amortecedor anteriores.

Nas simulações numéricas através de métodos de análise modal, empregou-se para este modelo um modo de vibração (o único existente) e o método da iteração inversa, com precisão de 10^{-6} , para a resolução do problema de autovalor.

Devido à nova hipótese para a distribuição de massa, cuja formulação pode ser encontrada no apêndice D, a frequência natural deste modelo é calculada por:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{3 k}{\rho A L}} \quad (6.19)$$

A fórmula para o cálculo da frequência natural amortecida (Equação (6.11)) não sofre alterações.

Nos sistemas massa-mola e massa-mola-amortecedor, considerou-se que a mola e o amortecedor não tinham massa, estando esta toda concentrada na extremidade livre. Para considerar que a barra agora analisada tem a mesma massa dos exemplos anteriores, calcula-se o valor da densidade:

$$\rho = \frac{m}{A L} \quad (6.20)$$

Substituindo (6.20) em (6.19), tem-se:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{3 k}{m}} \quad (6.21)$$

Como (6.21) é diferente de (6.2), conclui-se que os sistemas massa-mola e barra com massa consistente não apresentam respostas iguais para massas totais iguais.

Para saber qual massa total deve ser considerada na barra para se ter um modelo análogo ao analisado nos exemplos anteriores, iguala-se (6.2) e (6.19), obtendo:

$$\rho AL = 3 m \quad (6.22)$$

Como ρAL é a massa total da barra, a massa total da barra deve ser o triplo da massa total do sistema massa-mola para que se obtenha a mesma resposta.

Entretanto, esta diferença não afeta a amplitude do movimento, apenas sua frequência natural e, conseqüentemente, seu período natural. Como os gráficos aqui apresentados são normalizados pelo período natural, os dados nele utilizados foram obtidos utilizando a densidade calculada em (6.20). Observa-se que, como a frequência natural deste sistema é diferente da frequência natural do sistema massa-mola-amortecedor, o valor do segundo coeficiente de Rayleigh, a_{r2} , e do passo de tempo, também mudam, pois eles são dependentes de ω_n .

As respostas analíticas para os casos não-amortecido e amortecido são as mesmas apresentadas para os sistema massa-mola e massa-mola-amortecedor, respectivamente.

Os gráficos das figuras 6.18 e 6.19 apresentam as respostas analíticas e obtidas pelo INSANE do sistema 1GDL com massa consistente submetido à carga degrau, para os casos não-amortecido e amortecido, respectivamente.

Assim como nos exemplos anteriores, nota-se uma excelente concordância entre os resultados obtidos através do INSANE e a resposta analítica, à exceção do método *Wilson- θ* .

Comparações entre os resultados dos exemplos anteriores, em que se usa massa discreta, e deste exemplo, em que se usa massa consistente, são apresentadas nos gráficos das figuras 6.20 e 6.21 para os casos não-amortecido e amortecido, respectivamente. Os resultados obtidos através do método N β 4 foram adotados nesta comparação.

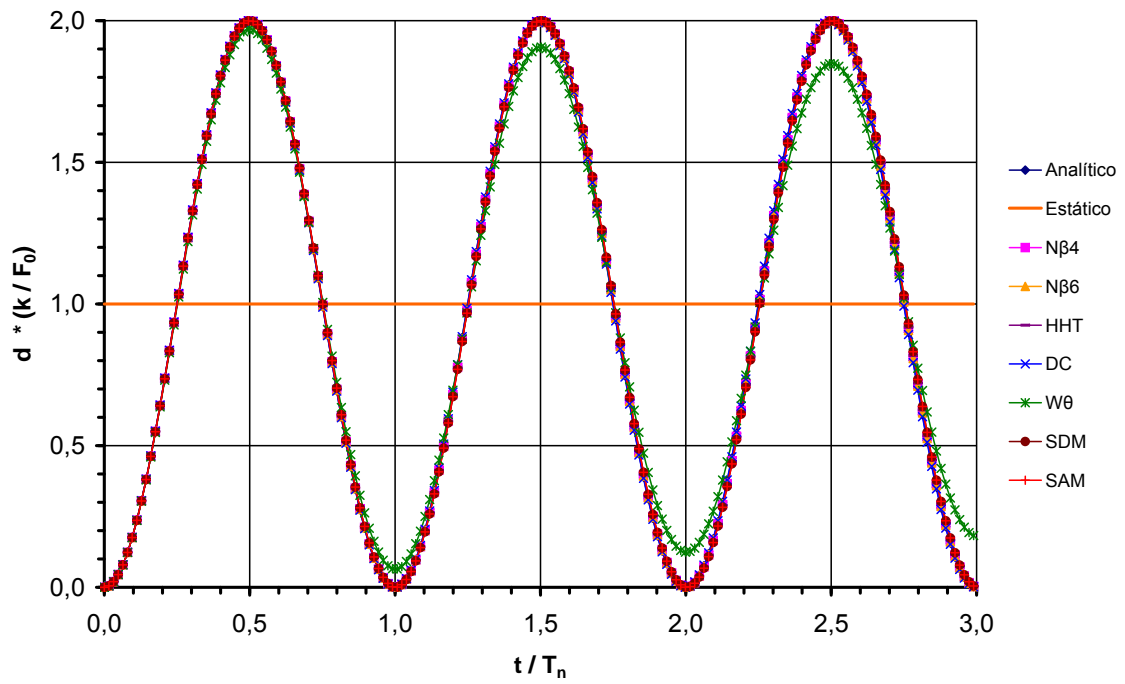


Figura 6.18: Resposta do 1GDL com massa consistente à carga degrau.

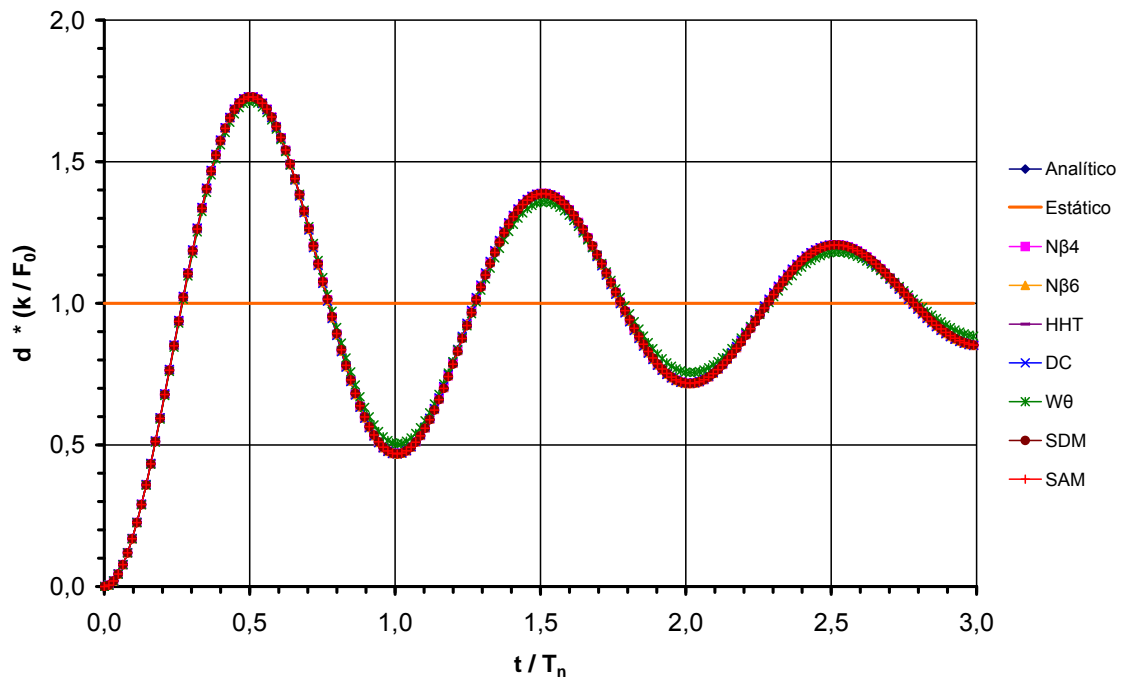


Figura 6.19: Resposta amortecida do 1GDL com massa consistente à carga degrau.

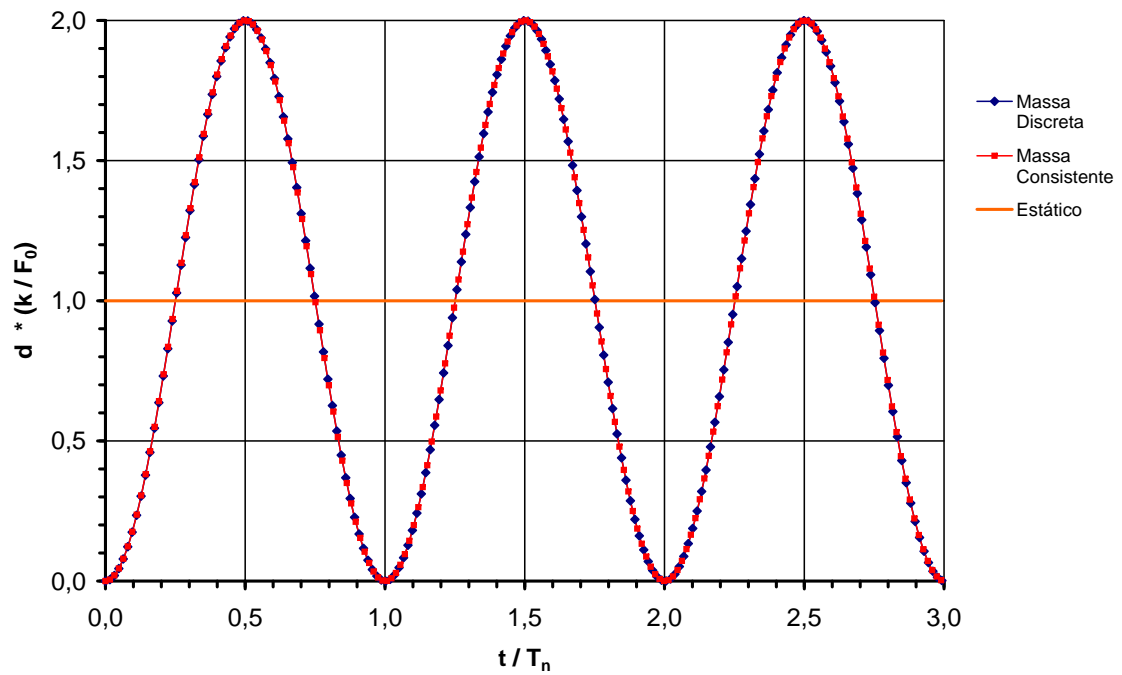


Figura 6.20: Comparação das respostas do sistema massa-mola e do sistema 1GDL com massa consistente à carga degrau ($N\beta_4$).

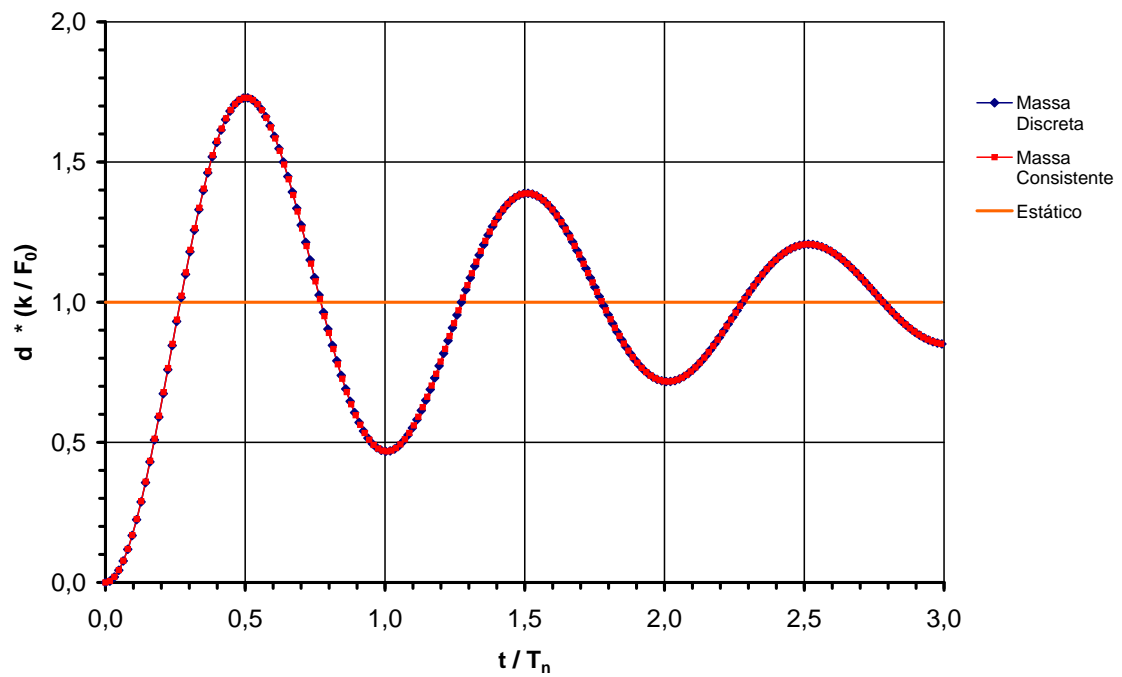


Figura 6.21: Comparação das respostas do sistema massa-mola-amortecedor e do sistema 1GDL amortecido com massa consistente à carga degrau ($N\beta_4$).

Observa-se que os resultados são coincidentes, apresentando apenas uma pequena defasagem ao longo do tempo. Esta defasagem é consequência da utilização de intervalos de tempo diferentes, devido às diferentes frequências naturais.

6.4 Chaminé Submetida a Carga Degrau

Uma chaminé de concreto armado, idealizada como uma viga em balanço com massa discreta (Figura 6.22(a)), é submetida em seu topo a uma carga degrau de $1000 uf^1$ (Figura 6.22(b)).

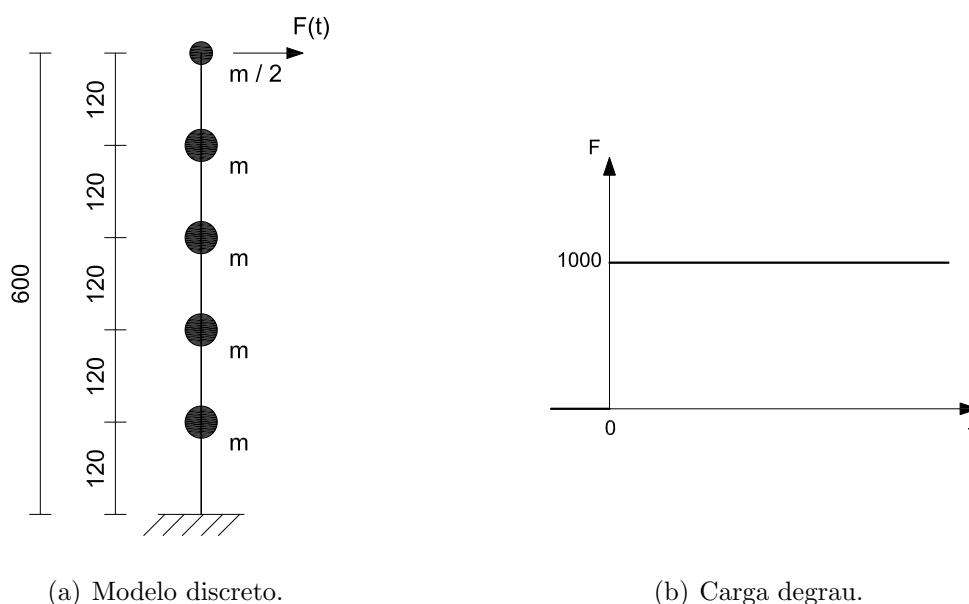


Figura 6.22: Chaminé submetida a carga degrau.

Supõe-se que a massa nos nós livres é de $208,6 um$, exceto no nó de extremidade, em que se supõe metade deste valor. A rigidez à flexão, EI , é de $5,469 \times 10^{10} uf \times uc^2$. Como as deformações axiais são desconsideradas, adota-se uma área unitária.

Para a análise através do INSANE, cinco elementos de barra com modelo de análise do tipo `PlaneFrame` (pórtico plano) foram utilizados. Este modelo é analisado através dos métodos da aceleração média (`Nβ4`), da aceleração linear (`Nβ6`) e

¹As seguintes unidades genéricas são utilizadas: uf = unidade de força; um = unidade de massa; uc = unidade de comprimento; ut = unidade de tempo

de *Wilson- θ* ($W\theta$), utilizando um passo de tempo $\Delta t = 0,1 \text{ ut}$.

A tabela 6.2 apresenta os resultados obtidos pela análise através do INSANE com o uso do método $N\beta 4$ e os resultados apresentados por Chopra (1995) para o mesmo método. Estes mesmos dados são representados graficamente na figura 6.23.

Observa-se que os resultados obtidos pelo INSANE são praticamente idênticos aos apresentados por Chopra (1995), com pequenos erros de arredondamento.

A tabela 6.3 apresenta os resultados obtidos pela análise através do INSANE com o uso do método $N\beta 6$ e os resultados apresentados por Chopra (1995) para o mesmo método. Estes mesmos dados são representados graficamente na figura 6.24. Para melhor visualização dos resultados, foram omitidos no gráfico os resultados obtidos pelo INSANE para $t > 1,5 \text{ ut}$.

Observa-se que para o Δt escolhido, o método da aceleração linear ($N\beta 6$) é numericamente instável: a resposta se desestabiliza por volta de $t = 1,0 \text{ ut}$. Chopra (1995) conseguiu realizar a análise com o método $N\beta 6$ utilizando uma mescla de integração direta e análise modal. Para este sistema, ele efetuou um truncamento modal, considerando apenas os dois primeiros modos de vibração.

O método de *Wilson- θ* ($W\theta$) foi desenvolvido exatamente para solucionar este problema de estabilidade numérica do método da aceleração linear. Por adicionar um amortecimento numérico, conforme visto nos exemplos anteriores, ele filtra a resposta dos modos mais altos do sistema (normalmente com baixa precisão), atingindo assim a estabilidade incondicional.

A tabela 6.4 apresenta os resultados obtidos pela análise através do INSANE com o uso do método $W\theta$ e os resultados apresentados por Chopra (1995) para o mesmo método. Estes mesmos dados são representados graficamente na figura 6.25.

Como esperado, a análise através do método $W\theta$ não apresentou problemas quanto à estabilidade numérica, entretanto os valores encontrados são ligeiramente diferentes daqueles obtidos por Chopra (1995).

Tabela 6.2: Resultados obtidos pelo método $N\beta_4$.

| Tempo [ut] | Chopra (1995) [uc] | INSANE [uc] |
|------------|--------------------|-------------|
| 0,1 | 0,0172 | 0,0172 |
| 0,2 | 0,0753 | 0,0753 |
| 0,3 | 0,1682 | 0,1682 |
| 0,4 | 0,2799 | 0,2798 |
| 0,5 | 0,4044 | 0,4043 |
| 0,6 | 0,5436 | 0,5435 |
| 0,7 | 0,7127 | 0,7125 |
| 0,8 | 0,9228 | 0,9226 |
| 0,9 | 1,1588 | 1,1586 |
| 1,0 | 1,3921 | 1,3919 |
| 1,1 | 1,6068 | 1,6065 |
| 1,2 | 1,7974 | 1,7972 |
| 1,3 | 1,9676 | 1,9674 |
| 1,4 | 2,1341 | 2,1339 |
| 1,5 | 2,3012 | 2,3010 |
| 1,6 | 2,4462 | 2,4461 |
| 1,7 | 2,5469 | 2,5469 |
| 1,8 | 2,5953 | 2,5954 |
| 1,9 | 2,5926 | 2,5929 |
| 2,0 | 2,5540 | 2,5544 |

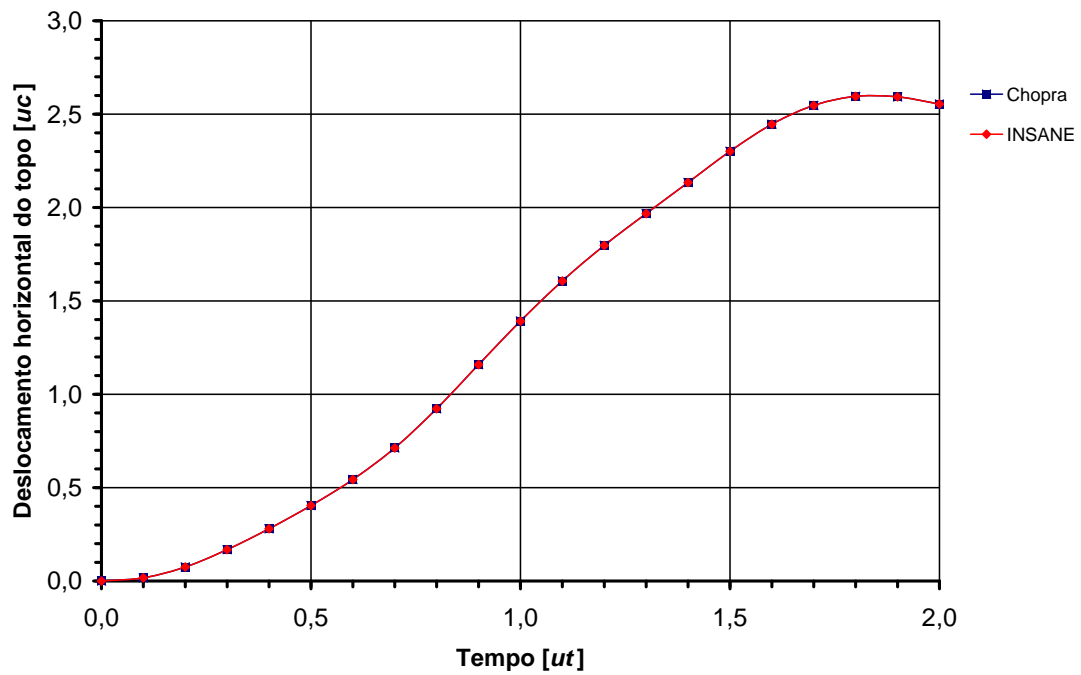
Figura 6.23: Resultados obtidos pelo método $N\beta_4$.

Tabela 6.3: Resultados obtidos pelo método $N\beta 6$.

| Tempo [ut] | Chopra (1995) [uc] | INSANE [uc] |
|------------|--------------------|-------------|
| 0,1 | 0,0105 | 0,0121 |
| 0,2 | 0,0693 | 0,0749 |
| 0,3 | 0,1663 | 0,1660 |
| 0,4 | 0,2777 | 0,2826 |
| 0,5 | 0,3959 | 0,3964 |
| 0,6 | 0,5335 | 0,5432 |
| 0,7 | 0,7090 | 0,6890 |
| 0,8 | 0,9258 | 0,9920 |
| 0,9 | 1,1651 | 1,0008 |
| 1,0 | 1,3974 | 1,8331 |
| 1,1 | 1,6032 | 0,4726 |
| 1,2 | 1,7854 | 4,7909 |
| 1,3 | 1,9611 | -6,0895 |
| 1,4 | 2,1412 | 23,9929 |
| 1,5 | 2,3160 | -57,6623 |
| 1,6 | 2,4596 | 169,1204 |
| 1,7 | 2,5488 | -466,1543 |
| 1,8 | 2,5812 | 1336,4943 |
| 1,9 | 2,5748 | -3836,9099 |
| 2,0 | 2,5508 | 11171,5152 |

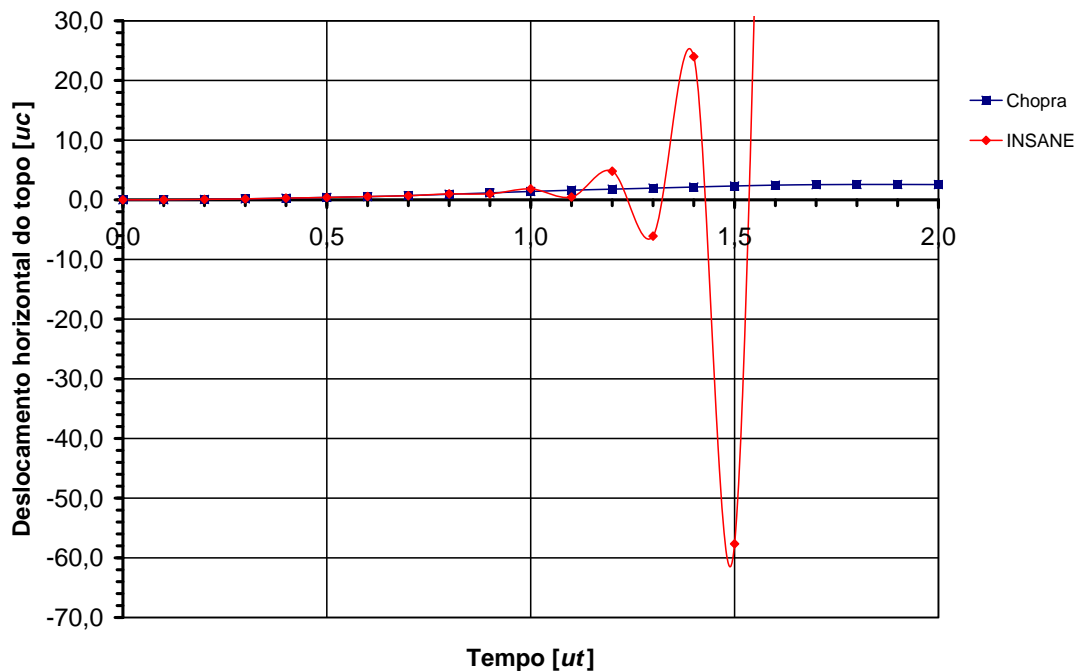
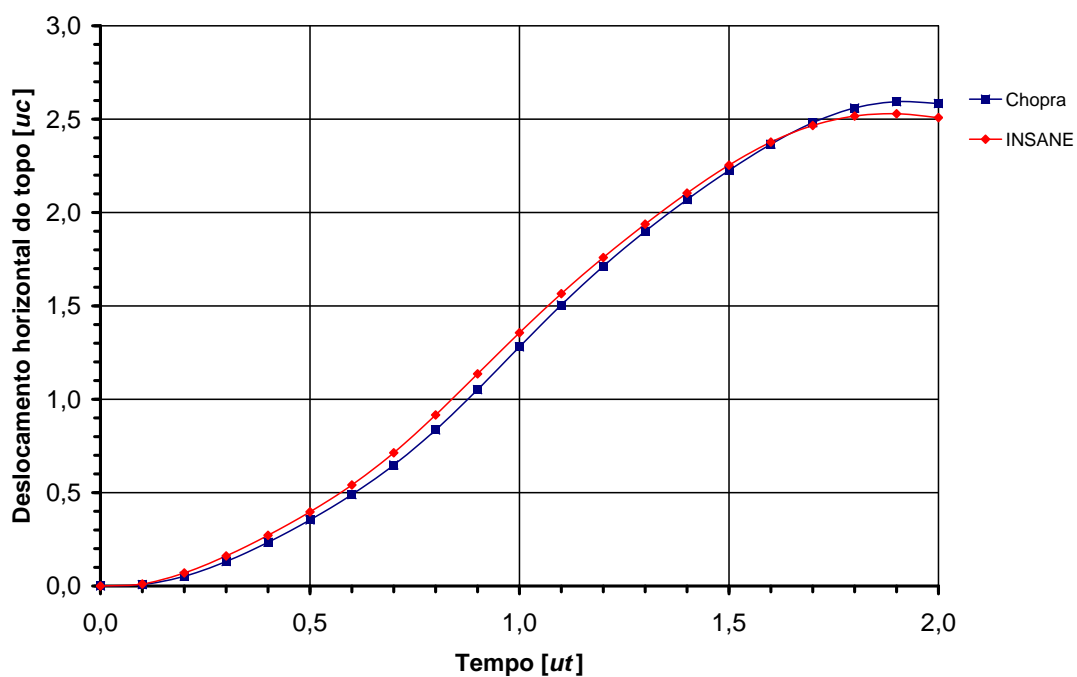
Figura 6.24: Resultados obtidos pelo método $N\beta 6$.

Tabela 6.4: Resultados obtidos pelo método $W\theta$.

| Tempo [ut] | Chopra (1995) [uc] | INSANE [uc] |
|------------|--------------------|-------------|
| 0,1 | 0,0077 | 0,0109 |
| 0,2 | 0,0520 | 0,0699 |
| 0,3 | 0,1311 | 0,1608 |
| 0,4 | 0,2339 | 0,2716 |
| 0,5 | 0,3537 | 0,3969 |
| 0,6 | 0,4895 | 0,5409 |
| 0,7 | 0,6479 | 0,7134 |
| 0,8 | 0,8360 | 0,9162 |
| 0,9 | 1,0516 | 1,1360 |
| 1,0 | 1,2805 | 1,3565 |
| 1,1 | 1,5049 | 1,5656 |
| 1,2 | 1,7123 | 1,7588 |
| 1,3 | 1,8994 | 1,9378 |
| 1,4 | 2,0691 | 2,1042 |
| 1,5 | 2,2253 | 2,2536 |
| 1,6 | 2,3659 | 2,3772 |
| 1,7 | 2,4813 | 2,4661 |
| 1,8 | 2,5598 | 2,5163 |
| 1,9 | 2,5938 | 2,5289 |
| 2,0 | 2,5840 | 2,5084 |

Figura 6.25: Resultados obtidos pelo método $W\theta$.

6.5 Treliça Plana de Duas Barras

Weaver Jr. e Johnston (1987) apresentam resultados para a análise dinâmica de uma treliça plana de duas barras (Figura 6.26(a)) submetida a um carregamento como o representado pela figura 6.26(b), para os métodos CD, $N\beta 4$ e $N\beta 6$.

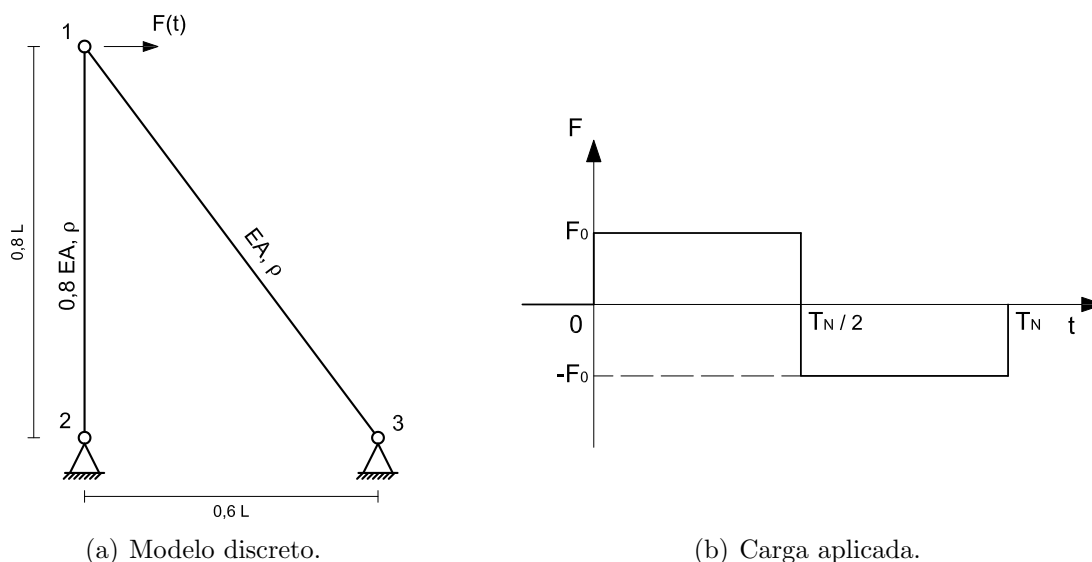


Figura 6.26: Treliça plana de duas barras.

Na análise através do INSANE, dois elementos de barra com modelo de análise do tipo `PlaneTruss` (treliça plana) foram utilizados, um para cada barra. A área e o comprimento da barra vertical correspondem a 0,8 vezes a área e o comprimento da barra inclinada, respectivamente. Adotou-se massa consistente para esta análise.

O passo de tempo utilizado foi de um vigésimo do período natural para o primeiro modo de vibração, sendo que a frequência natural correspondente é dada por (Weaver Jr. e Johnston, 1987):

$$\omega_1^2 = 0,2 \frac{k}{m} \quad (6.23)$$

Sendo k a rigidez da barra inclinada e m dados por:

$$k = \frac{E A}{L} \quad (6.24)$$

$$m = 3,28 \frac{\rho A L}{6} \quad (6.25)$$

Substituindo (6.24) e (6.25) em (6.23), tem-se:

$$\omega_1 = \frac{0,6049}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (6.26)$$

Portanto, o período natural do primeiro modo de vibração é dado por:

$$T_1 = \frac{2 \pi L}{0,6049} \sqrt{\frac{\rho}{E}} \quad (6.27)$$

E o passo de tempo utilizado na análise é:

$$\Delta t = \frac{\pi L}{6,049} \sqrt{\frac{\rho}{E}} \quad (6.28)$$

As tabelas 6.5, 6.6 e 6.7 apresentam os resultados obtidos pela análise através do INSANE e apresentados por Weaver Jr. e Johnston (1987) para os métodos CD, N β 4 e N β 6, respectivamente. Estes mesmos dados são representados graficamente nas figuras 6.27, 6.28 e 6.29, respectivamente.

Os resultados apresentados por Weaver Jr. e Johnston (1987) são representados com quatro algarismos significativos, variando o número de casas decimais, pois eles foram originalmente publicados desta forma. Para os resultados obtidos através do INSANE preferiu-se adotar sempre quatro casas decimais.

Observa-se que os resultados de Weaver Jr. e Johnston (1987) e do INSANE são coincidentes para os três métodos. Isto já era esperado, pois em ambos os trabalhos utilizou-se o mesmo modelo discreto e mesmos métodos numéricos. Esta concordância de resultados valida a implementação destes métodos no INSANE.

Tabela 6.5: Resultados obtidos pelo método CD.

| Tempo | Weaver Jr. e Johnston (1987) | INSANE |
|-------|------------------------------|----------|
| 1,0 | 0,2467 | 0,2467 |
| 2,0 | 0,9431 | 0,9431 |
| 3,0 | 1,979 | 1,9793 |
| 4,0 | 3,227 | 3,2267 |
| 5,0 | 4,574 | 4,5742 |
| 6,0 | 5,928 | 5,9284 |
| 7,0 | 7,188 | 7,1875 |
| 8,0 | 8,223 | 8,2234 |
| 9,0 | 8,898 | 8,8975 |
| 10,0 | 9,107 | 9,1066 |
| 11,0 | 7,839 | 7,8390 |
| 12,0 | 5,330 | 5,3296 |
| 13,0 | 1,952 | 1,9522 |
| 14,0 | -1,929 | -1,9291 |
| 15,0 | -6,024 | -6,0236 |
| 16,0 | -10,06 | -10,0604 |
| 17,0 | -13,70 | -13,6967 |
| 18,0 | -16,50 | -16,5026 |
| 19,0 | -18,07 | -18,0662 |
| 20,0 | -18,15 | -18,1544 |

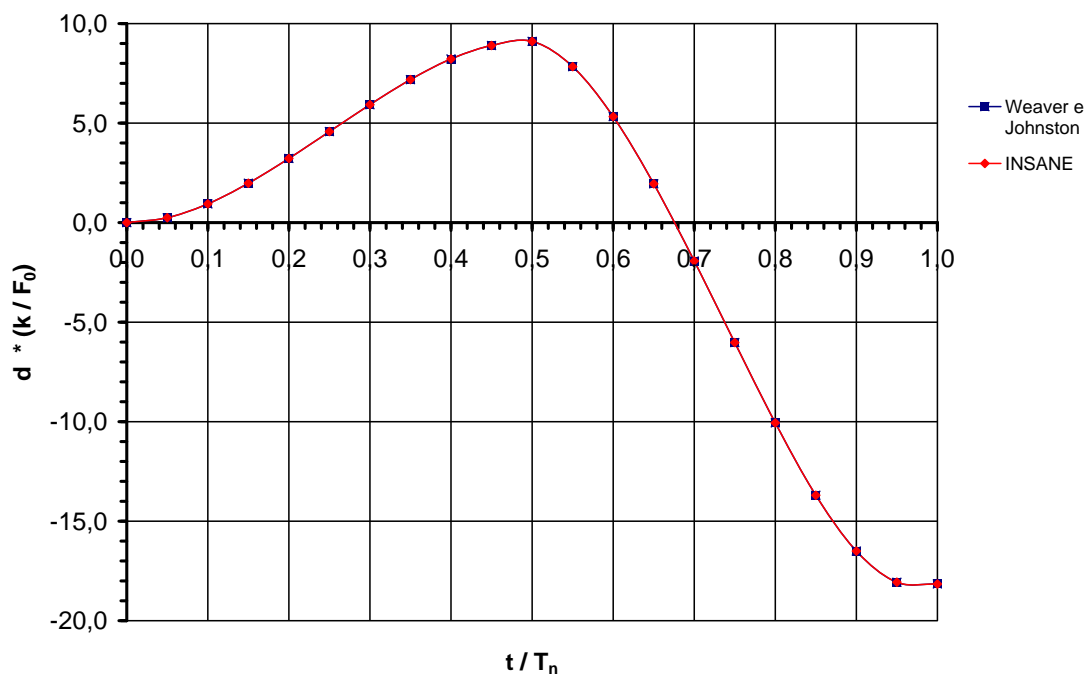


Figura 6.27: Resultados obtidos pelo método CD.

Tabela 6.6: Resultados obtidos pelo método $N\beta_4$.

| Tempo | Weaver Jr. e Johnston (1987) | INSANE |
|-------|------------------------------|----------|
| 1,0 | 0,2369 | 0,2369 |
| 2,0 | 0,9121 | 0,9121 |
| 3,0 | 1,932 | 1,9316 |
| 4,0 | 3,173 | 3,1730 |
| 5,0 | 4,515 | 4,5151 |
| 6,0 | 5,851 | 5,8505 |
| 7,0 | 7,080 | 7,0801 |
| 8,0 | 8,101 | 8,1013 |
| 9,0 | 8,806 | 8,8064 |
| 10,0 | 9,099 | 9,0994 |
| 11,0 | 8,689 | 8,6893 |
| 12,0 | 7,149 | 7,1492 |
| 13,0 | 4,452 | 4,4516 |
| 14,0 | 0,9392 | 0,9392 |
| 15,0 | -3,01 | -3,0052 |
| 16,0 | -7,03 | -7,0277 |
| 17,0 | -10,89 | -10,8189 |
| 18,0 | -14,09 | -14,0865 |
| 19,0 | -16,53 | -16,5309 |
| 20,0 | -17,86 | -17,8627 |

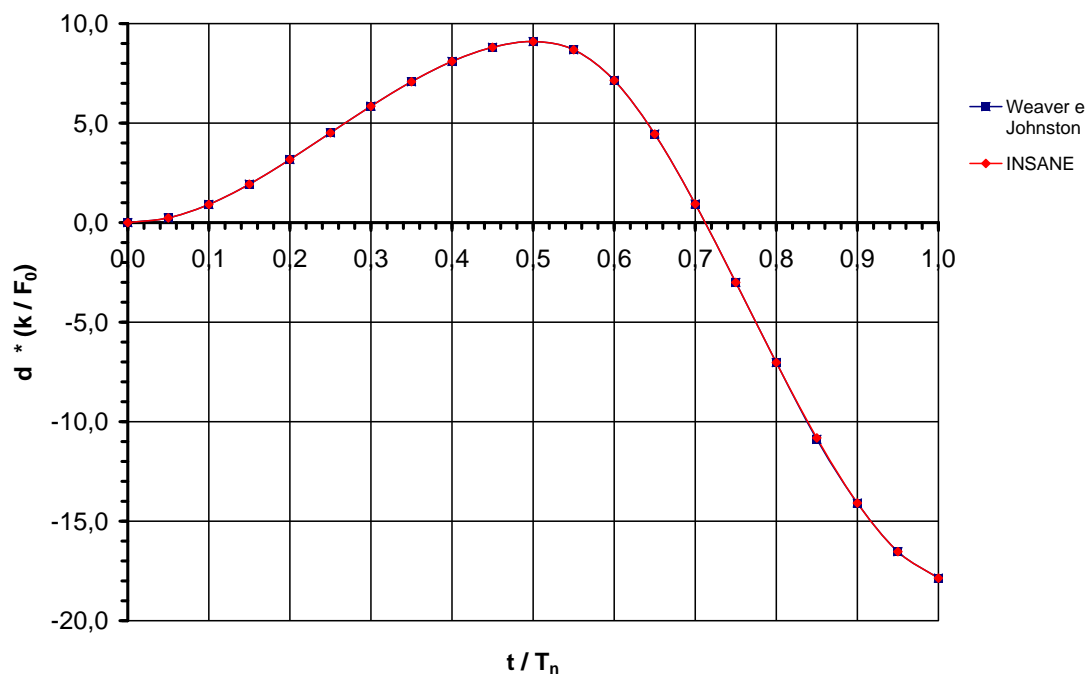
Figura 6.28: Resultados obtidos pelo método $N\beta_4$.

Tabela 6.7: Resultados obtidos pelo método N/β6.

| Tempo | Weaver Jr. e Johnston (1987) | INSANE |
|-------|------------------------------|----------|
| 1,0 | 0,2400 | 0,2400 |
| 2,0 | 0,9220 | 0,9220 |
| 3,0 | 1,948 | 1,9476 |
| 4,0 | 3,192 | 3,1918 |
| 5,0 | 4,536 | 4,5356 |
| 6,0 | 5,875 | 5,8753 |
| 7,0 | 7,113 | 7,1126 |
| 8,0 | 8,139 | 8,1390 |
| 9,0 | 8,838 | 8,8377 |
| 10,0 | 9,108 | 9,1080 |
| 11,0 | 8,741 | 8,7405 |
| 12,0 | 7,145 | 7,1453 |
| 13,0 | 4,397 | 4,3967 |
| 14,0 | 0,8543 | 0,8543 |
| 15,0 | -3,104 | -3,1037 |
| 16,0 | -7,143 | -7,1434 |
| 17,0 | -10,97 | -10,9690 |
| 18,0 | -14,28 | -14,2767 |
| 19,0 | -16,73 | -16,7318 |
| 20,0 | -18,01 | -18,0118 |

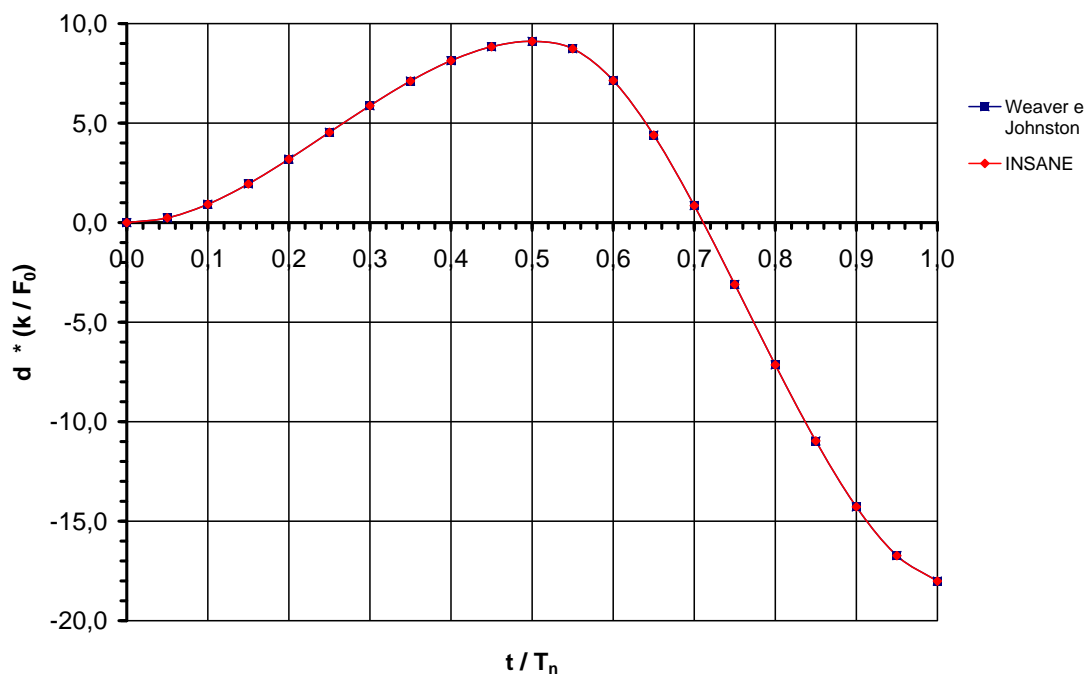


Figura 6.29: Resultados obtidos pelo método N/β6.

6.6 Treliça Plana de Três Barras

Weaver Jr. e Johnston (1987) também apresentam resultados para a análise dinâmica de uma treliça plana de três barras (Figura 6.30(a)) em vibração livre, para os métodos SDM e HHT. Todos os deslocamentos livres assumem valores iniciais de $0,1 uc$ (Figura 6.26(b)).

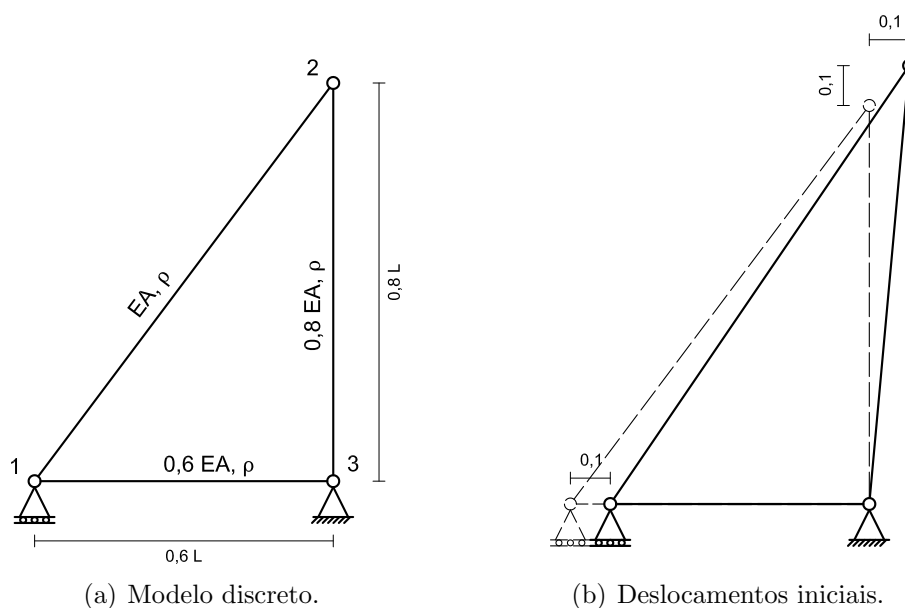


Figura 6.30: Treliça plana de três barras.

Na análise através do INSANE, três elementos de barra com modelo de análise do tipo `PlaneTruss` (treliça plana) foram utilizados, um para cada barra. A área e o comprimento da barra vertical correspondem a 0,8 vezes a área e o comprimento da barra inclinada, respectivamente. Já a área e o comprimento da barra horizontal correspondem a 0,6 vezes a área e o comprimento da barra inclinada, respectivamente. Adotou-se massa consistente para esta análise.

As três barras são feitas de um material cujo módulo de elasticidade é de $3000 uf \times uc^2$ e cuja densidade é de $7,35 \times 10^{-7} um/uc^3$. A área da barra inclinada é de $10 uc^2$ e seu comprimento é de $250 uc$. Utilizou-se um passo de tempo de $0,001 ut$ e um tempo total de análise de $0,02 ut$.

Na análise através do método SDM, empregou-se para este modelo os três modos

de vibração existentes e o método da iteração inversa, com precisão de 10^{-6} , para a resolução do problema de autovalor.

As tabelas 6.8 e 6.9 apresentam os resultados obtidos pela análise através do INSANE e apresentados por Weaver Jr. e Johnston (1987) para os métodos SDM e HHT, respectivamente. Estes mesmos dados são representados graficamente nas figuras 6.31 e 6.32, respectivamente.

Observa-se que os resultados de Weaver Jr. e Johnston (1987) e do INSANE são coincidentes para o método HHT. Isto já era esperado, pois em ambos os trabalhos utilizou-se o mesmo modelo discreto e o mesmo método numérico. Esta concordância de resultados valida a implementação do método HHT no INSANE.

Para o método SDM, observa-se uma diferença considerável nos resultados. Esta diferença ocorre devido a dois fatores. O primeiro é que Weaver Jr. e Johnston (1987) utilizam a *quadratura de Euler* como método de integração numérica, enquanto o INSANE utiliza a *quadratura de Gauss*, mais precisa. Além disso, o passo de tempo é relativamente grande, o que diminui a precisão do método SDM.

Tabela 6.8: Resultados obtidos pelo método SDM.

| Tempo [ut] | Weaver Jr. e Johnston (1987) [uc] | INSANE [uc] |
|------------|-----------------------------------|-------------|
| 0,000 | 0,10000 | 0,10000 |
| 0,001 | 0,08527 | 0,07209 |
| 0,002 | 0,07285 | 0,06407 |
| 0,003 | 0,06075 | 0,04802 |
| 0,004 | -0,00541 | -0,00599 |
| 0,005 | -0,08421 | -0,06671 |
| 0,006 | -0,09821 | -0,08275 |
| 0,007 | -0,08568 | -0,07473 |
| 0,008 | -0,09336 | -0,07501 |
| 0,009 | -0,08274 | -0,06700 |
| 0,010 | -0,05107 | -0,04641 |
| 0,011 | -0,02920 | -0,02437 |
| 0,012 | 0,01901 | 0,01936 |
| 0,013 | 0,09667 | 0,07858 |
| 0,014 | 0,12087 | 0,09876 |
| 0,015 | 0,08873 | 0,07747 |
| 0,016 | 0,07618 | 0,06349 |
| 0,017 | 0,07205 | 0,05629 |
| 0,018 | 0,03492 | 0,03116 |
| 0,019 | -0,00345 | -0,00005 |
| 0,020 | -0,03891 | -0,03576 |

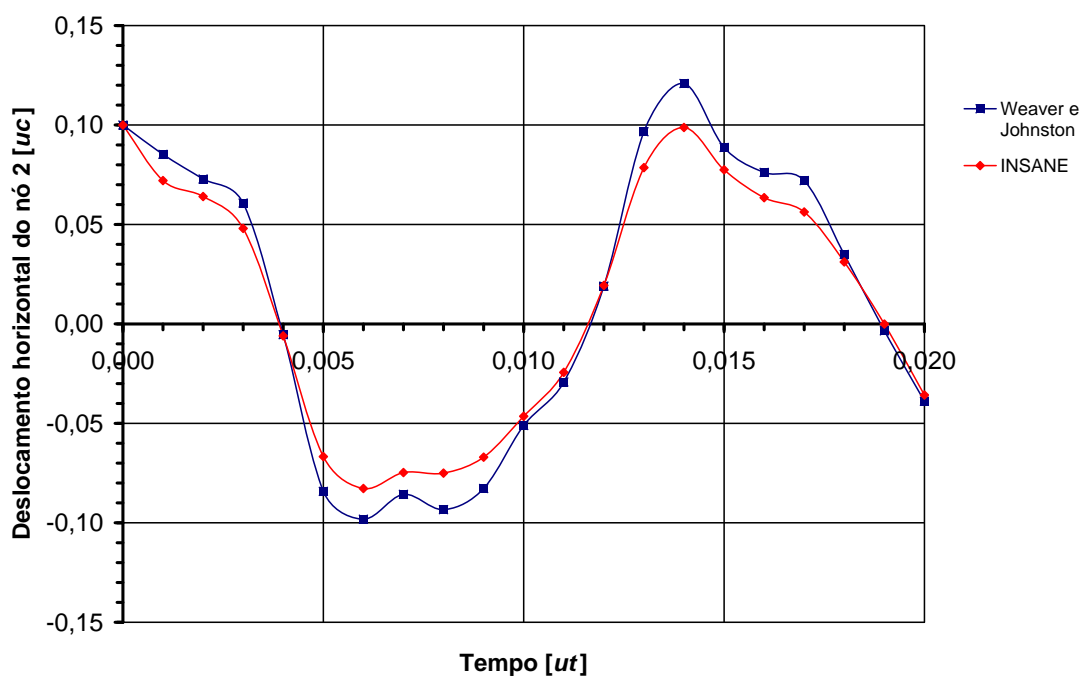


Figura 6.31: Resultados obtidos pelo método SDM.

Tabela 6.9: Resultados obtidos pelo método HHT.

| Tempo [ut] | Weaver Jr. e Johnston (1987) [uc] | INSANE [uc] |
|------------|-----------------------------------|-------------|
| 0,000 | 0,10000 | 0,10000 |
| 0,001 | 0,08873 | 0,08873 |
| 0,002 | 0,06847 | 0,06847 |
| 0,003 | 0,04937 | 0,04937 |
| 0,004 | 0,01239 | 0,01239 |
| 0,005 | -0,05237 | -0,05237 |
| 0,006 | -0,11040 | -0,11040 |
| 0,007 | -0,12015 | -0,12015 |
| 0,008 | -0,08981 | -0,08981 |
| 0,009 | -0,06231 | -0,06231 |
| 0,010 | -0,05263 | -0,05263 |
| 0,011 | -0,03470 | -0,03470 |
| 0,012 | 0,00968 | 0,00968 |
| 0,013 | 0,06271 | 0,06271 |
| 0,014 | 0,09892 | 0,09891 |
| 0,015 | 0,11326 | 0,11326 |
| 0,016 | 0,10852 | 0,10852 |
| 0,017 | 0,08000 | 0,08000 |
| 0,018 | 0,03111 | 0,03111 |
| 0,019 | -0,01487 | -0,01487 |
| 0,020 | -0,03987 | -0,03987 |

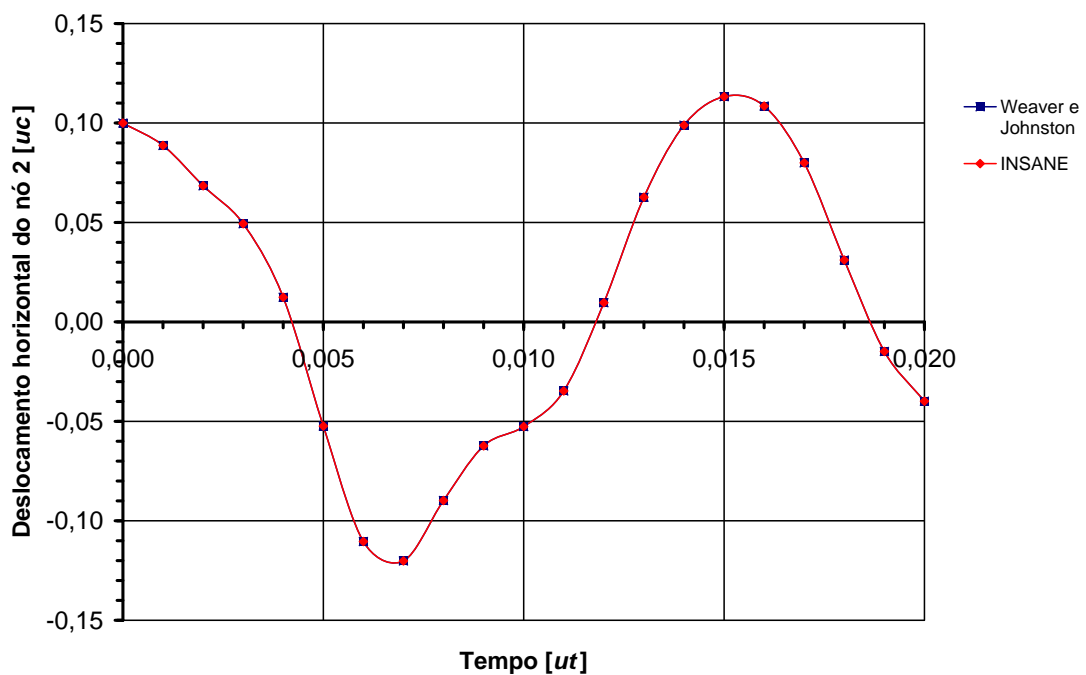


Figura 6.32: Resultados obtidos pelo método HHT.

6.7 Viga Biapoiada Submetida a Carga Degrau

Uma viga biapoiada é submetida a uma carga degrau de 100 kN em seu ponto central (Figura 6.33).

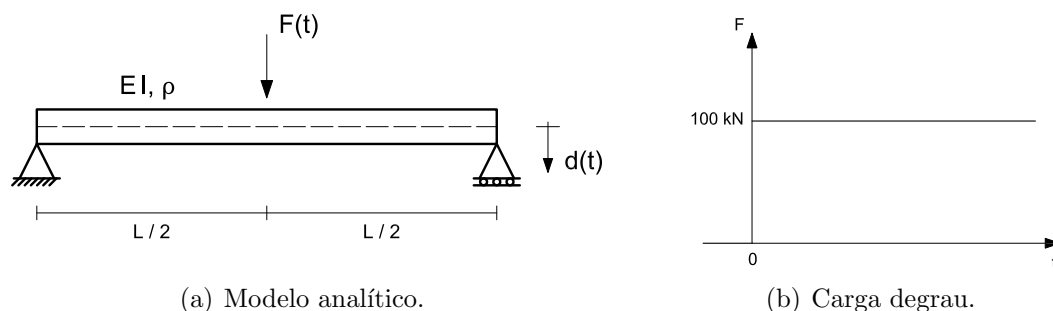


Figura 6.33: Viga biapoiada submetida a carga degrau.

O comprimento total da viga é de $3,0 \text{ m}$. Ela é feita por um material cujo módulo de elasticidade é de 30.000 kN/m^2 e cuja densidade é de 2.750 kg/m^3 . A seção transversal é retangular, de base $0,40 \text{ m}$ e altura $0,60 \text{ m}$.

Chopra (1995) apresenta a solução analítica para os modos de vibração natural e para o deslocamento do ponto central da viga:

$$\omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{E I}{\rho A}} \quad (6.29)$$

$$d_{L/2}(t) = \frac{2 F_0 L^3}{\pi^4 E I} \left[\frac{1 - \cos(\omega_1 t)}{1} + \frac{1 - \cos(\omega_3 t)}{3^4} + \frac{1 - \cos(\omega_5 t)}{5^4} + \frac{1 - \cos(\omega_7 t)}{7^4} \right] \quad (6.30)$$

Os coeficientes dos termos da equação (6.30) mostram que o primeiro modo de vibração é dominante neste modelo, portanto não é necessária uma malha muito refinada para se encontrar uma boa resposta. Para a análise no INSANE, utilizou-se uma malha de dois elementos de barra com modelo de análise do tipo **Beam** (viga). Adotou-se um passo de tempo $\Delta t = 0,01 \text{ s}$ e um tempo total de análise de $2,0 \text{ s}$. Para o método CD, adotou-se $\Delta t = 0,005 \text{ s}$, a fim de se evitar problemas de estabilidade numérica.

Nas simulações numéricas através de métodos de análise modal, empregou-se para este modelo quatro modos de vibração e o método da iteração inversa, com precisão de 10^{-6} , para a resolução do problema de autovalor.

A tabela 6.10 apresenta uma comparação entre os valores das frequências naturais obtidas analiticamente e através do INSANE, para malhas com 30, 10 e 2 elementos. Para a malha com dois elementos, são apresentadas apenas as quatro frequências naturais existentes.

Tabela 6.10: Frequências naturais da viga biapoiada.

| | ω_1 | ω_2 | ω_3 | ω_4 | ω_5 | ω_6 | ω_7 |
|-------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Chopra (1995) | 19,84 | 79,35 | 178,55 | 317,42 | 495,97 | 714,19 | 972,09 |
| INSANE (30 elms.) | 19,84 | 79,35 | 178,55 | 317,43 | 495,99 | 714,27 | 972,29 |
| INSANE (10 elms.) | 19,84 | 79,36 | 178,64 | 317,94 | 497,92 | 719,86 | 985,88 |
| INSANE (2 elms.) | 19,92 | 88,08 | 221,39 | 403,62 | - | - | - |

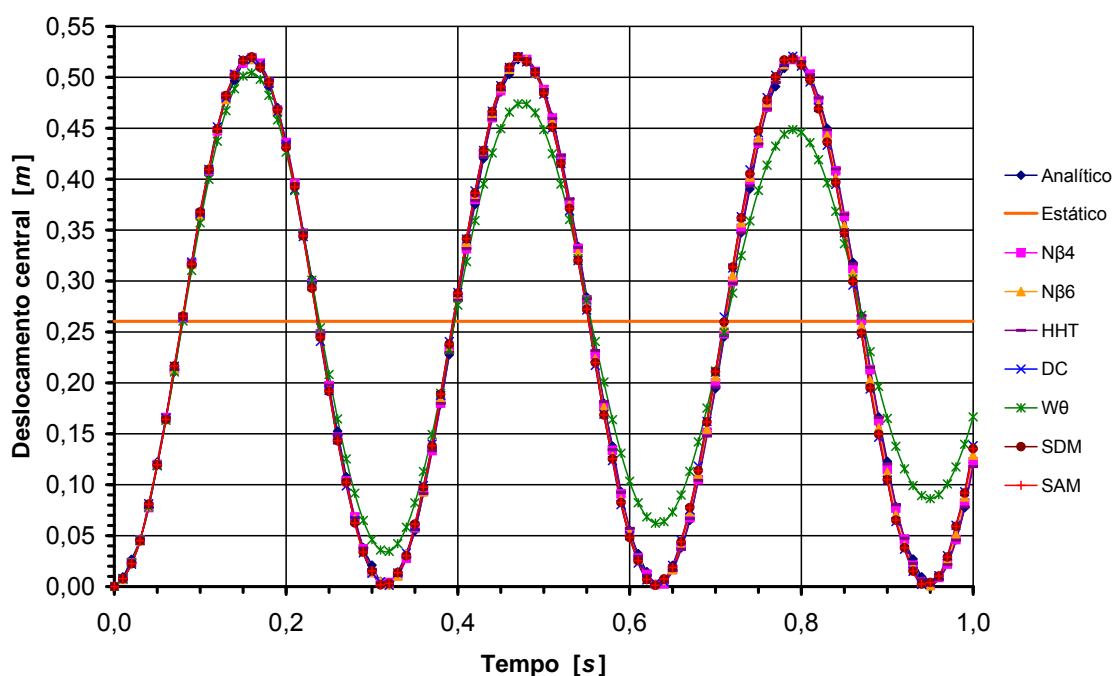


Figura 6.34: Resposta da viga biapoiada à carga degrau.

Pode-se observar que quanto mais refinada é a malha, maior a precisão dos resultados. Observa-se também que, para os modos mais baixos, os erros são bem

pequenos, enquanto que para os modos mais altos os erros aumentam. Esta menor precisão dos modos mais altos é uma característica do Método dos Elementos Finitos.

A figura 6.34 apresenta um gráfico com as respostas analítica e obtidas pelo INSANE para este modelo. Para efeito de comparação, também calculou-se no INSANE a resposta a um carregamento estático de magnitude igual à da carga degrau e ela também é apresentada no gráfico.

Mais uma vez, obteve-se excelente concordância entre os resultados analítico e dos diversos métodos, à exceção do método *Wilson- θ* , que apresentou amortecimento numérico.

6.8 Viga Biengastada Submetida a Carga Degrau

Uma viga biengastada é submetida em seu ponto central a uma carga degrau de $640 uf$ (Figura 6.35).

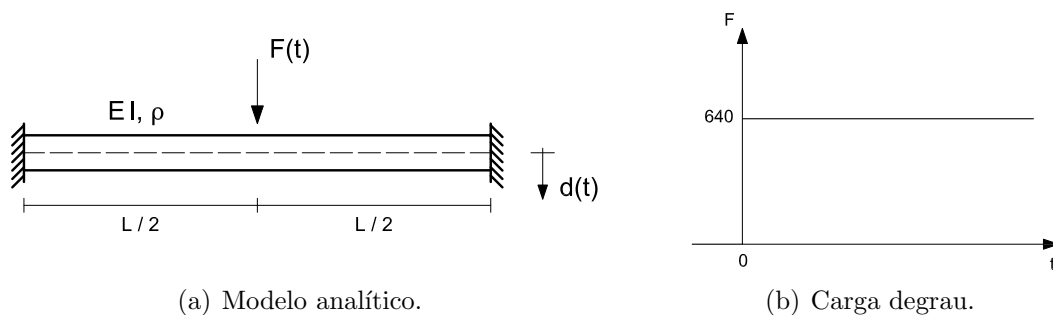


Figura 6.35: Viga biengastada submetida a carga degrau.

O comprimento total da viga é de $20,0 uc$. Ela é feita por um material cujo módulo de elasticidade é de $3 \times 10^7 uf/uc^2$, com módulo de Poisson nulo e cuja densidade é de $0,00026 um/uc^3$. A seção transversal é retangular, de base $1,0 uc$ e altura $0,125 uc$.

Este problema foi originalmente apresentado por Mondkar e Powell (1977), sendo posteriormente estudado por diversos outros autores, como Yang e Saigal (1984), Aranha Jr. (2003) e Galvão (2004).

Mondkar e Powell (1977) utilizaram dez elementos quadrilaterais de oito nós para discretizar esta viga, considerando-a em estado plano de tensões. Além disso, a massa foi idealizada concentrada nos nós. O método de análise adotado foi o $N\beta 4$.

Para a análise no INSANE, duas malhas foram utilizadas. A Malha 1 (Figura 6.36(a)) é semelhante à malha de Mondkar e Powell (1977), com 10 elementos quadrilaterais de oito nós com modelo de análise do tipo `PlaneStress` (Estado Plano de Tensões - EPT), porém com massa consistente. A malha 2 (Figura 6.36(b)) é composta por 10 elementos de barra com modelo de análise do tipo `Beam` (viga).



Figura 6.36: Malhas utilizadas na análise.

O passo de tempo adotado foi de $0,00005 ut$, com um tempo total de análise de $0,05 ut$. Por questões de estabilidade numérica, para os métodos CD e $N\beta 6$, o passo de tempo adotado foi dez vezes menor.

Nas simulações numéricas através de métodos de análise modal, empregou-se para este modelo cinco modos de vibração e o método da iteração no subespaço, com precisão de 10^{-6} , para a resolução do problema de autovalor.

Rogers (1959) apresenta a seguinte fórmula para o cálculo das frequências naturais de uma viga biengastada:

$$\omega_n = 2 \pi C \sqrt{\frac{E I}{\rho A L^4}} \quad (6.31)$$

em que para $n = 1, 2, 3, 4$ e 5 , os valores de C são, respectivamente, $3,56, 9,82, 19,2, 31,8$ e $47,5$.

Uma outra fórmula é apresentada por Biggs (1964):

$$\omega_n = \frac{(n + 0,5)^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{E I}{\rho A}} \quad (6.32)$$

A tabela 6.11 apresenta uma comparação entre os valores das frequências naturais obtidas por estas duas fórmulas e através do INSANE, para as duas malhas

adotadas.

Tabela 6.11: Freqüências naturais da viga biengastada.

| | ω_1 | ω_2 | ω_3 | ω_4 | ω_5 |
|------------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Rogers (1959) | 685,43 | 1890,71 | 3696,70 | 6122,66 | 9145,49 |
| Biggs (1964) | 680,48 | 1890,22 | 3704,84 | 6124,32 | 9148,68 |
| INSANE - Malha 1 | 699,42 | 1976,06 | 4004,91 | 6911,38 | 10884,64 |
| INSANE - Malha 2 | 685,61 | 1890,34 | 3708,51 | 6140,48 | 9201,01 |

Nota-se que os valores obtidos pelas duas fórmulas analíticas e pelo INSANE com a malha 2 são bem próximos. Entretanto, para a malha 1, os valores encontrados são mais discrepantes. Isto ocorre devido ao fato de que diferentes hipóteses são assumidas para cada tipo de elemento. Na malha 1, por exemplo, a rotação nodal é desconsiderada, o que não acontece na malha 2.

As figuras 6.37 e 6.38 apresentam gráficos com as respostas obtidas pelo INSANE para as malhas 1 e 2, respectivamente. Como referência, os valores obtidos por Mondkar e Powell (1977) também são exibidos. Para efeito de comparação, também calculou-se no INSANE a resposta a um carregamento estático de magnitude igual à da carga degrau, em ambas as malhas, e ela também é apresentada nos gráficos.

Mesmo utilizando um passo de tempo dez vezes menor para os métodos $N\beta_6$ e DC, eles não convergiram para a malha 2. Outro método que apresentou problemas nesta malha foi o método WT. Entretanto, esse último é um método incondicionalmente convergente, ao contrário dos dois primeiros, portanto este erro não era esperado. Porém, ao verificar-se sua implementação não foi encontrado nenhum erro.

Observa-se boa concordância entre os dados calculados pelo INSANE através de todos os métodos e os apresentados por Mondkar e Powell (1977). Os erros apresentados são em grande parte devido à técnica utilizada para retirar os valores do gráfico original do que devido a erros de cálculo.

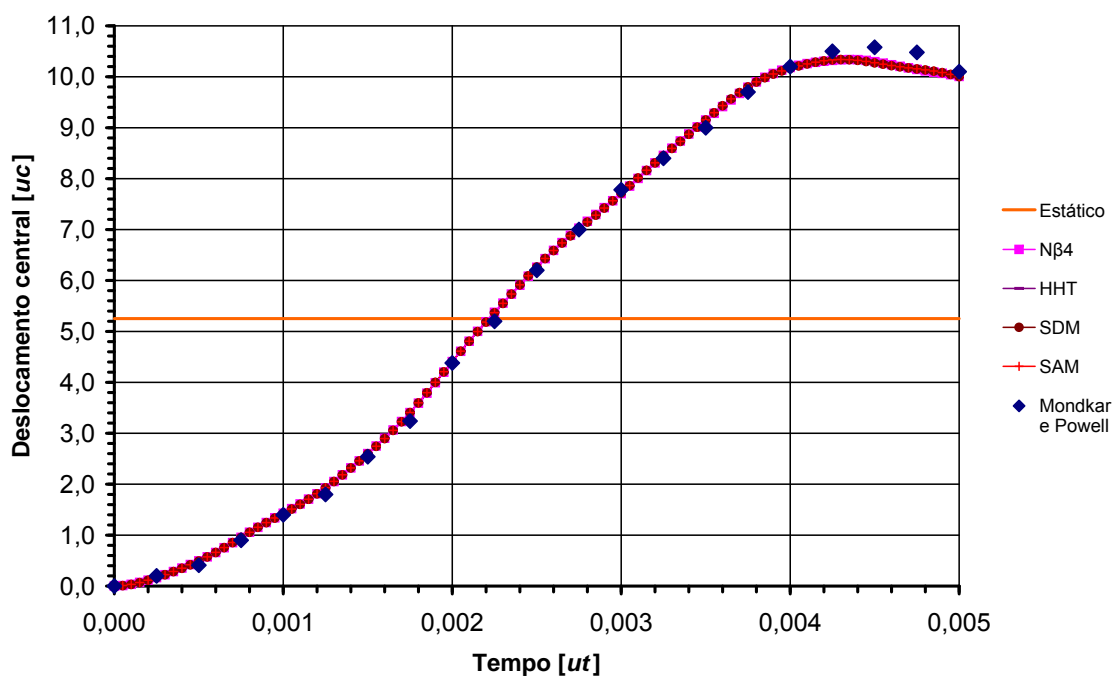


Figura 6.37: Resposta da viga biengastada à carga degrau - Malha 1.

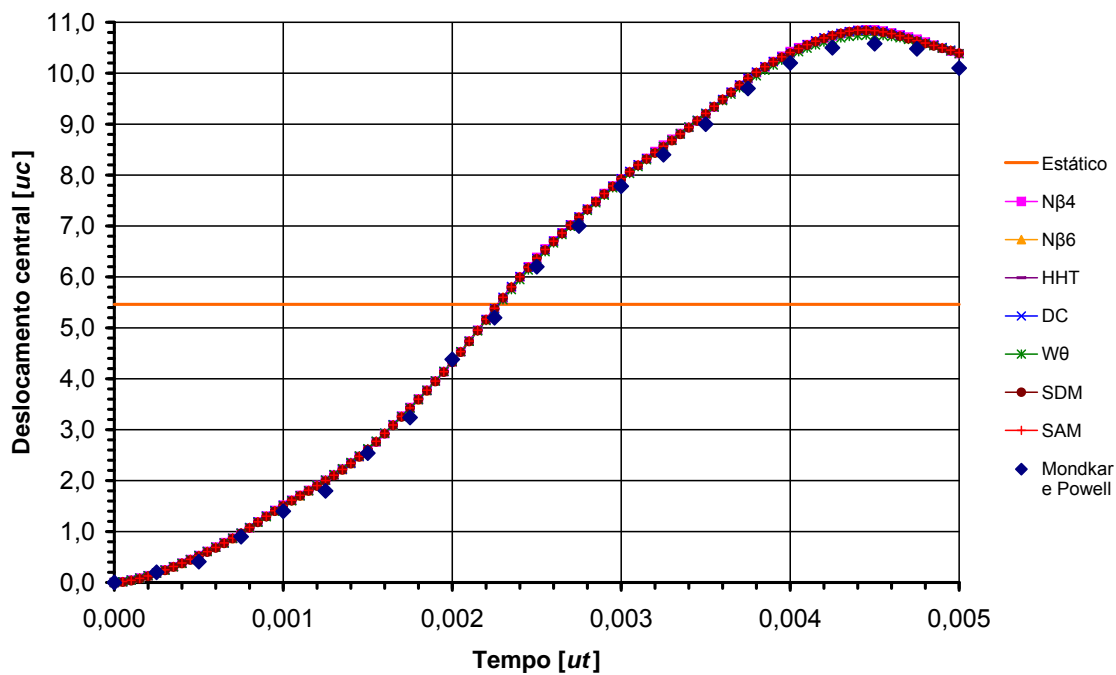


Figura 6.38: Resposta da viga biengastada à carga degrau - Malha 2.

Ressalta-se que Mondkar e Powell (1977) utilizam unidades no sistema inglês (aqui omitidas para melhor compreensão) e que Yang e Saigal (1984) apresentam um erro ao fazer a conversão da densidade de lb/in^3 para $lb \cdot s^2/in^4$. Entretanto, em seus cálculos foi utilizado o valor correto. Esse erro levou Aranha Jr. (2003) a introduzir um parâmetro incorreto em sua análise e a concluir, equivocadamente, que as escalas dos gráficos apresentados pelos outros autores estavam erradas.

6.9 Placa Fina Quadrada em Vibração Livre

Neste exemplo, deseja-se determinar as frequências naturais de uma placa fina quadrada (Figura 6.39).

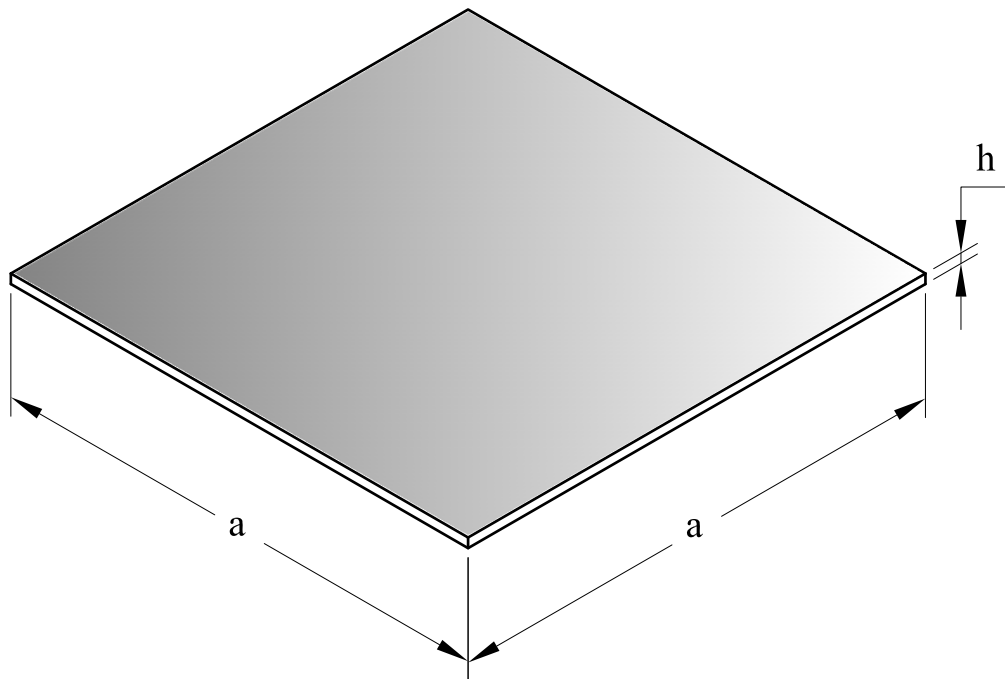


Figura 6.39: Placa fina quadrada.

Os valores encontrados são comparados com os valores analíticos obtidos pela equação apresentada por Szilard (1974):

$$\omega_{mn} = \pi \left(\frac{m^2 + n^2}{a^2} \right) \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (6.33)$$

em que

$$D = \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)} \quad (6.34)$$

sendo E é o módulo de elasticidade do material, ν é seu coeficiente de Poisson e ρ é sua densidade. a é a largura da placa e h é sua espessura. m e n são coeficientes inteiros, relacionados aos modos de vibração.

Para a análise, adotou-se uma placa de $80 \text{ cm} \times 80 \text{ cm}$, com espessura de 10 cm . Seu material tem $E = 6,9 \times 10^6 \text{ N/cm}^2$, $\nu = 0,33$ e $\rho = 2,62 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$.

Foram utilizadas quatro malhas nesta análise (Figura 6.40), todas elas com elementos do tipo `KirchhoffThinPlate` (placa fina de Kirchhoff). Em duas delas, empregou-se elementos quadrilaterais de 4 nós (Q4), sendo uma com 25 e a outra com 400 elementos. Para estas malhas o modelo de análise adotado foi o MZC. Nas outras duas malhas utilizou-se elementos triangulares de 3 nós (T3), com 50 e 800 elementos, e modelo de análise CKZ.

Para o cálculo através do INSANE, utilizou-se o método da iteração no subespaço, com precisão de 10^{-6} .

Os valores encontrados através da equação (6.33) e os calculados pelo INSANE são apresentados na tabela 6.12.

Tabela 6.12: Freqüências naturais da placa fina.

| | ω_1 | ω_2 | ω_3 | ω_4 | ω_5 | ω_6 |
|-----------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Analítico | 484,03 | 1210,07 | 1210,07 | 1936,11 | 2420,14 | 2420,14 |
| INSANE (25 Q4) | 496,71 | 1307,93 | 1307,93 | 2105,62 | 2815,25 | 2815,59 |
| INSANE (50 T3) | 496,25 | 1215,07 | 1409,51 | 2084,38 | 2399,03 | 3174,18 |
| INSANE (400 Q4) | 484,84 | 1216,65 | 1216,65 | 1949,10 | 2451,07 | 2451,07 |
| INSANE (800 T3) | 484,65 | 1210,37 | 1222,80 | 1948,68 | 2419,08 | 2485,59 |

Observa-se que os valores calculados pelo INSANE são bem próximos dos valores analíticos e que a precisão aumenta com o refinamento da malha. Percebe-se também que as freqüências ω_2 e ω_3 são iguais, assim como ω_5 e ω_6 . Entretanto, os modos de

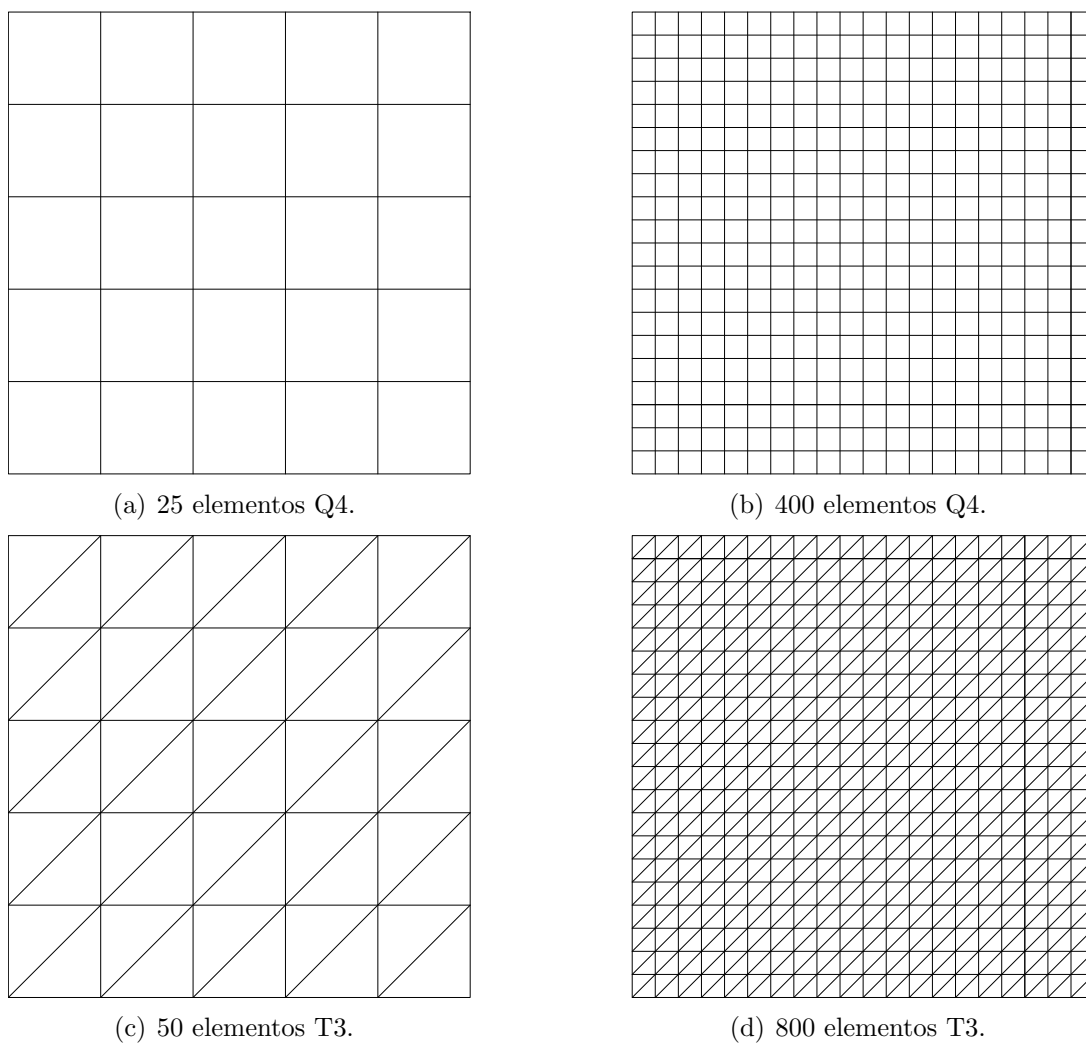


Figura 6.40: Malhas utilizadas na análise.

vibração correspondentes são diferentes. Isto ocorre porque a placa é simétrica nas duas direções, o que não acontece para as malhas com elementos triangulares.

Os modos de vibração respectivos a estas frequências são representados nas figuras 6.41 a 6.46.

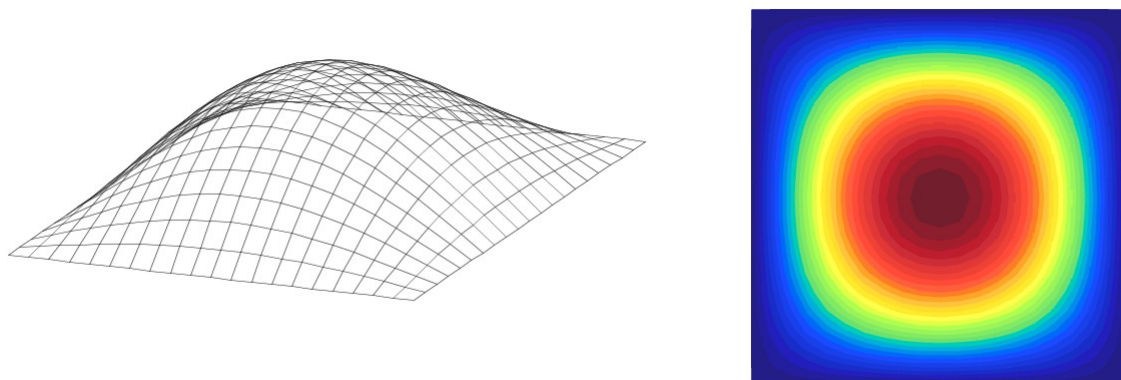


Figura 6.41: Primeiro modo de vibração.

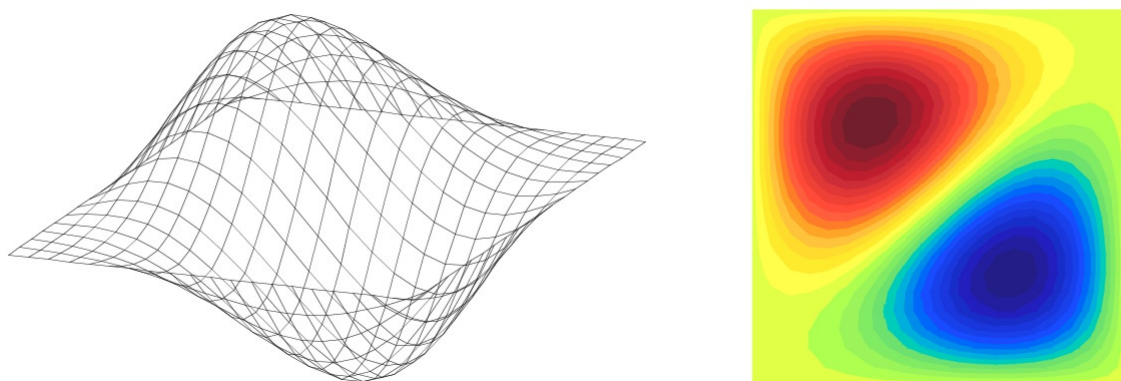


Figura 6.42: Segundo modo de vibração.

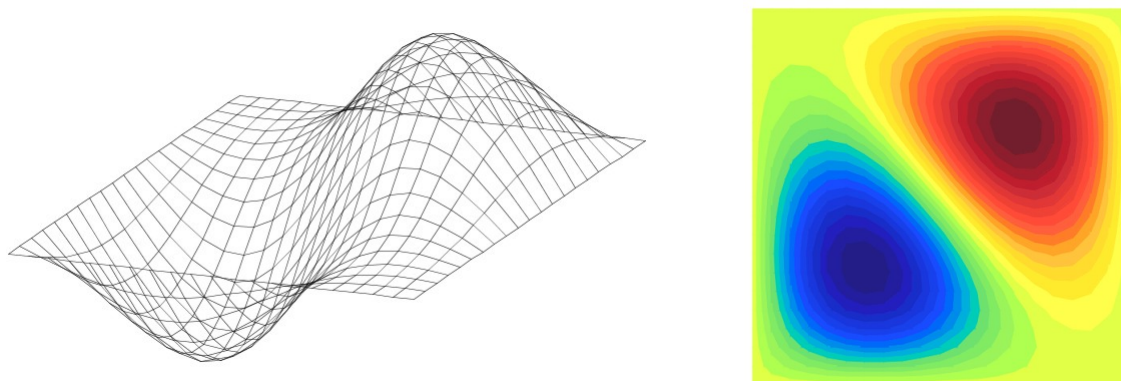


Figura 6.43: Terceiro modo de vibração.

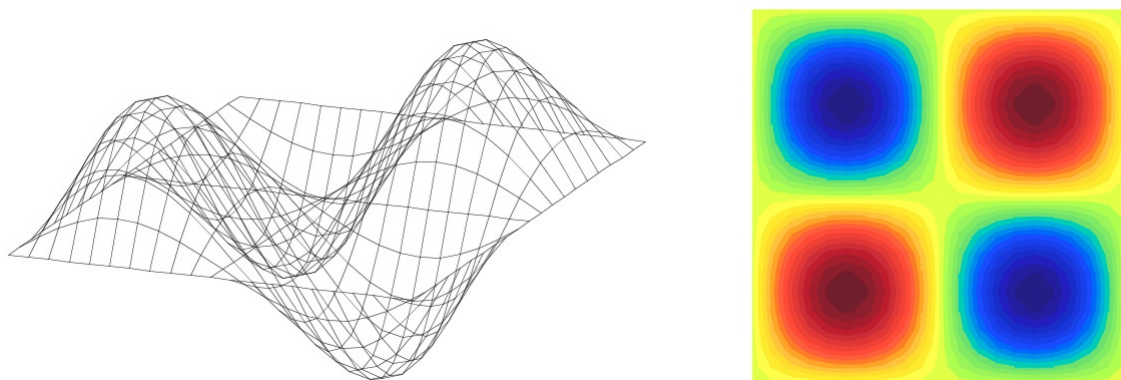


Figura 6.44: Quarto modo de vibração.

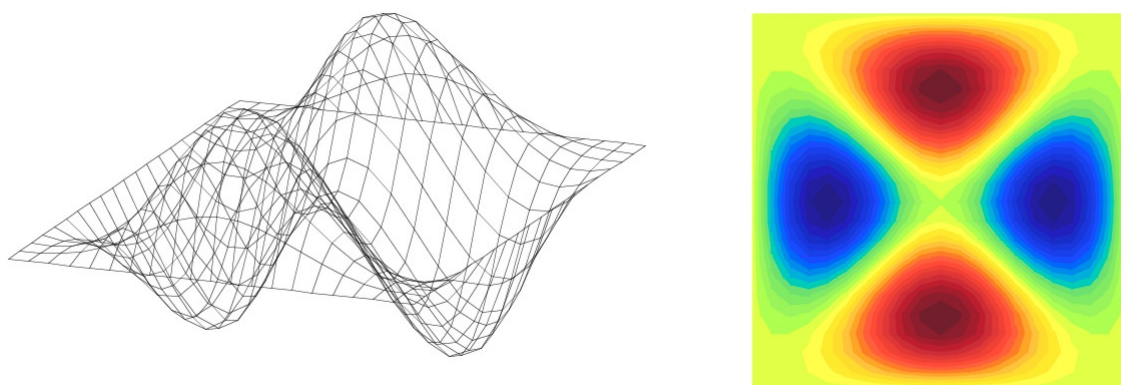


Figura 6.45: Quinto modo de vibração.

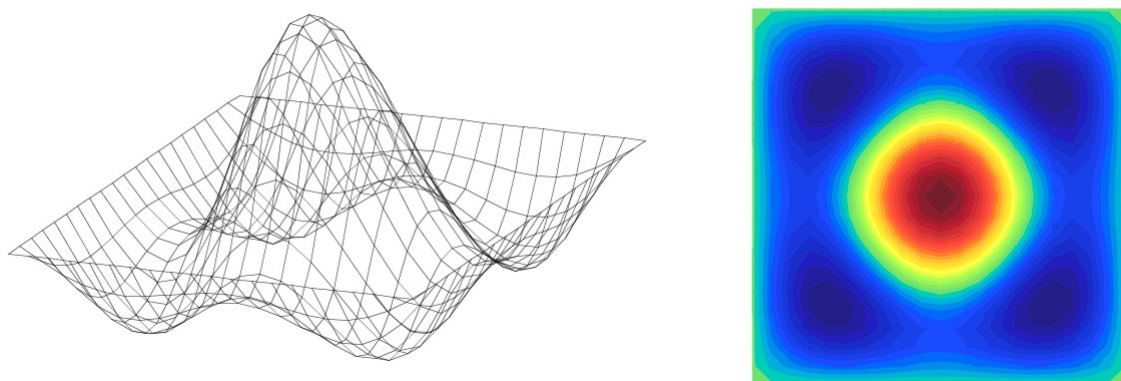


Figura 6.46: Sexto modo de vibração.

Capítulo 7

PROBLEMAS ESTÁTICOS NÃO-LINEARES

Com o objetivo de ilustrar e validar a implementação das formulações apresentadas no capítulo 3, são apresentadas a seguir simulações numéricas de problemas geometricamente não-lineares, nos quais empregam-se os recursos disponibilizados no INSANE. Os exemplos apresentados confrontam os resultados obtidos pelo INSANE com resultados encontrados na literatura.

As abreviações empregadas neste capítulo para indicar o tipo de formulação e o método de iteração utilizados nas simulações são apresentados na tabela 7.1.

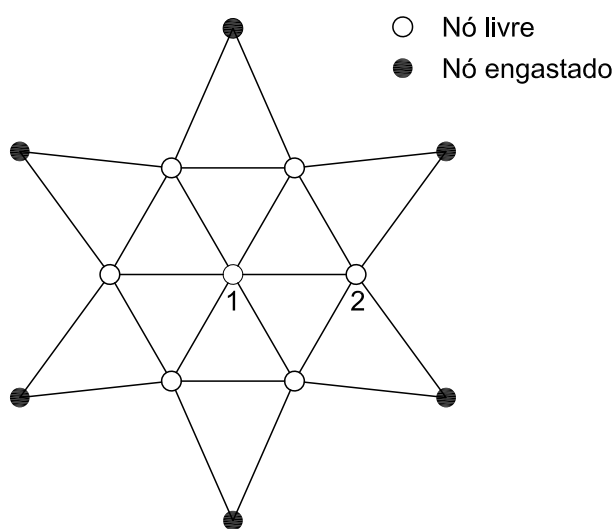
Tabela 7.1: Formulações e métodos de iteração utilizados.

| Abreviação | Formulação |
|------------|-------------------------------------|
| LT | Formulação Lagrangeana Total |
| LA | Formulação Lagrangeana Atualizada |
| NRP | Método de Newton-Raphson Padrão |
| NRM | Método de Newton-Raphson Modificado |

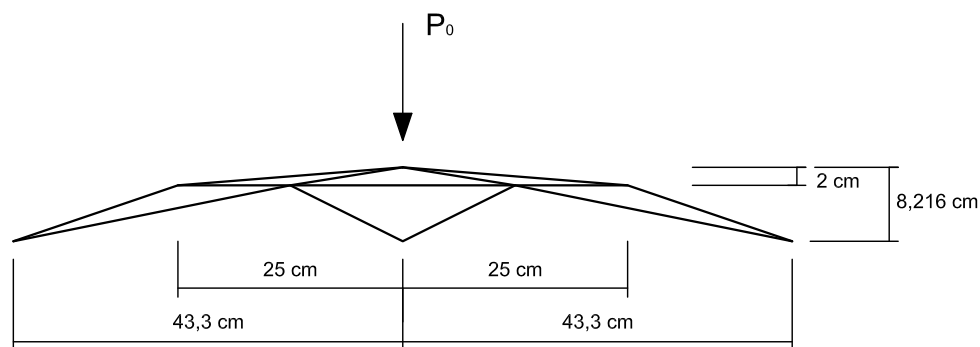
Neste capítulo, adota-se a notação \mathbf{P}_0 para representar o vetor de cargas externas de referência.

7.1 Domo Abatido

Um domo abatido formado por vinte e quatro barras treliçadas é analisado neste exemplo. A geometria do domo e suas condições de contorno são apresentadas na figura 7.1. Este problema foi analisado por diversos outros autores, entre eles Yang e Kuo (1994).



(a) Vista superior.



(b) Vista lateral.

Figura 7.1: Domo abatido.

Todas as barras têm seção transversal de área $A = 1 \text{ cm}^2$ e são constituídas por um material cujo módulo de elasticidade é $E = 10000 \text{ kN/cm}^2$. A carga de referência P_0 é de 1 kN .

Para análise através do INSANE, foram utilizados elementos paramétricos unidimensionais de dois nós, com modelo de análise de tipo LINE_3D e função de forma L2.

O método de controle utilizado foi o controle direto de deslocamento, em que incrementou-se de $-0,01 \text{ cm}$ o deslocamento vertical do nó 1 em cada passo. Foram efetuados 200 passos. A tolerância à convergência foi de 0,01 para as forças.

As figuras 7.2 a 7.4 apresentam as trajetórias de equilíbrio para alguns graus de liberdade do modelo. Como referência, as trajetórias obtidas por Yang e Kuo (1994) também são exibidas. No gráfico, os deslocamentos verticais são considerados positivos na direção de aplicação da carga de referência.

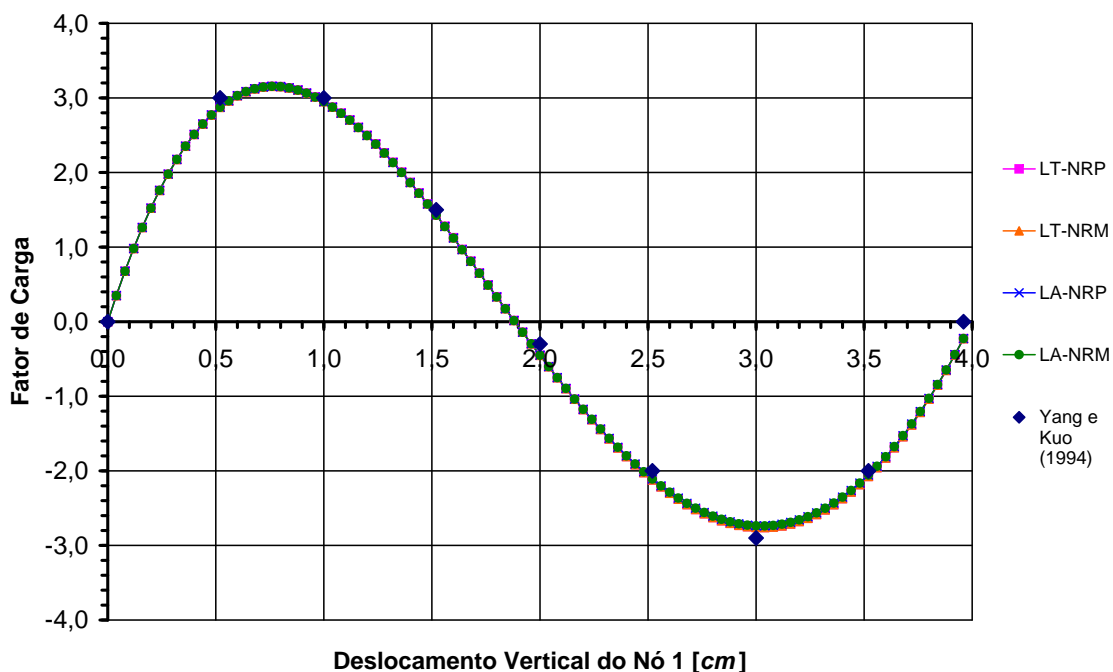


Figura 7.2: Trajetória de equilíbrio para o deslocamento vertical do nó 1.

Observa-se nestas figuras uma excelente concordância entre os resultados calculados pelo INSANE e os valores fornecidos por Yang e Kuo (1994).

Os pequenos erros entre o INSANE e a referência se devem ao fato de que os valores da referência foram retirados de um gráfico, o que gera erros de escala e de leitura.

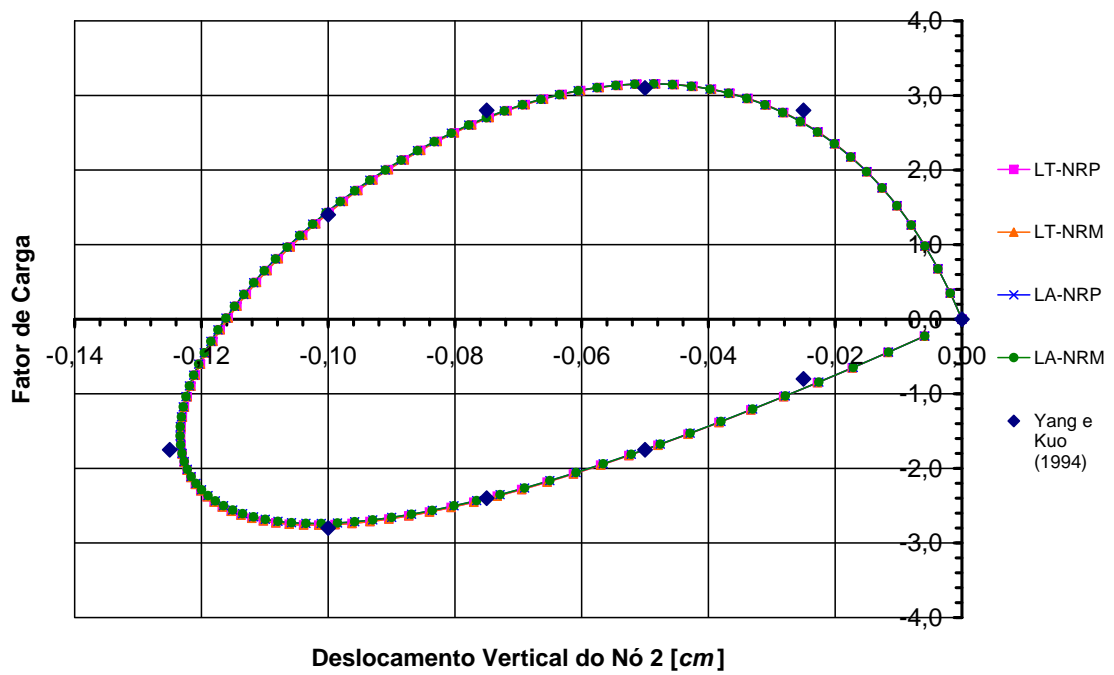


Figura 7.3: Trajetória de equilíbrio para o deslocamento vertical do nó 2.

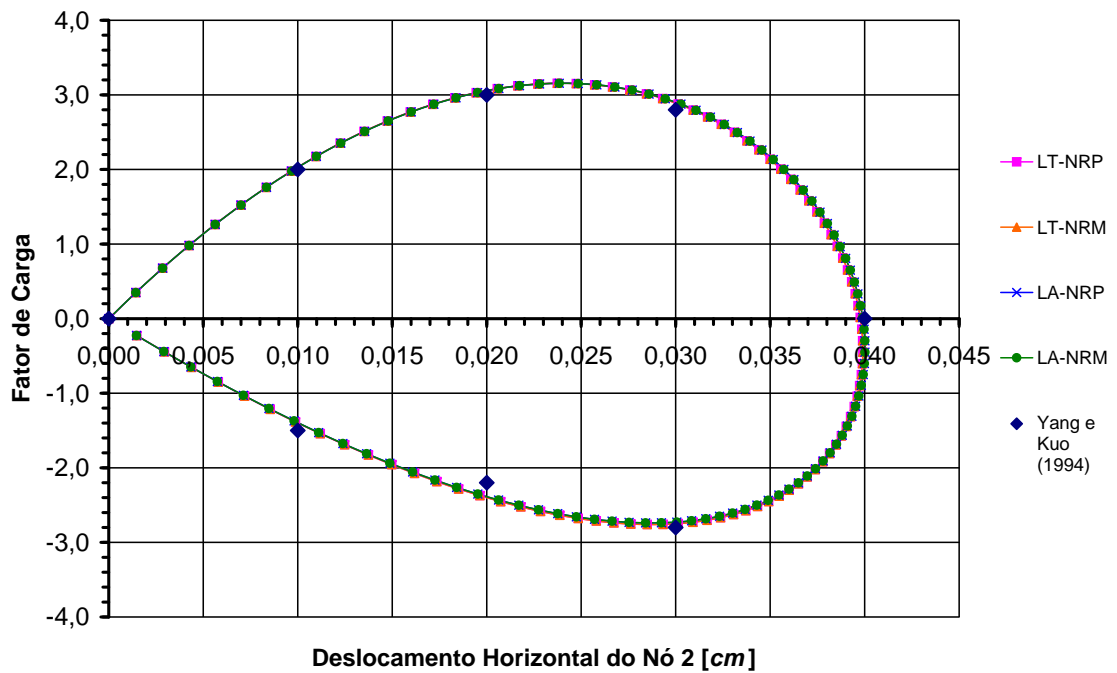


Figura 7.4: Trajetória de equilíbrio para o deslocamento horizontal do nó 2.

7.2 Pórtico de Williams

Semelhante ao domo abatido, o Pórtico de Williams (Figura 7.5) é um pórtico abatido biengastado, cujos resultados analítico e experimental foram apresentados por Williams (1964).

Este problema é freqüentemente usado para validação de modelos numéricos não-lineares e foi também estudado por Yang e Kuo (1994), Souza (2000), Fuina (2004), Galvão (2004), dentre outros.

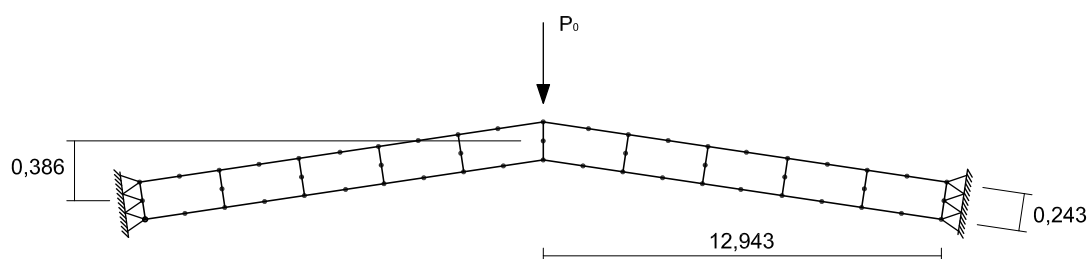


Figura 7.5: Pórtico de Williams.

O pórtico é composto por um material linear-elástico isotrópico de módulo de elasticidade $E = 10,3 \times 10^6 \text{ uf}/\text{uc}^2$ e coeficiente de Poisson nulo. Sua espessura é de $0,753 \text{ uc}$.

Para análise no INSANE, ele foi discretizado em 10 elementos finitos quadriláteros de 8 nós, com modelo de análise **PlaneStress** (estado plano de tensões). A ordem de integração numérica utilizada foi 3×3 . Considerou-se a carga de referência $P_0 = -20,0 \text{ uf}$.

O método de controle utilizado foi o controle direto de deslocamento, em que incrementou-se de $-0,00325 \text{ uc}$ o deslocamento vertical do nó de aplicação da carga em cada passo. Foram efetuados 200 passos. A tolerância à convergência foi de $0,0001$ para as forças.

A figura 7.6 apresenta a trajetória de equilíbrio para o ponto de aplicação da carga. Como referência, a trajetória experimental obtida por Williams (1964) também é exibida. No gráfico, o deslocamento vertical é considerado positivo na direção de aplicação da carga de referência.

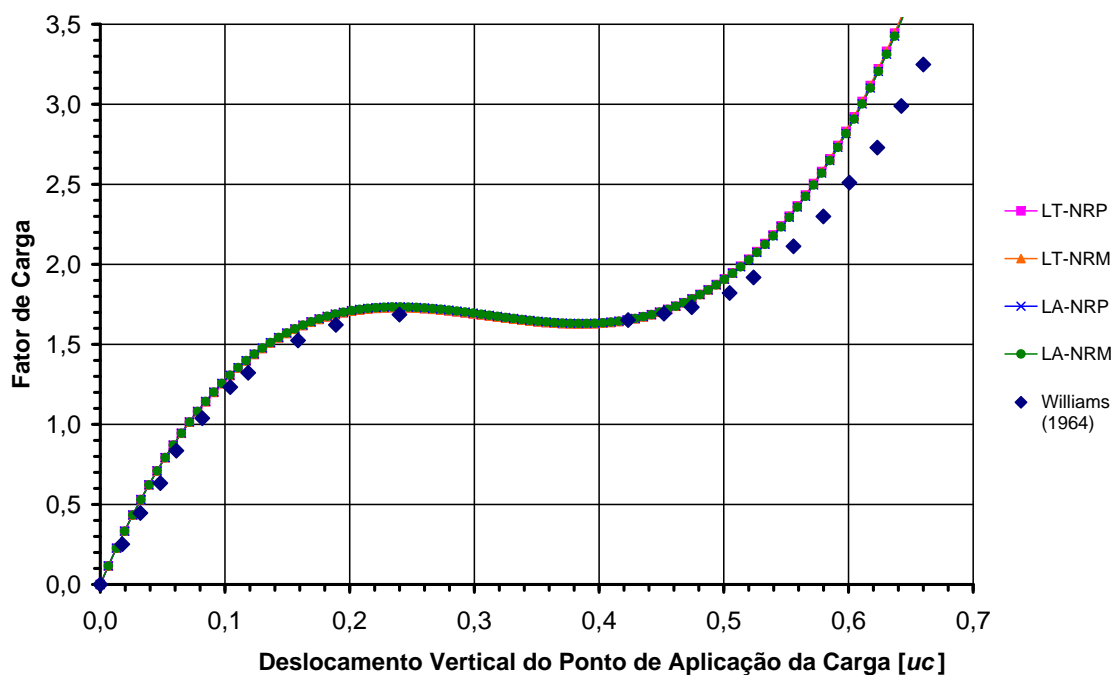


Figura 7.6: Trajetória de equilíbrio para o deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga.

Observa-se neste gráfico uma excelente concordância entre os resultados calculados pelo INSANE e os valores fornecidos por Williams (1964).

7.3 Coluna Engastada e Livre

Nesta simulação, analisa-se uma coluna esbelta, engastada na base e livre na outra extremidade, submetida a uma carga excêntrica vertical aplicada em seu topo, conforme ilustrado na figura 7.7 (os nós foram omitidos para melhor visualização). Resultados analíticos para este modelo são apresentados por Wood e Zienkiewicz (1977).

Esta coluna é composta por um material linear-elástico isotrópico, cujo módulo de elasticidade é $E = 12 \text{ kN/m}^2$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. Ela tem dimensões $1 \text{ m} \times 100 \text{ m} \times 1 \text{ m}$.

Para análise no INSANE ela foi discretizada em 50 elementos finitos quadriláteros de 4 nós, com modelo de análise `PlaneStress` (estado plano de tensões). A

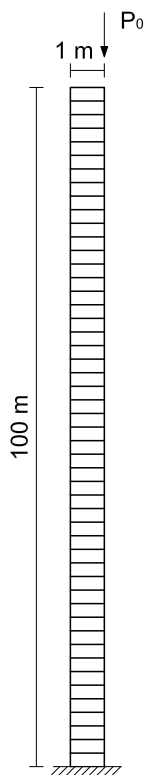


Figura 7.7: Coluna engastada e livre.

ordem de integração numérica utilizada foi 2×2 . Considerou-se a carga de referência $P_0 = -2,0 \times 10^{-4} \text{ kN}$.

O método de controle utilizado foi o controle de carga, em que incrementou-se de 0,1 *uc* a carga aplicada em cada passo. Foram efetuados 90 passos. A tolerância à convergência foi de 0,0001 para as forças, quando se utilizou o método de Newton-Raphson padrão e de 0,1 para o método de Newton-Raphson modificado. Esta diferenciação foi necessária devido à natureza da trajetória e ao método de controle utilizado.

A figura 7.8 apresenta a trajetória de equilíbrio para o deslocamento horizontal do ponto de aplicação da carga. Como referência, o resultado analítico apresentado por Wood e Zienkiewicz (1977) também é exibido.

Observa-se neste gráfico uma discordância entre os resultados calculados pelo INSANE e os valores fornecidos por Wood e Zienkiewicz (1977). Esta discordância se deve, entre outros fatores, à diferença entre as malhas adotadas.

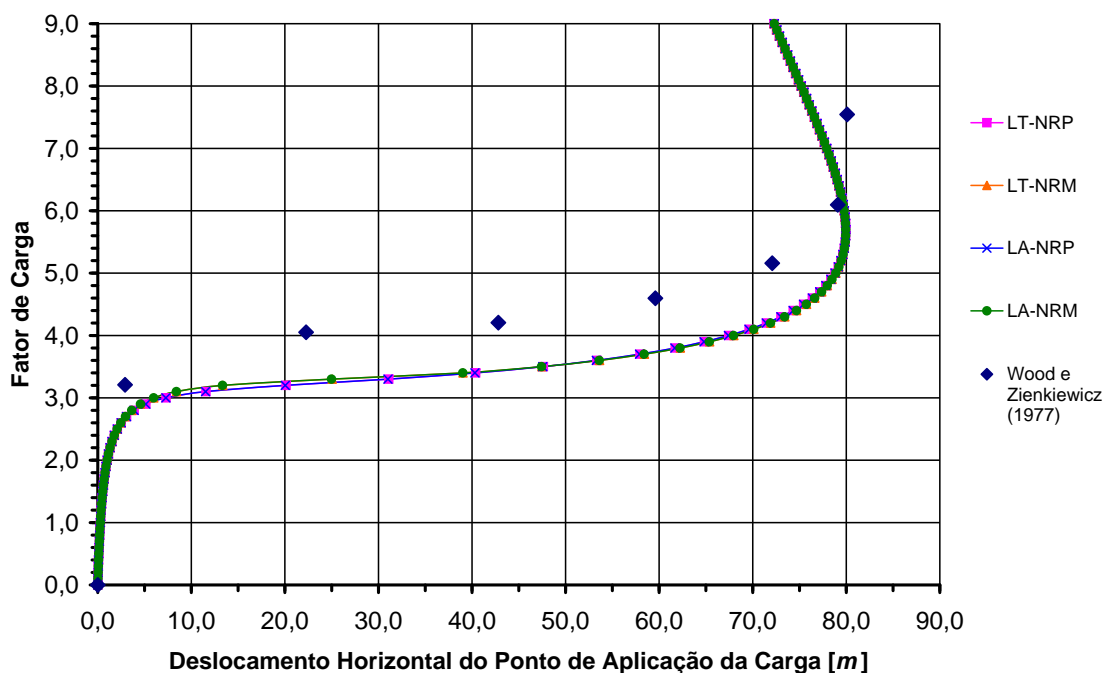


Figura 7.8: Trajetória de equilíbrio para o deslocamento horizontal do ponto de aplicação da carga.

7.4 Pórtico de Lee

O Pórtico de Lee é outro exemplo freqüentemente usado por pesquisadores para validar modelos numéricos não-lineares, podendo-se citar Souza (2000), Galvão (2000, 2004), Aranha Jr. (2003) e Fuina (2004). Ele é um pórtico em forma de L birrotulado. Sua geometria e dimensões são apresentadas na figura 7.9.

O pórtico é composto por um material linear-elástico isotrópico, cujo módulo de elasticidade é $E = 720 \text{ uf}/\text{uc}^2$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. Sua seção transversal tem dimensões $2 \text{ uc} \times 3 \text{ uc}$

Para análise no INSANE o pórtico foi discretizado em 41 elementos finitos quadrilaterais de 8 nós de tamanhos variados (Figura 7.9, sendo que os nós foram omitidos para melhor visualização), com modelo de análise **PlaneStress** (estado plano de tensões). A ordem de integração numérica utilizada foi 3×3 . Considerou-se a carga de referência $P_0 = -2,0 \text{ uf}$.

O método de controle utilizado foi o controle de deslocamento generalizado,

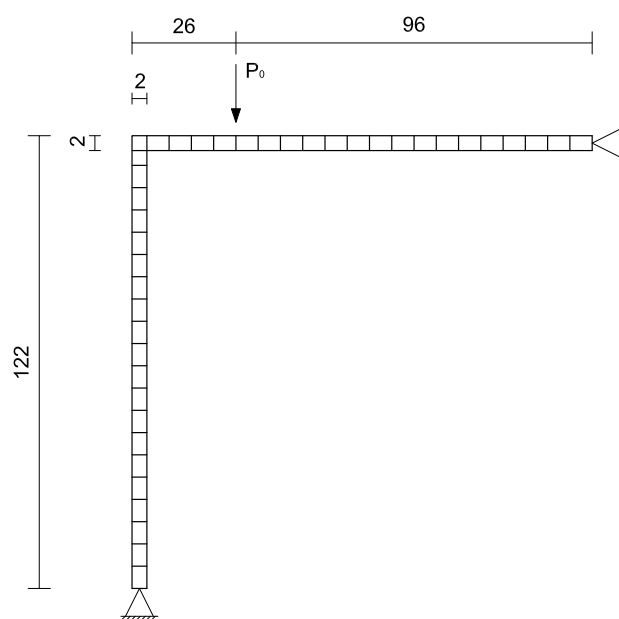


Figura 7.9: Pórtico de Lee.

com incremento do fator de carga igual a 0,01. Para a formulação Lagrangeana Total foram efetuados 1340 passos, enquanto que para a formulação Lagrangeana Atualizada foram necessários 2600 passos. A tolerância à convergência foi de 0,001 para as forças.

As figuras 7.10 e 7.11 apresentam as trajetórias de equilíbrio para os deslocamentos horizontal e vertical do ponto de aplicação da carga. Como referência, foram adotados os resultados apresentados por Galvão (2000).

Observa-se nestes gráficos uma excelente concordância entre os resultados calculados pelo INSANE e os valores apresentados por Galvão (2000).

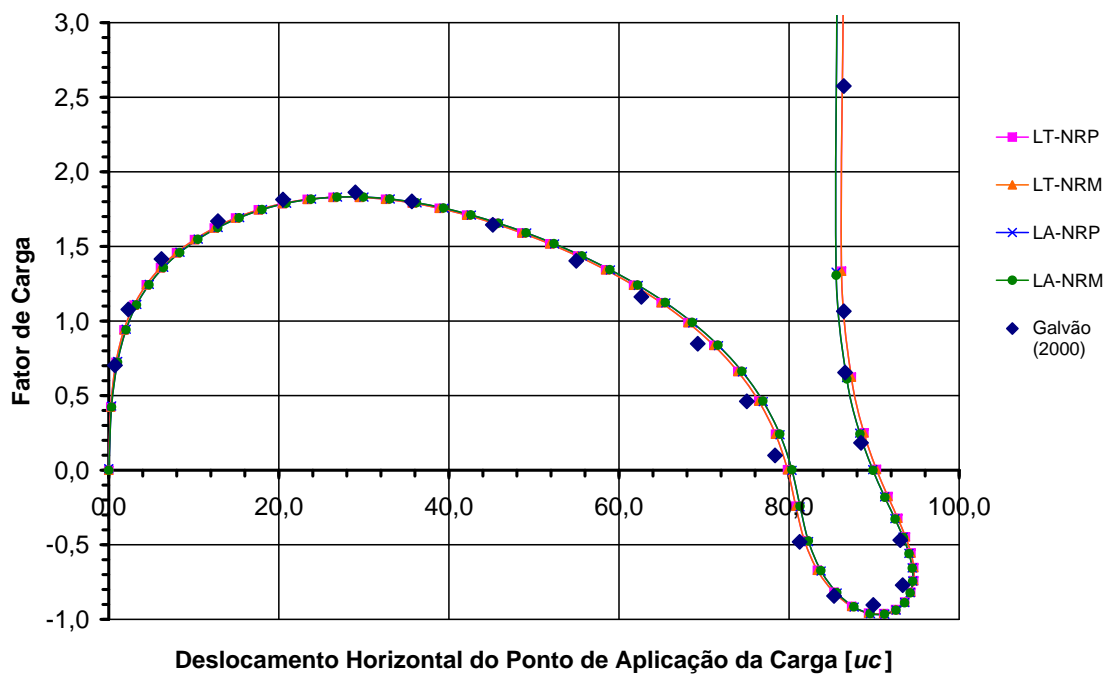


Figura 7.10: Trajetória de equilíbrio para o deslocamento horizontal do ponto de aplicação da carga.

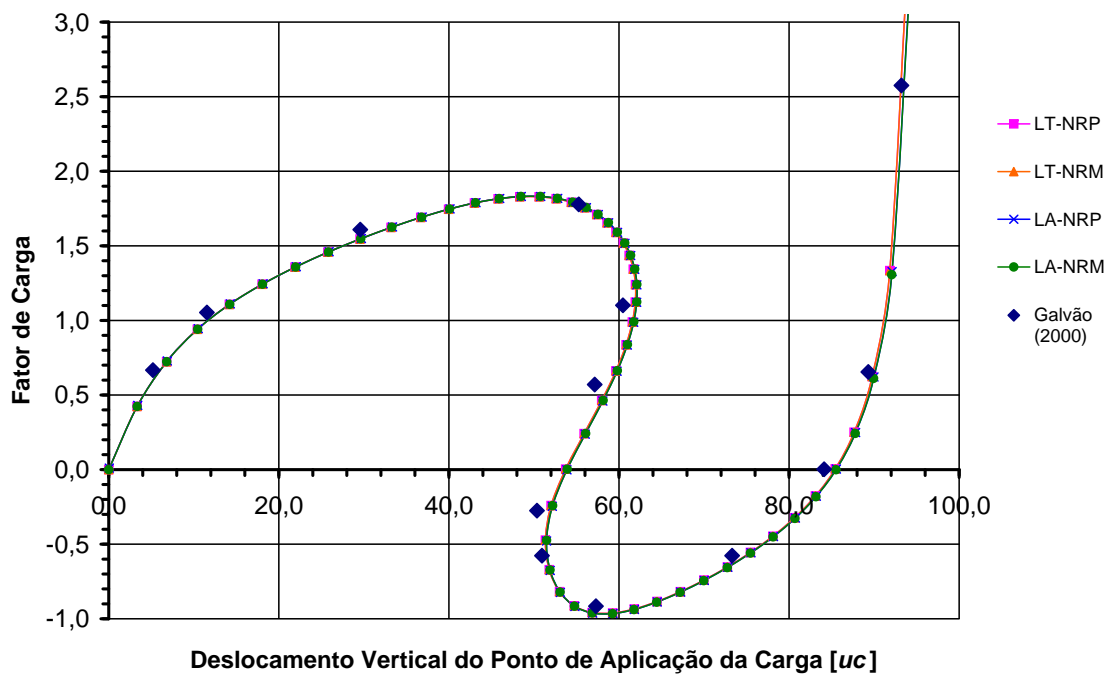


Figura 7.11: Trajetória de equilíbrio para o deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga.

Capítulo 8

PROBLEMAS DINÂMICOS NÃO-LINEARES

Neste capítulo, são apresentadas simulações numéricas de problemas dinâmicos geometricamente não-lineares com o objetivo de ilustrar e validar a implementação da formulação apresentada na seção 4.2. Os exemplos apresentados confrontam os resultados obtidos pelo INSANE com resultados encontrados na literatura.

As abreviações empregadas neste capítulo para indicar o tipo de formulação, os métodos e os parâmetros utilizados nas simulações são as mesmas utilizadas nos capítulos anteriores.

Apenas os métodos $N\beta_4$, $N\beta_6$ e HHT são possíveis de serem utilizados para se considerar os efeitos dinâmicos para o caso não-linear, pois apenas a formulação deles se baseiam na implementação do método *Hilber-Hughes-Taylor*.

8.1 Pórtico de Williams Submetido a Carga Degrau

Analisa-se aqui o Pórtico de Williams, previamente apresentado na seção 7.2 (Figura 8.1(a)). Entretanto, agora considera-se uma carga do tipo degrau (Figura 8.1(b)). A geometria e as propriedades do pórtico são as mesmas apresentadas anteriormente, assim como a malha de elementos finitos utilizada.

Este modelo, considerando os efeitos dinâmicos não-lineares, também foi analisado por Chan e Chui (2000) e Galvão (2004).

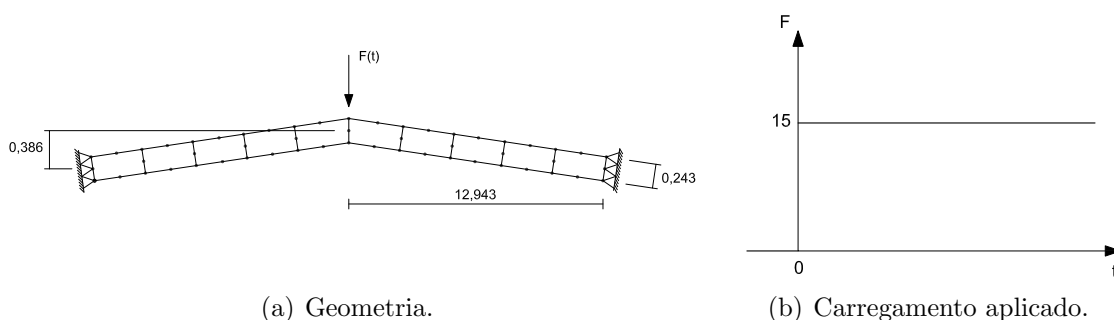


Figura 8.1: Pórtico de Williams submetido a carga degrau.

Nesta análise adotou-se um passo de tempo $\Delta t = 0,0001 ut$ e um tempo total de análise de $0,05 ut$. Para a convergência do processo incremental iterativo, adotou-se uma tolerância de $0,001$ para os deslocamentos.

As figuras 8.2 e 8.3 apresentam as respostas deste modelo à carga degrau obtidas pelo INSANE para as formulações LT e LA, respectivamente. Os valores obtidos por Galvão (2004) com formulação LA são apresentados como referência.

Observa-se nestes gráficos que o método $N\beta_4$ apresentou valores mais próximos da referência, principalmente para o primeiro ciclo, e que o método HHT também teve uma boa concordância, apesar do erro maior. Ao se empregar o método $N\beta_6$ não foi obtida convergência, mesmo com um passo de tempo dez vezes menor.

O gráfico da figura 8.4 apresenta uma comparação entre os resultados obtidos com as formulações LT e LA, tomando como padrão os métodos $N\beta_4$ e NRP.

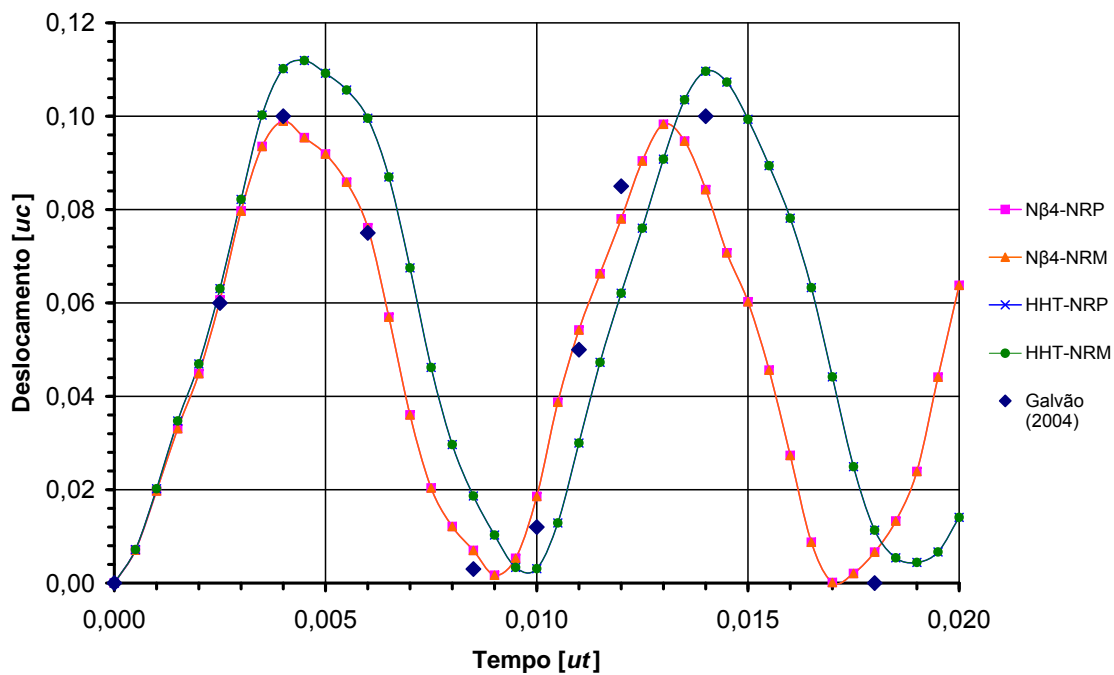


Figura 8.2: Resposta do Pórtico de Williams à carga degrau - LT.

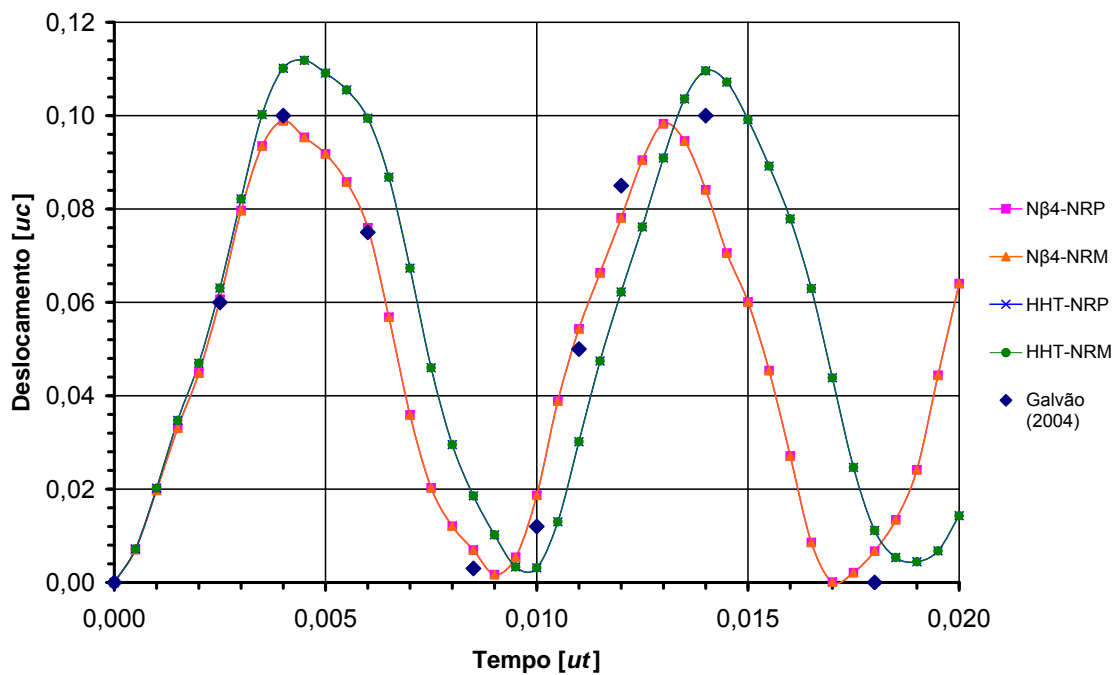


Figura 8.3: Resposta do Pórtico de Williams à carga degrau - LA.

Observa-se que as respostas obtidas são praticamente idênticas.

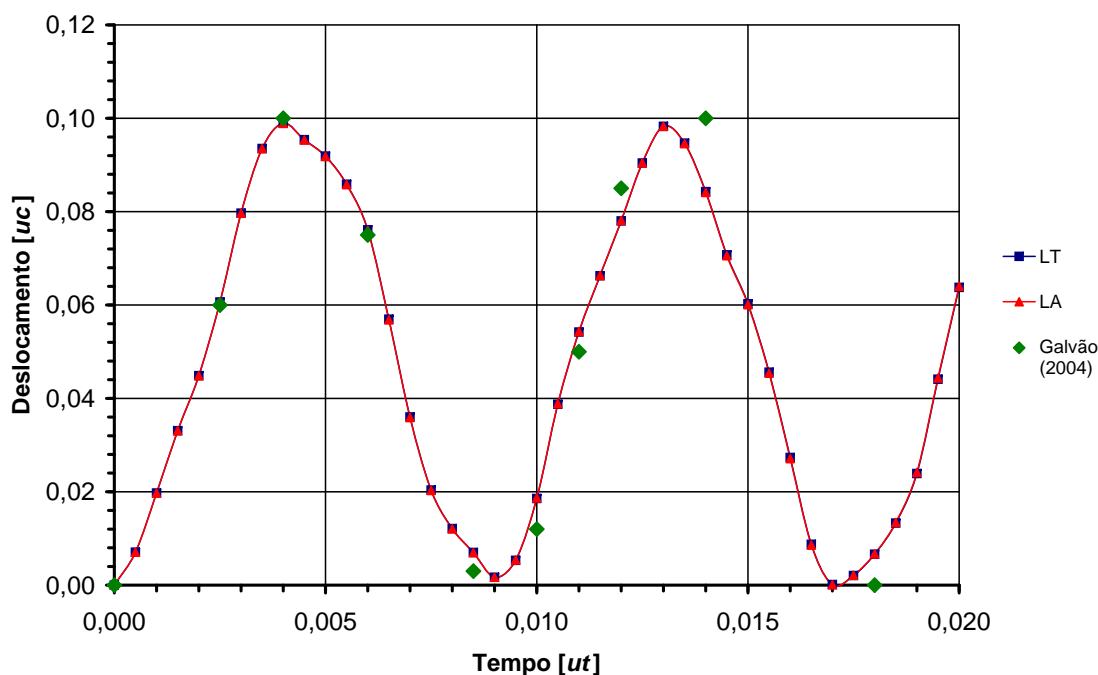


Figura 8.4: Comparativo das respostas - Nβ4-NRP.

8.2 Viga Biengastada Submetida a Carga Degrau

Nesta simulação, analisa-se a viga biengastada previamente apresentada na seção 6.8, agora considerando os efeitos não-lineares. Considera-se a mesma carga do tipo degrau (Figura 8.1(b)). A geometria e as propriedades do pórtico são as mesmas apresentadas anteriormente. Adotou-se nesta análise a malha 1 utilizada anteriormente, com 10 elementos quadrilaterais de 8 nós (Figura 8.5).

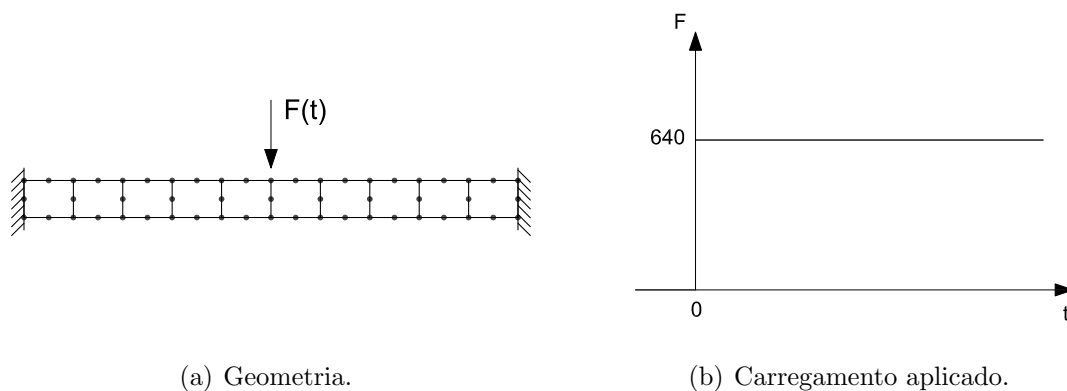


Figura 8.5: Viga biengastada submetido a carga degrau.

Este modelo, considerando os efeitos não-lineares, também foi analisado por Mondkar e Powell (1977), Yang e Saigal (1984), Aranha Jr. (2003) e Galvão (2004).

Nesta análise adotou-se um passo de tempo $\Delta t = 1 \mu s$ e um tempo total de análise de $5000 \mu s$. Para a convergência do processo incremental iterativo, adotou-se uma tolerância de 0,00001 para os deslocamentos.

As figuras 8.6 e 8.7 apresentam as respostas deste modelo à carga degrau obtidas pelo INSANE para as formulações LT e LA, respectivamente. Os valores obtidos por Mondkar e Powell (1977) são apresentados como referência.

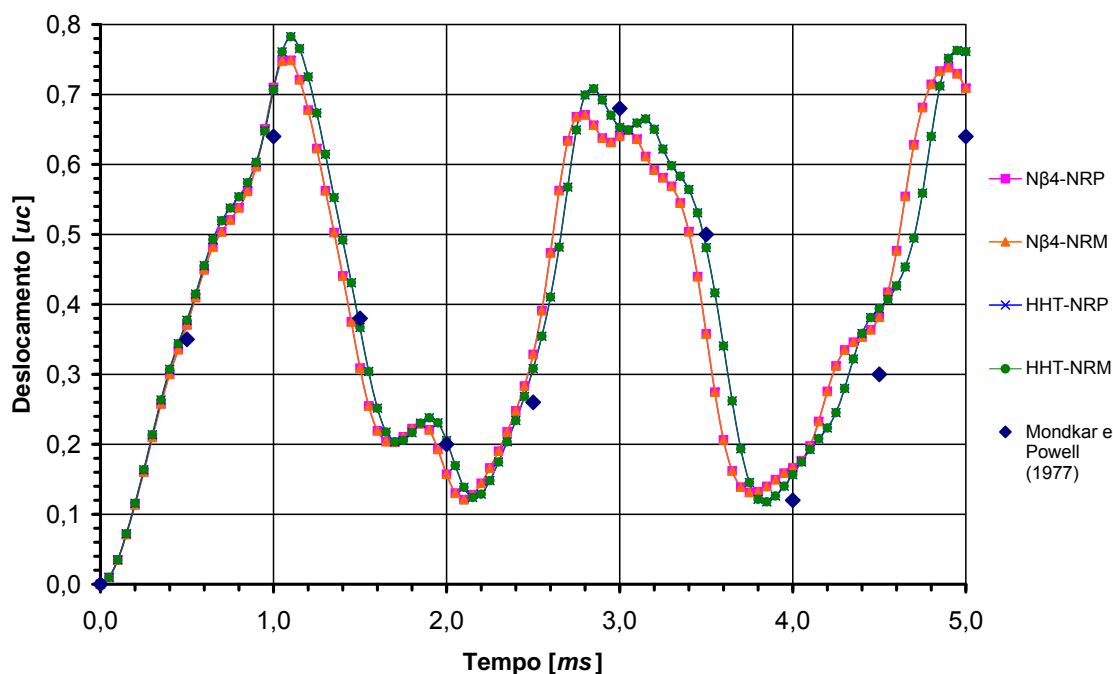


Figura 8.6: Resposta da viga biengastada à carga degrau - LT.

Observa-se nestes gráficos que os métodos $N\beta 4$ e HHT apresentaram boa concordância com a referência, principalmente para o primeiro ciclo. Nos ciclos posteriores erros maiores são encontrados. Ao se empregar o método $N\beta 6$ não foi obtida convergência, mesmo com um passo de tempo cinco vezes menor.

O gráfico da figura 8.8 apresenta uma comparação entre os resultados obtidos com as formulações LT e LA, tomando como padrão os métodos $N\beta 4$ e NRP. Observa-se que as respostas obtidas são praticamente idênticas.

Para analisar a influência do passo de tempo na resposta obtida, foram feitas

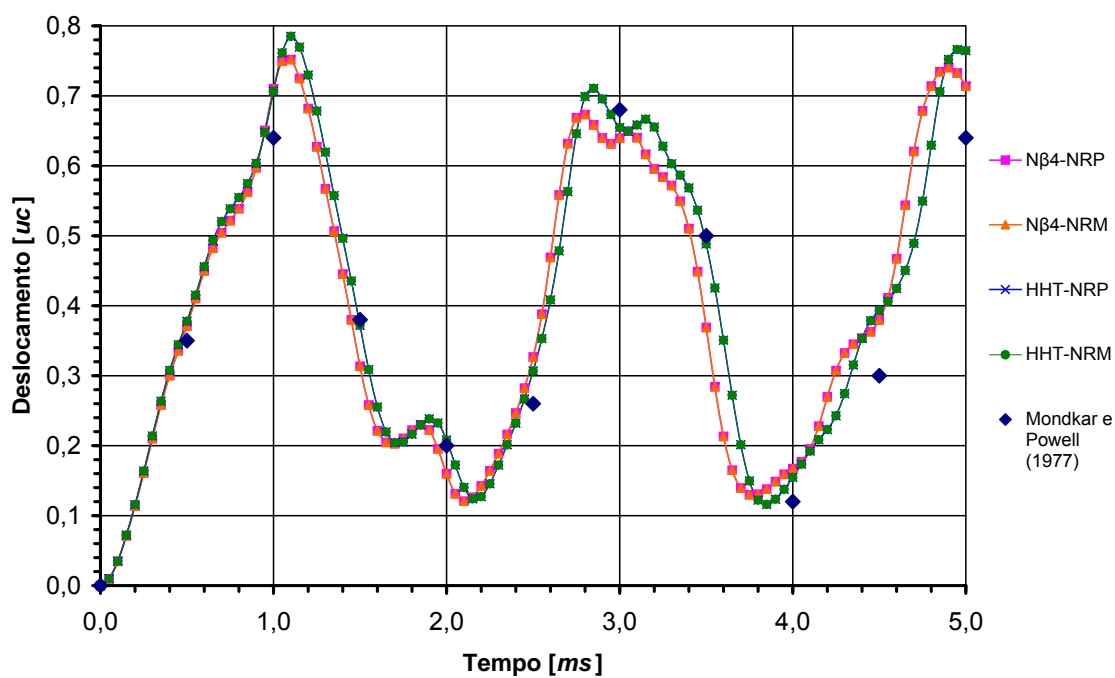


Figura 8.7: Resposta da viga biengastada à carga degrau - LA.

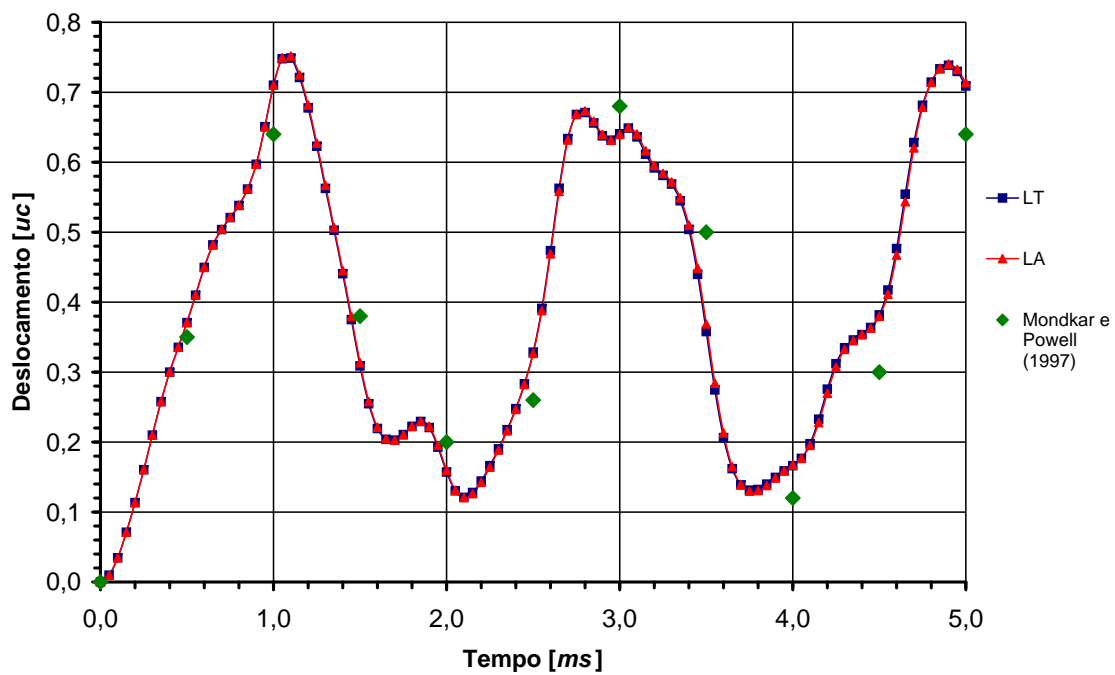


Figura 8.8: Comparativo das respostas - $N\beta_4$ -NRP.

outras simulações com outros valores para Δt : 50, 10 e 5 μs . Um comparativo entre estas simulações e a simulação anterior com $\Delta t = 1 \mu s$ é apresentado na figura 8.9. Tomou-se como padrão os métodos N β 4 e NRP.

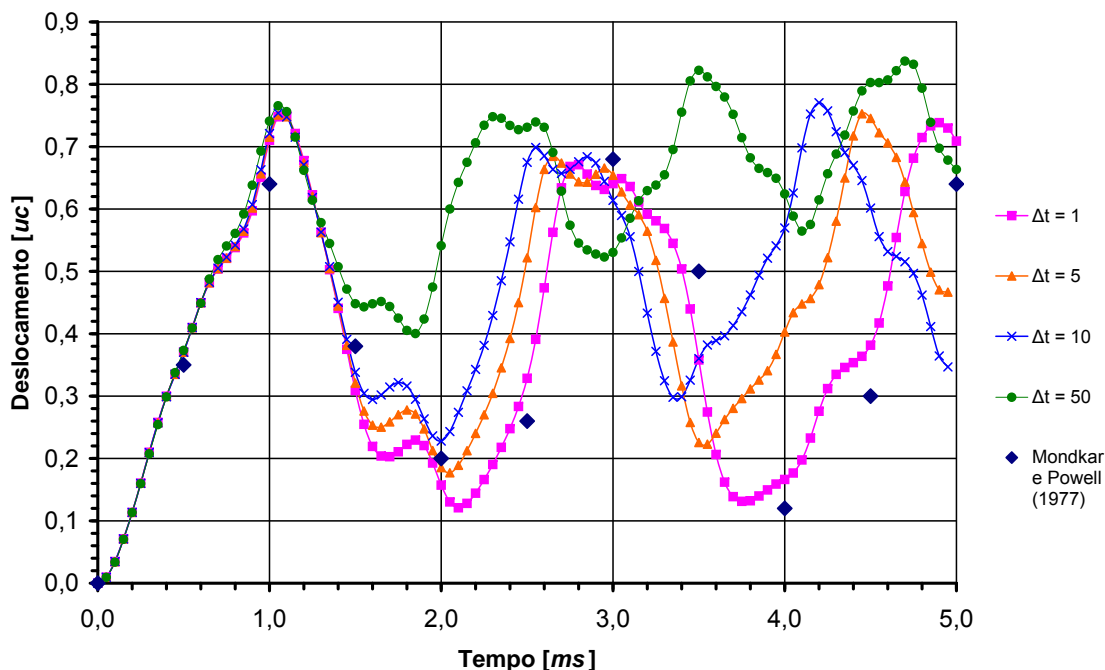


Figura 8.9: Comparativo das respostas com diferentes passos de tempo.

Observa-se que o valor do passo de tempo tem influência direta na resposta obtida. Quanto menor o passo, maior a precisão da resposta.

Na figura 8.10, compara-se as respostas não-linear e linear desta viga à carga degrau, usando como padrão o método N β 4. A resposta não-linear utilizada foi obtida com o método de iteração NRP.

Nota-se que a inclusão dos efeitos não-lineares causa uma grande redução nos deslocamentos, assim como uma redução do período de vibração.

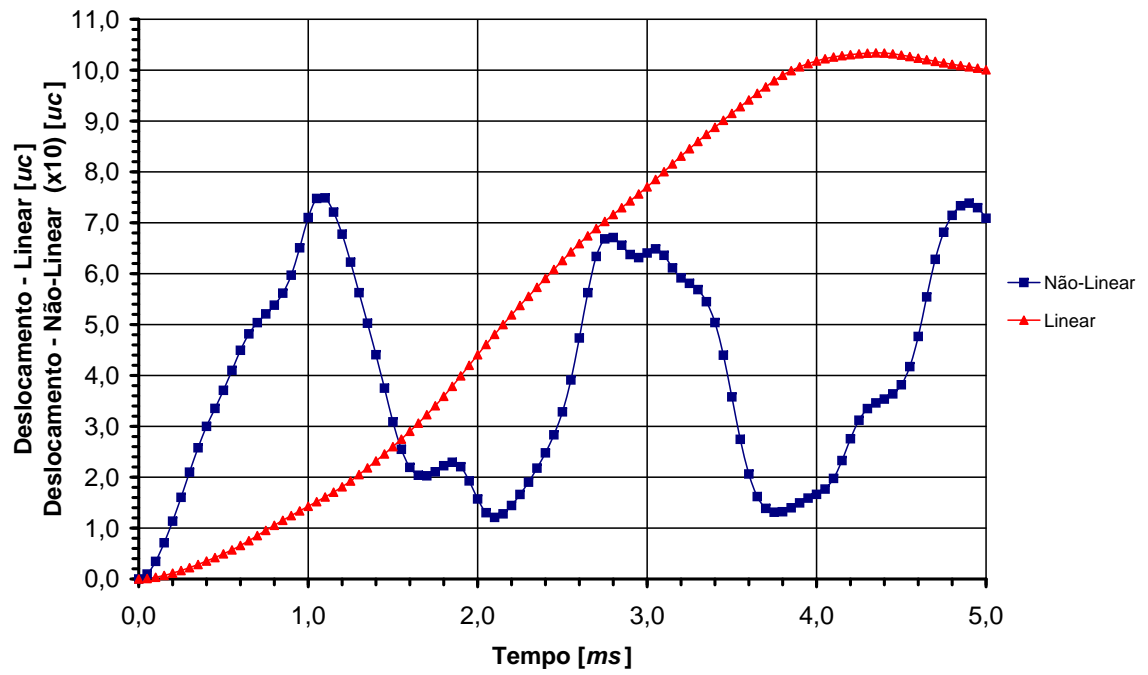


Figura 8.10: Comparativo das respostas linear e não-linear.

Capítulo 9

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O principal objetivo deste trabalho foi ampliar o núcleo numérico do sistema INSANE incluindo a possibilidade de se realizar análises dinâmicas geometricamente não-lineares. Estas análises também deveriam poder ser somente dinâmicas ou somente geometricamente não-lineares. Este objetivo foi alcançado com sucesso.

Como explicitado nos objetivos deste trabalho (Seção 1.1), não havia a intenção de implementar formulações recentes que representem o estado da arte do Método dos Elementos Finitos. O objetivo primordial foi complementar o INSANE com formulações clássicas da análise dinâmica geometricamente não-linear. Este objetivo também foi alcançado com sucesso.

Também não foi um objetivo deste trabalho fazer uma análise crítica dos resultados encontrados nos exemplos de validação. Tais resultados foram utilizados apenas para comparação com respostas analíticas ou encontradas na literatura. Esta análise crítica poderá ser feita em trabalhos futuros.

A implementação atual do núcleo numérico do INSANE permite ampliá-lo, reutilizá-lo ou adaptá-lo para outras aplicações, com poucas mudanças. Pode-se afirmar que esta característica existe devido à utilização da programação orientada a objetos (POO) que propõe o encapsulamento de dados segundo suas características e isto permite alterar partes do sistema sem prejudicar outras. Além da programação orientada a objetos, a linguagem Java utilizada no sistema mostra-se bastante adequada, pois permite a utilização de diversas bibliotecas disponíveis gratuitamente,

além de ser independente da plataforma, o que torna possível seu uso em diferentes sistemas operacionais sem grandes dificuldades.

Foram apresentadas nos capítulos 2, 3 e 4 os principais métodos e formulações para a solução de problemas dinâmicos geometricamente não-lineares.

No capítulo 5 apresentou-se como tais métodos e formulações foram inseridos no núcleo numérico do INSANE, explicitando as classe que sofreram alterações para permitir essa inserção.

As implementações foram validadas através de diversos exemplos (Capítulos 6, 7 e 8), cujos resultados foram comparados com respostas analíticas ou numéricas encontradas na literatura.

O trabalho realizado por Germanio (2005) foi recuperado, através do reaproveitamento de partes do código por ele implementado. Este fato é importante pois, além de valorizar estudos anteriores, evita realizar o mesmo trabalho duas vezes.

Sabendo que, por mais que se esforce para tornar o sistema INSANE completo e eficiente, sempre haverá uma maneira de aprimorá-lo ainda mais, são listadas a seguir algumas sugestões para trabalhos futuros.

1. Extensão de outros métodos de análise dinâmica para contemplar os efeitos não-lineares, tais como o método da diferença central e o método *Wilson- θ* .
2. Criação de um `ProblemDriver` que una as análises física e geometricamente não-lineares.
3. Otimização do núcleo numérico do INSANE, de forma a reduzir o uso de memória e aumentar a velocidade de processamento.
4. Introdução do pacote matemático `jScience` (<http://www.jscience.org>) no núcleo numérico do INSANE.
5. Análise crítica dos resultados encontrados nos exemplos de validação.

Apêndice A

Histórico do Projeto INSANE

O projeto INSANE nasceu do desejo do Professor Roque Pitangueira em desenvolver um ambiente interativo de análise estrutural para utilização como recurso didático em disciplinas de graduação e pós-graduação em engenharia, assim como base para pesquisas na área de métodos numéricos para engenharia. Com este objetivo, ele procurou alunos dispostos a trabalhar com este tema, tanto na iniciação científica, quanto na pós-graduação.

Um dos primeiros a aceitar tal desafio foi Flavio Fonseca, então aluno do quarto período de graduação em Engenharia Civil na UFMG. Este aluno concebeu a base do núcleo numérico do INSANE, assim como a primeira interface gráfica do sistema, tanto para o pré quanto para o pós-processamento. Tal trabalho é considerado o início do INSANE, pois criou as premissas fundamentais do programa: facilidade de uso, código livre, utilização da linguagem Java e total separação entre núcleo numérico e interface gráfica.

Durante o início de seu desenvolvimento, o INSANE foi denominado provisoriamente de *JProg*. A necessidade de criação de um nome mais expressivo era evidente. Durante uma viagem a Itajubá, onde participariam de um congresso, e após longa discussão, o professor Roque Pitangueira e o aluno Flavio Fonseca chegaram a um consenso: INSANE. Este acrônimo significa *Interactive Structural Analysis Environment*, ou seja, ambiente interativo de análise estrutural, o que reflete o objetivo inicial do projeto. Entretanto, com a generalização do sistema, podendo este ser

estendido para áreas diferentes da análise estrutural (Fonseca e Pitangueira, 2007), utiliza-se atualmente o nome INSANE sem se preocupar em dar um significado a ele.

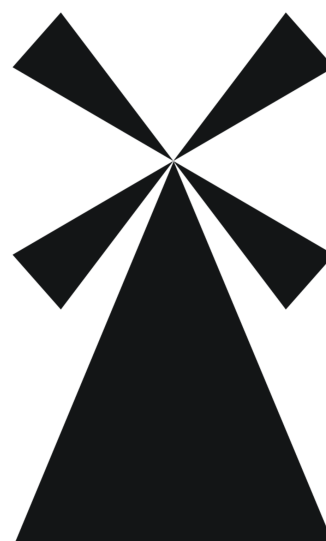
Este nome encontrou certa resistência da comunidade docente inicialmente, que não o julgava “sério o suficiente”. Entretanto, devido à grande aceitação por parte dos alunos e por representar o sentimento de seus desenvolvedores, o nome tornou-se muito bem aceito.

Assim como para o nome, a escolha de uma logomarca para o sistema gerou uma longa discussão. A primeira logomarca (Figura A.1(a)) foi criada em 2004 pelos alunos Flavio Fonseca e Marco Brugiolo a partir da sugestão da arquiteta Isabela Teobaldo, então aluna do mestrado em Engenharia de Estruturas da UFMG. No período de 2006 a 2007, diversas logomarcas foram criadas na tentativa de encontrar uma com maior identificação com o projeto. Porém, nenhuma agradou.

Em 2008, a artista plástica Maíra Caldas foi contactada pelo professor Roque Pitangueira e se comprometeu a criar uma nova marca, baseada em sugestões feitas pelos colaboradores do projeto. Após inúmeras tentativas, chegou-se a um consenso: o moinho de ventos (Figura A.1(b)).



(a) Antiga logomarca do INSANE.



(b) Nova logomarca do INSANE.

Figura A.1: Logomarcas do INSANE.

O moinho de ventos remete à idéia da loucura de Dom Quixote de la Mancha, personagem do livro de mesmo nome escrito pelo espanhol Miguel de Cervantes, uma das maiores obras-primas da literatura mundial. Portanto, além de ser uma estrutura dinâmica, com suas pás móveis, o moinho ainda tem uma ligação implícita com o nome do projeto, o que agradou a todos.

Em 2005, o INSANE passou a ser utilizado como recurso didático na disciplina *Análise Estrutural I* do curso de Graduação em Engenharia Civil da UFMG.

Atualmente o ele é formalmente usado como recurso de apoio das disciplinas *Análise Estrutural I*, *Análise Estrutural II*, *Introdução ao Método dos Elementos Finitos*, do curso de Graduação em Engenharia Civil; *Análise Estrutural e Método dos Elementos Finitos*, do curso de Graduação em Engenharia Mecânica; *Método dos Elementos Finitos*, *Computação Aplicada à Engenharia e Mecânica Computacional do Concreto*, do curso de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas, todos na UFMG.

Em 2007, financiado por um projeto de pesquisa da FAPEMIG, foi criado o *Laboratório de Software Livre*, no Departamento de Engenharia de Estruturas (DEES) da UFMG, apelidado de INSANELAB. Neste laboratório são disponibilizados computadores com todas as ferramentas necessárias para o desenvolvimento do INSANE, além de possuir um servidor próprio, tornando o projeto independente do servidor geral do DEES. O laboratório também é um ponto de convivência dos diversos colaboradores, estimulando a troca de conhecimento e o desenvolvimento colaborativo, dois dos principais objetivos do projeto.

O INSANE já foi premiado duas vezes. A primeira em 2004, quando o trabalho de iniciação científica do aluno Flavio Torres da Fonseca, orientado pelo Professor Roque Pitangueira, foi escolhido o melhor trabalho do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC/CNPq) na grande área de Ciências Exatas, da Terra e Engenharias da UFMG e indicado a concorrer ao Prêmio Destaque do Ano na Iniciação Científica, conferido pelo CNPq.

A segunda premiação ocorreu no XV CILAMCE (*Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*), realizado em Recife, quando este mesmo trabalho ficou em terceiro lugar no prêmio *Research Beginners on Computational Mechanics*.

A seguir são apresentados os diversos trabalhos desenvolvidos desde a criação do projeto, destacando as principais colaborações de cada um.

A.1 Trabalhos Desenvolvidos

Geração de Malhas Bidimensionais de Elementos Finitos Baseada em Mapeamentos Transfinitos

Aluno: Marco Antônio Brugiolo Gonçalves

Orientador: Roque Luiz da Silva Pitangueira

Nível: Dissertação de Mestrado

Início: 08/2002

Término: 10/2004

Este trabalho de mestrado refere-se ao desenvolvimento de um pré-processador que gera malhas bidimensionais de elementos finitos, persistindo-as em arquivos, que podem ser exportados para programas de processamento. Utilizando padrões de projeto de software apropriados, técnicas de geração de malhas através de mapeamentos transfinitos foram disponibilizadas em um programa que possui recursos gráficos interativos. O uso de conceitos da Engenharia de *Software* no desenvolvimento de *software* científico, bem como a confirmação de Java como linguagem de programação adequada a este tipo de software, foram as principais contribuições deste trabalho. Originalmente, este trabalho não fazia parte do INSANE, mas foi incorporado a este posteriormente pelo aluno Flavio Torres da Fonseca.

Programa Computacional Orientado a Objetos para Modelos Estruturais de Barras

Aluno: Flavio Torres da Fonseca

Orientador: Roque Luiz da Silva Pitangueira

Nível: Iniciação Científica

Início: 01/2003

Término: 12/2005

Este trabalho de iniciação científica trata modelos estruturais de barras como casos particulares do método dos elementos finitos. Implementa modelos de treliças planas e espaciais, pórticos planos e espaciais, vigas e grelhas. Os recursos de pré e pós-processamentos ficaram restritos aos casos planos. Técnicas para persistência de dados e geração de relatórios também foram tratadas. Este trabalho marca o início do INSANE, disponibilizando no sistema os elementos finitos mais simples, mas até hoje bastante utilizados.

Elementos Finitos Paramétricos Implementados em Java

Aluno: Marcelo Lucas de Almeida

Orientador: Roque Luiz da Silva Pitangueira

Nível: Dissertação de Mestrado

Início: 08/2003

Término: 08/2005

Esta dissertação de mestrado objetivou implementar a formulação paramétrica do método dos elementos finitos. Observando experiências de outros sistemas orientados a objetos, relatadas na literatura, abstrações de classes apropriadas são implementadas em Java de maneira a disponibilizar alguns elementos finitos de classe C0: unidimensionais, triangulares, quadrilaterais, tetraédricos e hexaédricos, com diferentes graus de interpolação. Foi com este trabalho que aconteceu a primeira grande refatoração do INSANE: a divisão do mesmo em aplicações de pré-processamento, processamento (núcleo numérico) e pós-processamento. Refatoração imprescindível no momento em que o núcleo numérico do sistema cresceu sobremaneira no que diz

respeito à quantidade e variedade de elementos finitos disponibilizados.

Implementação Orientada a Objetos da Solução de Problemas Estruturais Dinâmicos via Método dos Elementos Finitos

Aluno: Leibnitz Germanio

Orientador: Roque Luiz da Silva Pitangueira

Co-Orientador: Fernando Amorim de Paula

Nível: Dissertação de Mestrado

Início: 08/2003

Término: 03/2006

Esta dissertação de mestrado trata da implementação de recursos para análise dinâmica estrutural através do Método dos Elementos Finitos (MEF). Assim, as atribuições do modelo discreto do MEF foram ampliadas para que: os elementos finitos possuam, além de rigidez, inércia e amortecimento; os pontos nodais possuam graus de liberdade de velocidade e aceleração; as classes responsáveis pela resolução do modelo implementem algoritmos para análise modal e integração direta. Este trabalho incorporou ao núcleo numérico do INSANE, que até então só era capaz de solucionar modelos estruturais estáticos, técnicas para a solução de modelos dinâmicos formados pelos elementos finitos paramétricos, implementados no trabalho do aluno Marcelo Lucas de Almeida.

Análise de Meios Semi-Frágeis Heterogêneos Através de Descrição Cinemática de Cosserat e Descrição Estática de Microplanos

Aluno: Jamile Salim Fuina

Orientador: Roque Luiz da Silva Pitangueira

Nível: Tese de Doutorado

Início: 03/2004

Término: em conclusão

Esta tese de doutorado apresenta uma proposta para solução de problemas de localização de deformações, numérica ou fisicamente induzida, até hoje presentes em modelos fisicamente não-lineares do Método dos Elementos Finitos. A principal

característica da proposta é o acoplamento da descrição cinemática baseada no contínuo micropolar com modelos constitutivos de microplanos baseados na teoria de dano. Dentre os recursos incorporados ao INSANE por este trabalho, destacam-se: métodos incrementais-iterativos para solução de modelos não-lineares; elementos finitos com descrição cinemática micropolar; modelos constitutivos baseados na teoria da plasticidade e modelos constitutivos de microplanos baseados na teoria de dano.

Aplicação Orientada a Objetos para Análise Fisicamente Não-Linear com Modelos Reticulados de Seções Transversais Compostas

Aluno: Marcos Torres da Fonseca

Orientador: Roque Luiz da Silva Pitangueira

Nível: Dissertação de Mestrado

Início: 08/2004

Término: 08/2006

Este trabalho de mestrado trata de recursos para a análise fisicamente não-linear de estruturas de concreto armado, aço e/ou mistas através de modelos estruturais reticulados. Dentre estes recursos, destacam-se: a definição de seções transversais compostas genéricas através da decomposição da mesma em um conjunto finito de pontos constituído de material distinto; a descrição do comportamento não-linear de cada um destes pontos; a implementação de elementos finitos espaciais de barra baseados nas teorias de viga de Bernoulli-Euler e de Timoshenko. Dentre as diversas contribuições deste trabalho, ressalta-se aqui o trabalho conjunto, desenvolvido com a aluna de doutorado Jamile Salim Fuina, que definiu o formato de incorporação de modelos fisicamente não-lineares no sistema INSANE.

Sistema Gráfico Interativo para Ensino de Análise Estrutural Através do Método dos Elementos Finitos

Aluno: Renata Nicoliello Moreira

Orientador: Roque Luiz da Silva Pitangueira

Nível: Dissertação de Mestrado

Início: 08/2004

Término: 08/2006

Nesta dissertação de mestrado objetivou-se possibilitar a interferência do usuário no processo de montagem e resolução de modelos discretos de elementos finitos. Desta forma, as entidades matemáticas pertinentes a modelos de elementos finitos de barras ou paramétricos planos passaram a ser interativamente alteradas e visualizadas, de maneira a enriquecer o processo de aprendizagem do MEF. Antes deste trabalho, o núcleo numérico do INSANE, apesar de abundante em recursos, só podia ser utilizado de maneira transparente para o usuário, na forma automática, à maneira dos programas comerciais. Tomando como base os trabalhos desenvolvidos pelos alunos Flavio Torres da Fonseca, em sua iniciação científica, e Marco Antônio Brugiolo Gonçalves, em sua dissertação de mestrado, esta dissertação gerou uma interface gráfica que, a partir da interação com o usuário, permite acompanhar, passo a passo, o processo de solução de um modelo do MEF. Nasce aqui a primeira versão do módulo INSANE destinado a auxiliar o ensino do MEF.

Pós-Processador para Modelos Bidimensionais Não-Lineares do Método dos Elementos Finitos

Aluno: Samuel Silva Penna

Orientador: Roque Luiz da Silva Pitangueira

Nível: Dissertação de Mestrado

Início: 03/2005

Término: 03/2007

Esta dissertação de mestrado refere-se ao desenvolvimento de um pós-processador que trata resultados oriundos de análise não-linear do método dos elementos finitos.

A partir de modelos persistidos em arquivos binários ou textos, a aplicação é capaz de traduzir para o usuário, através de recursos gráficos interativos sofisticados, as grandezas estáticas e cinemáticas disponíveis nos modelos. Estruturas de dados para subdivisão planar, algoritmos de triangulação de domínios bidimensionais e técnicas de suavização de resultados são utilizados para representação gráfica de valores de tensões e deformações em malhas de elementos finitos. Neste trabalho os recursos de computação gráfica interativa do INSANE, até então muito limitados, crescem substancialmente. O uso sistemático de padrões de projeto de *software*, reconhecidamente apropriados para criação de interfaces com o usuário, dá ao sistema características de expansão e manutenção imprescindíveis. Novamente o INSANE é refatorado, desta vez os módulos de pré e pós-processamento são repensados de maneira a suportar as demandas de utilização dos recursos do núcleo numérico.

Implementação Computacional e Análise Crítica de Elementos Finitos de Placas

Aluno: Samir Silva Saliba

Orientador: Roque Luiz da Silva Pitangueira

Nível: Dissertação de Mestrado

Início: 03/2005

Término: 03/2007

Modelagens com elementos finitos de placas estão presentes em muitas aplicações da engenharia. Assim, não se concebe um sistema para fomentar pesquisa sem estes elementos finitos. A dissertação de mestrado deste aluno supre esta limitação disponibilizando os diversos elementos finitos de placas de Kirchhoff (placas finas) e de Reissner-Mindlin (placas espessas), disponíveis na literatura. Novos recursos são, assim, adicionados ao núcleo numérico do INSANE.

Um Serviço Web para o Método dos Elementos Finitos

Aluno: Luciana Sampaio Camara

Orientador: Roque Luiz da Silva Pitangueira

Nível: Dissertação de Mestrado

Início: 03/2005

Término: 08/2007

Este trabalho refere-se à disponibilização de um serviço *Web* para análise através do método dos elementos finitos. O serviço disponibilizado demandou a generalização do núcleo numérico, para que o sistema pudesse contemplar diversos tipos de problemas, como, por exemplo, os de campo generalizados e os de mecânica dos fluidos. Também foi necessário o emprego de modernas tecnologias de informática para que o sistema funcionasse em uma arquitetura cliente-servidor com três camadas físicas: uma interface gráfica *web* para o pré e pós-processamento no lado do cliente, um processador localizado em um servidor *web* e arquivos textos e/ou binários persistidos em disco. Este trabalho marca o início do INSANE-WEB. Com ele as aplicações gráficas interativas, sejam as voltadas para *desktop*, sejam aquelas executadas em *web browsers*, passam a ser concebidas como clientes-consumidores dos serviços disponibilizados no núcleo numérico do sistema. Um cliente *desktop* e outro para *web browsers* foram desenvolvidos, visando testar o processamento remoto de modelos do MEF, no INSANE, através da internet.

Pré-Processador para Modelos Reticulados e Planos do Método dos Elementos Finitos

Aluno: Reginaldo Lopes Ferreira

Orientador: Roque Luiz da Silva Pitangueira

Nível: Dissertação de Mestrado

Início: 03/2006

Término: 07/2008

Esta dissertação de mestrado aprimora o pré-processador do INSANE para que o mesmo permita a criação de modelos que conjuguem elementos finitos reticulados

espaciais com elementos de estados planos de tensão, deformação, axissimétricos e de placas. O pré-processador foi dividido em três grandes módulos independentes: um para modelagem geométrica, outro para geração de malhas e um terceiro para a definição de atributos.

Análise Dinâmica Geometricamente Não-Linear Através do Método dos Elementos Finitos

Aluno: Flavio Torres da Fonseca

Orientador: Roque Luiz da Silva Pitangueira

Nível: Dissertação de Mestrado

Início: 03/2006

Término: 08/2008

Esta dissertação de mestrado incorpora as implementações feitas pelo aluno Leibnitz Germanio na nova estrutura do programa, acrescenta modelos geometricamente não-lineares para elementos finitos paramétricos, além de outros métodos de solução dinâmica, e viabiliza a solução acoplada de problemas dinâmicos geometricamente não-lineares. Novamente o núcleo numérico do INSANE cresce em possibilidades.

Implementação de um Modelo para Fissuração Baseado no Método dos Elementos Finitos Estendido

Aluno: Kelson Pothin Wolff

Orientador: Roque Luiz da Silva Pitangueira

Nível: Dissertação de Mestrado

Início: 08/2006

Término: em conclusão

Esta dissertação de mestrado, juntamente com a tese de doutorado do aluno Ramon Pereira da Silva marca uma nova fase do sistema. Inicia-se aqui a incorporação de formulações não convencionais do Método dos Elementos Finitos. Neste caso, um modelo de elementos finitos que dinamicamente acrescenta graus de liberdade aos nós da malha, de maneira a representar o processo de propagação de fissuras, é implementado, testado e aplicado na análise de estruturas de concreto.

Um *Framework* para Análise Física e Geometricamente Não-Linear de Estruturas

Aluno: Samuel Silva Penna

Orientador: Roque Luiz da Silva Pitangueira

Nível: Tese de Doutorado

Início: 03/2007

Término: em desenvolvimento

Estruturas esbeltas têm sua capacidade portante subestimada pela incapacidade do analista em simular o acoplamento dos efeitos da não-linearidade física e geométrica. Inúmeros estudos surgem a cada dia para tratar os referidos efeitos isoladamente, particularmente na área de modelamento constitutivo através das teorias da plasticidade e do dano. Esta tese de doutorado visa a criação de um sistema computacional que permita agregar, sem nenhuma alteração do código existente, diferentes modelos para os dois tipos de não-linearidade, de maneira que seja possível observar os efeitos do referido acoplamento, quando se combinam os diferentes modelos disponibilizados. O INSANE será usado como plataforma suporte para as implementações do trabalho.

Implementação Computacional de Elementos Finitos de Cascas

Aluno: Flávio Henrique Ajeje

Orientador: Roque Luiz da Silva Pitangueira

Nível: Dissertação de Mestrado

Início: 03/2007

Término: em desenvolvimento

Um sistema que pretende ser fomentador da pesquisa na área de métodos numéricos e computacionais aplicados à engenharia deve disponibilizar uma base mínima de recursos e os elementos finitos de casca devem fazer parte desta base mínima. Esta dissertação de mestrado deste aluno supre esta limitação do INSANE, implementando elementos de cascas planas e axissimétricas, baseados nas teorias de Kirchhoff e de Reissner-Mindlin, e elementos de cascas curvas, baseados em degenerações de

elementos sólidos.

Modelagem Numérica de Meios Parcialmente Frágeis Heterogêneos Através de Métodos sem Malha

Aluno: Ramon Pereira da Silva

Orientador: Roque Luiz da Silva Pitangueira

Nível: Tese de Doutorado

Início: 08/2007

Término: em desenvolvimento

Problemas de localização de deformações numericamente induzida são frequentemente encontrados na modelagem via MEF de meios parcialmente frágeis e heterogêneos. Estratégias que introduzem dependência de malha para solucionar estes problemas têm sido criticadas, uma vez que estas envolvem alterações artificiais nas propriedades do material em função de alguma característica geométrica da malha. O objetivo principal desta tese é desenvolver um modelo de análise fisicamente não-linear de estruturas constituídas de materiais parcialmente frágeis baseado em métodos sem malha para solucionar problemas de localização de deformações numericamente induzida, no qual a heterogeneidade do material considera uma distribuição estocástica dos grãos, geometricamente consistente com o domínio do problema sendo analisado.

Software Livre para o Método dos Elementos Finitos: Ambiente para Ensino de Análise Estrutural

Aluno: Luiz Henrique Silva Fernández

Orientador: Roque Luiz da Silva Pitangueira

Nível: Iniciação Científica

Início: 08/2007

Término: em conclusão

O objetivo específico deste projeto de Iniciação Científica é a implementação computacional de uma aplicação gráfica interativa, na qual se pode acompanhar e visualizar todas as etapas da resolução de modelos discretos do Método dos Elementos Finitos

(MEF). Tomando como ponto de partida a dissertação de mestrado da aluna Renata Nicoliello Moreira e as diversas alterações feitas no sistema, este trabalho está se concretizando como o módulo INSANE voltado para apoio ao ensino presencial do MEF.

Apêndice B

Matrizes dos Elementos Finitos de Barra

B.1 Treliça Plana

Graus de liberdade: d_x d_y

Deformações generalizadas: ε_a

Tensões generalizadas: N_x

$$\mathbf{N} = \left[\begin{array}{cc|cc} N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{cc|cc} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 \\ 0 & N_{1,x} & 0 & N_{2,x} \end{array} \right]$$

$$\mathbf{E} = \left[\begin{array}{cc} EA & 0 \\ 0 & EA \end{array} \right]$$

$$\widehat{\mathbf{K}} = \frac{EA}{L} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{cc|cc} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{array} \right]$$

$$\widehat{\mathbf{M}} = \frac{\rho AL}{6} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

$$\widehat{\mathbf{C}} = \frac{aAL}{6} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

B.2 Viga

Graus de liberdade: $d_y \ r_z$

Deformações generalizadas: $\gamma_y \ \kappa_z$

Tensões generalizadas: $V_y \ M_z$

$$\mathbf{N} = \left[\begin{array}{cc|cc} \bar{N}_1 & \bar{\bar{N}}_1 & \bar{N}_2 & \bar{\bar{N}}_2 \\ \bar{N}_{1,x} & \bar{\bar{N}}_{1,x} & \bar{N}_{2,x} & \bar{\bar{N}}_{2,x} \end{array} \right] \quad \mathbf{B} = \left[\begin{array}{cc|cc} \bar{N}_{1,x} & \bar{\bar{N}}_{1,x} & \bar{N}_{2,x} & \bar{\bar{N}}_{2,x} \\ \bar{N}_{1,xx} & \bar{\bar{N}}_{1,xx} & \bar{N}_{2,xx} & \bar{\bar{N}}_{2,xx} \end{array} \right]$$

$$\mathbf{E} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & EI \end{array} \right]$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{I} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\widehat{\mathbf{K}} = \frac{EI}{L^3} \left[\begin{array}{cc|cc} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ \hline -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{array} \right]$$

$$\widehat{\mathbf{M}} = \frac{\rho AL}{420} \left[\begin{array}{cc|cc} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ \hline 54 & 13L & 156 & -22L \\ 13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{array} \right]$$

$$\widehat{\mathbf{C}} = \frac{aAL}{420} \left[\begin{array}{cc|cc} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ \hline 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{array} \right]$$

B.3 Grelha

Graus de liberdade: $d_y \quad r_x \quad r_z$

Deformações generalizadas: $\gamma_y \quad \psi_x \quad \kappa_z$

Tensões generalizadas: $V_y \quad T_x \quad M_z$

$$\mathbf{N} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \bar{N}_1 & 0 & \bar{\bar{N}}_1 & \bar{N}_2 & 0 & \bar{\bar{N}}_2 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 \\ \bar{N}_{1,x} & 0 & \bar{\bar{N}}_{1,x} & \bar{N}_{2,x} & 0 & \bar{\bar{N}}_{2,x} \end{array} \right]$$

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \bar{N}_{1,x} & 0 & \bar{\bar{N}}_{1,x} & \bar{N}_{2,x} & 0 & \bar{\bar{N}}_{2,x} \\ 0 & N_{1,x} & 0 & 0 & N_{2,x} & 0 \\ \bar{N}_{1,xx} & 0 & \bar{\bar{N}}_{1,xx} & \bar{N}_{2,xx} & 0 & \bar{\bar{N}}_{2,xx} \end{array} \right]$$

$$\mathbf{E} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & GJ & 0 \\ 0 & 0 & EI \end{array} \right]$$

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s & c & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -s & c \end{array} \right]$$

$$\widehat{\mathbf{K}} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \\ \hline -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{array} \right]$$

$$\widehat{\mathbf{M}} = \frac{\rho AL}{420} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 156 & 0 & -22L & 54 & 0 & 13L \\ 0 & 140r_g^2 & 0 & 0 & 70r_g^2 & 0 \\ -22L & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & -3L^2 \\ \hline 54 & 0 & -13L & 156 & 0 & 22L \\ 0 & 70r_g^2 & 0 & 0 & 140r_g^2 & 0 \\ 13L & 0 & -3L^2 & 22L & 0 & 4L^2 \end{array} \right]$$

$$\widehat{\mathbf{C}} = \frac{aAL}{420} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 156 & 0 & -22L & 54 & 0 & 13L \\ 0 & 140r_g^2 & 0 & 0 & 70r_g^2 & 0 \\ -22L & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & -3L^2 \\ \hline 54 & 0 & -13L & 156 & 0 & 22L \\ 0 & 70r_g^2 & 0 & 0 & 140r_g^2 & 0 \\ 13L & 0 & -3L^2 & 22L & 0 & 4L^2 \end{array} \right]$$

sendo: $r_g^2 = \frac{J}{A}$

B.4 Pórtico Plano

Graus de liberdade: $d_x \ d_y \ r_z$

Deformações generalizadas: $\varepsilon_a \ \gamma_y \ \kappa_z$

Tensões generalizadas: $N_x \ V_y \ M_z$

$$\mathbf{N} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{N}_1 & \bar{\bar{N}}_1 & 0 & \bar{N}_2 & \bar{\bar{N}}_2 \\ 0 & \bar{N}_{1,x} & \bar{\bar{N}}_{1,x} & 0 & \bar{N}_{2,x} & \bar{\bar{N}}_{2,x} \end{array} \right]$$

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} N_{1,x} & 0 & 0 & N_{2,x} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{N}_{1,x} & \bar{\bar{N}}_{1,x} & 0 & \bar{N}_{2,x} & \bar{\bar{N}}_{2,x} \\ 0 & \bar{N}_{1,xx} & \bar{\bar{N}}_{1,xx} & 0 & \bar{N}_{2,xx} & \bar{\bar{N}}_{2,xx} \end{array} \right]$$

$$\mathbf{E} = \left[\begin{array}{ccc} EA & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EI \end{array} \right]$$

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\widehat{\mathbf{K}} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \hline -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{array} \right]$$

$$\widehat{\mathbf{M}} = \frac{\rho AL}{420} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ \hline 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{array} \right]$$

$$\widehat{\mathbf{C}} = \frac{aAL}{420} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ \hline 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{array} \right]$$

B.5 Treliça Espacial

Graus de liberdade: d_x d_y d_z

Deformações generalizadas: ε_a

Tensões generalizadas: N_x

$$\mathbf{N} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} N_{1,x} & 0 & 0 & N_{2,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,x} & 0 & 0 & N_{2,x} & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,x} & 0 & 0 & N_{2,x} \end{array} \right]$$

$$\mathbf{E} = \left[\begin{array}{ccc} EA & 0 & 0 \\ 0 & EA & 0 \\ 0 & 0 & EA \end{array} \right]$$

$$\widehat{\mathbf{K}} = \frac{EA}{L} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} c_x & c_y & c_z & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{c_x c_y}{c_{xz}} & c_{xz} & -\frac{c_y c_z}{c_{xz}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{c_z}{c_{xz}} & 0 & \frac{c_x}{c_{xz}} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & c_x & c_y & c_z \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{c_x c_y}{c_{xz}} & c_{xz} & -\frac{c_y c_z}{c_{xz}} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{c_z}{c_{xz}} & 0 & \frac{c_x}{c_{xz}} \end{array} \right]$$

Para um elemento vertical:

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & c_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

sendo: $c_x = \frac{X_2 - X_1}{L}$ $c_y = \frac{Y_2 - Y_1}{L}$ $c_z = \frac{Z_2 - Z_1}{L}$ $c_{xz} = \sqrt{c_x^2 + c_z^2}$

$$\widehat{\mathbf{M}} = \frac{\rho AL}{6} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

$$\widehat{\mathbf{C}} = \frac{aAL}{6} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

B.6 Pórtico Espacial

Graus de liberdade: d_x d_y d_z r_x r_y r_z

Deformações generalizadas: ε_a γ_y γ_z ψ_x κ_y κ_z

Tensões generalizadas: N_x V_y V_z T_x M_y M_z

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{N}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{N}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{N}_2 \\ 0 & 0 & \bar{N}_1 & 0 & \bar{N}_1 & 0 & 0 & 0 & \bar{N}_2 & 0 & \bar{N}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{N}_{1,x} & 0 & -\bar{N}_{1,x} & 0 & 0 & 0 & \bar{N}_{2,x} & 0 & -\bar{N}_{2,x} & 0 \\ 0 & \bar{N}_{1,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{N}_{1,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{N}_{2,x} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{2,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{N}_{1,x} & 0 & 0 & 0 & \bar{N}_{1,x} & 0 & \bar{N}_{2,x} & 0 & 0 & 0 & \bar{N}_{2,x} \\ 0 & 0 & \bar{N}_{1,x} & 0 & \bar{N}_{1,x} & 0 & 0 & 0 & \bar{N}_{2,x} & 0 & \bar{N}_{2,x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{1,x} & 0 & 0 & 0 & N_{2,x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{N}_{1,xx} & 0 & -\bar{N}_{1,xx} & 0 & 0 & 0 & \bar{N}_{2,xx} & 0 & -\bar{N}_{2,xx} & 0 \\ 0 & \bar{N}_{1,xx} & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{N}_{1,xx} & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{N}_{2,xx} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GJ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & EI_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & EI_z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T' \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}' = \begin{bmatrix} c_x & c_y & c_z \\ -\frac{c_y}{c_x} & \frac{c_x}{c_{xy}} & 0 \\ -\frac{c_x c_z}{c_{xy}} & -\frac{c_y c_z}{c_{xy}} & c_{xy} \end{bmatrix}$$

Para um elemento paralelo
ao eixo z global ($\hat{x} = z$):

$$\mathbf{T}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c_x = \frac{X_2 - X_1}{L} \quad c_y = \frac{Y_2 - Y_1}{L} \quad c_z = \frac{Z_2 - Z_1}{L} \quad c_{xy} = \sqrt{c_x^2 + c_y^2}$$

Para um elemento paralelo
ao eixo z global ($\hat{x} = -z$):

$$\mathbf{T}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\widehat{M} = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 0 & 0 & 0 & 22L & 0 & 54 & 0 & 54 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13L & 0 \\ 0 & 0 & 156 & 0 & -22L & 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & 0 & 13L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 140r_g^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 70r_g^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -22L & 0 & 4L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13L & 0 & -3L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 22L & 0 & 0 & 0 & 4L^2 & 0 & 13L & 0 & 0 & 0 & 0 & -3L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 0 & 0 & 0 & 13L & 0 & 156 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -22L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 54 & 0 & -13L & 0 & 0 & 0 & 156 & 0 & 22L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 70r_g^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 140r_g^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -13L & 0 & -3L^2 & 0 & 0 & 0 & 22L & 0 & 4L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -13L & 0 & 0 & 0 & -3L^2 & 0 & -22L & 0 & 0 & 0 & 0 & 4L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Apêndice C

Funções de Forma

A seguir, são apresentadas algumas funções de forma disponibilizadas no núcleo numérico do INSANE, nomeadas segundo os nomes das classes que as representam (ver Figura 5.11).

C.1 LinearCubic1DCart



$$N_1 = 1 - \frac{x}{L}$$

$$N_2 = \frac{x}{L}$$

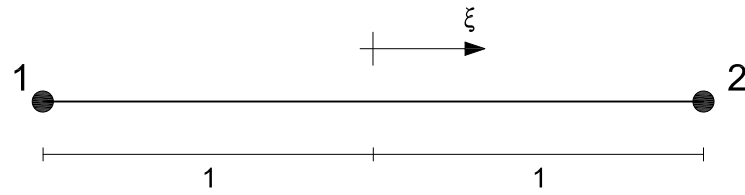
$$\overline{N}_1 = \frac{2x^3 - 3x^2L + L^3}{L^3}$$

$$\overline{N}_2 = \frac{-2x^3 + 3x^2L}{L^3}$$

$$\overline{\overline{N}}_1 = \frac{x^3L - 2x^2L^2 + xL^3}{L^3}$$

$$\overline{\overline{N}}_2 = \frac{x^3L - x^2L^2}{L^3}$$

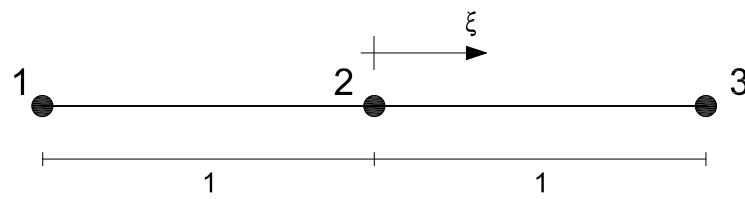
C.2 L2



$$N_1 = \frac{1}{2} (1 - \xi)$$

$$N_2 = \frac{1}{2} (1 + \xi)$$

C.3 L3

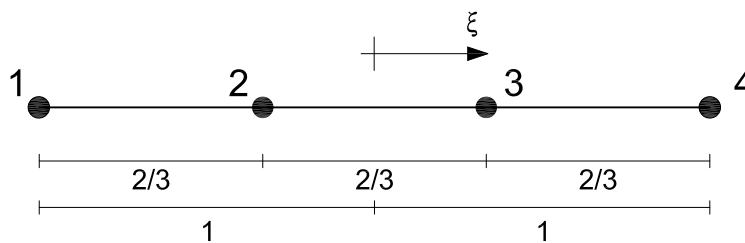


$$N_1 = \frac{1}{2} \xi (\xi - 1)$$

$$N_2 = (1 + \xi) (1 - \xi)$$

$$N_3 = \frac{1}{2} \xi (1 + \xi)$$

C.4 L4



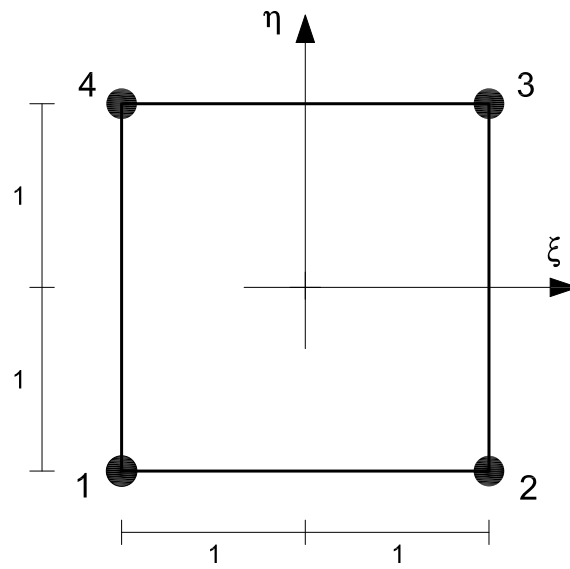
$$N_1 = -\frac{9}{16} \left(\xi + \frac{1}{3}\right) \left(\xi - \frac{1}{3}\right) (\xi - 1)$$

$$N_3 = -\frac{27}{16} (\xi + 1) \left(\xi + \frac{1}{3}\right) (\xi - 1)$$

$$N_2 = \frac{27}{16} (\xi + 1) \left(\xi - \frac{1}{3}\right) (\xi - 1)$$

$$N_4 = \frac{9}{16} (\xi + 1) \left(\xi + \frac{1}{3}\right) \left(\xi - \frac{1}{3}\right)$$

C.5 Q4



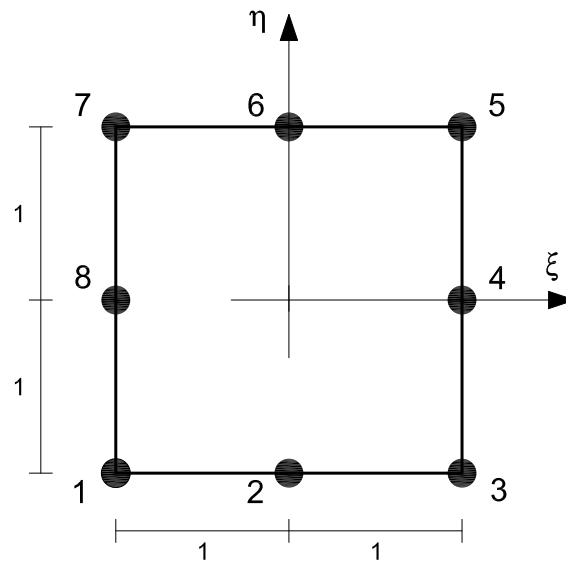
$$N_1 = \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta)$$

$$N_2 = \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta)$$

$$N_4 = \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta)$$

C.6 Q8



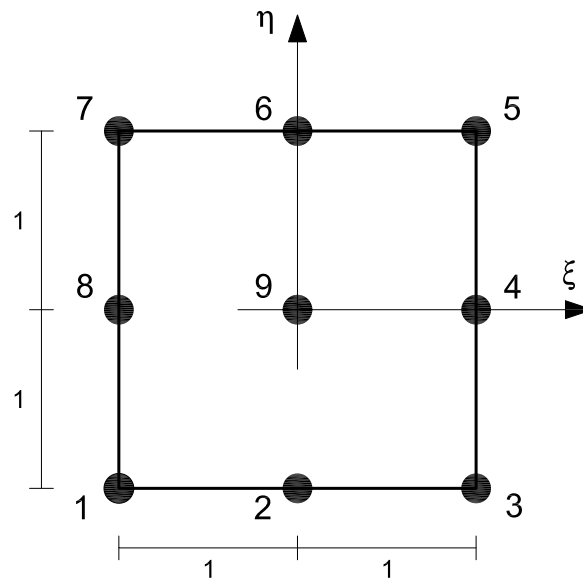
$$N_1 = -\frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta) (1 + \xi + \eta) \quad N_5 = -\frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta) (1 - \xi - \eta)$$

$$N_2 = \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 - \eta) \quad N_6 = \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 + \eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta) (\xi - \eta - 1) \quad N_7 = -\frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta) (1 + \xi - \eta)$$

$$N_4 = \frac{1}{2} (1 + \xi) (1 - \eta^2) \quad N_8 = \frac{1}{2} (1 - \xi) (1 - \eta^2)$$

C.7 Q9



$$N_1 = \frac{1}{4} \xi \eta (1 - \xi) (1 - \eta)$$

$$N_6 = \frac{1}{2} \eta (1 - \xi^2) (1 + \eta^2)$$

$$N_2 = -\frac{1}{2} \eta (1 - \xi^2) (1 - \eta)$$

$$N_7 = -\frac{1}{4} \xi \eta (1 - \xi) (1 + \eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4} \xi \eta (1 + \xi) (1 + \eta)$$

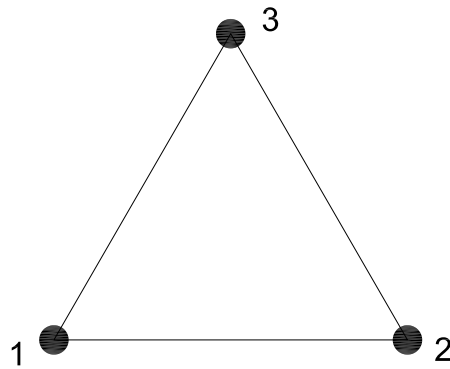
$$N_8 = -\frac{1}{2} \xi (1 - \xi) (1 - \eta^2)$$

$$N_4 = \frac{1}{2} \xi (1 + \xi) (1 - \eta^2)$$

$$N_9 = (1 - \xi^2) (1 - \eta^2)$$

$$N_5 = -\frac{1}{4} \xi \eta (1 + \xi) (1 - \eta)$$

C.8 T3

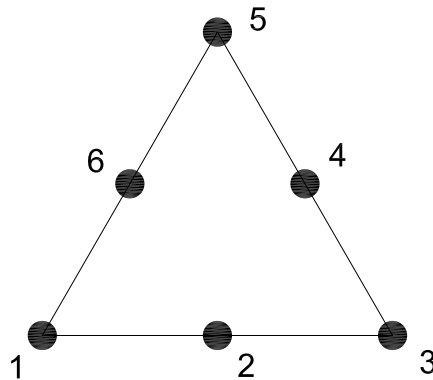


$$N_1 = \xi_1$$

$$N_2 = \xi_2$$

$$N_3 = \xi_3$$

C.9 T6



$$N_1 = (2 \xi_1 - 1) \xi_1$$

$$N_2 = 4 \xi_1 \xi_2$$

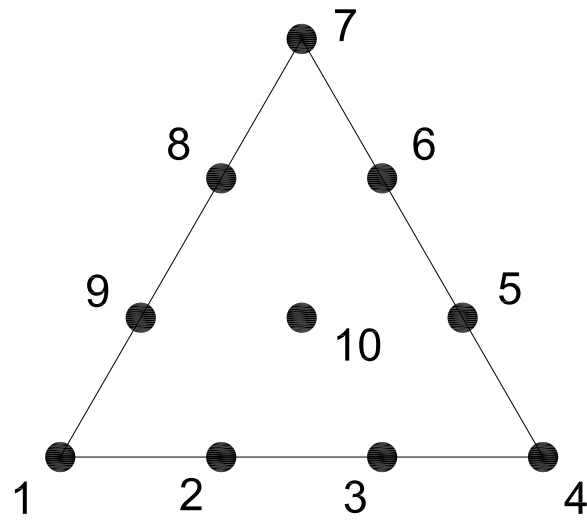
$$N_3 = (2 \xi_2 - 1) \xi_2$$

$$N_4 = 4 \xi_2 \xi_3$$

$$N_5 = (2 \xi_3 - 1) \xi_3$$

$$N_6 = 4 \xi_1 \xi_3$$

C.10 T10



$$N_1 = \frac{1}{2} \xi_1 (3 \xi_1 - 1) (3 \xi_1 - 2)$$

$$N_6 = \frac{9}{2} (3 \xi_3 - 1) \xi_2 \xi_3$$

$$N_2 = \frac{9}{2} (3 \xi_1 - 1) \xi_1 \xi_2$$

$$N_7 = \frac{1}{2} \xi_3 (3 \xi_3 - 1) (3 \xi_3 - 2)$$

$$N_3 = \frac{9}{2} (3 \xi_2 - 1) \xi_1 \xi_2$$

$$N_8 = \frac{9}{2} (3 \xi_3 - 1) \xi_3 \xi_1$$

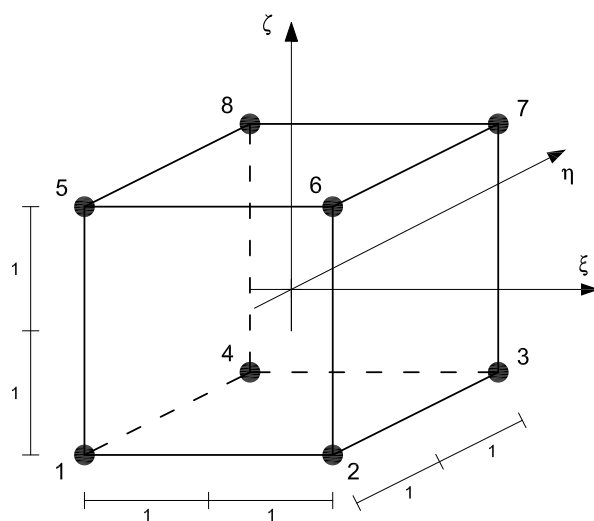
$$N_4 = \frac{1}{2} \xi_2 (3 \xi_2 - 1) (3 \xi_2 - 2)$$

$$N_9 = \frac{9}{2} (3 \xi_2 - 1) \xi_3 \xi_1$$

$$N_5 = \frac{9}{2} (3 \xi_2 - 1) \xi_2 \xi_3$$

$$N_{10} = 27 \xi_1 \xi_2 \xi_3$$

C.11 H8



$$N_1 = \frac{1}{8} (1 - \xi) (1 - \eta) (1 - \zeta)$$

$$N_5 = \frac{1}{8} (1 - \xi) (1 - \eta) (1 + \zeta)$$

$$N_2 = \frac{1}{8} (1 + \xi) (1 - \eta) (1 - \zeta)$$

$$N_6 = \frac{1}{8} (1 + \xi) (1 - \eta) (1 + \zeta)$$

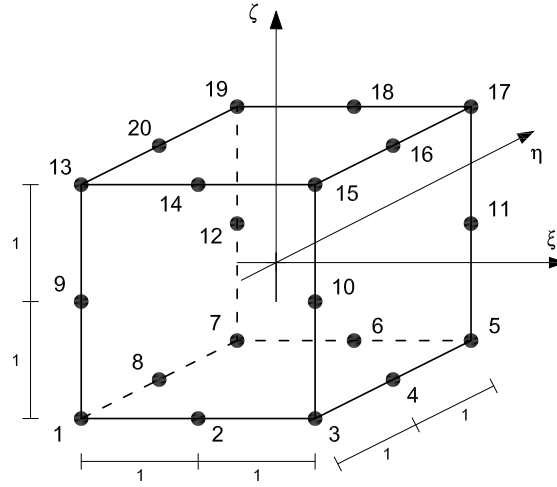
$$N_3 = \frac{1}{8} (1 + \xi) (1 + \eta) (1 - \zeta)$$

$$N_7 = \frac{1}{8} (1 + \xi) (1 + \eta) (1 + \zeta)$$

$$N_4 = \frac{1}{8} (1 - \xi) (1 + \eta) (1 - \zeta)$$

$$N_8 = \frac{1}{8} (1 - \xi) (1 + \eta) (1 + \zeta)$$

C.12 H20



$$\mathbf{N}_1 = \frac{1}{8} (1 - \xi) (1 - \eta) (1 - \zeta) (-2 - \xi - \eta - \zeta) \quad \mathbf{N}_2 = \frac{1}{4} (1 - \xi^2) (1 - \eta) (1 - \zeta)$$

$$\mathbf{N}_3 = \frac{1}{8} (1 + \xi) (1 - \eta) (1 - \zeta) (-2 + \xi - \eta - \zeta) \quad \mathbf{N}_4 = \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta^2) (1 - \zeta)$$

$$\mathbf{N}_5 = \frac{1}{8} (1 + \xi) (1 + \eta) (1 - \zeta) (-2 + \xi + \eta - \zeta) \quad \mathbf{N}_6 = \frac{1}{4} (1 - \xi^2) (1 + \eta) (1 - \zeta)$$

$$\mathbf{N}_7 = \frac{1}{8} (1 - \xi) (1 + \eta) (1 - \zeta) (-2 - \xi + \eta - \zeta) \quad \mathbf{N}_8 = \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta^2) (1 - \zeta)$$

$$\mathbf{N}_9 = \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta) (1 - \zeta^2) \quad \mathbf{N}_{10} = \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta) (1 - \zeta^2)$$

$$\mathbf{N}_{11} = \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta) (1 - \zeta^2) \quad \mathbf{N}_{12} = \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta) (1 - \zeta^2)$$

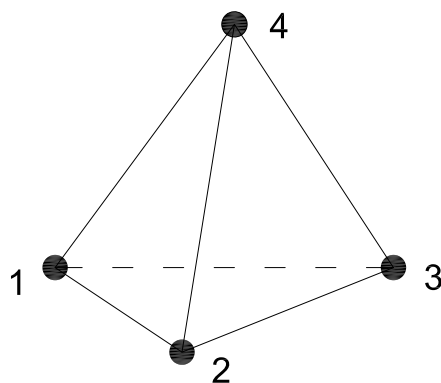
$$\mathbf{N}_{13} = \frac{1}{8} (1 - \xi) (1 - \eta) (1 + \zeta) (-2 - \xi - \eta + \zeta) \quad \mathbf{N}_{14} = \frac{1}{4} (1 - \xi^2) (1 - \eta) (1 + \zeta)$$

$$\mathbf{N}_{15} = \frac{1}{8} (1 + \xi) (1 - \eta) (1 + \zeta) (-2 + \xi - \eta + \zeta) \quad \mathbf{N}_{16} = \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta^2) (1 + \zeta)$$

$$\mathbf{N}_{17} = \frac{1}{8} (1 + \xi) (1 + \eta) (1 + \zeta) (-2 + \xi + \eta + \zeta) \quad \mathbf{N}_{18} = \frac{1}{4} (1 - \xi^2) (1 + \eta) (1 + \zeta)$$

$$\mathbf{N}_{19} = \frac{1}{8} (1 - \xi) (1 + \eta) (1 + \zeta) (-2 - \xi + \eta + \zeta) \quad \mathbf{N}_{20} = \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta^2) (1 + \zeta)$$

C.13 Tetra4



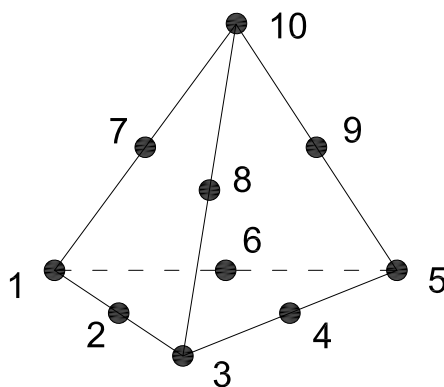
$$N_1 = \xi_1$$

$$N_2 = \xi_2$$

$$N_3 = \xi_3$$

$$N_4 = \xi_4$$

C.14 Tetra10



$$N_1 = (2 \xi_1 - 1) \xi_1$$

$$N_6 = 4 \xi_1 \xi_3$$

$$N_2 = 4 \xi_1 \xi_2$$

$$N_7 = 4 \xi_2 \xi_4$$

$$N_3 = (2 \xi_2 - 1) \xi_2$$

$$N_8 = 4 \xi_3 \xi_4$$

$$N_4 = 4 \xi_2 \xi_3$$

$$N_9 = 4 \xi_1 \xi_4$$

$$N_5 = (2 \xi_3 - 1) \xi_3$$

$$N_{10} = (2 \xi_4 - 1) \xi_4$$

Apêndice D

Matrizes dos Elementos Finitos Paramétricos

D.1 Linha com 1 Grau de Liberdade

Grau de liberdade: d_x

Deformação: ε_{xx}

Tensão: σ_{xx}

Por apresentar apenas um grau de liberdade, este modelo não apresenta efeitos geometricamente não-lineares. Portanto, não existem as matrizes \mathbf{B}_{NL} e \mathbf{K}_{NL} .

$$\mathbf{B}_L = \frac{2}{L} \left[N_{1,x} \mid \cdots \mid N_{n,x} \right]$$

$$\mathbf{E} = \left[E \right]$$

D.2 Linha com 2 Graus de Liberdade

Graus de liberdade: d_x d_y

Deformação: ε_{xx}

Tensão: σ_{xx}

Formulação Lagrangeana Total

$$\mathbf{B}_L = \mathbf{B}_{L0} + \mathbf{B}_{L1}$$

$$\mathbf{B}_{L0} = \frac{2}{L} \left[N_{1,x} \quad 0 \mid \cdots \mid N_{n,x} \quad 0 \right]$$

$$\mathbf{B}_{L1} = \frac{2}{L} \left[N_{1,x} (\cos \theta - 1) \quad N_{1,x} \sin \theta \mid \cdots \mid N_{n,x} (\cos \theta - 1) \quad N_{n,x} \sin \theta \right]$$

$$\mathbf{B}_{NL} = \frac{2}{L} \left[\begin{array}{cc|ccc} N_{1,x} & 0 & \cdots & N_{n,x} & 0 \\ 0 & N_{1,x} & \cdots & 0 & N_{n,x} \end{array} \right]$$

$$\mathbf{E} = \left[E \right] \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & 0 \\ 0 & S_{11} \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{S}} = \left\{ S_1 \right\}$$

Formulação Lagrangeana Atualizada

$$\mathbf{B}_L = \frac{2}{L} \left[N_{1,x} \quad 0 \mid \cdots \mid N_{n,x} \quad 0 \right]$$

$$\mathbf{B}_{NL} = \frac{2}{L} \left[\begin{array}{cc|ccc} N_{1,x} & 0 & \cdots & N_{n,x} & 0 \\ 0 & N_{1,x} & \cdots & 0 & N_{n,x} \end{array} \right]$$

$$\mathbf{E} = \left[E \right] \quad \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & 0 \\ 0 & \tau_{11} \end{bmatrix} \quad \hat{\boldsymbol{\tau}} = \left\{ \tau_1 \right\}$$

D.3 Linha com 3 Graus de Liberdade

Graus de liberdade: d_x d_y d_z Deformação: ε_{xx}

Tensão: σ_{xx}

Formulação Lagrangeana Total

$$\mathbf{B}_L = \mathbf{B}_{L0} + \mathbf{B}_{L1}$$

$$\mathbf{B}_{L0} = \frac{2}{L} \left[\begin{array}{c|ccc} N_{1,x} & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & N_{n,x} & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{B}_{L1} = \frac{2}{L} \mathbf{d}^T \mathbf{N}'^T \mathbf{N}'$$

$$\mathbf{B}_{NL} = \frac{2}{L} \left[\begin{array}{c|ccc} N_{1,x} & 0 & 0 & \cdots & N_{n,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,x} & 0 & \cdots & 0 & N_{n,x} & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,x} & \cdots & 0 & 0 & N_{n,x} \end{array} \right]$$

$$\mathbf{E} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{E} \end{array} \right] \quad \mathbf{S} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} S_{11} & 0 & 0 & & & \\ 0 & S_{11} & 0 & & & \\ 0 & 0 & S_{11} & & & \end{array} \right] \quad \hat{\mathbf{S}} = \left\{ S_1 \right\}$$

Formulação Lagrangeana Atualizada

$$\mathbf{B}_L = \frac{2}{L} \left[\begin{array}{c|ccc} N_{1,x} & 0 & 0 & \cdots & N_{n,x} & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{B}_{NL} = \frac{2}{L} \left[\begin{array}{c|ccc} N_{1,x} & 0 & 0 & \cdots & N_{n,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,x} & 0 & \cdots & 0 & N_{n,x} & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,x} & \cdots & 0 & 0 & N_{n,x} \end{array} \right]$$

$$\mathbf{E} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{E} \end{array} \right] \quad \boldsymbol{\tau} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \tau_{11} & 0 & 0 & & & \\ 0 & \tau_{11} & 0 & & & \\ 0 & 0 & \tau_{11} & & & \end{array} \right] \quad \hat{\boldsymbol{\tau}} = \left\{ \tau_1 \right\}$$

D.4 Estado Plano de Tensões

Graus de liberdade: d_x d_y Deformações: ε_{xx} ε_{yy} γ_{xy} Tensões: σ_{xx} σ_{yy} τ_{xy}

Formulação Lagrangeana Total

$$\mathbf{B}_L = \mathbf{B}_{L0} + \mathbf{B}_{L1}$$

$$\mathbf{B}_{L0} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & \cdots & N_{n,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & \cdots & 0 & N_{n,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & \cdots & N_{n,y} & N_{n,x} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{L1} = \begin{bmatrix} \ell_{11}N_{1,x} & \ell_{21}N_{1,x} & \cdots & \ell_{11}N_{n,x} & \ell_{21}N_{n,x} \\ \ell_{12}N_{1,y} & \ell_{22}N_{1,y} & \cdots & \ell_{12}N_{n,y} & \ell_{22}N_{n,y} \\ (\ell_{11}N_{1,y} + \ell_{12}N_{1,x}) & (\ell_{21}N_{1,y} + \ell_{22}N_{1,x}) & \cdots & (\ell_{11}N_{n,y} + \ell_{12}N_{n,x}) & (\ell_{21}N_{n,y} + \ell_{22}N_{n,x}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{NL} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & \cdots & N_{n,x} & 0 \\ N_{1,y} & 0 & \cdots & N_{n,y} & 0 \\ 0 & N_{1,x} & \cdots & 0 & N_{n,x} \\ 0 & N_{1,y} & \cdots & 0 & N_{n,y} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{11} & S_{12} \\ 0 & 0 & S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{S}} = \begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} \\ \ell_{21} & \ell_{22} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} N_{1,x} & \cdots & N_{n,x} \\ N_{1,y} & \cdots & N_{n,y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_x^1 \\ d_y^1 \\ \vdots \\ d_x^n \\ d_y^n \end{Bmatrix}$$

Formulação Lagrangeana Atualizada

$$\mathbf{B}_L = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & \cdots & N_{n,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & \cdots & 0 & N_{n,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & \cdots & N_{n,y} & N_{n,x} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{NL} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & \cdots & N_{n,x} & 0 \\ N_{1,y} & 0 & \cdots & N_{n,y} & 0 \\ 0 & N_{1,x} & \cdots & 0 & N_{n,x} \\ 0 & N_{1,y} & \cdots & 0 & N_{n,y} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & 0 & 0 \\ \tau_{21} & \tau_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{11} & \tau_{12} \\ 0 & 0 & \tau_{21} & \tau_{22} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \left\{ \begin{array}{l} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{12} \end{array} \right\}$$

D.5 Estado Plano de Deformações

Graus de liberdade: d_x d_y Deformações: ε_{xx} ε_{yy} γ_{xy} Tensões: σ_{xx} σ_{yy} τ_{xy}

Formulação Lagrangeana Total

$$\mathbf{B}_L = \mathbf{B}_{L0} + \mathbf{B}_{L1}$$

$$\mathbf{B}_{L0} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & \dots & N_{n,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & \dots & 0 & N_{n,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & \dots & N_{n,y} & N_{n,x} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{L1} = \begin{bmatrix} \ell_{11}N_{1,x} & \ell_{21}N_{1,x} & \dots & \ell_{11}N_{n,x} & \ell_{21}N_{n,x} \\ \ell_{12}N_{1,y} & \ell_{22}N_{1,y} & \dots & \ell_{12}N_{n,y} & \ell_{22}N_{n,y} \\ (\ell_{11}N_{1,y} + \ell_{12}N_{1,x}) & (\ell_{21}N_{1,y} + \ell_{22}N_{1,x}) & \dots & (\ell_{11}N_{n,y} + \ell_{12}N_{n,x}) & (\ell_{21}N_{n,y} + \ell_{22}N_{n,x}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{NL} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & \dots & N_{n,x} & 0 \\ N_{1,y} & 0 & \dots & N_{n,y} & 0 \\ 0 & N_{1,x} & \dots & 0 & N_{n,x} \\ 0 & N_{1,y} & \dots & 0 & N_{n,y} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{11} & S_{12} \\ 0 & 0 & S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} \\ \ell_{21} & \ell_{22} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} N_{1,x} & \dots & N_{n,x} \\ N_{1,y} & \dots & N_{n,y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x^1 & d_y^1 \\ \vdots & \vdots \\ d_x^n & d_y^n \end{bmatrix}$$

Formulação Lagrangeana Atualizada

$$\mathbf{B}_L = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & \cdots & N_{n,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & \cdots & 0 & N_{n,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & \cdots & N_{n,y} & N_{n,x} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{NL} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & \cdots & N_{n,x} & 0 \\ N_{1,y} & 0 & \cdots & N_{n,y} & 0 \\ 0 & N_{1,x} & \cdots & 0 & N_{n,x} \\ 0 & N_{1,y} & \cdots & 0 & N_{n,y} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & 0 & 0 \\ \tau_{21} & \tau_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{11} & \tau_{12} \\ 0 & 0 & \tau_{21} & \tau_{22} \end{bmatrix} \quad \hat{\boldsymbol{\tau}} = \left\{ \begin{array}{l} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{12} \end{array} \right\}$$

D.6 Axissimétrico

Graus de liberdade: d_x d_y Deformações: ε_{rr} ε_{yy} γ_{ry} $\varepsilon_{\theta\theta}$ Tensões: σ_{rr} σ_{yy} τ_{ry} $\sigma_{\theta\theta}$

Formulação Lagrangeana Total

$$\mathbf{B}_L = \mathbf{B}_{L0} + \mathbf{B}_{L1}$$

$$\mathbf{B}_{L0} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & \cdots & N_{n,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & \cdots & 0 & N_{n,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & \cdots & N_{n,y} & N_{n,x} \\ \frac{N_1}{r} & 0 & \cdots & \frac{N_n}{rs} & 0 \end{bmatrix} \quad \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} \ell_{11} & \ell_{12} & \cdots & N_{n,x} & N_{n,x} \\ \ell_{21} & \ell_{22} & \cdots & N_{n,y} & N_{n,y} \end{array} \right]^T = \left\{ \begin{array}{c} d_x^1 \\ \vdots \\ d_x^n \\ d_y^1 \\ \vdots \\ d_y^n \end{array} \right\}$$

$$\mathbf{B}_{L1} = \begin{bmatrix} \ell_{11}N_{1,x} & \ell_{21}N_{1,x} & \cdots & \ell_{11}N_{n,x} & \ell_{21}N_{n,x} \\ \ell_{12}N_{1,y} & \ell_{22}N_{1,y} & \cdots & \ell_{12}N_{n,y} & \ell_{22}N_{n,y} \\ (\ell_{11}N_{1,y} + \ell_{12}N_{1,x}) & (\ell_{21}N_{1,y} + \ell_{22}N_{1,x}) & \cdots & (\ell_{11}N_{n,y} + \ell_{12}N_{n,x}) & (\ell_{21}N_{n,y} + \ell_{22}N_{n,x}) \\ \ell_{33}\frac{N_1}{r} & 0 & \cdots & \ell_{33}\frac{N_n}{r} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{NL} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & \cdots & N_{n,x} & 0 \\ N_{1,y} & 0 & \cdots & N_{n,y} & 0 \\ 0 & N_{1,x} & \cdots & 0 & N_{n,x} \\ 0 & N_{1,y} & \cdots & 0 & N_{n,y} \\ \frac{N_1}{r} & 0 & \cdots & \frac{N_n}{r} & 0 \end{bmatrix} \quad r = \sum_{k=1}^n N_k x^k$$

$$\ell_{33} = \sum_{k=1}^n N_k \frac{d_x^k}{r}$$

$$\mathbf{E} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{11} & S_{12} & 0 \\ 0 & 0 & S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{33} \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{S}} = \begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \\ S_{33} \end{Bmatrix}$$

Formulação Lagrangeana Atualizada

$$\mathbf{B}_L = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & \dots & N_{n,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & \dots & 0 & N_{n,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & \dots & N_{n,y} & N_{n,x} \\ \frac{N_1}{r} & 0 & \dots & \frac{N_n}{r} & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{NL} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & \dots & N_{n,x} & 0 \\ N_{1,y} & 0 & \dots & N_{n,y} & 0 \\ 0 & N_{1,x} & \dots & 0 & N_{n,x} \\ \frac{N_1}{r} & N_{1,y} & \dots & 0 & N_{n,y} \\ 0 & 0 & \dots & \frac{N_n}{r} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \tau_{21} & \tau_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{11} & \tau_{12} & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{21} & \tau_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_{33} \end{bmatrix} \quad \hat{\boldsymbol{\tau}} = \begin{Bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{12} \\ \tau_{33} \end{Bmatrix}$$

D.7 Sólido

Graus de liberdade: d_x d_y d_z Deformações: ε_{xx} ε_{yy} ε_{zz} γ_{xy} γ_{xz} γ_{yz} Tensões: σ_{xx} σ_{yy} σ_{zz} τ_{xy} τ_{xz} τ_{yz}

Formulação Lagrangeana Total

$$\mathbf{B}_L = \mathbf{B}_{L0} + \mathbf{B}_{L1}$$

$$\mathbf{B}_{L0} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & 0 & \dots & N_{n,x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & \dots & 0 & N_{n,y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,z} & \dots & 0 & 0 & N_{n,z} & 0 \\ N_{1,y} & N_{1,x} & 0 & \dots & N_{n,y} & N_{n,x} & 0 & 0 \\ N_{1,z} & 0 & N_{1,x} & \dots & N_{n,z} & 0 & N_{n,x} & 0 \\ 0 & N_{1,z} & N_{1,y} & \dots & 0 & N_{n,z} & N_{n,y} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} & \ell_{13} \\ \ell_{21} & \ell_{22} & \ell_{23} \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} N_{1,x} & \dots & N_{n,x} \\ N_{1,y} & \dots & N_{n,y} \\ N_{1,z} & \dots & N_{n,z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x^1 & d_y^1 & d_z^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ d_x^n & d_y^n & d_z^n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{L1} = \begin{bmatrix} \ell_{11}N_{1,x} & \ell_{21}N_{1,x} & \ell_{31}N_{1,x} & \dots & \ell_{11}N_{n,x} & \ell_{21}N_{n,x} & \ell_{31}N_{n,x} \\ \ell_{12}N_{1,y} & \ell_{22}N_{1,y} & \ell_{32}N_{1,y} & \dots & \ell_{12}N_{n,y} & \ell_{22}N_{n,y} & \ell_{32}N_{n,y} \\ \ell_{13}N_{1,z} & \ell_{23}N_{1,z} & \ell_{33}N_{1,z} & \dots & \ell_{13}N_{n,z} & \ell_{23}N_{n,z} & \ell_{33}N_{n,z} \\ (\ell_{11}N_{1,y} + \ell_{12}N_{1,x}) & (\ell_{21}N_{1,y} + \ell_{22}N_{1,x}) & (\ell_{31}N_{1,y} + \ell_{32}N_{1,x}) & \dots & (\ell_{11}N_{n,y} + \ell_{12}N_{n,x}) & (\ell_{21}N_{n,y} + \ell_{22}N_{n,x}) & (\ell_{31}N_{n,y} + \ell_{32}N_{n,x}) \\ (\ell_{11}N_{1,z} + \ell_{13}N_{1,x}) & (\ell_{21}N_{1,z} + \ell_{23}N_{1,x}) & (\ell_{31}N_{1,z} + \ell_{33}N_{1,x}) & \dots & (\ell_{11}N_{n,z} + \ell_{13}N_{n,x}) & (\ell_{21}N_{n,z} + \ell_{23}N_{n,x}) & (\ell_{31}N_{n,z} + \ell_{33}N_{n,x}) \\ (\ell_{12}N_{1,z} + \ell_{13}N_{1,y}) & (\ell_{22}N_{1,z} + \ell_{23}N_{1,y}) & (\ell_{32}N_{1,z} + \ell_{33}N_{1,y}) & \dots & (\ell_{12}N_{n,z} + \ell_{13}N_{n,y}) & (\ell_{22}N_{n,z} + \ell_{23}N_{n,y}) & (\ell_{32}N_{n,z} + \ell_{33}N_{n,y}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{NL} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_{NL} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{B}}_{NL} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{B}}_{NL} \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{B}}_{NL} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & 0 & \dots & N_{n,x} \\ N_{1,y} & 0 & 0 & \dots & N_{n,y} \\ N_{1,z} & 0 & 0 & \dots & N_{n,z} \end{bmatrix} \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \tilde{S} & \tilde{\mathbf{0}} & \tilde{\mathbf{0}} \\ \tilde{\mathbf{0}} & \tilde{S} & \tilde{\mathbf{0}} \\ \tilde{\mathbf{0}} & \tilde{\mathbf{0}} & \tilde{S} \end{bmatrix} \quad \tilde{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{S}} = \{ S_{11} \quad S_{22} \quad S_{33} \quad S_{12} \quad S_{13} \quad S_{23} \}^T$$

Formulação Lagrangeana Atualizada

$$\mathbf{B}_L = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & 0 & \dots & N_{n,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & \dots & 0 & N_{n,y} & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,z} & \dots & 0 & 0 & N_{n,z} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & 0 & \dots & N_{n,y} & N_{n,x} & 0 \\ N_{1,z} & 0 & N_{1,x} & \dots & N_{n,z} & 0 & N_{n,x} \\ 0 & N_{1,z} & N_{1,y} & \dots & 0 & N_{n,z} & N_{n,y} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{NL} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_{NL} & \tilde{\mathbf{0}} & \tilde{\mathbf{0}} \\ \tilde{\mathbf{0}} & \tilde{\mathbf{B}}_{NL} & \tilde{\mathbf{0}} \\ \tilde{\mathbf{0}} & \tilde{\mathbf{0}} & \tilde{\mathbf{B}}_{NL} \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{B}}_{NL} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & 0 \\ N_{1,y} & 0 & 0 \\ N_{1,z} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\tau}} & \tilde{\mathbf{0}} & \tilde{\mathbf{0}} \\ \tilde{\mathbf{0}} & \tilde{\boldsymbol{\tau}} & \tilde{\mathbf{0}} \\ \tilde{\mathbf{0}} & \tilde{\mathbf{0}} & \tilde{\boldsymbol{\tau}} \end{bmatrix} \quad \tilde{\boldsymbol{\tau}} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \hat{\boldsymbol{\tau}} = \{ \tau_{11} \quad \tau_{22} \quad \tau_{33} \quad \tau_{12} \quad \tau_{13} \quad \tau_{23} \}^T$$

Apêndice E

Integração Numérica

O processo de se calcular o valor da integral definida

$$I_x = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \quad (\text{E.1})$$

a partir de um conjunto de valores numéricos pré-definidos do integrando é chamado de integração numérica. O problema é resolvido representando o integrando por uma função de interpolação e integrando-a entre limites específicos. Quando aplicado à integração de uma função de uma única variável, o método é denominado *quadratura mecânica*.

Se as funções de interpolação da integração numérica forem polinômios de ordem suficientemente alta em relação àsquelas assumidas para os deslocamentos (ou outra grandeza qualquer) de um elemento finito, as integrações serão exatas. Entretanto, o processo de integração numérica introduz uma fonte adicional de erro na análise. A quadratura mais precisa e de uso mais comum é a *Quadratura de Gauss*, que utiliza pontos simétricos com espaçamento variável, em domínios unidimensionais.

As soluções obtidas pela Quadratura de Gauss são exatas para polinômios de grau $2n - 1$, em que n é o número de pontos de integração utilizados. Portanto, apenas um ponto de integração é necessário para a integração exata de uma função linear. Para uma função cúbica, são necessário dois pontos e assim por diante.

E.1 Domínios Unidimensionais

A Quadratura de Gauss requer a mudança da variável x para a coordenada adimensional ξ cuja origem é o centro do limite de integração. A expressão para x em termos de ξ é:

$$x = \frac{1}{2} (x_1 + x_2) + \frac{1}{2} (x_2 - x_1) \xi \quad (\text{E.2})$$

Essa mudança de variável pode ser representada como

$$f(x) = \phi(\xi) \quad (\text{E.3})$$

Sabe-se também que:

$$dx = \frac{1}{2} (x_2 - x_1) d\xi \quad (\text{E.4})$$

Substituindo (E.3) e (E.4) em (E.1) e mudando os limites de integração, tem-se:

$$I_x = \frac{1}{2} (x_2 - x_1) \int_{-1}^1 \phi(\xi) d\xi \quad (\text{E.5})$$

A fórmula de Gauss para determinar a integral expressa em (E.5) consiste no somatório de valores ponderados de $\phi(\xi)$ em n pontos específicos:

$$I_x = \int_{-1}^1 \phi(\xi) d\xi = \sum_{j=1}^n \phi(\xi_j) w_j \quad (\text{E.6})$$

Nesta expressão, ξ_j é a posição do ponto j em relação ao centro, w_j é o peso associado ao ponto j e n é o número de pontos de integração utilizados.

Os valores de ξ_j e w_j podem ser facilmente calculados ou encontrados na literatura. Eles são apresentados na tabela E.1.

E.2 Domínios Quadrilaterais

Para domínios quadrilaterais a equação (E.1) é escrita como:

$$I = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) dx dy \quad (\text{E.7})$$

As coordenadas x e y devem ser transformadas em coordenadas adimensionais ξ e η e os limites de integração mudados para de -1 a 1 em ambas as integrais.

Além disso, a área infinitesimal $dA = dx dy$ deve ser substituída por uma expressão apropriada em termos de $d\xi$ e $d\eta$. Weaver Jr. e Johnston (1987) demonstra que:

$$dA = |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (\text{E.8})$$

A matrix \mathbf{J} é denominada *matriz Jacobiana* e $|\mathbf{J}|$ é seu determinante. Para os domínios quadrilaterais tem-se que:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \quad (\text{E.9})$$

A nova forma da equação (E.7) é:

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (\text{E.10})$$

Aplicações sucessivas da Quadratura de Gauss transformam a equação (E.8) em:

$$I = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n f(\xi, \eta) w_j w_k |\mathbf{J}(\xi_j, \eta_k)| \quad (\text{E.11})$$

em que w_j e w_k são os pesos da função avaliada no ponto (ξ_j, η_k)

E.3 Domínios Hexaédricos

A integral a ser avaliada em domínios hexaédricos é da forma:

$$I = \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, z) dx dy dz \quad (\text{E.12})$$

Transformando as coordenadas cartesianas x , y e z em coordenadas adimensionais ξ , η e $zeta$, obtém-se a expressão para o volume infinitesimal dV :

$$dV = |\mathbf{J}| d\xi d\eta d\zeta \quad (\text{E.13})$$

A matriz Jacobiana para domínios hexaédricos é dada a seguir:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} & z_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} & z_{,\eta} \\ x_{,\zeta} & y_{,\zeta} & z_{,\zeta} \end{bmatrix} \quad (\text{E.14})$$

A nova expressão para a integral e o somatório correspondente são dados a seguir:

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \quad (\text{E.15})$$

$$I = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n f(\xi, \eta, \zeta) w_j w_k w_l |\mathbf{J}(\xi_j, \eta_k, \zeta_l)| \quad (\text{E.16})$$

E.4 Domínios Triangulares

A fórmula de integração numérica em coordenadas adimensionais para triângulos é:

$$I = A \sum_{j=1}^n f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)_j w_j \quad (\text{E.17})$$

em que w_j é o peso para o j -ésimo ponto de integração e A é a área do triângulo.

As coordenadas e os pesos dos pontos de integração para domínios triangulares são apresentados na tabela E.2.

E.5 Domínios Tetraédricos

A fórmula de integração numérica em coordenadas adimensionais para tetraedros é:

$$I = V \sum_{j=1}^n f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)_j w_j \quad (\text{E.18})$$

em que w_j é o peso para o j -ésimo ponto de integração e V é o volume do tetraedro.

As coordenadas e os pesos dos pontos de integração para domínios triangulares são apresentados na tabela E.3.

Tabela E.1: Quadratura de Gauss (Weaver Jr. e Johnston, 1984).

| n | $\pm \xi_j$ | w_j |
|-----|--------------|--------------|
| 1 | 0,0 | 2,0 |
| 2 | 0,5773502692 | 1,0 |
| 3 | 0,7745966692 | 0,5555555556 |
| | 0,0 | 0,8888888889 |
| 4 | 0,8611363116 | 0,3478548451 |
| | 0,3399819436 | 0,6521451549 |
| 5 | 0,9061798459 | 0,2369268851 |
| | 0,5384693101 | 0,4786286705 |
| | 0,0 | 0,5688888889 |
| 6 | 0,9324695142 | 0,1713244924 |
| | 0,6612093865 | 0,3607615730 |
| | 0,2386191861 | 0,4679139346 |
| 7 | 0,9491079123 | 0,1294849662 |
| | 0,7415311856 | 0,2797053915 |
| | 0,4058451514 | 0,3818300505 |
| | 0,0 | 0,4179591837 |
| 8 | 0,9602898565 | 0,1012285363 |
| | 0,7966664774 | 0,2223810345 |
| | 0,5255324099 | 0,3137066459 |
| | 0,1834346425 | 0,3626837834 |

Tabela E.2: Integração numérica em domínios triangulares (Weaver Jr. e Johnston, 1984).

| n | Ordem | ξ_1 | ξ_2 | ξ_3 | w_j |
|-----|------------|------------|------------|------------|------------|
| 1 | Linear | 1/3 | 1/3 | 1/3 | 1 |
| 3 | Quadrática | 1/2 | 1/2 | 0 | 1/3 |
| | | 0 | 1/2 | 1/2 | 1/3 |
| | | 1/2 | 0 | 1/2 | 1/3 |
| 4 | Cúbica | 1/3 | 1/3 | 1/3 | γ_1 |
| | | 0,6 | 0,2 | 0,2 | γ_2 |
| | | 0,2 | 0,6 | 0,2 | γ_2 |
| | | 0,2 | 0,2 | 0,6 | γ_2 |
| 6 | Quártica | α_1 | β_1 | β_1 | γ_3 |
| | | β_1 | α_1 | β_1 | γ_3 |
| | | β_1 | β_1 | α_1 | γ_3 |
| | | α_2 | β_2 | β_2 | γ_4 |
| | | β_2 | α_2 | β_2 | γ_4 |
| | | β_2 | β_2 | α_2 | γ_4 |

$$\alpha_1 = 0,8168475730$$

$$\gamma_1 = -27/48$$

$$\beta_1 = 0,0915762135$$

$$\gamma_2 = 25/48$$

$$\alpha_2 = 0,1081030182$$

$$\gamma_3 = 0,1099517437$$

$$\beta_2 = 0,4459484909$$

$$\gamma_4 = 0,2233815897$$

Tabela E.3: Integração numérica em domínios tetraédricos (Weaver Jr. e Johnston, 1984).

| n | Ordem | ξ_1 | ξ_2 | ξ_3 | ξ_4 | w_j |
|-----|------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1 | Linear | 1/4 | 1/4 | 1/4 | 1/4 | 1 |
| 4 | Quadrática | α | β | β | β | 1/4 |
| | | β | α | β | β | 1/4 |
| | | β | β | α | β | 1/4 |
| | | β | β | β | α | 1/4 |
| 5 | Cúbica | 1/4 | 1/4 | 1/4 | 1/4 | γ |
| | | 1/3 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | δ |
| | | 1/6 | 1/3 | 1/6 | 1/6 | δ |
| | | 1/6 | 1/6 | 1/3 | 1/6 | δ |
| | | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/3 | δ |

$$\alpha = 0,58541020$$

$$\beta = 0,13819660$$

$$\gamma = -4/5$$

$$\delta = 9/20$$

Apêndice F

Métodos de Solução de Problemas de Autovalor

A determinação das frequências naturais e modos de vibração de uma estrutura requer a solução do problema de autovalor apresentado na equação (2.41), repetida abaixo:

$$(\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M}) \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0} \quad (\text{F.1})$$

Os autovalores deste problema ($\lambda_i = \omega_i^2$) são as raízes da equação característica:

$$p(\lambda) = |\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}| = 0 \quad (\text{F.2})$$

em que $p(\lambda)$ é um polinômio de ordem n , o número de graus de liberdade do sistema. Encontrar as raízes deste polinômio não é prático, especialmente para sistemas com vários graus de liberdade, pois exige um grande esforço computacional e as raízes de $p(\lambda)$ são muito sensíveis a erros de arredondamento nos cálculos.

Muitas pesquisas foram feitas no desenvolvimento de métodos de solução de problemas de autovalor, especialmente após a popularização dos microcomputadores.

Craig Jr. (1987) os divide em três grandes grupos:

- *Métodos de iteração vetorial*: Consistem em sistematicamente assumir vetores que satisfaçam o problema de autovalor. Ex.: *iteração direta*, *iteração inversa* e *iteração inversa com deslocamento espectral*.
- *Métodos de transformação matricial*: Consistem de métodos que utilizam as

propriedades de ortogonalidade dos autovetores. Ex.: *método de Jacobi*, *método de Laczos*, *método de Givens*, *método de Householder* e *método QR*.

- *Métodos de determinação das raízes da equação característica*: Baseiam-se na procura das raízes da equação característica. Ex.: *métodos de busca do determinante* e *métodos de seqüência de Stürm*.

Existem ainda métodos que combinam diversos outros métodos, como o método da *iteração no subespaço* e a *iteração inversa de Householder-QR*.

Todos os métodos são de natureza iterativa, pois a solução do problema de autovalor consistem em se calcular as raízes da equação característica (F.2). Não existem fórmulas explícitas para estas raízes para $n > 4$, por isso a iteração é necessária. Para encontrar o par (λ_i, φ_i) , apenas um deles é calculado via iteração. Por exemplo, se λ_i é obtido por iterações, então φ_i pode ser calculado substituindo λ_i na equação (F.1). Se φ_i é determinado por iterações, λ_i pode ser obtido pelo *quociente de Rayleigh*, a ser apresentado na seção F.1.

O método mais adequado é dependente do problema em questão. Os fatores mais relevantes nesta escolha são o número de grau de liberdade do modelo, a largura de banda das matrizes e o número de autovalores e autovetores a serem calculados. Bathe (1982) analisou os diversos métodos e chegou às seguintes conclusões:

1. A *iteração inversa de Householder-QR* é a mais eficiente quando as matrizes são esparsas e se deseja calcular todos os autovalores e autovetores.
2. Os *métodos de busca do determinante* são muito eficientes no cálculo dos menores autovalores e correspondentes autovetores de sistemas cujas matrizes têm pequena largura de banda.
3. A *iteração no subespaço* é muito eficiente no cálculo dos menores autovalores e correspondentes autovetores de sistemas cujas matrizes têm grande largura de banda.

F.1 Quociente de Rayleigh

Pré-multiplicando a equação (F.1) por φ_i^T , a seguinte equação escalar é obtida:

$$\varphi_i^T \mathbf{K} \varphi_i = \omega_i^2 \varphi_i^T \mathbf{M} \varphi_i \quad (\text{F.3})$$

Como \mathbf{M} é uma matriz positiva definida, é garantido que $\varphi_i^T \mathbf{M} \varphi_i \neq 0$. Portanto, é possível resolver para ω_i^2 :

$$\omega_i^2 = \frac{\varphi_i^T \mathbf{K} \varphi_i}{\varphi_i^T \mathbf{M} \varphi_i} \quad (\text{F.4})$$

Esta razão é denominada *quociente de Rayleigh* e apresenta as seguintes propriedades:

1. Se φ_i é um autovetor exato, ω_i^2 é o seu correspondente autovalor exato.
2. Se φ_i é um autovetor aproximado com um erro infinitesimal de primeira ordem, o quociente de Rayleigh é uma aproximação de ω_i^2 com um erro infinitesimal de segunda ordem. Nas proximidades de um autovetor exato, o quociente de Rayleigh é estacionário.
3. O quociente de Rayleigh é limitado entre ω_1^2 e ω_N^2 , o menor e o maior autovalores.

Uma aplicação comum do quociente de Rayleigh para engenharia é a simples avaliação da equação (F.1) para um vetor tentativa φ que pode ser determinado a partir de propriedades físicas do modelo (Chopra, 1995). Se os elementos de um autovetor aproximado cujo maior elemento é unitário são corretos até a j -ésima casa decimal, o quociente de Rayleigh terá precisão de $2j$ casas decimais. Diversos procedimentos numéricos de solução de problemas de autovalor fazem uso da propriedade estacionária do quociente de Rayleigh.

F.2 Método da Iteração Inversa

Também conhecido como *método de Vianello e Stodola* este é o método mais usado para cálculos manuais devido à sua simplicidade. Escrevendo a equação (F.1) de uma maneira ligeiramente modificada, tem-se:

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\varphi} = \lambda \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi} \quad (\text{F.5})$$

Assume-se que a frequência fundamental é distinta e que os autovalores λ_i são ordenados da seguinte forma:

$$\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_n \quad (\text{F.6})$$

Adotando um autovetor tentativa $\mathbf{u}_{(i)}$ e levando-o ao lado direito da equação (F.5), obtém-se uma melhor aproximação $\mathbf{v}_{(i)}$:

$$\mathbf{K} \mathbf{v}_{(i+1)} = \mathbf{M} \mathbf{u}_{(i)} \quad (\text{F.7})$$

ou

$$\mathbf{v}_{(i+1)} = \mathbf{D} \mathbf{u}_{(i)} \quad (\text{F.8})$$

em que \mathbf{D} é a *matriz dinâmica* e é dada por:

$$\mathbf{D} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \quad (\text{F.9})$$

O novo vetor tentativa \mathbf{u}_{i+1} é calculado por:

$$\mathbf{u}_{(i+1)} = \lambda_{(i+1)} \mathbf{v}_{(i+1)} \quad (\text{F.10})$$

em que $\lambda_{(i+1)}$ é um fator de escalar apropriado. Uma das maneiras de se calcular $\lambda_{(i+1)}$ é através do quociente de Rayleigh. Para verificar a convergência da iteração, compara-se dois valores sucessivos de λ :

$$\frac{|\lambda_{(i+1)} - \lambda_{(i)}|}{\lambda_{(i+1)}} \leq \text{tolerância} \quad (\text{F.11})$$

Se a equação (F.11) for atendida, os valores de $\lambda_{(i+1)}$ e $\mathbf{v}_{(i+1)}$ são o autovalor e o respectivo autovetor procurados. A tolerância é escolhida de acordo com a precisão

desejada. Ela deve ser de 10^{-2j} ou menor quando deseja-se uma precisão de $2j$ casas decimais.

A normalização do vetor tentativa a cada iteração é recomendada de maneira a evitar problemas numéricos durante o processo iterativo, pois faz com que os vetores tentativas mantenham sempre a mesma ordem de grandeza.

Craig Jr. (1987) demonstra que o método da iteração inversa sempre converge para o menor autovalor λ_1 e o modo fundamental φ_1 . Existem diversas técnicas para se obter os outros modos a partir da iteração inversa. Uma delas é a *deflação da matriz dinâmica*, que consiste em ortogonalizar a matriz dinâmica com relação aos autovetores já obtidos da seguinte forma:

$$\mathbf{D}_{(i+1)} = \mathbf{D}_{(i)} - \frac{\lambda_i}{\varphi_i^T \mathbf{M} \varphi_i} \varphi_i \varphi_i^T \mathbf{M} \quad (\text{F.12})$$

sendo $\mathbf{D}_{(i)}$ a matriz dinâmica utilizada para o cálculo do i -ésimo autovalor λ_i e seu respectivo autovetor φ_i .

Uma outra técnica bastante utilizada é a *translação espectral*. A idéia básica desta técnica é adotar um novo espectro de autovalores $\hat{\lambda}$ de forma a trazer uma freqüência diferente da fundamental para próximo da origem (Figura F.1).

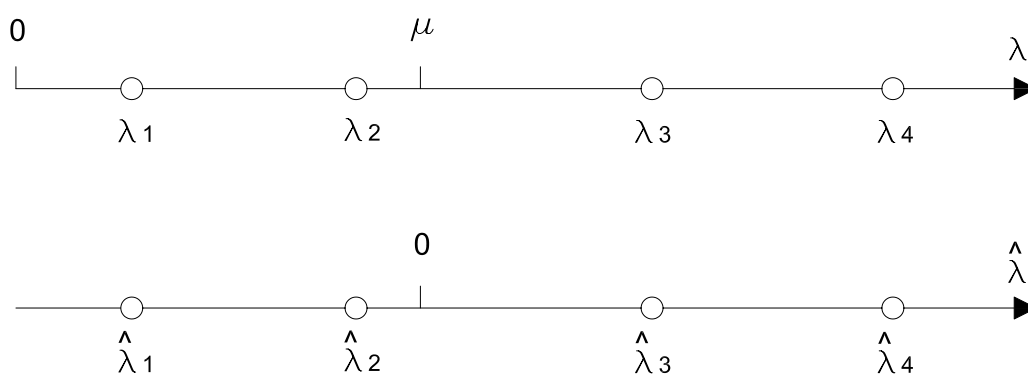


Figura F.1: Espectro de autovalores.

Para tal, escolhe-se um escalar μ na vizinhança do autovalor de interesse. Por exemplo, na figura F.1 μ é mais próximo de λ_2 do que de qualquer outro autovalor. Então, modifica-se a equação (F.1), para se obter o problema de autovalor

transladado:

$$[(\mathbf{K} - \mu \mathbf{M}) - (\lambda_i - \mu) \mathbf{M}] \boldsymbol{\varphi} = 0 \quad (\text{F.13})$$

Fazendo

$$\widehat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} - \mu \mathbf{M} \quad (\text{F.14})$$

$$\widehat{\lambda}_i = \lambda_i - \mu \quad (\text{F.15})$$

tem-se:

$$(\widehat{\mathbf{K}} - \widehat{\lambda}_i \mathbf{M}) \boldsymbol{\varphi} = 0 \quad (\text{F.16})$$

É importante ressaltar que, se $\lambda_i < \mu$, $\widehat{\lambda}_i$ será negativo. Na prática, o que se faz é adotar valores cada vez maiores para μ até que se consiga convergir para o autovalor desejado. A técnica da translação espectral também pode ser utilizada para o caso de sistemas com modos de corpo rígido, de maneira a eliminar a singularidade da matriz de rigidez.

F.3 Método da Iteração no Subespaço

O problema de autovalor generalizado da equação (2.41) pode ser escrito da seguinte forma condensada:

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi} \quad (\text{F.17})$$

ou utilizando truncamento modal:

$$\mathbf{K} \widehat{\boldsymbol{\Lambda}} \widehat{\boldsymbol{\Phi}} = \mathbf{M} \widehat{\boldsymbol{\Phi}} \quad (\text{F.18})$$

Analisando (F.18) segundo o método iteração inversa, é possível notar que o método consiste em se interagir em um espaço de dimensão N de bases ortogonais \mathbf{K} e \mathbf{M} até que se obtenha o conjunto de autovetores do problema. Portanto, estes N autovetores são uma base para espaço R^N .

Bathe (1971) observa que é mais fácil escolher um conjunto de vetores arbitrários próximos da base do espaço R^N do que um conjunto de vetores que estejam próximos

aos autovetores do problema de autovalor. O método da iteração no subespaço procura gerar a base para R^N e, a partir daí, gerar os autovetores $\widehat{\Phi}$.

O primeiro passo deste método é adotar um subconjunto tentativa $\widehat{\Phi}$ e obter uma aproximação melhorada $\overline{\overline{\Phi}}$ como segue:

$$\mathbf{K} \overline{\overline{\Phi}}_{(i+1)} = \mathbf{M} \overline{\overline{\Phi}}_{(i)} \quad (\text{F.19})$$

Este passo é análogo à primeira iteração do método da iteração inversa. Em seguida, obtém-se as projeções de \mathbf{K} e \mathbf{M} no subespaço R^N . Como R^N vai sendo atualizado ao longo do processo, é conveniente se referir ao mesmo como sendo o subespaço da iteração corrente $R_{(i+1)}^N$:

$$\overline{\overline{\mathbf{K}}}_{(i+1)} = \overline{\overline{\widehat{\Phi}^T}}_{(i+1)} \mathbf{K} \overline{\overline{\Phi}}_{(i+1)} \quad (\text{F.20})$$

$$\overline{\overline{\mathbf{M}}}_{(i+1)} = \overline{\overline{\widehat{\Phi}^T}}_{(i+1)} \mathbf{M} \overline{\overline{\Phi}}_{(i+1)} \quad (\text{F.21})$$

Então, obtém-se a solução do problema de autovalor no subespaço $R_{(i+1)}^N$ através de algum método conveniente, como o método da iteração inversa:

$$\overline{\overline{\mathbf{K}}}_{(i+1)} \mathbf{Q}_{(i+1)} \widehat{\Lambda}_{(i+1)} = \overline{\overline{\mathbf{M}}}_{(i+1)} \mathbf{Q}_{(i+1)} \quad (\text{F.22})$$

em que $\mathbf{Q}_{(i+1)}$ é uma variável auxiliar que representa os autovetores do problema de subespaço.

O valor de $\overline{\overline{\Phi}}$ é atualizado por:

$$\overline{\overline{\Phi}}_{(i+1)} = \overline{\overline{\Phi}}_{(i+1)} \mathbf{Q}_{(i+1)} \quad (\text{F.23})$$

É possível provar que $\overline{\overline{\Phi}}_{(i+1)}$ converge para os N primeiros autovetores, desde que $\overline{\overline{\Phi}}_{(1)}$ não possua nenhum vetor ortogonal aos autovetores procurados.

É evidente que uma iteração no método do subespaço é computacionalmente mais custosa que uma iteração no método da iteração inversa. O subproblema (F.22) é outro problema de autovalor dentro do problema de autovalor original. Porém, (F.22) é de ordem N . Como o número de passos para que $\overline{\overline{\Phi}}$ se aproxime dos valores procurados é significativamente reduzido, no geral, a iteração no subespaço é mais eficiente que a iteração inversa para problemas modais de médio e grande porte.

Referências Bibliográficas

- Almeida, M. L., 2005. Elementos finitos paramétricos implementados em Java. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Aranha Jr., G. Y. R., 2003. A formulação de um elemento finito de barra para análise dinâmica não-linear geométrica, com aplicação a cabos de linhas aéreas de transmissão de energia elétrica. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Pará, Belém, PA, Brasil.
- Bathe, K. J., (1971), Solution methods of large generalized eigenvalue problems in structural engineering, Relatório Técnico UC SESM 71-20, Departamento de Engenharia Civil, Universidade da Califórnia, Berkeley, EUA. Citado por Bathe (1982).
- Bathe, K. J., 1982. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall, Nova Jersey, EUA.
- Batoz, J. L. e Dhat, G., 1979. ‘Incremental displacement algorithms for nonlinear problems’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 14, pp. 1262–1267. Citado por Fuina (2004).
- Biggs, J. M., 1964. *Introduction to Structural Dynamics*. McGraw Hill, Nova York, EUA.
- Chan, S. L. e Chui, P. P. T., 2000. *Non-linear static and cyclic analysis of steel frames with semi-rigid connections*. Elsevier, Oxford, Inglaterra. Citado por Galvão (2004).
- Chopra, A. K., 1995. *Dynamics of Structures - Theory and Applications to Earthquake Engineering*. Prentice-Hall, Nova Jersey, EUA.

- Cook, R. D., Malthus, D. S. e Plesha, M. E., 1989. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 3^a Edição. John Wiley & Sons Inc., Madison, EUA.
- Craig Jr., R. R., 1987. *Structural Dynamics, an Introduction to Computer Methods*. John Wiley & Sons Inc., Nova York, EUA.
- Crisfield, M. A., 1981. 'A fast incremental-interactive solution procedure that handles snap-through'. *Computers and Structures*, vol. 13, pp. 55–62. Citado por Fuina (2004).
- Crisfield, M. A., 1983. 'An arc length method including line searches and acelerations'. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 19, pp. 1269–1289. Citado por Fuina (2004).
- Fonseca, F. T. e Pitangueira, R. L. S., (2007), Insane: uma plataforma para computação científica, *in* 'X Encontro de Modelagem Computacional', Nova Friburgo, RJ, Brasil.
- Fonseca, F. T., Pitangueira, R. L. S. e Vasconcelos Filho, A., (2004), Implementação de modelos estruturais de barras como casos particulares do método de elementos finitos, *in* 'Simpósio Mineiro de Mecânica Computacional - SIMMEC 2004', Itajubá, MG, Brasil.
- Fonseca, M. T., 2006. Aplicação orientada a objetos para análise fisicamente não-linear com modelos reticulados de seções transversais compostas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Fuina, J. S., 2004. Métodos de controle de deformações para análise não-linear de estruturas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Galvão, A. S., 2000. Formulações não-lineares de elementos finitos para análise de sistemas estruturais metálicos reticulados planos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Galvão, A. S., 2004. Instabilidade Estática e Dinâmica de Pórticos Planos com Ligações Semi-Rígidas. Tese de Doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

- Germanio, L., 2005. Implementação orientada a objetos da solução de problemas estruturais dinâmicos via método dos elementos finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Guedes, G. T. A., 2005. *UML 2, Guia de Consulta Rápida*. Novatec Editora, São Paulo.
- Hilber, H. M., Hughes, T. J. R. e Taylor, R. L., 1977. ‘Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics’. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 5(3), pp. 283–292. Citado por Weaver Jr. e Johnston (1987).
- Hughes, T. J. R., 2000. *The Finite Element Method*. Dover Publications, Nova York, EUA.
- Krenk, S., 1995. ‘An orthogonal residual procedure for nonlinear finite element equations’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 38, pp. 823–839. Citado por Fuina (2004).
- Krenk, S. e Hededal, O., 1993. ‘A dual orthogonality procedure for nonlinear finite element equations’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 123, pp. 95–107. Citado por Fuina (2004).
- Mondkar, D. P. e Powell, G. H., 1977. ‘Finite element analysis of non-linear static and dynamic response’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 11, pp. 499–520.
- Pitangueira, R. L. S. e Caldas, K., (2005), Projeto de software livre para modelos do método dos elementos finitos, in ‘XXVI Iberian Latin American Congress on Computational Methods - CILAMCE’, Guarapari, ES, Brasil.
- Ramm, E., (1981), Strategies for tracing the nonlinear response near limit points, in nonlinear finite element analysis in structural mechanics, in ‘Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics: Proceedings of the Europe-U.S. Workshop’, Berlim, Alemanha. Citado por Fuina (2004).
- Rao, A. R. M., 2002. ‘A parallel mixed time integration algorithm for nonlinear dynamic analysis’. *Advances in Engineering Software*, vol. 33, pp. 261–271.

- Rayleigh, J. W. S., 1945. *Theory of Sound - Volume 1*. Dover Publications, Nova York, EUA. Citado por Weaver Jr. e Johnston (1987).
- Ricks, E., 1972. 'The application of Newton method to the problem of elastic stability'. *Journal of Applied Mechanics*, pp. 1060–1065. Citado por Fuina (2004).
- Ricks, E., 1979. 'An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems'. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 15, pp. 529–551. Citado por Fuina (2004).
- Rogers, G. L., 1959. *An Introduction to the Dynamics of Framed Structures*. John Wiley & Sons Inc., Nova York, EUA.
- Saliba, S. S., 2007. Implementação computacional e análise crítica de elementos finitos de placas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Souza, R. M., 2000. Force-based Finite Element for Large Displacement Inelastic Analysis of Frames. Tese de Doutorado, University of California, Berkeley, EUA.
- Suk, J. W., Kim, J. H. e Kim, Y. H., 2003. 'A predictor algorithm for fast geometrically-nonlinear dynamic analysis'. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 192, pp. 2521–2538.
- Szilar, R., 1974. *Theory and Analysis of Plates - Classical and Numerical Methods*. Prentice-Hall, Nova Jersey, EUA.
- Washizu, K., 1982. *Variational Methods in Elasticity and Plasticity, 3ª Edição*. Pergamon Press, Oxford, Inglaterra. Citado por Yang e Kuo (1994).
- Weaver Jr., W. e Johnston, P. R., 1984. *Finite Elements for Structural Analysis*. Prentice-Hall, Nova Jersey, EUA.
- Weaver Jr., W. e Johnston, P. R., 1987. *Structural Dynamics by Finite Elements*. Prentice-Hall, Nova Jersey, EUA.
- Williams, F. W., 1964. 'An approach to the non-linear behaviour of the members of a rigid jointed plane framework with finite deflections'. *The Quarterly Journal of*

- Mechanics and Applied Mathematics*, vol. 17(4), pp. 451–69. Citado por Yang e Kuo (1994).
- Wilson, E. L., 2006. *Three-Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures: A Physical Approach with Emphasis on Earthquake Engineering*. Computers and Structures Inc., Berkeley, EUA.
- Wilson, E. L., Farhoomand, I. e Bathe, K. J., 1973. ‘Nonlinear dynamic analysis of complex structures’. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 1(3), pp. 241–252. Citado por Weaver Jr. e Johnston (1987).
- Wood, R. D. e Zienkiewicz, O. C., 1977. ‘Geometrically nonlinear finite element analysis of beams, frames, arches and axisymmetric shells’. *Computers and Structures*, vol. 7, pp. 725–735.
- Yang, T. Y. e Saigal, S., 1984. ‘A simple element for static and dynamic response of beams with material and geometric nonlinearities’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 20, pp. 851–867.
- Yang, Y.-B. e Kuo, S.-R., 1994. *Theory and Analysis of Nonlinear Framed Structures*. Prentice-Hall, Nova Jersey, EUA.
- Yang, Y. B. e McGuire, W., (1985), A work control method for geometrically nonlinear analysis, in ‘Proceedings of the International Conference on Numerical Methods in Engineering: Theory and Application’. Citado por Fuina (2004).
- Yang, Y.-B. e Shieh, M. S., 1990. ‘Solution method for nonlinear problems with multiple critical points’. *AIAA Journal*, vol. 28(12), pp. 2110–2116. Citado por Fuina (2004).
- Zienkiewicz, O. C. e Taylor, R. L., 2000. *The Finite Element Method, 5ª Edição, Volumes 1, 2 e 3*. Butterworth-Heinemann, Oxford, Inglaterra.