

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
Escola de Engenharia  
Curso de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas

**ANÁLISE DE DEGRADAÇÃO MATERIAL,  
BIFURCAÇÃO E TRANSIÇÃO ENTRE  
DESCONTINUIDADES FRACAS E FORTES  
ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS  
DE CONTORNO**

**Rodrigo Guerra Peixoto**

Tese apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de DOUTOR EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS.

Orientador: Prof. Gabriel de Oliveira Ribeiro

Co-Orientador: Prof. Roque L. da Silva Pitangueira

**Belo Horizonte**

**Abril de 2016**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

**"ANÁLISE DE DEGRADAÇÃO MATERIAL, BIFURCAÇÃO E TRANSIÇÃO  
ENTRE DESCONTINUIDADES FRACAS E FORTES ATRAVÉS DO MÉTODO  
DOS ELEMENTOS DE CONTORNO "**

Rodrigo Guerra Peixoto

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de "Doutor em Engenharia de Estruturas".

Comissão Examinadora:

---

Prof. Dr. Gabriel de Oliveira Ribeiro  
DEES - UFMG (Orientador)

---

Prof. Dr. Roque Luiz da Silva Pitangueira  
DEES - UFMG (Coorientador)

---

Prof. Dr. Fernando Amorim de Paula  
DEES - UFMG

---

Prof. Dr. Samuel Silva Penna  
DEES - UFMG

---

Prof. Dr. Osvaldo Luís Manzoli  
UNESP

---

Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto  
UFES

Belo Horizonte, 29 de abril de 2016

P379a

Peixoto, Rodrigo Guerra.

Análise de degradação material, bifurcação e transição entre descontinuidades fracas e fortes através do método dos elementos de contorno [manuscrito] / Rodrigo Guerra Peixoto. – 2016. xx, 172 f., enc.: il.

Orientador: Gabriel de Oliveira Ribeiro.

Coorientador: Roque Luiz da Silva Pitangueira.

Tese (doutorado) Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Anexos: f. 140-161.

Bibliografia: f. 162-172.

1. Engenharia de estruturas - Teses. 2. Métodos de elementos de contorno - Teses. 3. Mecânica da fratura - Teses. I. Ribeiro, Gabriel de Oliveira. II. Pitangueira, Roque Luiz da Silva. III. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. IV. Título.

CDU: 624(043)

# Índice

## Índice

Lista de Tabelas	iii
Lista de Figuras	vii
Lista de Abreviaturas e Siglas	viii
Lista de Símbolos	ix
Resumo	xvii
Abstract	xviii
Agradecimentos	xix
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Algumas Técnicas Numéricas para Simulação de Falhas Materiais . . .	2
1.1.1 Mecânica da Fratura Elástica Linear . . . . .	2
1.1.2 Modelos Discretos ou Coesivos . . . . .	3
1.1.3 Modelos de Fissuração Distribuída . . . . .	4
1.1.4 Meios Contínuos Enriquecidos . . . . .	5
1.1.5 Descontinuidades Fracas e Fortes . . . . .	6
1.2 Objetivos e Restrições . . . . .	15
1.3 Desenvolvimento Numérico . . . . .	17
1.4 Organização do Texto . . . . .	17
<b>2 Localização de Deformações num Modelo de Dano Isotrópico</b>	<b>19</b>
2.1 Localização de Deformações . . . . .	20
2.1.1 Exemplo Unidimensional Ilustrativo . . . . .	20
2.1.2 Análise de Bifurcação Descontínua . . . . .	22
2.2 Modelos de Dano Isotrópico . . . . .	25
2.3 Análise de Bifurcação Descontínua num Modelo de Dano Isotrópico .	28
2.3.1 Estado Plano de Tensões . . . . .	31
2.3.2 Estado Plano de Deformações . . . . .	33

2.3.3	Síntese . . . . .	35
<b>3</b>	<b>Descontinuidades Fraca e Forte: Um Modelo de Banda Variável</b>	<b>37</b>
3.1	Cinemática com Descontinuidades . . . . .	38
3.1.1	Cinemática com Descontinuidade Fraca . . . . .	38
3.1.2	Cinemática com Descontinuidade Forte . . . . .	41
3.1.3	Cinemática Regularizada . . . . .	41
3.2	Análise de Descontinuidade Forte . . . . .	43
3.2.1	Equação Constitutiva Discreta . . . . .	45
3.2.2	Lei de Amolecimento Discreta . . . . .	46
3.2.3	Variável de Dano Discreta . . . . .	48
3.2.4	Energia Livre Discreta . . . . .	48
3.2.5	Critério de Dano Discreto . . . . .	50
3.2.6	Síntese do Modelo Constitutivo de Dano Discreto . . . . .	50
3.2.7	Condições de Descontinuidade Forte . . . . .	52
3.3	Energia Consumida no Regime de Descontinuidade Forte . . . . .	54
3.4	Modelo de Banda Variável . . . . .	56
3.4.1	Regime Inelástico Contínuo . . . . .	59
3.4.2	Regime com Descontinuidade Fraca . . . . .	60
3.4.3	Regime com Descontinuidade Forte . . . . .	63
<b>4</b>	<b>Equações Integrais para Problemas Fisicamente Não-Lineares</b>	<b>65</b>
4.1	Meios Contínuos Convencionais . . . . .	66
4.1.1	Identidade de Somigliana . . . . .	69
4.1.2	Equação Integral para Deslocamentos no Contorno . . . . .	70
4.1.3	Equação Integral para Deformações internas . . . . .	72
4.2	Meios com Presença de Descontinuidades . . . . .	76
4.2.1	Reformulação das Equações Cinemáticas . . . . .	76
4.2.2	Formulações do Problema . . . . .	77
4.2.3	Equações Integrais com Descontinuidades . . . . .	80
4.2.4	Equação de Equilíbrio da Interface Descontínua . . . . .	81
<b>5</b>	<b>Formulação Implícita do Método dos Elementos de Contorno para Problemas com Descontinuidades</b>	<b>83</b>
5.1	Equações Discretas . . . . .	85
5.1.1	Elementos de Contorno Isoparamétricos . . . . .	85
5.1.2	Células com Descontinuidade Embutida . . . . .	87
5.1.3	Equações Matriciais . . . . .	92
5.2	Estratégia de Solução . . . . .	98
5.3	Algoritmo de Geração Automática de Células . . . . .	104
<b>6</b>	<b>Exemplos Numéricos</b>	<b>106</b>
6.1	Tração Simples com Localização de Deformações . . . . .	107
6.2	Cilindro sob Compressão Diametral . . . . .	111
6.3	Cisalhamento com Forças em Quatro Pontos: Arrea e Ingraffea (1982)	113

6.4	Ensaio de Cisalhamento: Gálvez et al. (1998) . . . . .	117
6.4.1	Forças em Três Pontos . . . . .	117
6.4.2	Forças em Quatro Pontos . . . . .	120
6.5	Painel em L: Winkler et al. (2004) . . . . .	123
6.6	Flexão em Três Pontos: Petersson (1981) . . . . .	127
6.6.1	Análises com Descontinuidade Forte Direta . . . . .	128
6.6.2	Análises com Modelo de Banda Variável . . . . .	131
<b>7</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>135</b>
7.1	Contribuições deste Trabalho . . . . .	137
7.2	Sugestões para Trabalhos Futuros . . . . .	138
<b>A</b>	<b>Soluções Fundamentais de Kelvin</b>	<b>140</b>
A.1	Domínios Tridimensionais . . . . .	141
A.2	Domínios Bidimensionais . . . . .	144
A.3	Síntese . . . . .	147
A.3.1	Domínios Tridimensionais . . . . .	147
A.3.2	Domínios Bidimensionais . . . . .	147
<b>B</b>	<b>Derivadas das Soluções Fundamentais de Kelvin em Relação ao Ponte Fonte</b>	<b>149</b>
B.1	Domínios Tridimensionais . . . . .	150
B.2	Domínios Bidimensionais . . . . .	151
<b>C</b>	<b>Termos Livres para Equação Integral de Deformações em Pontos Internos</b>	<b>153</b>
C.1	Domínios Tridimensionais . . . . .	153
C.2	Domínios Bidimensionais . . . . .	154
<b>D</b>	<b>Métodos de Controle para a Estratégia de Solução Não-Linear</b>	<b>156</b>
<b>E</b>	<b>Modificações nas Matrizes da Formulação Implícita Associadas ao Algoritmo de Geração Automática de Células</b>	<b>159</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>162</b>

# Lista de Tabelas

2.1	Deformações equivalentes para alguns modelos de dano isotrópico. . .	27
3.1	Correspondência entre os modelos constitutivos contínuo e discreto. . .	51
4.1	Correspondência entre termos nas equações integrais. . . . .	80
5.1	Grau de singularidade das integrais. . . . .	97
D.1	Diferentes tipos de métodos de controle. . . . .	157
E.1	Construção das submatrizes. . . . .	160

# Lista de Figuras

1.1	Regiões da zona de processo de fratura ( $u$ : deslocamento, $\epsilon$ : deformação). . . . .	11
2.1	(a) Barra sob tração, (b) distribuição de deformações, contínuas por partes. . . . .	21
2.2	(a) Diagrama tensão-deformação com amolecimento linear, (b) diagrama força-deslocamento com diferentes comportamentos pós-pico admissíveis. . . . .	21
2.3	Domínio sólido com localização de deformações. . . . .	23
3.1	Cinemática com descontinuidades: (a) descontinuidade fraca, (b) descontinuidade forte, (c) formulação regularizada. . . . .	39
3.2	Modelos de dano contínuo ( $\sigma_{ij}$ x $\epsilon_{ij}$ ) e discreto ( $t_i$ x $\Delta[[u_i]]$ ). . . . .	52
3.3	Diferentes fases do processo de carregamento. . . . .	56
3.4	Modelo de banda de variável: (a) instante da bifurcação, (b) evolução da banda sob regime de descontinuidade fraca, (c) início do regime de descontinuidade forte, (d) variação da espessura da banda de localização em relação ao tempo. . . . .	58
3.5	Diferentes fases do carregamento para: (a) $\mathbf{B} \equiv \mathbf{SD}$ , (b) $\mathbf{Y} \equiv \mathbf{B} \equiv \mathbf{SD}$ . . . . .	58
3.6	Lei de variação linear para banda de localização, $h(q)$ ( $0 < \bar{\beta} < 1$ ). . . . .	61
4.1	Domínio sólido contínuo. . . . .	66
4.2	Trajetórias de equilíbrio uni-axial arbitrárias. . . . .	67
4.3	Ponto fonte no contorno: domínio aumentado. . . . .	70
4.4	Subdomínio $\Omega_\epsilon \subset \Omega$ considerando a exclusão de uma esfera ou círculo. . . . .	73
4.5	Subdomínio arbitrário $\Omega_\varphi$ em torno da superfície descontínua. . . . .	76

5.1	(a) Sólido dividido em elementos de contorno e células, (b) célula com descontinuidade embutida. . . . .	87
5.2	Esquema representativo do algoritmo de geração automática de células.	104
6.1	Dados para o problema de tração simples com localização de deformações. . . . .	108
6.2	Malhas para o problema de tração simples: (a) malha 1: $w = 0.20$ mm, (b) malha 2: $w = 0.10$ mm, (c) malha 3: $w = 0.05$ mm. . . . .	108
6.3	Resultados para o problema de tração simples com descontinuidade forte: (a) Fator de carga ( $\lambda$ ) versus deslocamento do lado de aplicação da carga, (b) Deslocamento ao longo da face inferior para $\lambda = 0.2$ . . .	109
6.4	Resultados para o problema de tração simples com dano contínuo em bandas de localização com diferentes espessuras. . . . .	110
6.5	Dados para o problema de compressão diametral de um cilindro de concreto. . . . .	111
6.6	Malhas para o problema de compressão diametral de um cilindro de concreto: (a) malha 1: células com lados de 0.50 cm, (b) malha 2: células com lados de 0.25 cm. . . . .	112
6.7	Resultados para o problema de compressão diametral de um cilindro de concreto: (a) Fator de carga ( $\lambda$ ) versus deslocamento do ponto <i>A</i> , (b) Fator de carga ( $\lambda$ ) versus deslocamento do ponto <i>B</i> . . . . .	113
6.8	Dados para o ensaio de cisalhamento com forças em quatro pontos de Arrea e Ingraffea (1982). . . . .	114
6.9	Malha final para simulação do ensaio de Arrea e Ingraffea (1982) com descontinuidade forte direta: (a) malha completa, (b) detalhe. . . . .	115
6.10	Malha final para simulação do ensaio de Arrea e Ingraffea (1982) com modelo de banda variável: (a) malha completa, (b) detalhe. . . . .	116
6.11	Resultados para carga <i>P</i> versus CMSD ( <i>Crack Mouth Sliding Displacement</i> ) para o ensaio de Arrea e Ingraffea (1982). . . . .	116
6.12	Dados para os ensaios de cisalhamento de Gálvez et al. (1998). . . . .	117
6.13	Malha final para simulação do ensaio com forças em três pontos de Gálvez et al. (1998) com descontinuidade forte direta: (a) malha completa, (b) detalhe. . . . .	118

6.14	Malha final para simulação do ensaio com forças em três pontos de Gálvez et al. (1998) com modelo de banda variável: (a) malha completa, (b) detalhe. . . . .	118
6.15	Trajetória da trinca para o ensaio de Gálvez et al. (1998) com forças em três pontos. . . . .	119
6.16	Resultados para carga $P$ versus o deslocamento vertical do ponto B no ensaio de Gálvez et al. (1998) com forças em três pontos. . . . .	119
6.17	Resultados para carga $P$ versus CMOD ( <i>Crack Mouth Opening Displacement</i> ) no ensaio de Gálvez et al. (1998) com forças em três pontos.	120
6.18	Malha final para simulação do ensaio com forças em quatro pontos de Gálvez et al. (1998) com descontinuidade forte direta: (a) malha completa, (b) detalhe do início da trinca, (c) detalhe do final da trinca.	121
6.19	Malha final para simulação do ensaio com forças em quatro pontos de Gálvez et al. (1998) com modelo de banda variável: (a) malha completa, (b) detalhe do início da trinca, (c) detalhe do final da trinca.	121
6.20	Trajetória da trinca para o ensaio de Gálvez et al. (1998) com forças em quatro pontos. . . . .	122
6.21	Resultados para carga $P$ versus o deslocamento vertical do ponto carregado no ensaio de Gálvez et al. (1998) com forças em quatro pontos. . . . .	123
6.22	Dados para o ensaio do painel em L de Winkler et al. (2004). . . . .	124
6.23	Malha final para simulação do ensaio do painel em “L” de Winkler et al. (2004) com descontinuidade forte direta: (a) malha completa, (b) detalhe. . . . .	124
6.24	Malha final para simulação do ensaio do painel em “L” de Winkler et al. (2004) com modelo de banda variável: (a) malha completa, (b) detalhe. . . . .	125
6.25	Trajetória da trinca para o ensaio do painel em “L” de Winkler et al. (2004). . . . .	125
6.26	Resultados para carga total $P$ versus o deslocamento vertical do ponto A no ensaio do painel em L de Winkler et al. (2004). . . . .	126
6.27	Dados para o ensaio de flexão em três pontos de Petersson (1981). . .	128
6.28	Malha final para simulação do ensaio de Petersson (1981) com células de 4 mm e descontinuidade forte direta: (a) malha completa, (b) detalhe.	129

6.29	Malha final para simulação do ensaio de Petersson (1981) com células de 1 mm e descontinuidade forte direta: (a) malha completa, (b) detalhe.	129
6.30	Malha final para simulação do ensaio de Petersson (1981) com células de 4 mm e descont. forte direta com orientação pré-definida: (a) malha completa, (b) detalhe. . . . .	129
6.31	Malha final para simulação do ensaio de Petersson (1981) com células de 1 mm e descont. forte direta com orientação pré-definida: (a) malha completa, (b) detalhe. . . . .	129
6.32	Resultados para carga $P$ versus o deslocamento vertical do ponto carregado no ensaio de flexão em três pontos de Petersson (1981): descontinuidade forte direta com orientação pré-definida. . . . .	130
6.33	Malha final para simulação do ensaio de flexão em três pontos de Petersson (1981) com células de 4 mm e modelo de banda variável: (a) malha completa, (b) detalhe. . . . .	131
6.34	Malha final para simulação do ensaio de flexão em três pontos de Petersson (1981) com células de 1 mm e modelo de banda variável: (a) malha completa, (b) detalhe. . . . .	132
6.35	Resultados para carga $P$ versus o deslocamento vertical do ponto carregado no ensaio de flexão em três pontos de Petersson (1981): modelo de banda variável. . . . .	132
6.36	Malha final para simulação do ensaio de flexão em três pontos de Petersson (1981) com células de 1 mm e $l^* = 4$ mm: (a) malha completa, (b) detalhe. . . . .	133
6.37	Resultados para carga $P$ versus o deslocamento vertical do ponto carregado no ensaio de flexão em três pontos de Petersson (1981): modelo de banda variável com células de 1 mm e $l^* = 4$ mm. . . . .	134

# Lista de Abreviaturas e Siglas

CMOD	Crack Mouth Opening Displacement
CMSD	Crack Mouth Sliding Displacement
CSDA	Continuum Strong Discontinuity Approach
EPD	Estado Plano de Deformações
EPT	Estado Plano de Tensões
INSANE	Interactive Structural Analysis Environment
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MEF	Método dos Elementos Finitos
MFEL	Mecânica da Fratura Elástica Linear
POO	Programação Orientada a Objetos
UFMG	Universidade Federal de Minas Gerais
XFEM	Método dos Elementos Finitos Estendido

# Lista de Símbolos

$A, A^*$	Constantes escalares.
$b_i$	Forças de corpo.
$c_{ij}(\boldsymbol{\xi})$	Termo livre para equações integrais de deslocamentos no contorno.
$D$	Variável de dano escalar para modelos constitutivos contínuos.
$\hat{\mathbf{e}}_k$	Direções principais de deformação.
$E_{ijkl}$	Tensor constitutivo secante: $(1 - D)E_{ijkl}^o$ .
$E_{ijkl}^o$	Tensor constitutivo elástico linear para materiais isotrópicos.
$E_{ijkl}^t$	Tensor constitutivo tangente.
$E_{ijkl}^{t, \Omega_b}$	Tensor constitutivo tangente dentro da banda de localização $\Omega_b$ .
$E_{ijkl}^{t, \Omega \setminus \Omega_b}$	Tensor constitutivo tangente fora da banda de localização $\Omega_b$ .
$f_i$	Vetor referente à equação de equilíbrio na interface descontínua.
$f_t$	Resistência à tração.
$F(\sigma_{ij}, q)$	Função de dano no espaço das tensões.
$\bar{F}(\epsilon_{ij}, r)$	Função de dano no espaço das deformações.
$F_{ijkl}^{\epsilon\epsilon}$	Termo livre das equações integrais de deformações em pontos internos com campos de deformação inicial.

$\bar{G}(\Delta[[u_i]], \Delta\alpha)$	Função de dano discreta.
$G_f$	Energia de fratura.
$G_{SD}$	Energia liberada em $\mathcal{S}$ , por unidade de área, durante o regime de descontinuidade forte.
$h$	Espessura de banda de localização.
$h_B$	Espessura de banda de localização no instante de bifurcação.
$H$	Módulo de endurecimento-amolecimento para modelos constitutivos contínuos.
$H^*$	Módulo de amolecimento discreto ou intrínseco.
$H^{crit}$	Módulo de amolecimento crítico para modelos constitutivos contínuos (condição de bifurcação).
$\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$	Função de Heaviside com salto sobre $\mathcal{S}$ .
$\mathcal{H}_{\Omega_b}$	Função de rampa linear em $\Omega_b$ .
$\mathcal{J}(\eta)$	Jacobiano da transformação de coordenadas nos elementos de contorno em problemas bidimensionais.
$\mathcal{J}(\eta_1, \eta_2)$	Jacobiano da transformação de coordenadas nas células internas em problemas bidimensionais.
$k$	Fator escalar ( $\approx 0$ ) de regularização numérica da função $\delta_{\mathcal{S}}$ no regime de descontinuidade forte.
$l^*$	Comprimento característico para leis de evolução da variável de dano.
$\dot{m}_i$	Vetor unitário referente à direção do salto no campo de velocidades.
$M^\alpha(\eta_1, \eta_2)$	Funções de interpolação da geometria nas células internas ( $\alpha$ é um índice relativo aos vértices da célula).

$\mathcal{M}_{\mathcal{S}}^{\varphi}(\mathbf{X})$	Função com valores não nulos apenas se $\mathbf{X} \in \Omega_{\varphi}$ .
$n_{dim}$	Número de dimensões do problema.
$n_i$	Vetor unitário normal a uma determinada superfície.
$n_i^{crit}$	Direção normal à banda de localização correspondente à condição de bifurcação ( $H^{crit}$ ).
$N^{\gamma}(\eta)$	Funções de interpolação da geometria e das variáveis nos elementos de contorno ( $\gamma$ é um índice relativo aos pontos de interpolação).
$\mathcal{P}$	Potência consumida num processo de deformação quase-estático.
$\mathcal{P}_{\mathcal{S}}$	Potência consumida no desenvolvimento do campo de deslocamentos.
$q$	Variável interna do tipo tensão para modelos constitutivos contínuos.
$q_B$	Variável interna do tipo tensão para modelos constitutivos contínuos no instante de bifurcação.
$q_{SD}$	Variável interna do tipo tensão para modelos constitutivos contínuos no instante do início do regime de descontinuidade forte.
$q_{\mathcal{S}}$	Variável interna do tipo tensão para modelos constitutivos contínuos em pontos sobre $\mathcal{S}$ .
$Q_{ij}$	Tensor de localização ou tensor acústico.
$Q_{ij}^e$	Tensor de localização elástico.
$\mathbf{Q}^e$	Forma matricial do tensor de localização elástico.
$r$	Variável interna do tipo deformação para modelos constitutivos contínuos.
$r_o$	Valor da variável interna do tipo deformação correspondente ao limite de proporcionalidade elástica.

$r_B$	Variável interna do tipo deformação para modelos constitutivos contínuos no instante de bifurcação.
$r_{SD}$	Variável interna do tipo deformação para modelos constitutivos contínuos no instante do início do regime de descontinuidade forte.
$r_S$	Variável interna do tipo deformação para modelos constitutivos contínuos em pontos sobre $\mathcal{S}$ .
$\mathcal{S}$	Superfície (ou linha, para problemas bidimensionais) de descontinuidade.
$t$	Tempo.
$t_B$	Instante de tempo referente à bifurcação.
$t_{SD}$	Instante de tempo referente ao início do regime de descontinuidade forte.
$t_i$	Vetor força de superfície ( $t_i = \sigma_{ij}n_j$ ).
$\bar{t}_i$	Vetor força de superfície efetiva ( $\bar{t}_i = \bar{\sigma}_{ij}n_j$ ).
$\mathfrak{t}_i$	Forças de superfície prescritas (condições de contorno naturais).
$t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})$	Solução fundamental de Kelvin: força de superfície na direção $j$ , no ponto $\mathbf{X}$ , em função de uma carga unitária em $\boldsymbol{\xi}$ , aplicada na direção $i$ .
$t_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})$	Parte simétrica do gradiente de $t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})$ , em relação ao ponto fonte $\boldsymbol{\xi}$ .
$u_i$	Campo de deslocamentos.
$\bar{u}_i$	Parte regular de um campo de deslocamentos.
$\hat{u}_i$	Parte regular de um campo de deslocamentos após reformulação da cinemática com descontinuidades.
$\mathfrak{u}_i$	Deslocamentos prescritos (condições de contorno essenciais).
$\llbracket u_i \rrbracket$	Componentes do salto no campo de deslocamentos.

- $u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})$  Solução fundamental de Kelvin: deslocamento na direção  $j$ , no ponto  $\mathbf{X}$ , em função de uma carga unitária em  $\boldsymbol{\xi}$ , aplicada na direção  $i$ .
- $u_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})$  Parte simétrica do gradiente de  $u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})$ , em relação ao ponto fonte  $\boldsymbol{\xi}$ .
- $\mathcal{W}_{\mathcal{S}}$  Energia total consumida desde o início do regime de descontinuidade forte até o alívio total das tensões.
- $\mathbf{X}$  Coordenadas dos pontos materiais. Pontos de campo nas equações integrais.
- $\dot{\alpha}$  Escalar correspondente à magnitude do salto no campo de velocidades (capítulo 2). Evolução da variável interna do modelo constitutivo discreto (capítulo 3).
- $\boldsymbol{\alpha}^k$  Variáveis internas genéricas para modelos constitutivos contínuos.
- $\beta$  Parâmetro escalar que define a taxa de crescimento do tamanho das células no algoritmo de geração automática.
- $\bar{\beta}$  Parâmetro entre 0 e 1 que define a lei linear de evolução da espessura da banda de localização.
- $\delta_{ij}$  Delta de Kronecker (1 para  $i = j$ ; 0 para  $i \neq j$ ).
- $\delta_{\mathcal{S}}$  Delta de Dirac sobre  $\mathcal{S}$ .
- $\delta(\mathbf{X} - \boldsymbol{\xi})$  Delta de Dirac sobre o ponto  $\boldsymbol{\xi}$ .
- $\Delta[[u_i]]$  Evolução das componentes do salto no campo de deslocamentos durante o regime de descontinuidade forte.
- $\Delta\alpha$  Variável interna do modelo constitutivo discreto.
- $\epsilon_k$  Componentes de deformações lineares principais.
- $\epsilon_{ij}$  Tensor de deformações lineares.

$\bar{\epsilon}_{ij}$	Parte regular (finita) do campo de deformações.
$\hat{\epsilon}_{ij}$	Parte regular do campo de deformações após reformulação da cinemática com descontinuidades.
$\epsilon_{ij}^+$	$\sum_{k=1}^{ndim} \langle \epsilon_k \rangle \hat{\mathbf{e}}_k \otimes \hat{\mathbf{e}}_k$ .
$\epsilon_{ij}^{ef}$	Tensor de deformações de efetivas ( $E_{ijkl}^{\alpha, -1} \sigma_{kl}$ ).
$\epsilon_{ij}^o$	Deformações iniciais.
$\epsilon_{ij}^\varphi$	Campo de deformações associado aos efeitos dissipativos em $\mathcal{S}$ e restrito ao subdomínio $\Omega_\varphi$ .
$\epsilon_{ij}^{\mathcal{S}}$	Tensor de deformações em pontos sobre $\mathcal{S}$ .
$\epsilon_{ij}^{\Omega \setminus \mathcal{S}}$	Tensor de deformações em pontos fora de $\mathcal{S}$ .
$\epsilon_{ij}^{\Omega \setminus \Omega_b}$	Tensor de deformações em pontos externos à banda $\Omega_b$ .
$\eta$	coordenada paramétrica para elementos de contorno em problemas bidimensionais.
$\eta_1, \eta_2$	coordenadas paramétricas para células internas em problemas bidimensionais.
$\gamma$	$E$ , para estado plano de tensões; $E/(1 - \nu^2)$ , para estado plano de deformações.
$\Gamma$	Contorno de um corpo sólido.
$\dot{\lambda}$	Multiplicador de dano contínuo ( $\dot{\lambda} = \dot{r}$ ).
$\dot{\lambda}^*$	Multiplicador de dano discreto ( $\dot{\lambda}^* = \dot{\alpha}$ ).
$\mu_{\mathcal{S}}(\mathbf{X})$	1, se $\mathbf{X} \in \mathcal{S}$ ; 0, se $\mathbf{X} \notin \mathcal{S}$ .
$\mu_{\Omega_b}(\mathbf{X})$	1, se $\mathbf{X} \in \Omega_b$ ; 0, se $\mathbf{X} \notin \Omega_b$ .
$\nu$	Coefficiente de Poisson.

$\omega$	Variável de dano discreta.
$\Omega$	Domínio de um corpo sólido.
$\Omega^-$	Subdomínio de $\Omega$ , referente à parte oposta à normal sobre $\mathcal{S}$ .
$\Omega^+$	Subdomínio de $\Omega$ , referente à parte apontada pela normal sobre $\mathcal{S}$ .
$\Omega_b$	Domínio de uma banda de localização de deformações.
$\Omega_\varphi$	Domínio de influência da descontinuidade $\mathcal{S}$ para regularização cinemática.
$\varphi(\mathbf{X})$	Função de regularização da cinemática com descontinuidades. Distribui os efeitos da descontinuidade no subdomínio $\Omega_\varphi$ .
$\psi$	Energia livre de Helmholtz para modelos constitutivos contínuos.
$\hat{\psi}$	Energia livre para modelos constitutivos discretos.
$\sigma_{ij}$	Tensor de tensões de Cauchy.
$\tilde{\sigma}_{ij}$	Função constitutiva convencional ou regularizada: tensões obtidas de um estado de deformações.
$\bar{\sigma}_{ij}$	Tensor de tensões de efetivas ( $E_{ijkl}^o \epsilon_{kl}$ ).
$\sigma_{ij}^-$	Tensões em $\mathbf{X} \in \Omega^-$ .
$\sigma_{ij}^+$	$E_{ijkl} \epsilon_{kl}^+$ (capítulo 2). Tensões em $\mathbf{X} \in \Omega^+$ (capítulo 4).
$\bar{\sigma}_{ij}^+$	$E_{ijkl}^o \epsilon_{kl}^+$ .
$\sigma_{ij}^o$	Tensões iniciais.
$\sigma_{ij}^{\mathcal{S}}$	Tensor de tensões de Cauchy em pontos sobre $\mathcal{S}$ .
$\sigma_{ij}^{\Omega \setminus \mathcal{S}}$	Tensor de tensões de Cauchy em pontos fora de $\mathcal{S}$ .
$\sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})$	Solução fundamental de Kelvin: componentes $jk$ de tensão, no ponto $\mathbf{X}$ , em função de uma carga unitária em $\boldsymbol{\xi}$ , aplicada na direção $i$ .

$\sigma_{ijkl}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})$  Parte simétrica do gradiente de  $\sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})$ , em relação ao ponto fonte  $\boldsymbol{\xi}$ .

$\tau_\epsilon$  Deformação equivalente.

$\tau_\sigma$  Tensão equivalente.

$\tau_{\bar{t}}$  Norma das forças de superfície efetivas com base no tensor de localização elástico ( $\tau_{\bar{t}} = \sqrt{\bar{t}_i Q_{ij}^{e,-1} \bar{t}_j^+}$ ).

$\tau_{\Delta[u]}$  Norma da evolução das componentes de salto nos deslocamentos durante o regime de descontinuidade forte com base no tensor de localização elástico ( $\tau_{\Delta[u]} = \sqrt{\Delta[u] Q_{ij}^e \Delta[u]}$ ).

$\theta$  Ângulo entre  $\hat{\mathbf{e}}_1$  (direção da deformação principal máxima) e o vetor normal à banda de localização de deformações no instante da bifurcação.

$\boldsymbol{\xi}$  Pontos fonte nas equações integrais.

$a \setminus b$  Exclusão:  $a - (a \cap b)$ .

$\partial_{\mathbf{q}}(\cdot), \partial_{\mathbf{p}}(\cdot)$  Derivadas direcionais em relação aos vetores unitários  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{p}$ .

$\det(\cdot)$  Determinante de  $(\cdot)$ .

$\langle \cdot \rangle$  Operador de Mac Auley ( $= [|\cdot| + (\cdot)]/2$ ).

$\otimes$  Operador do produto tensorial ( $a_i \otimes b_j = a_i b_j$ ).

$\mathcal{f}(\cdot)$  Integrais com núcleos fortemente singulares.

# Resumo

A formulação implícita do método dos elementos de contorno é aplicada a problemas bidimensionais de falhas materiais envolvendo, sequencialmente, dissipação inelástica com amolecimento em meio contínuo, bifurcação e transição entre descontinuidades fracas e fortes. A condição de bifurcação é definida pela singularidade do tensor de localização, também conhecido, por questões históricas, como tensor acústico. As descontinuidades fracas estão associadas às bandas de localização de deformações de espessura finita, que vão se tornando cada vez mais estreitas até colapsar numa superfície de descontinuidade no campo de deslocamentos, denominada descontinuidade forte. Modelos constitutivos contínuos são adotados para a representação do material em todas estas etapas, levando-se em conta as adaptações provenientes da análise de descontinuidade forte nas fases pós-bifurcação. A metodologia é suficientemente genérica para o tratamento de qualquer tipo de instabilidade física e, de acordo com o modelo constitutivo adotado, as descontinuidades podem representar superfícies de deslizamento na geomecânica, bandas de cisalhamento em materiais dúcteis ou trincas em materiais frágeis (ou parcialmente frágeis). No entanto, nesta tese, apenas o último caso foi abordado, a partir da utilização de um modelo de dano isotrópico. A propagação da trinca no domínio sólido é realizada através de um algoritmo de geração automática de células e, neste contexto, a zona de processo de fratura na ponta da trinca fica totalmente representada pelas células em regime de dano contínuo e por aquelas em regime de descontinuidade fraca.

# Abstract

The implicit formulation of the boundary element method is applied to bidimensional problems of material failure involving, sequentially, inelastic dissipation with softening in continuous media, bifurcation and transition between weak and strong discontinuities. The bifurcation condition is defined by the singularity of the localization tensor, also known, for historical reasons, as acoustic tensor. The weak discontinuities are associated to strain localization bands of finite width, which become increasingly narrow until to collapse in a surface with discontinuous displacement field, called strong discontinuity surface. Continuum constitutive models are adopted to represent the material behaviour in all of these steps, taking into account the adaptations that come from the strong discontinuity analysis for the post-bifurcation phases. The methodology is generic enough to treat any type of material instability and, according with the constitutive model adopted, the discontinuities may represent slip lines in geomechanics, shear bands in ductile materials or cracks in brittle (or quasi-brittle) materials. However, in this thesis, only the last case was considered, from the adoption of an isotropic damage model. The crack propagation across the solid domain is done by an automatic cells generation algorithm and, in this context, the fracture process zone in the crack tip became totally represented by the cells in the continuum damage regime and the cells with weak discontinuities.

# Agradecimentos

À minha esposa, Danielle, por todo o suporte, compreensão, incentivo e sacrifício durante o período de elaboração deste trabalho.

Aos meus pais, Tânia e Paulo, pela educação que me deram e pelo apoio incondicional. Aos meus irmãos, Marcelo e Flávio, pela amizade e pela convivência nas minhas estadias em Belo Horizonte.

Aos professores Gabriel Ribeiro e Roque Pitangueira, pela orientação, confiança e amizade.

Ao professor Filipe Anacleto, pioneiro nas implementações do método dos elementos de contorno no INSANE, pelas inúmeras e valiosas discussões em Belo Horizonte e pela internet.

Ao professor Samuel Penna, sempre disposto a tratar qualquer assunto.

Ao professor Carlos Loeffler, meu orientador de mestrado, por me apresentar ao método dos elementos de contorno e incentivar mais esse passo na minha carreira.

Ao professor Estevam Las Casas, grande amigo e orientador de iniciação científica, que ajudou a trilhar o caminho até aqui.

Aos engenheiros Gabriel Rossoni, Leandro Leite, Deiwis Pedruzzi e Sérgio Mileipe, da Samarco Mineração S.A., que viabilizaram a elaboração deste trabalho apesar das minhas obrigações profissionais.

Aos funcionários do Departamento de Engenharia de Estruturas, em especial à Inês e à Fátima, sempre atenciosas e prestativas.

Aos demais colegas do projeto INSANE e do Programa de Pós-graduação em Engenharia de Estruturas pela convivência agradável.

# Capítulo 1

## Introdução

Falhas estruturais, de uma maneira bastante genérica, podem ser classificadas em dois tipos distintos: falhas geométricas, onde o comportamento geometricamente não-linear da estrutura conduz a configurações espaciais instáveis; e falhas materiais, associadas ao comportamento local dos pontos materiais, onde um progressivo amolecimento da resposta estrutural se propaga ao longo do domínio sólido até resultar no colapso final. Estes dois tipos tem sido normalmente tratados de maneira separada e através de diferentes aproximações matemáticas.

As falhas geométricas são usualmente tratadas por modelos matemáticos contínuos, incluindo leis cinemáticas não-lineares e equações constitutivas elásticas lineares ou, em alguns casos, dotadas de uma regra de endurecimento.

Do ponto de vista da mecânica do contínuo, as falhas materiais, por sua vez, estão intimamente ligadas à localização de deformações, que pode ser definida, como em Samaniego (2002), por uma instabilidade material caracterizada pela presença de elevados valores de deformação restritos a pequenas regiões do sólido que, dependendo do contexto, podem representar trincas em materiais frágeis (ou parcialmente frágeis), superfícies de deslizamento na geomecânica ou bandas de cisalhamento em materiais dúcteis.

A localização de deformações, como fenômeno material, está relacionada aos modelos constitutivos com amolecimento ou com leis de escoamento não-associativas. Matematicamente, para modelos constitutivos independentes do tempo, onde os efeitos viscosos do material podem ser desprezados, o problema de valor de contorno torna-se mal definido pela perda de elipticidade das equações de equilíbrio que o governam, quando ocorre a localização. Desta forma, a ausência de um parâmetro de escala na descrição matemática do material deixa a espessura da banda de localização indefinida, resultando em dificuldades numéricas, como a dependência irreal em relação ao refino da discretização. Algumas técnicas desenvolvidas para superar esta dificuldade são apresentadas na próxima seção.

## **1.1 Algumas Técnicas Numéricas para Simulação de Falhas Materiais**

Apresentar uma listagem completa das formas de tratamento numérico existentes para as falhas materiais seria uma tarefa dispendiosa e não é o objetivo desta seção. Entretanto, procura-se estabelecer uma classificação das principais técnicas, tendo em vista que as fronteiras entre elas nem sempre podem ser estabelecidas de forma clara, sendo possível encontrar trabalhos que utilizem conceitos de classes distintas.

### **1.1.1 Mecânica da Fratura Elástica Linear**

A mecânica da fratura elástica linear (MFEL) pode, de certa maneira, ser considerada a metodologia precursora para as análises de falhas materiais envolvendo perda de rigidez estrutural. Em tal teoria, cujo alicerce seria o critério baseado na energia de fratura apresentado por Griffith (1921), considera-se pequena a zona plástica ou a zona de processo de fratura e o estado de tensões na ponta de uma trinca pode

ser representado por um fator de intensidade de tensões que, ao atingir um valor crítico (a tenacidade à fratura), típico para cada material, desencadeia a propagação da fissura. Em carregamentos cíclicos, como apresentado por Paris et al. (1961), a variação do fator de intensidade de tensões pode ocasionar propagações subcríticas, mesmo que a tenacidade não seja atingida, caracterizando o fenômeno da fadiga.

Nas simulações numéricas baseadas na MFEL, as discontinuidades (que invariavelmente representam trincas macroscópicas) são tratadas como fronteiras entre duas regiões elásticas, onde o fator de intensidade de tensões pode ser obtido através do cálculo da chamada integral-J, como em Rice (1968). A propagação dessas discontinuidades, por outro lado, exige a introdução de alguns artifícios adicionais. No método dos elementos finitos (MEF), em função do desconhecimento prévio da trajetória da trinca, algoritmos de reconstrução da malha foram desenvolvidos, e.g., Shephard et al. (1985) e Swenson e Ingraffea (1988). No método dos elementos de contorno (MEC), por sua vez, as referidas técnicas de adaptação da malha não são necessárias quando se utiliza a formulação dual desenvolvida por Portela et al. (1992, 1993). Nesta metodologia, um dos lados da discontinuidade é tratado pela equação integral (singular) de deslocamentos e o outro pela equação integral (hipersingular) das forças de superfície. Desta forma, a medida que ocorre a propagação, o contorno referente à trinca vai sendo ampliado, correspondendo a um aumento do tamanho das matrizes que compõem o sistema de equações algébricas. A contrapartida desta formulação está associada à necessidade da solução de integrais com núcleos hipersingulares.

### 1.1.2 Modelos Discretos ou Coesivos

Nos chamados modelos discretos ou coesivos, uma equação constitutiva relacionando forças de superfície à separação da interface (saltos no campo de deslocamentos),

num dado ponto de uma superfície de descontinuidade, substitui as equações tensão-deformação, convencionais na mecânica do contínuo. A origem desta ideia pode ser creditada a Dugdale (1960) e Barenblatt (1962). Posteriormente, Hillerborg et al. (1976) aprimoraram a metodologia, aplicando-a à fratura no concreto e introduzindo o termo “modelo com trinca fictícia” para designar a região onde há transmissão de tensão através da descontinuidade. Tal região está fisicamente associada à zona de processo de fratura, caracterizada pela presença de micro-trincas.

Nas primeiras simulações de propagação via MEF, técnicas de reconstrução da malha foram novamente adotadas, como em Ingraffea e Saouma (1985). Posteriormente, a utilização de elementos com descontinuidade embutida, como em Dvorkin et al. (1990) e Klisinski et al. (1991), permitiu o emprego de malhas fixas. Por outro lado, no âmbito do MEC, pode-se destacar a extensão da formulação dual, apresentada por Saleh e Aliabadi (1995).

### **1.1.3 Modelos de Fissuração Distribuída**

Os modelos de fissuração distribuída estão fortemente associados ao estudo de falhas em materiais frágeis ou parcialmente frágeis, principalmente o concreto. Neles, assume-se a distribuição de micro-trincas, com aberturas infinitesimais, nos elementos de discretização do domínio, traduzidas numericamente pela deterioração das propriedades físicas do material. Com a evolução das fissuras, tem-se um decaimento gradual das tensões com aumento de deformações.

O primeiro trabalho neste sentido foi desenvolvido por Rashid (1968), onde os termos de rigidez normal e tangenciais à trinca foram considerados nulos após o aparecimento das fissuras. Suidan e Schnobrich (1973), introduziram posteriormente um fator (escalar) de retenção ao cisalhamento, que reduziam, porém, não anulavam, os módulos de rigidez transversal num ponto com fissura, permitindo a transmissão de tensões cisalhantes. Seguindo esta ideia, trabalhos subsequentes consideraram

a ponderação de outros termos de rigidez através de fatores de redução escalares variando entre zero e um.

Até então, considerava-se a formação das fissuras na direção perpendicular à tensão principal máxima, quando esta excedia o limite de resistência à tração do material. Tal orientação era mantida fixa no restante da análise. Numa outra vertente, proposta por Cope et al. (1980) e denominada de modelos com fissuração de direção variável, admite-se a rotação das micro-trincas de acordo com a orientação das deformações principais durante o processo de carregamento.

Por apresentarem relações constitutivas contínuas e locais, os modelos com fissuração distribuída estão sujeitos, a priori, às instabilidades devidas à localização de deformações, mencionadas anteriormente. Para superar isto, modelos com distribuição em bandas foram desenvolvidos por Bažant e Oh (1983) e Rots et al. (1985), onde a energia dissipada durante a degradação é confinada à banda (finita) de localização. A largura desta banda é normalmente escrita em função da energia de fratura do material.

#### **1.1.4 Meios Contínuos Enriquecidos**

O enriquecimento de meios contínuos refere-se à introdução de modificações aos meios contínuos clássicos com o objetivo de regularizar as equações de governo. Usualmente, um fator de escala é definido, caracterizando o tamanho da banda de localização.

Um exemplo de enriquecimento seria a utilização dos chamados meios contínuos de Cosserat, onde graus de liberdade de rotação são adicionados localmente aos pontos materiais, como em Muhlhaus e Vadoulakis (1987) e de Borst (1991).

Modelos constitutivos não-locais também podem ser considerados como uma forma

de enriquecimento, no sentido que a tensão num dado ponto material deixa de depender apenas da deformação e das variáveis internas naquele ponto e passa a depender também dos valores destes parâmetros em pontos vizinhos através de equações de ponderação. Dentre os primeiros trabalhos utilizando esta técnica podem-se destacar Bažant et al. (1984) e Pijaudier-Cabot e Bažant (1987). Modelos não-locais também foram tratados com o MEC, e.g., Lin et al. (2002), Sládek et al. (2003), Botta et al. (2005) e Benallal et al. (2006).

Por fim, deve-se mencionar o enriquecimento por gradientes de variáveis do modelo constitutivo convencional, como em de Borst e Muhlhaus (1992), onde à função de escoamento, num modelo elastoplástico, acrescenta-se a dependência no Laplaciano da deformação plástica efetiva. Esta mesma ideia foi trabalhada no MEC por Benallal et al. (2002).

### 1.1.5 Descontinuidades Fracas e Fortes

Em Simo et al. (1993) foi introduzido o conceito de descontinuidades fortes, caracterizadas por relações cinemáticas dotadas de campos de deslocamentos descontínuos e, conseqüentemente, deformações ilimitadas. Um detalhamento mais rigoroso e um tratamento numérico mais geral via MEF podem ser vistos em Oliver (1996*a,b*). A aplicação da cinemática de descontinuidades fortes a modelos constitutivos contínuos, equipados com uma lei de amolecimento de deformações, induz (ou projeta) de forma consistente um modelo constitutivo discreto (forças de superfície x saltos nos deslocamentos) na superfície descontínua, como detalhado em Manzoli et al. (1998), Oliver et al. (1999), Oliver (2000) e Oliver, Huespe, Pulido, e Chaves (2002). O elemento básico nesta dedução, também denominada “análise de descontinuidade forte”, é a regularização do módulo de amolecimento da lei constitutiva contínua, proveniente da condição de equilíbrio (ou continuidade das forças de superfície) na

interface descontínua, que estabelece que os campos de tensão devem ser limitados mesmo nos pontos onde a deformação não o seja. Com isso, obtêm-se também as chamadas “condições de descontinuidade forte”, que se resumem a um conjunto de equações de compatibilidade cinemática, necessárias para a compatibilização do modelo constitutivo contínuo ao regime de descontinuidade forte.

Nas duas últimas décadas, a utilização dos modelos contínuos para descrição dos efeitos dissipativos em superfícies de descontinuidades, metodologia que passou a ser designada pelo termo *Continuum Strong Discontinuity Approach* (CSDA), foi amplamente estudada através do MEF. Aspectos relacionados à geração e propagação das descontinuidades, à transição entre descontinuidades fracas (compostas por campos de deformação descontínuos, porém limitados) e descontinuidades fortes, além de questões relativas à estabilidade e robustez numérica, foram abordados. Cada um destes itens é detalhado na próxima subseção.

A CSDA foi também aplicada a outros métodos numéricos como o método dos elementos finitos estendido (XFEM) - Oliver, Huespe, e Sánchez (2006) - e o MEC - Manzoli e Venturini (2004, 2007), Pedrini (2008) e Manzoli et al. (2009). Os desenvolvimentos relativos ao MEC, em particular, são descritos mais adiante, já que o objetivo principal desta tese refere-se à continuidade desta linha de pesquisa.

#### **1.1.5.1 Desenvolvimentos Utilizando o MEF**

Tratam-se aqui, os avanços da CSDA no contexto do MEF, agrupados conforme a seguinte classificação:

- Critérios de geração de descontinuidades (fracas e fortes) e algoritmos de propagação;
- Representação da zona de processo de fratura através da dissipação em meio contínuo, seguida pela transição entre descontinuidades fracas e fortes;

- Estabilidade e robustez numérica das diferentes formulações envolvendo descontinuidades fortes.

### **Geração e Propagação de Descontinuidades**

Além de um critério que estabeleça, dentro de um elemento finito, a condição necessária para o início de uma descontinuidade, deve-se determinar sua orientação, usualmente caracterizada por um vetor unitário, normal a esta superfície descontínua. Na maioria das aplicações, considera-se o caráter material da descontinuidade, i.e., uma vez estabelecida, sua direção não varia durante o processo de carga.

Na literatura, destacam-se duas metodologias associadas à geração de descontinuidades:

- i. A origem da descontinuidade é determinada simplesmente pelo fim do regime de elástico, a partir de um critério de escoamento ou dano, e sua direção é obtida a partir do estado de tensões ou deformações neste instante, e.g., no caso de materiais frágeis adota-se a direção ortogonal à tensão principal máxima;
- ii. A análise de bifurcação descontínua é utilizada para determinar a origem e direção da descontinuidade.

O primeiro método apresenta a vantagem de ser facilmente implementável. Porém, ele não descreve com eficiência todo o processo de formação da falha material, onde uma descontinuidade macroscópica é precedida por etapas de degradação microestrutural. Com isso, em alguns casos, a direção da superfície descontínua fica mal estabelecida.

Por outro lado, a análise de bifurcação descontínua é uma metodologia mais rigorosa para determinar o início da falha num dado ponto material. Esta análise, como o próprio nome sugere, refere-se a verificação das condições necessárias para que os campos de tensão e deformação bifurquem entre uma região de carregamento com

amolecimento, dentro da banda de localização, e a ocorrência de descarregamento elástico (ou carregamento neutro) na região adjacente.

Matematicamente, a bifurcação é determinada pela singularidade do tensor de localização (a ser definido no capítulo 2), que gera um funcional envolvendo o módulo de amolecimento do modelo constitutivo e as possíveis orientações da banda de localização. Tal problema pode ser resolvido através de técnicas numéricas de otimização como realizado por Ortiz et al. (1987). Entretanto, para grandes geometrias, especialmente em problemas tridimensionais, o custo computacional fica elevado. Em problemas bidimensionais, com estado plano de tensões ou deformações, podem-se obter expressões analíticas - Manzoli et al. (1998), Oliver et al. (1999) e Samaniego (2002) - tanto para um módulo de amolecimento crítico (correspondente à condição de bifurcação) como para direção da banda de localização. Em Oliver e Huespe (2004*b*), valores para tais parâmetros, considerando modelos de plasticidade e dano, em domínios tridimensionais, foram obtidos a partir de uma interpretação geométrica do problema.

Após a escolha do mecanismo numérico que identifica a geração de uma descontinuidade (e sua orientação), critérios que determinem sua trajetória de propagação ao longo do domínio sólido devem ser estabelecidos. No contexto da CSDA, como descrito em Oliver, Huespe, Samaniego, e Chaves (2002) e Oliver e Huespe (2004*a*), é possível classificar estes critérios em dois grupos:

- i. Propagação local;
- ii. Propagação global.

O primeiro deles é baseado na propagação subsequente de superfícies planas de descontinuidade (ou linhas retas, no caso bidimensional) no interior dos elementos finitos, à medida que o critério de falha vai sendo atingido. É usual garantir a continuidade da interface descontínua entre elementos adjacentes, fazendo com que a trajetória assuma um formato poligonal. Esta estratégia é bastante simples, robusta

e confiável em problemas bidimensionais com a presença de apenas uma linha de descontinuidade, onde se tem conhecimento prévio do seu ponto de partida. Entretanto, para problemas tridimensionais e, principalmente, para o caso de múltiplas descontinuidades, com origem em regiões a priori desconhecidas, ela torna-se menos apropriada (Oliver e Huespe, 2004a).

Neste sentido, uma estratégia global, onde todas as possíveis linhas de descontinuidade são verificadas a cada passo de carga, foi proposta por Oliver, Huespe, Samaniego, e Chaves (2002). Nesta metodologia, de forma resumida, procura-se definir uma função potencial escalar em todo o domínio sólido, ao final de cada passo de carga do algoritmo de solução, tal que suas iso-linhas representem possíveis direções de superfícies descontínuas. Isto pode ser feito a partir da aplicação dos métodos de geração de descontinuidades a todos os elementos finitos, mesmo que o critério de falha (ou de bifurcação) não tenha sido atingido, obtendo-se um campo vetorial, cuja primitiva é a referida função potencial. Com isso, no passo seguinte, quando o critério de falha (ou de bifurcação) é verificado no interior de um elemento, um segmento de superfície descontínua é imposto na direção paralela à linha iso-potencial.

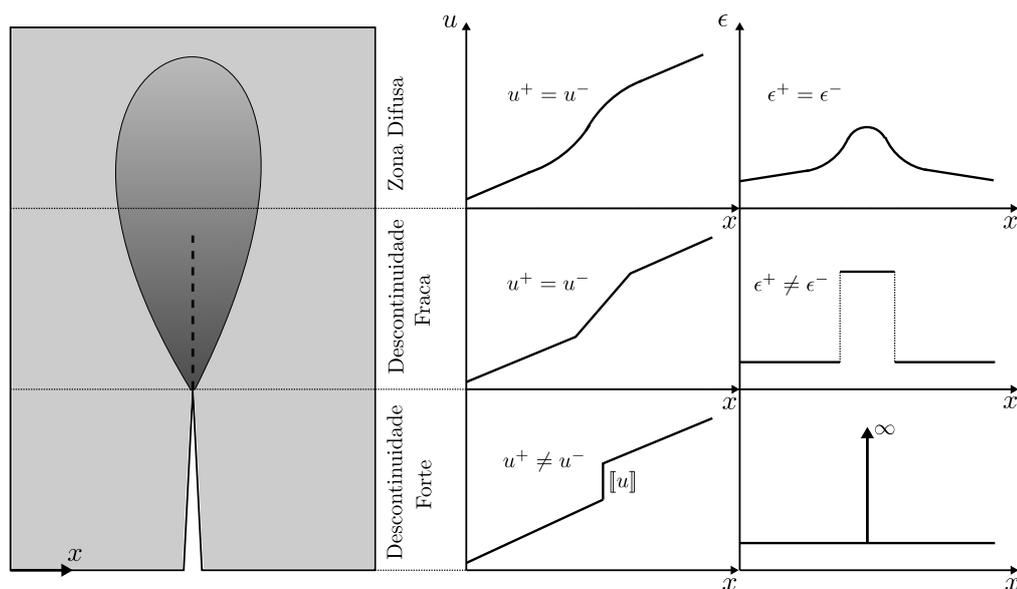
Percebe-se, desta forma, que nenhuma informação dos elementos vizinhos é necessária e o algoritmo torna-se mais robusto para o tratamento de múltiplas linhas de falha.

Uma ressalva sobre esta estratégia é, no entanto, apresentada por Samaniego (2002), onde a iniciação espúria de novas linhas de descontinuidade é relatada nos elementos próximos à ponta de uma trinca. Por outro lado, a definição de uma zona de exclusão, aparentemente, resolve esta questão.

## Transição entre Descontinuidades Fracas e Fortes

O processo de fratura em materiais parcialmente frágeis se dá de forma transiente, envolvendo a geração e agregação de micro-trincas, conduzindo um ponto material de um estado macroscopicamente contínuo até um estado descontínuo. De forma semelhante, em materiais dúcteis, a nucleação de vazios e sua posterior combinação podem gerar descontinuidades macroscópicas. Desta forma, tem origem o conceito da “zona de processo de fratura”, onde se podem distinguir as seguintes três regiões (figura 1.1):

- i. *Zona de Falha Difusa*: caracterizada pelo início dos processos dissipativos, sem a presença de descontinuidades nos campos de deslocamentos ou deformações;
- ii. *Zona de Descontinuidade Fraca*: região de localização, delimitada por superfícies de descontinuidade no campo de deformações. Os deslocamentos, entretanto, permanecem contínuos;
- iii. *Zona de Descontinuidade Forte*: descontinuidade macroscópica. Campo de deslocamentos descontínuo e deformações ilimitadas.



**Figura 1.1:** Regiões da zona de processo de fratura ( $u$ : deslocamento,  $\epsilon$ : deformação).

Como descrito em Manzoli et al. (1998), Oliver et al. (1998, 1999) e Oliver (2000), na CSDA, as bandas de localização são tratadas através de uma cinemática regularizada, capaz de representar superfícies de descontinuidades fracas num dado ponto material. Nestas equações, a espessura da banda fica estabelecida por um fator escalar  $h$ , de forma que, quando  $h \rightarrow 0$  (para efeitos numéricos adota-se um valor pequeno,  $k$ , algumas ordens de grandeza menor que as dimensões básicas do problema), a cinemática de descontinuidade forte é naturalmente obtida.

Desta forma, quando as condições de descontinuidade forte não são atingidas no momento da bifurcação, uma etapa transitória entre a degradação em meio contínuo e o regime de descontinuidade forte é estabelecida. Nesta etapa transitória em regime com descontinuidades fracas, define-se uma lei de variação da espessura da banda, desde um valor  $h = h_B$ , correspondente ao momento da bifurcação, até o valor pré-definido,  $h = k \approx 0$ , associado numericamente ao regime de descontinuidade forte. Tem-se, portanto, uma representação completa da zona de processo de fratura.

### **Estabilidade e Robustez Numérica**

A aplicação da CSDA ao MEF pode, em alguns casos, apresentar limitações em função do surgimento de instabilidades, inerentes ao procedimento numérico, colocando em xeque a robustez numérica da metodologia. De acordo com Oliver, Huespe, Blanco, e Linero (2006), tais instabilidades estão relacionadas à ocorrência de autovalores nulos na matriz de rigidez tangencial dos elementos com descontinuidade incorporada, que afetam diretamente o condicionamento da matriz global. À medida que a falha se propaga pelo domínio, tal condição vai se agravando, podendo ocasionar não-convergência do processo iterativo. Duas são as possíveis causas da presença desses autovalores nulos:

- i. Falta de simetria nas formulações de elementos finitos;
- ii. A introdução de amolecimento de deformações nos modelos constitutivos.

Na formulação original dos elementos finitos com descontinuidade embutida, a equação de continuidade das forças de superfície na interface deve ser incluída, em sua forma forte, como descrito por Oliver et al. (2003), nas equações variacionais do problema. Com isso, novos graus de liberdade são introduzidos ao sistema de equações algébricas, de forma a acomodar os deslocamentos relativos entre as faces da descontinuidade. Neste acréscimo, as matrizes do MEF que estabelecem as relações cinemáticas (deslocamentos-deformações) e estáticas (equação de equilíbrio) deixam de ser coincidentes, resultando numa matriz de rigidez tangente assimétrica. A esta formulação, dá-se o nome de “formulação não-simétrica estaticamente e cinematicamente consistente”.

Cabe ressaltar que, dependendo da orientação da malha de elementos finitos em relação à trajetória da descontinuidade, a simetria da matriz de rigidez é recuperada e a formulação torna-se numericamente estável. Por exemplo, no caso de elementos finitos triangulares com funções de forma lineares, a referida direção favorável ocorre quando o segmento de descontinuidade em seu interior é paralelo ao lado do elemento, por ele não interceptado. Entretanto, o desconhecimento prévio da trajetória da descontinuidade ao longo do domínio sólido, faz com que a definição de uma malha com orientação favorável seja muitas vezes uma mera questão de sorte.

Surgem, a partir daí, as chamadas “formulações simétricas”, que podem ser classificadas essencialmente em dois tipos: (a) “estaticamente consistentes”, onde a aproximação cinemática é relaxada para garantir simetria da matriz de rigidez; e (b) “cinematicamente consistentes”, onde a condição de equilíbrio é relaxada, com o mesmo propósito.

As formulações simétricas, apesar de apresentar estabilidade numérica, introduzem novas aproximações e devem ser utilizadas com certo cuidado. No caso em que se mantém a consistência estática, por exemplo, é comum a ocorrência de travamento de tensões, que está associado a um aumento irreal da resistência estrutural em

função da ausência do esperado descarregamento elástico nas regiões próximas à interface descontínua após a bifurcação. Associando este resultado à diferença entre a ordem dos polinômios de aproximação das deformações regulares e das deformações inelásticas na CSDA, Oliver et al. (2003) propuseram uma readequação nestes termos, reduzindo em parte os erros cometidos. A formulação cinematicamente consistente, por outro lado, fornece uma baixa taxa de convergência com o refinamento da malha.

Mesmo com a utilização das formulações simétricas, de acordo com Oliver, Huespe, Blanco, e Linero (2006), as leis de amolecimento nos modelos constitutivos podem ser responsáveis pela ocorrência de autovalores negativos nos operadores tangentes consistentes, tornando-se uma possível fonte de autovalores nulos na matriz de rigidez do elemento. Desta forma, eles desenvolveram um novo algoritmo de integração das variáveis internas, cujo operador tangente consistente é uma matriz positiva-definida. Tal procedimento consiste em utilizar dois esquemas de integração em um mesmo passo de carga: um implícito e outro explícito.

#### **1.1.5.2 Desenvolvimentos Utilizando o MEC**

Os desenvolvimentos encontrados na literatura, referentes à aplicação da análise de descontinuidade forte ao MEC, são ainda relativamente restritos. Manzoli e Venturini (2004, 2007) foram os primeiros a tratar o tema, através da utilização de células constantes com descontinuidade embutida. Nestes trabalhos, o comportamento de fraturas em materiais parcialmente frágeis foi representado pela utilização de modelos elastoplásticos associativos com um critério de escoamento específico, capaz de suportar elasticamente os esforços de compressão. Uma lei de amolecimento exponencial foi adotada. Posteriormente, Pedrini (2008) e Manzoli et al. (2009) seguiram a mesma ideia utilizando um modelo de dano isotrópico.

No trabalho de Pedrini (2008), em particular, foram reportadas algumas instabilidades numéricas associadas à orientação dos segmentos de descontinuidade no interior das células, de forma semelhante ao verificado na formulação não-simétrica estaticamente e cinematicamente consistente do MEF. Tal fato motivou a elaboração de um algoritmo de geração automática das células, acompanhando a propagação da fissura. Este mesmo algoritmo foi apresentado em Manzoli et al. (2009).

Uma característica comum a todos estes trabalhos é a utilização apenas de células triangulares (somente domínios bidimensionais foram tratados), onde a função de regularização cinemática, que distribui os efeitos da descontinuidade por todo o domínio da célula, é definida a partir de considerações geométricas.

Quanto aos critérios de iniciação e propagação das fissuras, apenas a metodologia mais simples descrita anteriormente foi empregada, i.e., a descontinuidade forte tem início quando o critério de escoamento ou dano é atingido e sua direção é definida como perpendicular à tensão principal máxima.

## 1.2 Objetivos e Restrições

Como foi dito anteriormente, a imposição do regime de descontinuidade forte imediatamente após o fim do regime elástico não é o critério mais adequado para tratar o caráter transiente da zona de processo de fratura. Portanto, o principal objetivo desta tese é a extensão dos desenvolvimentos da CSDA via MEC, através da aplicação da análise de bifurcação, como critério para definir a localização de deformações, e a adoção de uma fase transitória com descontinuidades fracas, precedendo ao regime de descontinuidade forte. De forma resumida, a metodologia possui as seguintes etapas:

- i. Após o início do regime inelástico, a condição de bifurcação passa a ser verificada a cada iteração do processo de solução não-linear;

- ii. Quando a condição de bifurcação é satisfeita, as condições de descontinuidade forte são verificadas. Se elas também forem satisfeitas neste instante, o regime de descontinuidade forte é iniciado diretamente. Caso contrário, tem-se o regime com descontinuidades fracas, com a espessura da banda de localização,  $h = h_B$ , definida pelo valor corrente das variáveis internas do modelo constitutivo;
- iii. Uma lei de evolução da espessura da banda, pré-estabelecida e baseada nas variáveis internas do modelo constitutivo, é aplicada até que ela atinja o valor correspondente ao regime de descontinuidade forte:  $h = k \approx 0$ .

Todo este processo é acompanhado por um algoritmo de geração automática de células, semelhante, porém não idêntico, ao apresentado em Pedrini (2008) e Manzoli et al. (2009). Basicamente, sempre que a condição de bifurcação é satisfeita numa célula, uma outra é gerada, adjacientemente à anterior, a partir do lado que contém o ponto final do segmento de descontinuidade (fraca ou forte) recém estabelecido.

As análises são restritas aos problemas de estado plano com medidas lineares de deformação, porém, a função de regularização cinemática é construída a partir de funções de forma lineares associadas aos vértices da célula com descontinuidade embutida, permitindo o emprego de células não triangulares, diferentemente dos demais trabalhos utilizando o MEC, citados na subseção 1.1.5.2.

Apesar da metodologia ser suficientemente adequada para simular qualquer tipo de descontinuidade, neste trabalho apenas a propagação de trincas em materiais parcialmente frágeis (como o concreto) foi abordada. Para tal, um modelo constitutivo de dano isotrópico, que considera as diferentes resistências à tração e à compressão, foi adotado.

## 1.3 Desenvolvimento Numérico

O desenvolvimento numérico deste trabalho foi realizado no sistema computacional *INteractive Structural ANalysis Environment* (INSANE), que trata-se de um software livre, desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais. Tal sistema utiliza a linguagem JAVA, seguindo o paradigma de programação orientada a objetos (POO), e foi inicialmente idealizado para utilização do MEF. Posteriormente outros métodos numéricos foram integrados ao programa.

As primeiras implementações do MEC tiveram início em 2011 e renderam alguns trabalhos em elasticidade, envolvendo aplicações, como em Maia et al. (2013), e formulações específicas, como em Anacleto et al. (2013).

Para o tratamento de problemas não-lineares, foi necessário realizar algumas adaptações à formulação implícita do MEC, desenvolvida originalmente por Telles e Carrer (1991), de modo a integra-la à estratégia de solução já implementada no INSANE. Tal estratégia baseia-se no algoritmo descrito em Yang e Shieh (1990) e utiliza um arcabouço numérico de modelagem constitutiva, desenvolvido por Penna (2011). As referidas adaptações são detalhadas em Peixoto et al. (2016).

## 1.4 Organização do Texto

O texto desta tese está organizado em mais seis capítulos.

O próximo capítulo trata da análise de bifurcação como condição necessária à ocorrência da localização de deformações. As ideias gerais desta análise e sua formulação matemática, independentemente do modelo constitutivo, são abordadas inicialmente. Na sequência, todos os elementos de um modelo constitutivo (contínuo) de

dano isotrópico são apresentados, destacando-se o modelo utilizado nesta tese, caracterizado por uma expressão da deformação equivalente que privilegia a evolução do dano em estados predominantemente de tração. Por fim, a análise de bifurcação é particularizada para este modelo.

Os regimes com descontinuidades fracas e fortes são detalhados no capítulo 3. Inicia-se o capítulo pelo estabelecimento de equações cinemáticas regularizadas, capazes de representar ambos casos. A análise de descontinuidade forte é então apresentada, determinando todos os elementos do modelo constitutivo discreto (ou coesivo), associado ao contínuo. Consequentemente, as equações de compatibilidade que compõem as condições de descontinuidade forte, além de uma relação entre os módulos de amolecimento dos dois modelos, ficam definidas. Na sequência, a partir da análise da energia consumida para geração da fissura, expressões para o módulo de amolecimento do modelo discreto são obtidas. O capítulo é concluído com a descrição do modelo de banda variável, onde a etapa transitória com descontinuidades fracas possui papel fundamental.

As equações integrais com campos iniciais, utilizadas no MEC para o tratamento de problemas fisicamente não lineares são apresentadas nos capítulo 4. Inicialmente, consideram-se campos iniciais contínuos, sem a presença de descontinuidades, importantes para a descrição da etapa inelástica anterior à bifurcação. Posteriormente, são deduzidas as equações integrais considerando a presença de superfícies descontínuas.

No capítulo 5, a discretização das equações integrais via MEC é detalhada. As equações algébricas, oriundas deste processo, são então organizadas, gerando uma única equação de equilíbrio global, correspondente à formulação implícita não-linear do MEC. A estratégia de solução adotada, assim como o algoritmo de geração automática de células, são apresentados na sequência.

Os capítulos 6 e 7 são destinados, respectivamente, aos exemplos numéricos e às conclusões finais.

## Capítulo 2

# Localização de Deformações num Modelo de Dano Isotrópico

Este Capítulo aborda as condições necessárias para a ocorrência de bifurcação descontínua em meios materiais que apresentam leis de amolecimento em sua formulação constitutiva contínua ou macroscópica. Por bifurcação, entende-se o instante do carregamento inelástico no qual o campo de deformações deixa de ser contínuo, o que não corresponde necessariamente ao aparecimento de descontinuidades no campo de deslocamentos. Tem-se, neste caso, o surgimento das chamadas superfícies de descontinuidade fraca. A partir daí, bandas de localização de deformações (regiões de elevados valores deste campo) podem se formar, delimitadas por tais superfícies.

À localização de deformações em meios homogêneos com amolecimento, associa-se a perda do caráter elíptico do conjunto de equações diferenciais e, conseqüentemente, o problema de valor de contorno torna-se mal definido. Com isso, a solução deixa de ser única e, nas análises numéricas, uma falta de objetividade em relação ao refino de malhas é verificado, visto que a solução mais estável corresponde a uma banda de localização de espessura nula sem dissipação de energia durante a falha.

Estas questões são ilustradas a partir de um problema unidimensional simples, seguido pelo estabelecimento das condições gerais de bifurcação em modelos constitutivos independentes do tempo. Posteriormente, modelos contínuos de dano isotrópico

são apresentados e, finalmente, a análise de bifurcação completa, para o modelo utilizado nesta tese, é detalhada.

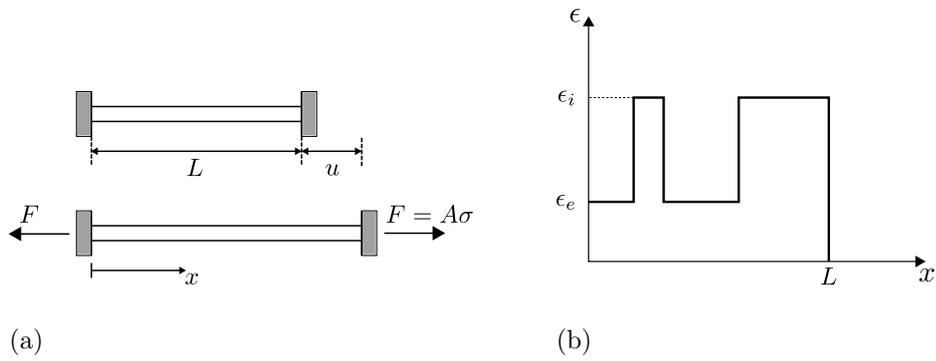
## 2.1 Localização de Deformações

A localização de deformações, caracterizada pela concentração de elevados gradientes de deslocamentos numa banda estreita, pode ser entendida como uma instabilidade material associada principalmente à presença de amolecimento na modelagem constitutiva macroscópica. O caráter material desta instabilidade fica claro quando verifica-se a possibilidade de sua ocorrência mesmo em configurações com estados de tensão homogêneos, como ilustrado a seguir num problema unidimensional simples. Na sequência, as condições necessárias para bifurcação são formalizadas para modelos constitutivos independentes do tempo, i.e., modelos nos quais o tensor constitutivo tangente não depende da magnitude da taxa das deformações.

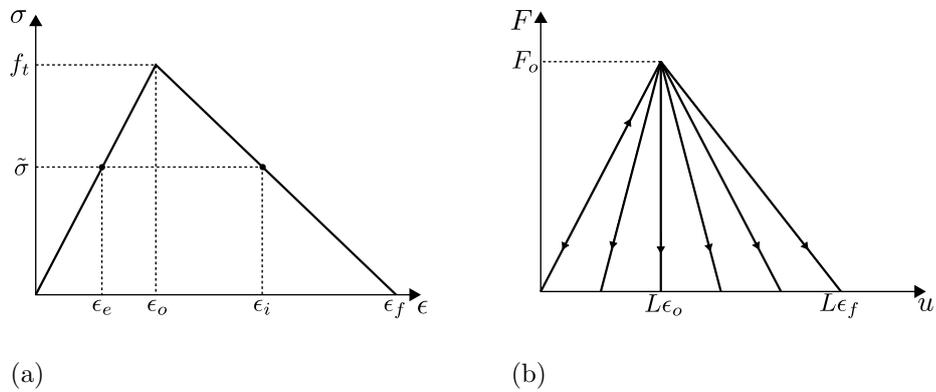
### 2.1.1 Exemplo Unidimensional Ilustrativo

A falta de unicidade das soluções analíticas e de objetividade quanto ao refino de malhas nas soluções numéricas são ilustradas aqui através de um exemplo unidimensional, como apresentado por Jirásek (2007). Considera-se uma barra de secção transversal constante  $A$  e comprimento total  $L$ , sujeita a tração uniaxial, conforme apresentado na figura 2.1a.

Para o comportamento constitutivo do material, assume-se a relação tensão-deformação ( $\sigma$ - $\epsilon$ ) da figura 2.2a, caracterizada por amolecimento linear após uma tensão de pico  $f_t$ , ao final do ramo elástico. A deformação na qual a barra perde sua capacidade de transmitir tensão é denominada  $\epsilon_f$ , enquanto que a tensão máxima corresponde à deformação  $\epsilon_o = f_t/E$ , onde  $E$  é o módulo de elasticidade do material.



**Figura 2.1:** (a) Barra sob tração, (b) distribuição de deformações, contínuas por partes.



**Figura 2.2:** (a) Diagrama tensão-deformação com amolecimento linear, (b) diagrama força-deslocamento com diferentes comportamentos pós-pico admissíveis.

Ao aplicar-se um deslocamento  $u$  ao suporte à direita da barra, a resposta permanece linear elástica até o valor  $u_o = L\epsilon_o$ , correspondente a uma força de reação máxima  $F_o = Af_t$  (figura 2.2b). Após este instante, a barra começa a perder resistência, sendo que, em cada secção transversal, a tensão pode diminuir acompanhada de um aumento de deformação (carregamento inelástico com amolecimento) ou de uma redução de deformação (descarregamento elástico). A condição de equilíbrio estático impõe que o perfil de tensão permaneça uniforme ao longo da barra, porém, para um dado nível de tensão  $\tilde{\sigma}$ , entre zero e  $f_t$ , existem dois valores possíveis para a deformação:  $\epsilon_e$  e  $\epsilon_i$  (figura 2.2a). Desta forma, a distribuição de deformações não precisa necessariamente manter-se uniforme, podendo assumir uma configuração arbitrária, contínua por partes variando entre  $\epsilon_e$  e  $\epsilon_i$ , como ilustrado na figura 2.1b.

Adota-se agora o termo  $L_i$  para designar o comprimento acumulado dos trechos sob amolecimento, enquanto que  $L_e = L - L_i$  refere-se à soma dos trechos em descarregamento elástico. Quando a tensão se anula, a deformação nas regiões com amolecimento atingem o valor  $\epsilon_i = \epsilon_f$ , já nas regiões com descarregamento tem-se  $\epsilon_e = 0$ . Com isso, o alongamento final da barra é dado por  $u_f = L_i\epsilon_i + L_e\epsilon_e = L_i\epsilon_f$ . No entanto, deve-se perceber que o comprimento  $L_i$  é indeterminado a priori, podendo assumir qualquer valor entre zero e  $L$  e, desta forma, infinitas soluções são admissíveis para o ramo inelástico, como representado na figura 2.2b. Este espectro de soluções é delimitado de um lado pelo caso de amolecimento total ( $L_i = L$  e  $u_f = L\epsilon_f$ ) e, por outro, pela condição de descarregamento uniforme ( $L_e = L$  e  $u_f = 0$ ). Na realidade, esta última situação representa o descarregamento elástico num momento imediatamente antes do início do regime inelástico e nenhuma dissipação de energia chega a ocorrer.

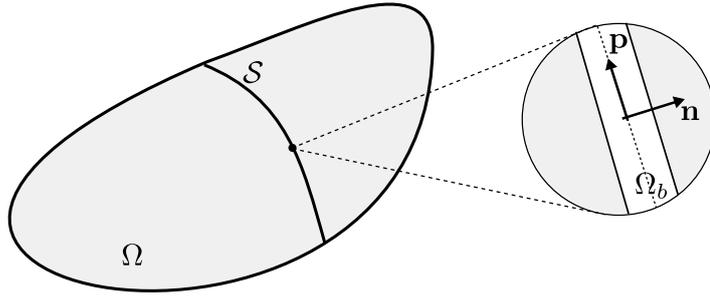
No caso das soluções numéricas, o comprimento  $L_i$  pode ser associado ao tamanho dos elementos de discretização adotados. A perturbação responsável pelo desencadeamento da localização de deformações pode ter origem física, por exemplo, a partir da adoção de uma região de menor resistência, ou ter origem numérica, quando a uniformidade dos campos é desfeita por truncamento dos resultados.

### 2.1.2 Análise de Bifurcação Descontínua

De maneira geral, a bifurcação não coincide com o momento de início do regime inelástico, como no exemplo adotado na seção 2.1.1. Normalmente, do ponto de vista macroscópico, ela é precedida por uma fase de dissipação em meio contínuo. Desta forma, a partir de um formalismo matemático válido para modelos constitutivos independentes do tempo, as condições necessárias para o aparecimento de localização de deformações são estabelecidas nesta seção.

Inicia-se assumindo um domínio sólido tridimensional e homogêneo  $\Omega$ , sujeito a um

estado uniforme de pequenas deformações  $\epsilon_{ij}$ . Buscam-se, então, as condições necessárias para que a taxa do campo de deformações,  $\dot{\epsilon}_{ij}$ , possa tornar-se descontínua em duas superfícies que delimitam uma banda  $\Omega_b \subset \Omega$ , como indicado na figura 2.3. Assume-se também, que as duas superfícies possuem planos tangentes paralelos no ponto em análise, de forma que uma única base ortonormal  $\{\mathbf{n}, \mathbf{p}, \mathbf{q}\}$  possa ser estabelecida, onde  $\mathbf{n}$  é o vetor unitário normal a estes planos.



**Figura 2.3:** Domínio sólido com localização de deformações.

Considerando agora que a taxa de deslocamentos,  $\dot{u}_i$ , permaneça contínua nas duas superfícies, tem-se:

$$[[\partial_{\mathbf{q}} \dot{u}_i]] = [[\dot{u}_{i,j}]] q_j = 0 \quad (2.1a)$$

$$[[\partial_{\mathbf{p}} \dot{u}_i]] = [[\dot{u}_{i,j}]] p_j = 0 \quad (2.1b)$$

onde  $[[\cdot]]$  representa a diferença entre os valores de  $(\cdot)$ , dentro e fora da banda de localização, enquanto que  $\partial_{\mathbf{q}}(\cdot)$  e  $\partial_{\mathbf{p}}(\cdot)$  são as derivadas direcionais de  $(\cdot)$ , respectivamente nas direções de  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{p}$ .

Das equações 2.1a e 2.1b, para que haja descontinuidade na taxa das deformações, deve-se ter:

$$[[\dot{u}_{i,j}]] n_j = \dot{\alpha} m_i \neq 0 \Rightarrow [[\dot{u}_{i,j}]] = \dot{\alpha} m_i n_j \quad (2.2)$$

donde  $\dot{\alpha}$  é um escalar correspondente à magnitude do salto no campo de velocidades e  $m_i$  é um vetor unitário referente à direção deste salto. Pode-se notar ainda que o ângulo entre os vetores  $n_i$  e  $m_i$  determina o modo de falha, que pode variar desde

a abertura simples, quando eles são paralelos (modo I), até o cisalhamento puro, quando eles são perpendiculares entre si (modo II). Para ângulos intermediários, tem-se os chamados modos mistos.

Como consequência da equação 2.2, a taxa das deformações deve satisfazer a seguinte equação de compatibilidade:

$$[[\dot{\epsilon}_{ij}]] = \frac{1}{2}([[u_{i,j}] + [u_{j,i}]]) = \frac{1}{2}(m_i n_j + m_j n_i) \dot{\alpha} \quad (2.3)$$

Por outro lado, a condição de equilíbrio estabelece que as forças de superfície, assim como suas taxas, devem ser contínuas nas superfícies de descontinuidade fraca, i.e.,

$$[[\dot{\sigma}_{ij} n_j]] = [[\dot{\sigma}_{ij}]] n_j = 0 \quad (2.4)$$

onde  $\sigma_{ij}$  é o tensor de tensões de Cauchy.

Os incrementos de tensão e deformação relacionam-se através de um tensor constitutivo tangente de quarta ordem,  $E_{ijkl}^t$ , na forma:

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}^t \dot{\epsilon}_{kl} \quad (2.5)$$

No caso de modelos constitutivos independentes do tempo,  $E_{ijkl}^t$  não depende da magnitude da taxa de deformações, porém pode haver dependência quanto a sua direção. Desta forma, para manter a generalidade, distinguem-se os tensores tangentes dentro,  $E_{ijkl}^{t,\Omega_b}$ , e fora,  $E_{ijkl}^{t,\Omega \setminus \Omega_b}$ , da banda de localização. Com isso, aplicando as equações 2.5 e 2.3 à equação 2.4 e considerando as simetrias  $\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ji}$ ,  $\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ji}$  e  $E_{ijkl}^t = E_{jilk}^t$ , obtém-se o seguinte resultado:

$$(n_i E_{ijkl}^{t,\Omega_b} n_l) \dot{\alpha} m_k = n_i (E_{ijkl}^{t,\Omega \setminus \Omega_b} - E_{ijkl}^{t,\Omega_b}) \dot{\epsilon}_{kl}^{\Omega \setminus \Omega_b} \quad (2.6)$$

onde  $\epsilon_{kl}^{\Omega \setminus \Omega_b}$  representa o campo de deformações na região externa à banda de localização.

Neste ponto, pode-se diferenciar entre bifurcação descontínua, quando, de fato,  $E_{ijkl}^{t,\Omega_b} \neq E_{ijkl}^{t,\Omega \setminus \Omega_b}$ , e bifurcação contínua, quando os tensores constitutivos tangentes dentro e fora da banda de localização são os mesmos. Neste último caso, a

equação 2.6 assume a forma:

$$(n_i E_{ijkl}^t n_l) m_k = Q_{jk} m_k = 0 \quad (2.7)$$

onde  $Q_{jk}$  é denominado tensor de localização ou tensor acústico. Este segundo termo é adotado por questões históricas, visto que em problemas elásticos, os autovalores deste tensor, divididos pela massa específica do material, estão associados às velocidades de propagação de ondas no meio sólido (van der Giessen e de Borst, 1998).

Rice e Rudnicki (1980) mostraram que a condição de bifurcação contínua corresponde a um caso limite da condição de bifurcação descontínua, com tendência a ocorrer prioritariamente durante o carregamento inelástico. Desta forma, a equação 2.7 pode ser entendida como o caso mais desfavorável para a ocorrência de bifurcação descontínua e será adotada neste trabalho como condição necessária para o início da localização de deformações.

Deve-se perceber também, que a solução trivial da equação 2.7,  $m_k = 0$ , corresponde a  $[\dot{\epsilon}_{ij}] = 0$  e, portanto, a localização terá início somente quando  $Q_{jk}$  for singular, i.e., a condição de bifurcação passa a ser:

$$\det(Q_{jk}) = \det(n_i E_{ijkl}^t n_l) = 0 \quad (2.8)$$

## 2.2 Modelos de Dano Isotrópico

Para dano isotrópico em meios materiais homogêneos sujeitos a pequenos deslocamentos, a energia livre de Helmholtz é dada por:

$$\psi(\epsilon_{ij}, r) = [1 - D(r)]\psi_o(\epsilon_{ij}); \quad \psi_o(\epsilon_{ij}) = \frac{1}{2}\epsilon_{ij} E_{ijkl}^o \epsilon_{kl} \quad (2.9)$$

onde  $\epsilon_{ij}$  é o tensor de deformações, obtido da parte simétrica do gradiente do campo de deslocamentos,  $r$  é a variável interna escalar do tipo deformação ( $r \in [r_o, \infty)$ ;

$r_o = r|_{t=0}$ ),  $D$  é a variável de dano ( $D \in [0, 1]$ ) e  $E_{ijkl}^o$  representa o tensor constitutivo elástico para materiais isotrópicos, dado por:

$$E_{ijkl}^o = \bar{\lambda}\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (2.10)$$

sendo  $\delta_{ij}$  o delta de Kronecker e

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}; \quad \bar{\lambda} = \frac{2\mu\bar{\nu}}{1 - 2\bar{\nu}} \quad (2.11)$$

onde  $E$  é o modulo de elasticidade,  $\nu$  o coeficiente de Poisson e

$$\bar{\nu} = \begin{cases} \nu & \text{para 3D e Estado Plano de Deformações} \\ \frac{\nu}{1 + \nu} & \text{para Estado Plano de Tensões} \end{cases} \quad (2.12)$$

Uma equação constitutiva, relacionando o tensor de tensões de Cauchy,  $\sigma_{ij}$ , às deformações, pode ser obtida da equação 2.9 na forma:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial\psi(\epsilon_{ij}, r)}{\partial\epsilon_{ij}} = (1 - D)E_{ijkl}^o\epsilon_{kl} = E_{ijkl}\epsilon_{kl} \quad (2.13)$$

onde  $E_{ijkl} = (1 - D)E_{ijkl}^o$  é denominado tensor (ou operador) secante da relação constitutiva.

À variável interna do tipo deformação, pode-se definir uma outra, termodinamicamente conjugada, do tipo tensão,  $q$  ( $q \in [0, r_o]$ ;  $q|_{t=0} = r_o$ ), tal que a variável de dano fique definida por:

$$D(r) = 1 - \frac{q(r)}{r} \quad (2.14)$$

De forma similar aos modelos de plasticidade, podem-se estabelecer delimitações para o domínio elástico, a partir de funções de dano específicas, nos espaços das deformações ou tensões. Genericamente, para tais funções, escreve-se:

$$F(\sigma_{ij}, q) = \tau_\sigma(\sigma_{ij}) - q \quad (\text{espaço das tensões}) \quad (2.15a)$$

$$\bar{F}(\epsilon_{ij}, r) = \tau_\epsilon(\epsilon_{ij}) - r \quad (\text{espaço das deformações}) \quad (2.15b)$$

e os respectivos domínios elásticos são dados por:

$$\mathbb{E}_\sigma := \{\sigma_{ij} | F(\sigma_{ij}, q) < 0\} \quad (\text{espaço das tensões}) \quad (2.16a)$$

$$\mathbb{E}_\epsilon := \{\epsilon_{ij} | \bar{F}(\epsilon_{ij}, r) < 0\} \quad (\text{espaço das deformações}) \quad (2.16b)$$

Diferentes critérios de dano são determinados por escolhas particulares dos termos  $\tau_\sigma$  ou  $\tau_\epsilon$ . As equações 2.15a e 2.15b devem ser equivalentes do ponto de vista constitutivo e usualmente, adota-se especificar apenas o termo  $\tau_\epsilon$ , também conhecido como *deformação equivalente*. Desta forma, alguns critérios de dano disponíveis na literatura são particularizados na tabela 2.1.

**Tabela 2.1:** Deformações equivalentes para alguns modelos de dano isotrópico.

Referência	$\tau_\epsilon$
Mazars e Lemaitre (1984)	$\sqrt{\epsilon_{ij}\epsilon_{ij}}$
Simo e Ju (1987)	$\sqrt{\epsilon_{ij}E_{ijkl}^o\epsilon_{kl}}$
Lemaitre e Chaboche (1990)	$\sqrt{\frac{1}{E}\epsilon_{ij}E_{ijkl}^o\epsilon_{kl}}$
Oliver, Huespe, Blanco, e Linero (2006)	$\sqrt{\epsilon_{ij}^+E_{ijkl}^o\epsilon_{kl}}$

Especificamente na expressão referente a Oliver, Huespe, Blanco, e Linero (2006), o tensor  $\epsilon_{ij}^+$  é definido (num sistema de coordenadas alinhado com as direções principais de deformação) por:

$$\epsilon_{ij}^+ = \sum_{k=1}^{n_{dim}} \langle \epsilon_k \rangle \hat{\mathbf{e}}_k \otimes \hat{\mathbf{e}}_k \quad (2.17)$$

onde  $\epsilon_k$  representa a  $k$ -ésima deformação principal,  $\hat{\mathbf{e}}_k$  é um vetor unitário na direção principal correspondente e  $\langle \epsilon_k \rangle = (|\epsilon_k| + \epsilon_k)/2$ . Desta forma, a degradação ocorre preferencialmente em estados de tração e este modelo torna-se particularmente adequado para ser utilizado na representação de materiais parcialmente frágeis.

A superfície que delimita a região elástica deve evoluir apenas durante carregamentos

inelásticos, i.e., quando  $\dot{r} \neq 0$ , o que dá origem às chamadas condições de Kuhn-Tucker e de consistência:

$$\bar{F} \leq 0; \quad \dot{r} \geq 0; \quad \dot{r}\bar{F} = 0; \quad \underbrace{\dot{r}\bar{F} = 0}_{\text{consistência}} \quad (2.18)$$

Deve-se ainda, definir uma regra de endurecimento que governe a evolução da variável interna do tipo tensão. Isto pode ser feito pela seguinte expressão:

$$\dot{q} = H(r)\dot{r} \quad (2.19)$$

onde  $H$  é o módulo de endurecimento-amolecimento. Especificamente, tem-se amolecimento quando  $H < 0$ .

Finalmente, uma relação constitutiva incremental, para condição de carregamento inelástico ( $\dot{r} = \dot{\tau}_\epsilon$ ), pode ser obtida a partir da equação 2.13, i.e.,

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij} &= (1 - D)E_{ijkl}^o \dot{\epsilon}_{kl} - \dot{D}E_{ijkl}^o \epsilon_{kl} \\ &= E_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} - \left( \frac{\partial D}{\partial r} \right) \dot{r} E_{ijkl}^o \epsilon_{kl} \\ &= \left[ E_{ijkl} - \left( \frac{\partial D}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial \tau_\epsilon}{\partial \epsilon_{kl}} \right) E_{ijrs}^o \epsilon_{rs} \right] \dot{\epsilon}_{kl} \\ &= E_{ijkl}^t \dot{\epsilon}_{kl} \end{aligned} \quad (2.20)$$

onde  $E_{ijkl}^t$  é o tensor constitutivo (ou operador) tangente, apresentado anteriormente na equação 2.5. Deve-se notar também, que para o caso de descarregamento ou carga neutra tem-se  $\dot{D} = \dot{r} = 0$  e, portanto,  $E_{ijkl}^t = E_{ijkl}$  nestas condições.

## 2.3 Análise de Bifurcação Descontínua num Modelo de Dano Isotrópico

Neste trabalho, adota-se o modelo de dano isotrópico com o critério de dano descrito em Oliver, Huespe, Blanco, e Linero (2006) (ver tabela 2.1) para representação dos efeitos dissipativos. Portanto, nesta seção, a análise de bifurcação descontínua,

apresentada genericamente na seção 2.1.2, é particularizada e pormenorizada para tal modelo. Inicialmente, deve-se reescrever o operador tangente, apresentado na equação 2.20, em uma forma mais adequada. Para tal, tem-se das equações 2.14 e 2.19 que

$$\frac{\partial D}{\partial r} = \frac{q - Hr}{r^2} \quad (2.21)$$

enquanto que da tabela 2.1 obtém-se:

$$\frac{\partial \tau_\epsilon}{\partial \epsilon_{kl}} = \frac{1}{\tau_\epsilon} \epsilon_{ij}^+ E_{ijkl}^o = \frac{1}{r} E_{klij}^o \epsilon_{ij}^+ \quad (2.22)$$

A substituição das equações 2.21 e 2.22 na equação 2.20 leva ao seguinte resultado:

$$E_{ijkl}^t = \frac{q}{r} E_{ijkl}^o - \left( \frac{q - Hr}{r^3} \right) \bar{\sigma}_{ij} \bar{\sigma}_{kl}^+ \quad (2.23)$$

onde,  $\bar{\sigma}_{ij}$  é usualmente denominada tensão efetiva e

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{1 - D} = E_{ijkl}^o \epsilon_{kl}; \quad \bar{\sigma}_{ij}^+ = E_{ijkl}^o \epsilon_{kl}^+ \quad (2.24)$$

A partir da equação 2.23, o tensor de localização, definido na equação 2.7, pode ser reescrito na seguinte forma:

$$\begin{aligned} Q_{jk} &= n_i E_{ijkl}^t n_l = \frac{q}{r} n_i E_{ijkl}^o n_l - \left( \frac{q - Hr}{r^3} \right) n_i \bar{\sigma}_{ij} \bar{\sigma}_{kl}^+ n_l \\ &= \frac{q}{r} Q_{ji}^e \left[ \delta_{ik} - \left( \frac{q - Hr}{qr^2} \right) \bar{t}_m Q_{mi}^{e,-1} \bar{t}_k^+ \right] \end{aligned} \quad (2.25)$$

onde

$$Q_{jk}^e = n_i E_{ijkl}^o n_l; \quad \bar{t}_i = \bar{\sigma}_{ij} n_j; \quad \bar{t}_i^+ = \bar{\sigma}_{ij}^+ n_j \quad (2.26)$$

Aplicando a equação 2.25 à condição de bifurcação da equação 2.8, tem-se

$$\det(Q_{jk}) = \frac{q}{r} \det(Q_{ji}^e) \det \left[ \delta_{ik} - \left( \frac{q - Hr}{qr^2} \right) \bar{t}_m Q_{mi}^{e,-1} \bar{t}_k^+ \right] = 0 \quad (2.27)$$

No entanto, como  $r$ ,  $q$  e  $\det(Q_{ji}^e)$  são sempre positivos, esta condição se reduz a

$$\det \left[ \delta_{ik} - \left( \frac{q - Hr}{qr^2} \right) \bar{t}_m Q_{mi}^{e,-1} \bar{t}_k^+ \right] = 0 \quad (2.28)$$

ou, utilizando a propriedade  $\det(\delta_{ij} - a_i b_j) = 1 - a_i b_i$ , válida para quaisquer vetores arbitrários  $a_i$  e  $b_i$ ,

$$1 - \frac{q - Hr}{qr^2} \left[ \underbrace{\bar{t}_m Q_{mi}^{e,-1} \bar{t}_i^+}_{\tau_{\bar{t}}^2} \right] = 0 \quad (2.29)$$

onde  $\tau_{\bar{t}} = \sqrt{\bar{t}_m Q_{mi}^{e,-1} \bar{t}_i^+}$ .

Da equação 2.29, é possível escrever uma expressão para valores do módulo de amolecimento,  $H$ , de forma que a condição de bifurcação possa ser satisfeita, para um dado estado de deformações, em termos de valores arbitrários da normal unitária,  $\hat{n}_i$ , i.e.,

$$\check{H}(\hat{n}_i) = \frac{q}{r} \left[ 1 - \frac{r^2}{\tau_{\bar{t}}^2(\hat{n}_i)} \right] \quad (2.30)$$

O conjunto de valores  $\check{H}(\hat{n}_i)$ , obtidos da equação 2.30 para todos os  $\hat{n}_i$  possíveis, num dado instante e num dado ponto material, pode então ser definido formalmente pela seguinte expressão:

$$\mathbb{G} := \left\{ \check{H}(\hat{n}_i) \in \mathbb{R} \mid \exists \hat{n}_i \in \mathbb{R}^{ndim}, \hat{n}_i \hat{n}_i = 1, \check{H} = \frac{q}{r} \left[ 1 - \frac{r^2}{\tau_{\bar{t}}^2(\hat{n}_i)} \right] \right\} \quad (2.31)$$

Desta forma, o problema de encontrar um valor crítico para o módulo de amolecimento, correspondente à condição necessária para bifurcação, resume-se a um problema de otimização do tipo:

$$H^{crit} = \max_{\check{H}(\hat{n}_i) \in \mathbb{G}} [\check{H}(\hat{n}_i)] \quad (2.32)$$

O vetor normal à banda de localização,  $n_i$ , por sua vez, fica definido por:

$$n_i^{crit} := \hat{n}_i \quad \text{tal que} \quad \check{H}(\hat{n}_i) = H^{crit} \quad (2.33)$$

A seguir, expressões analíticas para  $H^{crit}$  e  $n_i^{crit}$  são obtidas para problemas de estado plano.

### 2.3.1 Estado Plano de Tensões

No caso de estado plano de tensões, o tensor acústico elástico, definido na equação 2.26, assume a seguinte forma, após o emprego das equações 2.10, 2.11 e 2.12:

$$Q_{jk}^e = n_i E_{ijkl}^o n_l = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \frac{1+\nu}{2} n_j n_k + \frac{1-\nu}{2} \delta_{jk} \right] \quad (2.34)$$

Reescrevendo-o na mesma base ortonormal  $\{\mathbf{n}, \mathbf{p}, \mathbf{q}\}$ , definida na seção 2.1.2 (ver figura 2.3), tem-se, na forma matricial,

$$\mathbf{Q}^e = \begin{bmatrix} Q_{nn}^e & Q_{np}^e \\ Q_{pn}^e & Q_{pp}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Daí, invertendo a equação 2.35, obtém-se:

$$(\mathbf{Q}^e)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1-\nu^2}{E} & 0 \\ 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Da mesma forma, os vetores da equação 2.26, nessa base alinhada à banda de localização, podem ser escritos como:

$$\bar{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{nn} & \bar{\sigma}_{np} \\ \bar{\sigma}_{pn} & \bar{\sigma}_{pp} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{nn} \\ \bar{\sigma}_{pn} \end{Bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{t}}^+ = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{nn}^+ & \bar{\sigma}_{np}^+ \\ \bar{\sigma}_{pn}^+ & \bar{\sigma}_{pp}^+ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{nn}^+ \\ \bar{\sigma}_{pn}^+ \end{Bmatrix} \quad (2.37)$$

Substituindo as equações 2.36 e 2.37 na norma  $\tau_{\bar{t}}$ , apresentada na equação 2.29, tem-se:

$$\begin{aligned} \tau_{\bar{t}}^2 &= \left\{ \bar{\sigma}_{nn} \quad \bar{\sigma}_{pn} \right\} \begin{bmatrix} \frac{1-\nu^2}{E} & 0 \\ 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{nn}^+ \\ \bar{\sigma}_{pn}^+ \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1-\nu^2}{E} \bar{\sigma}_{nn} \bar{\sigma}_{nn}^+ + \frac{2(1+\nu)}{E} \bar{\sigma}_{pn} \bar{\sigma}_{pn}^+ \end{aligned} \quad (2.38)$$

Por outro lado, das equações 2.10, 2.15b (levando-se em conta a tabela 2.1) e 2.24, pode-se escrever, para o caso de carregamento inelástico,

$$\begin{aligned} r^2 &= \bar{\sigma}_{ij} E_{ijkl}^{o,-1} \bar{\sigma}_{kl}^+ = \bar{\sigma}_{ij} \left[ \frac{1+\nu}{2E} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \delta_{kl} \right] \bar{\sigma}_{kl}^+ \\ &= \frac{1}{E} \left[ (1+\nu) \bar{\sigma}_{ij} \bar{\sigma}_{ij}^+ - \nu \bar{\sigma}_{ii} \bar{\sigma}_{jj}^+ \right] \end{aligned} \quad (2.39)$$

ou, na base  $\{\mathbf{n}, \mathbf{p}, \mathbf{q}\}$ ,

$$r^2 = \frac{1 + \nu}{E}(\bar{\sigma}_{nn}\bar{\sigma}_{nn}^+ + \bar{\sigma}_{pp}\bar{\sigma}_{pp}^+ + 2\bar{\sigma}_{pn}\bar{\sigma}_{pn}^+) - \frac{\nu}{E}(\bar{\sigma}_{nn} + \bar{\sigma}_{pp})(\bar{\sigma}_{nn}^+ + \bar{\sigma}_{pp}^+) \quad (2.40)$$

Assim, tomando-se a diferença entre as equações 2.40 e 2.38, chega-se ao seguinte resultado:

$$\begin{aligned} r^2 - \tau_i^2 &= \left(\frac{\nu^2}{E}\right)\bar{\sigma}_{nn}\bar{\sigma}_{nn}^+ + \left(\frac{1}{E}\right)\bar{\sigma}_{pp}\bar{\sigma}_{pp}^+ - \left(\frac{\nu}{E}\right)(\bar{\sigma}_{nn}\bar{\sigma}_{pp}^+ + \bar{\sigma}_{pp}\bar{\sigma}_{nn}^+) \\ &= \frac{1}{E} \left[ \nu\bar{\sigma}_{nn} \underbrace{(\nu\bar{\sigma}_{nn}^+ - \bar{\sigma}_{pp}^+)}_{-E\epsilon_{pp}^+} + \bar{\sigma}_{pp} \underbrace{(\bar{\sigma}_{pp}^+ - \nu\bar{\sigma}_{nn}^+)}_{E\epsilon_{pp}^+} \right] \\ &= \epsilon_{pp}^+ \underbrace{[\bar{\sigma}_{pp} - \nu\bar{\sigma}_{nn}]}_{E\epsilon_{pp}} = E\epsilon_{pp}\epsilon_{pp}^+ \end{aligned} \quad (2.41)$$

Considerando, agora, uma outra base ortonormal formada pelas direções principais das deformações,  $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$ , sendo  $\hat{\mathbf{e}}_3$  perpendicular ao plano do problema ( $\hat{\mathbf{e}}_3 \equiv \mathbf{q}$ ), e denominando por  $\theta$  o ângulo entre  $\hat{\mathbf{e}}_1$  e a normal à banda de localização, é possível estabelecer as relações

$$\begin{aligned} \epsilon_{pp} &= p_i \epsilon_{ij} p_j = \begin{Bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{Bmatrix} \\ &= (\epsilon_1 - \epsilon_2) \sin^2 \theta + \epsilon_2 \end{aligned} \quad (2.42)$$

e

$$\begin{aligned} \epsilon_{pp}^+ &= p_i \epsilon_{ij}^+ p_j = \begin{Bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \langle \epsilon_1 \rangle & 0 \\ 0 & \langle \epsilon_2 \rangle \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{Bmatrix} \\ &= (\langle \epsilon_1 \rangle - \langle \epsilon_2 \rangle) \sin^2 \theta + \langle \epsilon_2 \rangle \end{aligned} \quad (2.43)$$

onde  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$  são as deformações principais no plano e  $\epsilon_1 > \epsilon_2$ .

Substituindo, então, a equação 2.41 na equação 2.30 e levando em conta os resultados das equações 2.42 e 2.43, obtém-se:

$$\check{H}(\theta) = \frac{q}{r} \left[ 1 - \frac{r^2}{r^2 - E\epsilon_{pp}(\theta)\epsilon_{pp}^+(\theta)} \right] \quad (2.44)$$

e a condição de bifurcação da equação 2.32 fica reescrita na forma:

$$H^{crit} = \max_{\theta \in [-\pi, \pi]} [\check{H}(\theta)] \quad (2.45)$$

o que corresponde a minimizar o termo  $\epsilon_{pp}\epsilon_{pp}^+$  para  $\theta \in [-\pi, \pi]$ .

Desta forma, faz-se

$$\frac{\partial(\epsilon_{pp}\epsilon_{pp}^+)}{\partial(\sin^2\theta)} = 2(\epsilon_1 - \epsilon_2)(\langle\epsilon_1\rangle - \langle\epsilon_2\rangle)\sin^2\theta + \langle\epsilon_2\rangle(\epsilon_1 - \epsilon_2) + \epsilon_2(\langle\epsilon_1\rangle - \langle\epsilon_2\rangle) = 0 \quad (2.46)$$

que resulta em

$$\sin^2\theta = \mathcal{G}(\epsilon_1, \epsilon_2) = -\left[\frac{\epsilon_2(\langle\epsilon_1\rangle - \langle\epsilon_2\rangle) + \langle\epsilon_2\rangle(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{2(\epsilon_1 - \epsilon_2)(\langle\epsilon_1\rangle - \langle\epsilon_2\rangle)}\right] \quad (2.47)$$

e, considerando que

$$\frac{\partial^2(\epsilon_{pp}\epsilon_{pp}^+)}{\partial^2(\sin^2\theta)} = 2(\epsilon_1 - \epsilon_2)(\langle\epsilon_1\rangle - \langle\epsilon_2\rangle) \geq 0 \quad (2.48)$$

tem-se que a equação 2.47 corresponde ao mínimo requerido. Como  $\sin^2\theta \in [0, 1]$ , adota-se:

$$\sin^2\theta^{crit} = \begin{cases} \mathcal{G}(\epsilon_1, \epsilon_2) & \text{if } 0 \leq \mathcal{G}(\epsilon_1, \epsilon_2) \leq 1 \\ 1 & \text{if } \mathcal{G}(\epsilon_1, \epsilon_2) > 1 \\ 0 & \text{if } \mathcal{G}(\epsilon_1, \epsilon_2) < 0 \end{cases} \quad (2.49)$$

A partir da substituição de  $\theta^{crit}$ , obtido pela equação 2.49, nas equações 2.42 e 2.43 e, posteriormente, na equação 2.44, obtém-se  $H^{crit}$ , para um dado estado de deformações.

### 2.3.2 Estado Plano de Deformações

Para estado plano de deformações, tem-se:

$$Q_{jk}^e = n_i E_{ijkl}^o n_l = \mu \left[ \frac{1}{1-2\nu} n_j n_k + \delta_{jk} \right] \quad (2.50)$$

Considerando novamente a base ortonormal  $\{\mathbf{n}, \mathbf{p}, \mathbf{q}\}$  e reescrevendo na forma matricial:

$$\mathbf{Q}^e = \begin{bmatrix} \frac{2\mu(1-\nu)}{1-2\nu} & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \Rightarrow (\mathbf{Q}^e)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1-2\nu}{2\mu(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\mu} \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

Já os vetores da equação 2.26, podem ser escritos como:

$$\bar{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{nn} & \bar{\sigma}_{np} & 0 \\ \bar{\sigma}_{pn} & \bar{\sigma}_{pp} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma}_{qq} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{nn} \\ \bar{\sigma}_{pn} \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{t}}^+ = \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{nn}^+ \\ \bar{\sigma}_{pn}^+ \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.52)$$

Com isso, para a norma  $\tau_{\bar{t}}$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} \tau_{\bar{t}}^2 &= \left\{ \bar{\sigma}_{nn} \quad \bar{\sigma}_{pn} \quad 0 \right\} \begin{bmatrix} \frac{1-2\nu}{2\mu(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\mu} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{nn}^+ \\ \bar{\sigma}_{pn}^+ \\ 0 \end{Bmatrix} \\ &= \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \bar{\sigma}_{nn} \bar{\sigma}_{nn}^+ + \frac{2(1+\nu)}{E} \bar{\sigma}_{pn} \bar{\sigma}_{pn}^+ \end{aligned} \quad (2.53)$$

onde a equação 2.11 foi utilizada.

A relação obtida na equação 2.39, para a variável interna  $r$ , é válida também para o caso tridimensional e será considerada aqui para levar em conta a componente de tensão não nula fora do plano. Daí, considerando a base  $\{\mathbf{n}, \mathbf{p}, \mathbf{q}\}$ , chega-se à seguinte forma expandida:

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{1+\nu}{E} (\bar{\sigma}_{nn} \bar{\sigma}_{nn}^+ + \bar{\sigma}_{pp} \bar{\sigma}_{pp}^+ + \bar{\sigma}_{qq} \bar{\sigma}_{qq}^+ + 2\bar{\sigma}_{pn} \bar{\sigma}_{pn}^+) \\ &\quad - \frac{\nu}{E} (\bar{\sigma}_{nn} + \bar{\sigma}_{pp} + \bar{\sigma}_{qq}) (\bar{\sigma}_{nn}^+ + \bar{\sigma}_{pp}^+ + \bar{\sigma}_{qq}^+) \\ &= \frac{1+\nu}{E} [(1+\nu^2) (\bar{\sigma}_{nn} \bar{\sigma}_{nn}^+ + \bar{\sigma}_{pp} \bar{\sigma}_{pp}^+) + \nu^2 (\bar{\sigma}_{nn} \bar{\sigma}_{pp}^+ + \bar{\sigma}_{pp} \bar{\sigma}_{nn}^+) + 2\bar{\sigma}_{pn} \bar{\sigma}_{pn}^+] \\ &\quad - \frac{\nu(1-\nu)^2}{E} (\bar{\sigma}_{nn} + \bar{\sigma}_{pp}) (\bar{\sigma}_{nn}^+ + \bar{\sigma}_{pp}^+) \end{aligned} \quad (2.54)$$

onde as relações  $\bar{\sigma}_{qq} = \nu(\bar{\sigma}_{nn} + \bar{\sigma}_{pp})$  e  $\bar{\sigma}_{qq}^+ = \nu(\bar{\sigma}_{nn}^+ + \bar{\sigma}_{pp}^+)$ , típicas do estado plano de deformações, foram aplicadas.

Subtraindo-se, agora, as equações 2.54 e 2.53,

$$\begin{aligned} r^2 - \tau_{\bar{t}}^2 &= \frac{1+\nu}{E} \left[ \left( \frac{\nu^2}{1-\nu} \right) \bar{\sigma}_{nn} \bar{\sigma}_{nn}^+ + (1-\nu) \bar{\sigma}_{pp} \bar{\sigma}_{pp}^+ - \nu (\bar{\sigma}_{nn} \bar{\sigma}_{pp}^+ + \bar{\sigma}_{pp} \bar{\sigma}_{nn}^+) \right] \\ &= \frac{1-\nu^2}{E} \left[ \frac{\nu}{1-\nu} \bar{\sigma}_{nn} \underbrace{\left( \frac{\nu}{1-\nu} \bar{\sigma}_{nn}^+ - \bar{\sigma}_{pp}^+ \right)}_{-\frac{E}{1-\nu^2} \epsilon_{pp}^+} + \bar{\sigma}_{pp} \underbrace{\left( \bar{\sigma}_{pp}^+ - \frac{\nu}{1-\nu} \bar{\sigma}_{nn}^+ \right)}_{\frac{E}{1-\nu^2} \epsilon_{pp}^+} \right] \\ &= \epsilon_{pp}^+ \underbrace{\left[ \bar{\sigma}_{pp} - \frac{\nu}{1-\nu} \bar{\sigma}_{nn} \right]}_{\frac{E}{1-\nu^2} \epsilon_{pp}} = \frac{E}{1-\nu^2} \epsilon_{pp} \epsilon_{pp}^+ \end{aligned} \quad (2.55)$$

Desta forma, similarmente ao apresentado nas equações 2.44 e 2.45, o problema de encontrar um módulo de amolecimento crítico, correspondente à condição de bifurcação para estado plano de deformação, fica reescrito como:

$$\check{H}(\theta) = \frac{q}{r} \left[ 1 - \frac{r^2}{r^2 - \frac{E}{1-\nu^2} \epsilon_{pp}(\theta) \epsilon_{pp}^+(\theta)} \right] \quad (2.56)$$

$$H^{crit} = \max_{\theta \in [-\pi, \pi]} [\check{H}(\theta)] \quad (2.57)$$

sendo  $\epsilon_{pp}(\theta)$  e  $\epsilon_{pp}^+(\theta)$  dados, respectivamente, pelas equações 2.42 e 2.43.

Finalmente, toda discussão referente à orientação da banda de localização no instante da bifurcação, representada pelas equações 2.46 a 2.49, permanece válida aqui. Na próxima seção, um resumo da análise para problemas planos é apresentada.

### 2.3.3 Síntese

Para problemas de estado plano, as equações 2.44 e 2.56 podem ser sintetizadas na forma:

$$\check{H}(\theta) = \frac{q}{r} \left[ 1 - \frac{r^2}{r^2 - \gamma \epsilon_{pp}(\theta) \epsilon_{pp}^+(\theta)} \right]; \quad \gamma = \begin{cases} E & \text{para EPT} \\ \frac{E}{1-\nu^2} & \text{para EPD} \end{cases} \quad (2.58)$$

Com isso, para cada novo estado de deformações da análise inelástica, a ocorrência de bifurcação deve ser verificada, através dos seguintes passos:

- i. Encontra-se uma orientação crítica,  $\sin^2 \theta^{crit}$ , a partir das equações 2.47 e 2.49;
- ii. Aplica-se este resultado às equações 2.42 e 2.43 para obter  $\epsilon_{pp}(\theta)$  e  $\epsilon_{pp}^+(\theta)$ ;
- iii. Leva-se este último resultado à equação 2.58, e obtém-se  $H^{crit} = \check{H}(\theta)$ ;
- iv. Calcula-se, das equações 2.14 e 2.21,

$$H = 1 - D(r) - rD'(r) \quad (2.59)$$

sendo  $D(r)$  uma função pré-definida. Daí, se

$$H^{crit} \geq H \quad (2.60)$$

tem-se a bifurcação. Caso contrário, a dissipação continua com campos de deformação contínuos.

## Capítulo 3

# Descontinuidades Fraca e Forte: Um Modelo de Banda Variável

No capítulo anterior, as condições necessárias para bifurcação, i.e., o aparecimento de descontinuidades no campo de deformações durante o carregamento inelástico com amolecimento, foram estabelecidas. Trata-se, agora, uma etapa subsequente, referente à transição entre estas descontinuidades, ditas fracas, e o surgimento de saltos no campo de deslocamentos, conhecidos como descontinuidades fortes. Tal transição pode ser interpretada como um modelo com banda de localização de espessura variável. No modelo constitutivo de dano isotrópico adotado neste trabalho, esta etapa corresponde fisicamente à evolução desde a presença de micro-trincas distribuídas numa banda finita até a formação de macro-trincas, em materiais parcialmente frágeis.

Na primeira seção, uma formulação cinemática, válida para descontinuidades fraca e forte é apresentada. Na sequência, aborda-se a chamada análise de descontinuidade forte onde, a partir da imposição das condições de equilíbrio na superfície descontínua, obtém-se um modelo constitutivo discreto (ou coesivo) - que relaciona forças de superfície aos saltos de deslocamentos - associado ao modelo constitutivo contínuo original - que relaciona tensões às deformações. Como consequências desta análise, obtêm-se as condições necessárias para o estabelecimento da descontinuidade forte, além de uma reinterpretação do módulo de amolecimento do modelo constitutivo

contínuo para compatibilização com o modelo discreto. Finalmente, os aspectos numéricos que definem o modelo de banda variável são apresentados.

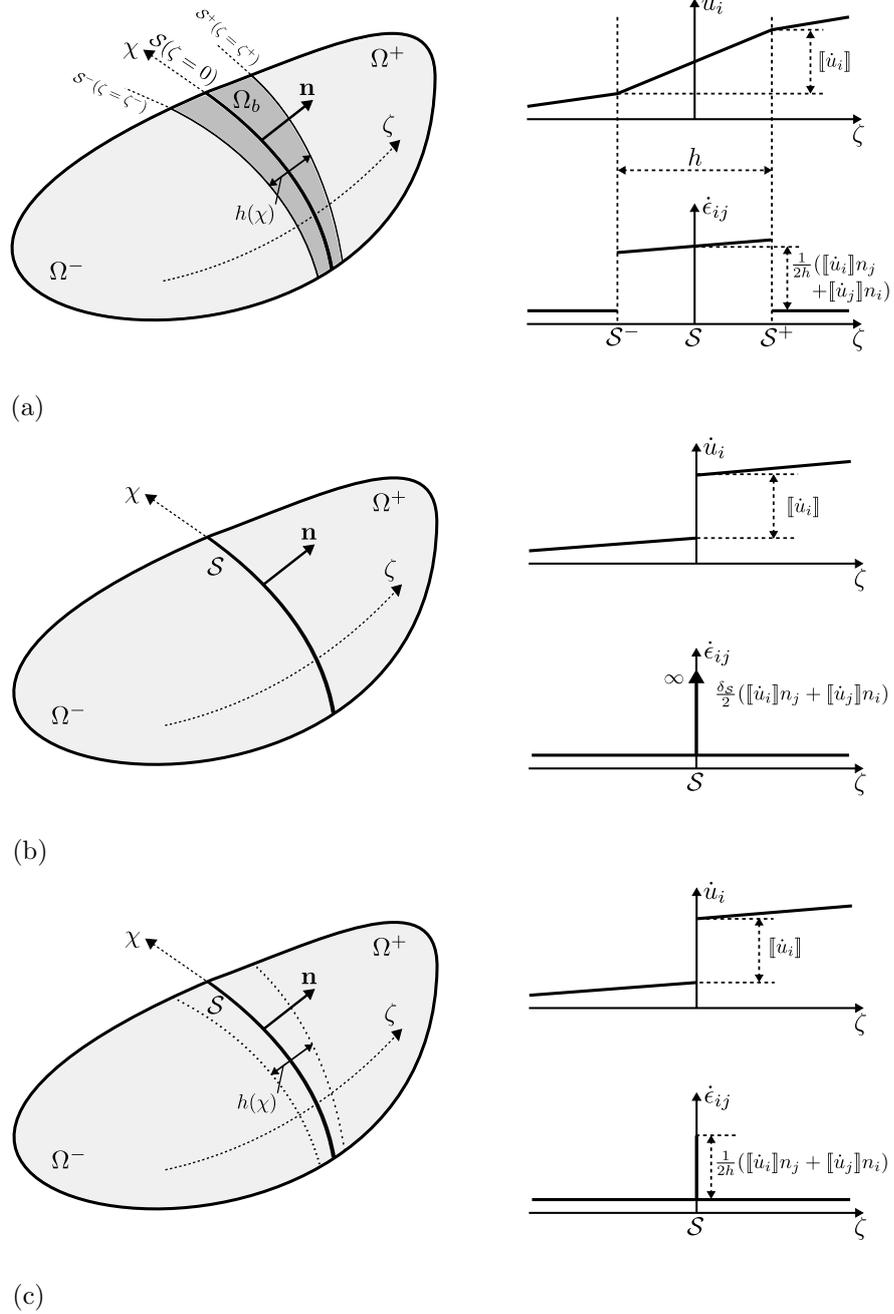
## 3.1 Cinemática com Descontinuidades

Equações cinemáticas envolvendo descontinuidades fracas e fortes são apresentadas nesta seção, seguidas pelo estabelecimento de uma formulação regularizada capaz de tratar os dois casos num único conjunto de equações, conforme desenvolvido por Oliver et al. (1998, 1999).

### 3.1.1 Cinemática com Descontinuidade Fraca

Fazendo referência à figura 3.1a, assume-se um domínio bidimensional  $\Omega$ , onde os pontos materiais são designados por  $\mathbf{X}$ . Considera-se também, um sistema de coordenadas curvilíneas,  $\{\chi, \zeta\}$ , de forma que  $\zeta = 0$  define uma linha  $\mathcal{S}$ , totalmente contida em uma banda de localização  $\Omega_b$ . As fronteiras desta banda são igualmente formadas por linhas de coordenada  $\zeta$  fixa, i.e.,  $\mathcal{S}^-(\zeta = \zeta^-)$  e  $\mathcal{S}^+(\zeta = \zeta^+)$ , o que permite definir sua espessura como função apenas de  $\chi$ :  $h(\chi)$ . A linha  $\mathcal{S}$  divide o domínio em duas partes,  $\Omega^-$  e  $\Omega^+$ , e define-se um vetor unitário  $n_i$ , normal à  $\mathcal{S}$  e direcionado para  $\Omega^+$ .

Sendo  $\{\hat{\mathbf{e}}_\chi, \hat{\mathbf{e}}_\zeta\}$  a base ortonormal associada às coordenadas curvilíneas e definindo por  $r_\chi(\chi, \zeta)$  e  $r_\zeta(\chi, \zeta)$  seus correspondentes fatores de escala, tal que  $ds_\chi = r_\chi d\chi$  e  $ds_\zeta = r_\zeta d\zeta$  sejam os comprimentos de arco, respectivamente ao longo de  $\chi$  e  $\zeta$ , pode-se escrever  $h(\chi) = r_\zeta(0, \chi)(\zeta^+ - \zeta^-)$ . Deve-se perceber ainda que, para pontos localizados sobre  $\mathcal{S}$ , o vetor unitário  $\hat{\mathbf{e}}_\zeta$  coincide com a normal  $n_i$ .



**Figura 3.1:** Cinemática com descontinuidades: (a) descontinuidade fraca, (b) descontinuidade forte, (c) formulação regularizada.

Assume-se agora, o seguinte campo de velocidades em  $\Omega$ :

$$\dot{u}_i(\mathbf{X}, t) = \dot{\bar{u}}_i(\mathbf{X}, t) + \mathcal{H}_{\Omega_b}(\mathbf{X}, t) [[\dot{u}_i]](\mathbf{X}, t) \quad (3.1)$$

onde  $t$  representa o tempo,  $\bar{u}(\mathbf{X}, t)$  e  $[[u_i]](\mathbf{X}, t)$  são campos de deslocamentos  $\mathcal{C}^0$ -contínuos e  $\mathcal{H}_{\Omega_b}(\mathbf{X}, t) = \mathcal{H}_{\Omega_b}(\zeta, t)$  é uma função rampa, dada por:

$$\mathcal{H}_{\Omega_b} = \begin{cases} 0, & \text{para } \mathbf{X} \in \Omega^- \setminus \Omega_b \\ 1, & \text{para } \mathbf{X} \in \Omega^+ \setminus \Omega_b \\ \frac{\zeta - \zeta^-}{\zeta^+ - \zeta^-}, & \text{para } \mathbf{X} \in \Omega_b \end{cases} \quad (3.2)$$

onde  $a \setminus b$  significa a parte de  $a$  excluindo-se  $b$ , i.e.,  $a \setminus b = a - (a \cap b)$ .

Pode-se perceber que  $\mathcal{H}_{\Omega_b}$  representa um salto unitário entre as linhas  $\mathcal{S}^-$  e  $\mathcal{S}^+$ , visto que, para uma mesma coordenada  $\chi$ ,  $\{[[\mathcal{H}_{\Omega_b}]] = \mathcal{H}_{\Omega_b}(\zeta^+, t) - \mathcal{H}_{\Omega_b}(\zeta^-, t) = 1 \forall \chi\}$ . Já o seu gradiente, nas coordenadas curvilíneas e escrito de forma estendida, é dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\Omega_b,i} &= \frac{1}{r_\zeta} \frac{\partial \mathcal{H}_{\Omega_b}}{\partial \zeta} \hat{\mathbf{e}}_\zeta + \frac{1}{r_\chi} \frac{\partial \mathcal{H}_{\Omega_b}}{\partial \chi} \hat{\mathbf{e}}_\chi = \mu_{\Omega_b} \frac{1}{h_\zeta} \hat{\mathbf{e}}_\zeta \\ h_\zeta(\chi, \zeta) &= r_\zeta(\chi, \zeta)(\zeta^+ - \zeta^-) \\ h_\zeta(\chi, 0) &= r_\zeta(\chi, 0)(\zeta^+ - \zeta^-) = h(\chi) \end{aligned} \quad (3.3)$$

sendo  $\mu_{\Omega_b}$  uma função de colocação em  $\Omega_b$ , i.e.,  $\{\mu_{\Omega_b}(\mathbf{X}) = 1 \text{ se } \mathbf{X} \in \Omega_b \text{ e } \mu_{\Omega_b}(\mathbf{X}) = 0 \text{ se } \mathbf{X} \notin \Omega_b\}$ .

Com isso, tomando-se a parte simétrica do gradiente da equação 3.1 e fazendo uso da equação 3.3, obtém-se o campo das taxas de deformações infinitesimais, i.e.,

$$\dot{\epsilon}_{ij}(\mathbf{X}, t) = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) + \frac{\mathcal{H}_{\Omega_b}}{2} ([[ \dot{u}_{i,j} ]] + [[ \dot{u}_{j,i} ]]) + \frac{\mu_{\Omega_b}}{2h_\zeta} ([[ \dot{u}_i ]] \hat{e}_j^\zeta + [[ \dot{u}_j ]] \hat{e}_i^\zeta) \quad (3.4)$$

onde  $\hat{e}_i^\zeta$  referem-se às projeções de  $\hat{\mathbf{e}}_\zeta$  no sistema de coordenadas cartesianas original.

Nota-se que os dois primeiros termos à direita na equação 3.4 representam uma parcela contínua das deformações, enquanto que o último, como indicado na figura 3.1a, apresenta valores não nulos apenas na banda (de localização)  $\Omega_b$ , caracterizando descontinuidades das deformações nas linhas  $\mathcal{S}^-$  e  $\mathcal{S}^+$ .

### 3.1.2 Cinemática com Descontinuidade Forte

A cinemática com descontinuidade forte pode ser definida como um caso limite da cinemática com descontinuidade fraca quando a banda de localização de deformações tende para a linha  $\mathcal{S}$ , i.e., para uma banda de espessura nula, como representado na figura 3.1b. Desta forma, na medida que, simultaneamente,  $\zeta^- \rightarrow 0$  e  $\zeta^+ \rightarrow 0$ , a função rampa da equação 3.2 colapsa na função degrau (ou função de Heaviside), dada por:

$$\mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\mathbf{X}) = \begin{cases} 0, & \text{para } \mathbf{X} \in \Omega^- \\ 1, & \text{para } \mathbf{X} \in \Omega^+ \end{cases} \quad (3.5)$$

Com isso, o campo de velocidades assume a forma:

$$\dot{u}_i(\mathbf{X}, t) = \dot{\bar{u}}_i(\mathbf{X}, t) + \mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\mathbf{X}) \llbracket \dot{u}_i \rrbracket(\mathbf{X}, t) \quad (3.6)$$

tornando-se, portanto, descontínuo em  $\mathcal{S}$ . Neste caso, a função  $\llbracket u_i \rrbracket(\mathbf{X}, t)$  representa a magnitude das componentes do salto no campo de deslocamentos sobre a linha de descontinuidade forte.

O campo de taxa das deformações infinitesimais, compatível com a equação 3.6, fica, por sua vez, escrito como:

$$\dot{\epsilon}_{ij}(\mathbf{X}, t) = \frac{1}{2}(\dot{\bar{u}}_{i,j} + \dot{\bar{u}}_{j,i}) + \frac{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}}{2}(\llbracket \dot{u}_{i,j} \rrbracket + \llbracket \dot{u}_{j,i} \rrbracket) + \frac{\delta_{\mathcal{S}}}{2}(\llbracket \dot{u}_i \rrbracket n_j + \llbracket \dot{u}_j \rrbracket n_i) \quad (3.7)$$

onde  $\delta_{\mathcal{S}}$  é a função delta de Dirac sobre a linha  $\mathcal{S}$ .

Percebe-se que os dois primeiros termos à direita na equação 3.7 correspondem a uma parcela contendo, no máximo, descontinuidades finitas, enquanto que o último termo torna-se infinito sobre a linha  $\mathcal{S}$ .

### 3.1.3 Cinemática Regularizada

Apresenta-se agora, uma formulação regularizada da cinemática com descontinuidades, capaz de representar ambos os casos (descontinuidades fraca e forte) através de

um conjunto único de equações. Tal formulação se mostrará útil, mais adiante, no desenvolvimento de um modelo numérico com banda variável.

A partir da figura 3.1c, escrevem-se os campos de velocidades e deformações nas respectivas formas:

$$\dot{u}_i(\mathbf{X}, t) = \dot{\tilde{u}}_i(\mathbf{X}, t) + \mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\mathbf{X}) \llbracket \dot{u}_i \rrbracket(\mathbf{X}, t) \quad (3.8)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}(\mathbf{X}, t) = \underbrace{\frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i})}_{\dot{\epsilon}_{ij} \text{ (finito)}} + \frac{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}}{2}(\llbracket \dot{u}_{i,j} \rrbracket + \llbracket \dot{u}_{j,i} \rrbracket) + \underbrace{\frac{\mu_{\mathcal{S}}}{2h(\zeta)}(\llbracket \dot{u}_i \rrbracket n_j + \llbracket \dot{u}_j \rrbracket n_i)}_{\text{infinito quando } h(\zeta) \rightarrow 0} \quad (3.9)$$

onde  $\mu_{\mathcal{S}}$  é uma função de colocação sobre  $\mathcal{S}$ , i.e.,  $\{\mu_{\mathcal{S}}(\mathbf{X}) = 1 \text{ se } \mathbf{X} \in \mathcal{S} \text{ e } \mu_{\mathcal{S}}(\mathbf{X}) = 0 \text{ se } \mathbf{X} \notin \mathcal{S}\}$ .

Quando a espessura de banda,  $h(\zeta)$ , tende a zero,  $\left(\frac{\mu_{\mathcal{S}}}{2h(\zeta)}\right) \rightarrow \delta_{\mathcal{S}}$  e, as equações 3.8 e 3.9 tornam-se equivalentes às equações 3.6 e 3.7. Com isso, a cinemática de descontinuidades fortes fica completamente recuperada.

Por outro lado, como  $h(\zeta) = h_{\zeta}(\chi, 0)$  e  $n_i$  corresponde a  $\hat{\mathbf{e}}_{\zeta}$  em  $\mathcal{S}$ , a taxa de deformações da equação 3.9 representa a sua correspondente na presença de descontinuidades fracas (equação 3.4), desde que a espessura da banda de localização seja suficientemente pequena. Ressalta-se, no entanto, que neste caso,  $h(\zeta) \neq 0$  e os campos das equações 3.8 e 3.9 não são compatíveis, no sentido que  $\dot{\epsilon}_{ij} \neq \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i})$ . A compatibilidade é alcançada apenas quando  $h(\zeta) \rightarrow 0$ .

Como será tratado mais à frente, nesta tese adota-se um modelo com banda variável, caracterizado pela evolução da banda de localização de deformações, desde uma espessura finita  $h$ , definida no instante de bifurcação,  $t_B$ , até uma espessura nula, numericamente caracterizada por uma constante pequena  $k$ , representando o regime com descontinuidade forte, a partir do instante  $t_{SD}$ . Desta forma, o estado de deformações totais para um instante de tempo após o início do regime de descontinuidade forte, i.e.,  $t \geq t_{SD}$ , pode ser obtido a partir da integração temporal da equação 3.9,

i.e.,

$$\begin{aligned}
\epsilon_{ij}(\mathbf{X}, t)|_{t \geq t_{SD}} &= \underbrace{\int_0^t \dot{\epsilon}_{ij} dt + \frac{\mu_S}{2} \int_{t_B}^{t_{SD}} \frac{1}{h} (\llbracket \dot{u}_i \rrbracket n_j + \llbracket \dot{u}_j \rrbracket n_i) dt}_{\bar{\epsilon}_{ij}} \\
&\quad + \frac{\mu_S}{2} \int_{t_{SD}}^t \frac{1}{h} (\llbracket \dot{u}_i \rrbracket n_j + \llbracket \dot{u}_j \rrbracket n_i) dt \quad (3.10) \\
&= \underbrace{\bar{\epsilon}_{ij}}_{\text{finito para } h \equiv k \rightarrow 0} + \underbrace{\mu_S \frac{1}{2h} (\Delta \llbracket u_i \rrbracket n_j + \Delta \llbracket u_j \rrbracket n_i)}_{\text{infinito para } h \equiv k \rightarrow 0}
\end{aligned}$$

onde  $\Delta \llbracket u_i \rrbracket = \llbracket u_i \rrbracket(\mathbf{X}, t) - \llbracket u_i \rrbracket(\mathbf{X}, t_{SD})$  é o incremento no salto de deslocamentos durante o regime de descontinuidade forte e o caráter material da superfície descontínua, i.e.,  $\dot{n}_i = 0$ , foi adotado.

## 3.2 Análise de Descontinuidade Forte

O objetivo da análise de descontinuidade forte é identificar as condições necessárias para que modelos constitutivos contínuos sejam compatíveis com a cinemática representada pela equação 3.10. Como ponto de partida, deve-se perceber que a continuidade das forças de superfícies (e sua taxa), através da interface  $\mathcal{S}$ , é uma condição necessária para atendimento às equações de equilíbrio, i.e.,

$$t_i(\mathbf{X}, t) = \sigma_{ij}^{\Omega \setminus \mathcal{S}}(\mathbf{X}, t) n_j(\mathbf{X}) = \sigma_{ij}^{\mathcal{S}}(\mathbf{X}, t) n_j(\mathbf{X}) \quad (3.11a)$$

$$\dot{t}_i(\mathbf{X}, t) = \dot{\sigma}_{ij}^{\Omega \setminus \mathcal{S}}(\mathbf{X}, t) n_j(\mathbf{X}) = \dot{\sigma}_{ij}^{\mathcal{S}}(\mathbf{X}, t) n_j(\mathbf{X}) \quad (3.11b)$$

onde  $t_i$  refere-se ao vetor força de superfície,  $\sigma_{ij}^{\mathcal{S}}$  são as componentes de tensão num ponto sobre  $\mathcal{S}$  e  $\sigma_{ij}^{\Omega \setminus \mathcal{S}}$  são as tensões num ponto infinitesimalmente próximo a ele, porém, localizado em  $\Omega \setminus \mathcal{S}$ .

Com isso, verifica-se que, como as deformações são finitas em  $\Omega \setminus \mathcal{S}$  ( $\epsilon_{ij} = \bar{\epsilon}_{ij}$ ), as componentes de tensão  $\sigma_{ij}^{\Omega \setminus \mathcal{S}}$  também o serão, assim como  $t_i$  ( $t_i = \sigma_{ij}^{\Omega \setminus \mathcal{S}} n_j$ ). Os mesmos argumentos são válidos para equação 3.11b. Por outro lado, deve-se perceber que  $\sigma_{ij}^{\mathcal{S}}$  e  $\dot{\sigma}_{ij}^{\mathcal{S}}$  também devem ser finitos, apesar de  $\epsilon_{ij}^{\mathcal{S}}$  e  $\dot{\epsilon}_{ij}^{\mathcal{S}}$  não o serem, para que o sentido físico das tensões seja preservado.

Como já citado anteriormente, a análise de descontinuidade forte estabelece um modelo constitutivo discreto, que relaciona forças de superfície aos saltos nos deslocamentos em  $\mathcal{S}$ , associado ao contínuo. Ela conduz também a uma reinterpretação do módulo de amolecimento do modelo original, fazendo com que ele seja reescrito em função do seu correspondente no modelo discreto (denominado módulo de amolecimento discreto ou intrínseco). Deve-se, portanto, conduzir tal análise à luz de um modelo contínuo específico. Nesta tese, adota-se o modelo de dano isotrópico, com a deformação equivalente definida como em Oliver, Huespe, Blanco, e Linero (2006), apresentado na seção 2.2 e resumido a seguir:

$$\text{Energia livre: } \psi(\epsilon_{ij}, r) = [1 - D(r)]\psi_o(\epsilon_{ij}), \quad \psi_o(\epsilon_{ij}) = \frac{1}{2}\epsilon_{ij}E_{ijkl}^o\epsilon_{kl} \quad (3.12a)$$

$$\text{Equação constitutiva: } \sigma_{ij} = \frac{\partial\psi(\epsilon_{ij}, r)}{\partial\epsilon_{ij}} = (1 - D)E_{ijkl}^o\epsilon_{kl} = E_{ijkl}\epsilon_{kl} \quad (3.12b)$$

$$\text{Variável de dano: } D \equiv D(r) = 1 - \frac{q(r)}{r}, \quad D \in [0, 1] \quad (3.12c)$$

$$\text{Lei de evolução da variável interna: } \dot{r} = \dot{\lambda}, \quad \begin{cases} r \in [r_o, \infty), \\ r_o = r|_{t=0} = \frac{f_t}{\sqrt{E}} \end{cases} \quad (3.12d)$$

$$\text{Critério de dano: } \begin{cases} \bar{F}(\epsilon_{ij}, r) \equiv \tau_\epsilon - r = \sqrt{\epsilon_{ij}^+ E_{ijkl}^o \epsilon_{kl}} - r \quad (\text{esp. def.}) \\ \text{ou} \\ F(\sigma_{ij}, q) \equiv \tau_\sigma - q = \sqrt{\sigma_{ij}^+ E_{ijkl}^{o,-1} \sigma_{kl}} - q \quad (\text{esp. ten.}) \end{cases} \quad (3.12e)$$

$$\text{Condições de carreg.-descarreg.: } \bar{F} \leq 0, \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad \dot{\lambda}\bar{F} = 0, \quad \dot{\lambda}\dot{\bar{F}} = 0 \quad (3.12f)$$

$$\text{Lei de amolecimento: } \dot{q} = H(r)\dot{r}, \quad (H = q'(r) \leq 0), \quad \begin{cases} q \in [0, r_o], \\ q|_{t=0} = r_o \end{cases} \quad (3.12g)$$

onde pode-se verificar a equivalência dos critérios de dano nos espaços das tensões e das deformações da equação 3.12e a partir da aplicação das equações 3.12b e 3.12c, além da definição  $\sigma_{ij}^+ = (1 - D)E_{ijkl}^o\epsilon_{kl}^+$ . Na equação 3.12d,  $f_t$  refere-se à tensão de resistência à tração e  $E$  ao módulo de elasticidade do material.

Desta forma, todo o desenvolvimento desta seção, que essencialmente segue o apresentado em Oliver (2000), é realizado considerando-se o modelo definido pelas equações 3.12.

### 3.2.1 Equação Constitutiva Discreta

Das equações 3.12b, 3.12c e 3.10, o tensor de tensões para um ponto sobre  $\mathcal{S}$  é dado por:

$$\sigma_{ij}^{\mathcal{S}} = \frac{q_{\mathcal{S}}}{r_{\mathcal{S}}} E_{ijkl}^o \left[ \bar{\epsilon}_{kl} + \frac{1}{2h} (\Delta[u_k]n_l + \Delta[u_l]n_k) \right] \quad (3.13)$$

Assumindo que este ponto encontra-se no regime de descontinuidade forte, ou seja,  $t > t_{SD} \Rightarrow h \equiv k \rightarrow 0$ , tem-se da equação 3.11a que

$$\begin{aligned} t_j &= n_i \sigma_{ij}^{\mathcal{S}} = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{q_{\mathcal{S}}}{r_{\mathcal{S}}} n_i E_{ijkl}^o \left[ \bar{\epsilon}_{kl} + \frac{1}{2h} (\Delta[u_k]n_l + \Delta[u_l]n_k) \right] \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{1}{hr_{\mathcal{S}}} \right) q_{\mathcal{S}} \underbrace{(n_i E_{ijkl}^o n_l)}_{Q_{jk}^e} \Delta[u_k] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{1}{hr_{\mathcal{S}}} \right) q_{\mathcal{S}} Q_{jk}^e \Delta[u_k] \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde  $Q_{jk}^e$  é o tensor acústico elástico, apresentado anteriormente na equação 2.26 e que possui a característica de ser positivo definido. Portanto, para  $\Delta[u_i] \neq 0$ , o termo  $q_{\mathcal{S}} Q_{jk}^e \Delta[u_k]$  deve ser finito e diferente de zero.

Desta forma, para que o vetor força de superfície também permaneça finito, como argumentado anteriormente, deve-se ter:

$$\lim_{h \rightarrow 0} (hr_{\mathcal{S}}) \neq 0 \quad \text{se} \quad \Delta[u_k] \neq 0 \quad (3.15)$$

Para que esta condição seja totalmente satisfeita, assume-se a seguinte estrutura para a evolução da variável interna do tipo deformação em pontos sobre a superfície descontínua:

$$\dot{r}_{\mathcal{S}} = \frac{1}{h} \dot{\alpha} \quad \forall t \geq t_B; \quad \alpha|_{t=t_B} = 0 \quad (3.16)$$

onde  $\alpha$  será denominada variável interna discreta, considerada finita (assim como  $\dot{\alpha}$ ).

A equação 3.16 pode ser integrada até um instante  $t \geq t_{SD}$ , resultando em

$$\begin{aligned} r_S &= \int_0^t \dot{r}_S dt = r_B + \underbrace{\int_{t_B}^{t_{SD}} \frac{1}{h(\tau)} \dot{\alpha}(\tau) d\tau}_{:=r_{SD}} + \int_{t_{SD}}^t \underbrace{\frac{1}{h(\tau)}}_{h \equiv k} \dot{\alpha}(\tau) d\tau \\ &= r_{SD} + \frac{1}{k} \int_{t_{SD}}^t \dot{\alpha}(\tau) d\tau = r_{SD} + \frac{1}{k} \Delta\alpha \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde  $\Delta\alpha = \alpha|_t - \alpha|_{t_{SD}}$  e  $r_B = r_S|_{t=t_B}$ .

Observa-se agora, que o termo  $r_{SD}$ , definido na equação 3.17, para  $t \geq t_{SD}$  satisfaz a condição:

$$\lim_{h \rightarrow 0} (hr_{SD}) = \lim_{k \rightarrow 0} (kr_{SD}) = \lim_{k \rightarrow 0} \left[ kr_B + \int_{t_B}^{t_{SD}} \frac{k}{h(\tau)} \dot{\alpha}(\tau) d\tau \right] = 0 \quad (3.18)$$

Com isso, aplicando a equação 3.17 à 3.15 e levando-se em conta o resultado da equação 3.18, obtém-se:

$$\lim_{h \rightarrow 0} (hr_S) = \lim_{h \rightarrow 0} (hr_{SD} + \Delta\alpha) = \Delta\alpha \neq 0 \quad (3.19)$$

o que demonstra que a lei de evolução proposta na equação 3.16 é consistente com a condição apontada na equação 3.15 e faz com que a equação 3.14 seja compatível com  $\Delta[u_i] \neq 0$ .

Finalmente, a substituição da equação 3.19 na equação 3.14, resulta em

$$t_i = \frac{q_S}{\Delta\alpha} Q_{ij}^e \Delta[u_j]; \quad \forall t \geq t_{SD} \quad (3.20)$$

que é a equação constitutiva discreta (ou coesiva), relacionando forças de superfície em  $\mathcal{S}$  aos incrementos no salto dos deslocamentos.

### 3.2.2 Lei de Amolecimento Discreta

Aplicando a equação 3.16 à 3.12g, obtém-se para a evolução da variável interna do tipo tensão, em pontos sobre  $\mathcal{S}$ , a seguinte expressão:

$$\dot{q}_S = H \dot{r}_S = H \frac{1}{h} \dot{\alpha} \quad (3.21)$$

Do critério de dano no espaço das tensões (ver equação 3.12e) e considerando o caráter finito das tensões (e suas taxas) em  $\mathcal{S}$ , conclui-se que  $q_{\mathcal{S}}$  e  $\dot{q}_{\mathcal{S}}$  também serão finitos (no caso de  $\dot{q}_{\mathcal{S}}$ , deve-se notar que este termo assume valores não nulos apenas durante carregamento inelástico que, conforme as equações 3.12f, corresponde a  $\dot{q}_{\mathcal{S}} = \dot{\tau}_{\sigma} \rightarrow$  finito). Da mesma forma, por definição,  $\dot{\alpha}$  assume apenas valores finitos. Com isso, o termo  $\lim_{h \rightarrow 0}(H/h)$  também deve assumir valores finitos. Propõe-se, portanto, a seguinte estrutura:

$$H = hH^*; \quad \forall t > t_B \quad (3.22)$$

onde  $H^* < 0$  é definido como finito e recebe o nome de módulo de amolecimento discreto ou intrínseco. Sua expressão pode ser deduzida a partir da análise da energia consumida durante a formação da descontinuidade forte (e.g., macro-trincas), como será tratado mais à frente.

A equação 3.22 refere-se a dita reinterpretação do módulo de amolecimento do modelo constitutivo contínuo, que exerce um papel fundamental na compatibilização entre tal modelo, no caso, definido nas equações 3.12, e a cinemática com descontinuidades detalhada na seção 3.1. Quando  $h \rightarrow 0$ , a lei de amolecimento assume o caráter distributivo destacado no trabalho original de Simo et al. (1993), visto que  $H^* \rightarrow \delta_{\mathcal{S}}H$ . Por outro lado, na estrutura considerada aqui, onde  $h$  assume valores finitos durante o regime com descontinuidades fracas, a equação 3.22 pode ser considerada uma extensão apropriada ao modelo de banda variável.

Agora, substituindo a equação 3.22 na 3.21, chega-se ao resultado:

$$\dot{q}_{\mathcal{S}} = H^* \dot{\alpha} \quad (3.23)$$

que é a contrapartida discreta da lei de amolecimento apresentada em 3.12g.

### 3.2.3 Variável de Dano Discreta

A integração temporal da equação 3.23 conduz à seguinte expressão:

$$q_S = q_{SD} + \int_{t_{SD}}^t H^* \dot{\alpha}(\tau) d\tau \quad (3.24)$$

onde  $q_{SD} = q_S|_{t=t_{SD}}$ .

Considera-se agora, por questões ilustrativas, apenas o caso correspondente a amolecimento linear, i.e.,  $H^*$  constante (na seção 3.4, será considerado também o caso de amolecimento exponencial). Desta forma, a equação 3.24 pode ser resolvida, gerando

$$q_S = q^*(\Delta\alpha) = q_{SD} + H^* \Delta\alpha \not\prec 0 \quad (3.25)$$

Na equação 3.25 verifica-se a dependência da variável interna do tipo tensão na interface descontínua,  $q_S = q^*(\Delta\alpha) \in [0, q_{SD}]$ , com relação à variável discreta interna,  $\Delta\alpha$ .

Define-se agora, uma variável  $\omega$ , tal que:

$$\omega(\Delta\alpha) = 1 - \frac{q^*(\Delta\alpha)}{\Delta\alpha} \quad (3.26)$$

com  $\Delta\alpha \in [0, \infty)$  e, portanto,  $\omega(\Delta\alpha) \in (-\infty, 1]$ . Comprando-se as equações 3.12c e 3.26, a variável  $\omega(\Delta\alpha)$  deve ser entendida como a variável discreta de dano, em contrapartida à contínua,  $D(r)$ . Com isso, a equação constitutiva discreta (equação 3.20) pode ser reescrita na forma:

$$t_i = (1 - \omega) Q_{ij}^e \Delta[u_j]; \quad \forall t \geq t_{SD} \quad (3.27)$$

### 3.2.4 Energia Livre Discreta

No contexto da modelagem constitutiva termodinamicamente consistente, o comportamento de um ponto material é descrito por um conjunto de variáveis de estado

internas (que podem ser tensores de diferentes ordens), suas leis de evolução e funcionais (dessas variáveis), que após a aplicação da segunda lei da termodinâmica, funcionam como potenciais que dão origem às equações constitutivas. Maiores detalhes destas questões podem ser vistos em Coleman e Gurtin (1967). Particularmente, em processos isotérmicos e sem difusão de massa, sob pequenas deformações, um desses funcionais é a chamada densidade de energia livre de Helmholtz, escrito genericamente na forma  $\psi(\epsilon_{ij}, \boldsymbol{\alpha}^k)$ , onde  $\boldsymbol{\alpha}^k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) representam as variáveis internas, e do qual podem-se obter as tensões na forma:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \psi(\epsilon_{ij}, \boldsymbol{\alpha}^k)}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (3.28)$$

No caso de um modelo de dano isotrópico contínuo, esta densidade de energia livre (energia por unidade de volume) é dada na equação 3.12a. Propõe-se agora, a definição de uma função densidade de energia livre discreta,  $\hat{\psi}$  (energia por unidade de área). Intuitivamente, no contexto da análise de descontinuidade forte, adota-se:

$$\hat{\psi} = \lim_{h \rightarrow 0} (h\psi_S) \quad (3.29)$$

onde  $\psi_S \equiv \psi|_{\mathbf{x} \in S}$ .

Com isso, aplicando as equações 3.12a, 3.12c, 3.10, 3.17 e 3.26 à equação 3.29, obtém-se:

$$\begin{aligned} \hat{\psi} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{hq_S}{2r_S} (\epsilon_{ij}^S E_{ijkl}^o \epsilon_{kl}^S) \right] \\ &= \frac{q_S}{2\Delta\alpha} (\Delta[u_j] Q_{jk}^e \Delta[u_k]) \\ &= \frac{1}{2} (1 - \omega) \underbrace{\Delta[u_j] Q_{jk}^e \Delta[u_k]}_{:= \hat{\psi}_o} \end{aligned} \quad (3.30)$$

ou seja,

$$\hat{\psi}(\Delta[u_i], \omega) = [1 - \omega(\Delta\alpha)] \hat{\psi}_o(\Delta[u_i]); \quad \hat{\psi}_o(\Delta[u_i]) = \frac{1}{2} \Delta[u_i] Q_{ij}^e \Delta[u_j] \quad (3.31)$$

Deve-se perceber ainda, que a equação constitutiva discreta 3.27 pode ser obtida da equação 3.31, a partir da operação:

$$t_i = \frac{\partial \hat{\psi}(\Delta[u_i], \omega)}{\partial (\Delta[u_i])} \quad (3.32)$$

### 3.2.5 Critério de Dano Discreto

Para completar o modelo constitutivo discreto restam definir o critério de dano e as condições de carregamento e descarregamento discretos, associados às equações 3.12e e 3.12f. Para tal, deve-se definir inicialmente, uma norma  $\tau_{\Delta[[u]]}$ , contrapondo a deformação equivalente,  $\tau_\epsilon$ .

Considerando que os autovalores da segunda parcela da equação 3.10 não assumam valores negativos, a sua introdução ao termo referente a  $\tau_\epsilon$  na equação 3.12e, conduz ao seguinte resultado, após tomar-se o limite  $h \rightarrow 0$ :

$$\tau_{\Delta[[u]]} = \sqrt{\Delta[[u_i]]Q_{ij}^e\Delta[[u_j]]} \quad (3.33)$$

A partir daí, tendo em vista a equação 3.17, o critério de dano discreto (no espaço dos incrementos de salto dos deslocamentos) fica totalmente estabelecido na forma:

$$\bar{G}(\Delta[[u_i]], \Delta\alpha) \equiv \tau_{\Delta[[u]]} - \Delta\alpha = \sqrt{\Delta[[u_i]]Q_{ij}^e\Delta[[u_j]]} - \Delta\alpha \quad (3.34)$$

Finalmente, seguindo a equação 3.16, pode-se definir um multiplicador de dano discreto,  $\lambda^*$ , de forma que

$$\dot{\lambda}_S = \frac{1}{h}\dot{\lambda}^* = \dot{r}_S = \frac{1}{h}\dot{\alpha} \quad (3.35)$$

donde seguem as condições discretas de carregamento e descarregamento:

$$\bar{G} \leq 0; \quad \dot{\lambda}^* \geq 0; \quad \dot{\lambda}^*\bar{G} = 0; \quad \underbrace{\dot{\lambda}^*\dot{\bar{G}} = 0}_{\text{consistência}} \quad (3.36)$$

### 3.2.6 Síntese do Modelo Constitutivo de Dano Discreto

Ao longo das seções 3.2.1 a 3.2.5, um modelo constitutivo discreto, induzido pela aplicação da cinemática com descontinuidades ao modelo contínuo da equação 3.12,

foi determinado. De forma condensada, pode-se escrever:

$$\text{Energia livre: } \begin{cases} \hat{\psi}(\Delta[u_i], \omega) = [1 - \omega(\Delta\alpha)] \hat{\psi}_o(\Delta[u_i]); \\ \hat{\psi}_o(\Delta[u_i]) = \frac{1}{2} \Delta[u_i] Q_{ij}^e \Delta[u_j] \end{cases} \quad (3.37a)$$

$$\text{Equação constitutiva: } t_i = \frac{\partial \hat{\psi}(\Delta[u_i], \omega)}{\partial (\Delta[u_i])} = (1 - \omega) Q_{ij}^e \Delta[u_j] \quad (3.37b)$$

$$\text{Variável de dano: } \omega \equiv \omega(\Delta\alpha) = 1 - \frac{q^*(\Delta\alpha)}{\Delta\alpha}, \quad \omega \in (-\infty, 1] \quad (3.37c)$$

$$\text{Lei de evolução da variável interna: } \frac{\partial (\Delta\alpha)}{\partial t} = \dot{\alpha} = \dot{\lambda}^*, \quad \Delta\alpha \in [0, \infty) \quad (3.37d)$$

$$\text{Critério de dano: } \bar{G}(\Delta[u_i], \Delta\alpha) \equiv \tau_{\Delta[u]} - \Delta\alpha = \sqrt{\Delta[u_i] Q_{ij}^e \Delta[u_j]} - \Delta\alpha \quad (3.37e)$$

$$\text{Condições de carreg.-descarreg.: } \bar{G} \leq 0, \quad \dot{\lambda}^* \geq 0, \quad \dot{\lambda}^* \bar{G} = 0, \quad \dot{\lambda}^* \dot{\bar{G}} = 0 \quad (3.37f)$$

$$\text{Lei de amolecimento: } \dot{q}^* = H^* \dot{\alpha}, \quad (H^* = \frac{1}{h} H < 0), \quad \begin{cases} q^* \in [0, q_{SD}], \\ q^*|_{t=t_{SD}} = q_{SD} \end{cases} \quad (3.37g)$$

A correspondência entre cada parâmetro dos modelos contínuo e discreto é apresentada na tabela 3.1.

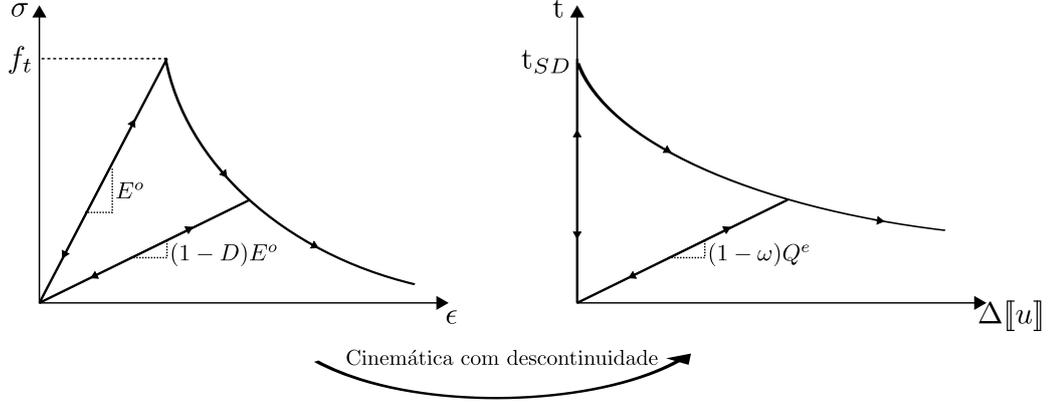
**Tabela 3.1:** Correspondência entre os modelos constitutivos contínuo e discreto.

Modelo	Parâmetros								
Contínuo:	$\sigma_{ij}$	$\epsilon_{ij}$	$E_{ijkl}^o$	$D(r)$	$r$	$q(r)$	$H$	$\lambda$	$\bar{F}$
Discreto:	$t_i$	$\Delta[u_i]$	$Q_{ij}^e$	$\omega(\Delta\alpha)$	$\Delta\alpha$	$q^*(\Delta\alpha)$	$H^*$	$\lambda^*$	$\bar{G}$

Pode-se observar também, que a equação constitutiva discreta 3.37b define um operador secante discreto na forma  $Q_{ij}^s = (1 - \omega) Q_{ij}^e$ , semelhante ao contínuo,  $E_{ijkl} = (1 - D) E_{ijkl}^o$ . Porém, como em  $t = t_{SD}$ ,  $\omega = -\infty$ , tem-se  $Q_{ij}^s = +\infty Q_{ij}^e$ . Com isso, o modelo discreto pode ser classificado como um modelo de dano rígido, como ilustrado na figura 3.2.

Na seção 3.2.2, um dos pontos fundamentais da análise de descontinuidade forte foi destacado: a reinterpretação do módulo de amolecimento do modelo contínuo como condição necessária para a compatibilização com o discreto. A seguir, complementando a análise, um segundo ponto igualmente importante é abordado: o

estabelecimento das condições de descontinuidade forte, que referem-se a restrições no campo de tensão, que devem ser satisfeitas durante tal regime.



**Figura 3.2:** Modelos de dano contínuo ( $\sigma_{ij} \times \epsilon_{ij}$ ) e discreto ( $t_i \times \Delta[u_i]$ ).

### 3.2.7 Condições de Descontinuidade Forte

A aplicação da equação 3.10 à 3.12b leva ao seguinte resultado para pontos sobre  $\mathcal{S}$  no regime de descontinuidade forte:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{\mathcal{S}} &= \frac{q_{\mathcal{S}}}{r_{\mathcal{S}}} E_{ijkl}^o \epsilon_{kl}^{\mathcal{S}} = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{q_{\mathcal{S}}}{r_{\mathcal{SD}} + \frac{1}{h} \Delta\alpha} E_{ijkl}^o \left[ \bar{\epsilon}_{kl} + \frac{1}{2h} (\Delta[u_k] n_l + \Delta[u_l] n_k) \right] \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{q_{\mathcal{S}}}{hr_{\mathcal{SD}} + \Delta\alpha} E_{ijkl}^o \left[ h\bar{\epsilon}_{kl} + \frac{1}{2} (\Delta[u_k] n_l + \Delta[u_l] n_k) \right] \right\} \quad (3.38) \\ &= \frac{q_{\mathcal{S}}}{\Delta\alpha} E_{ijkl}^o \left[ \frac{1}{2} (\Delta[u_k] n_l + \Delta[u_l] n_k) \right] \end{aligned}$$

onde as equações 3.12c e 3.17 foram utilizadas. Desta forma, pode-se escrever:

$$\frac{1}{2} (\Delta[u_i] n_j + \Delta[u_j] n_i) = \frac{\Delta\alpha}{q_{\mathcal{S}}} E_{ijkl}^{o,-1} \sigma_{kl}^{\mathcal{S}} = \frac{\Delta\alpha}{q_{\mathcal{S}}} \epsilon_{ij}^{\mathcal{S},ef} \quad (3.39)$$

onde  $\epsilon_{ij}^{ef} := E_{ijkl}^{o,-1} \sigma_{kl} = (1-D)\epsilon_{ij}$  é a chamada deformação efetiva. O caráter finito de  $\sigma_{ij}^{\mathcal{S}}$  faz com que  $\epsilon_{ij}^{\mathcal{S},ef}$  também o seja.

A equação tensorial 3.39 é denominada equação da descontinuidade forte e pode ser vista como um conjunto de seis equações algébricas (devido à simetria), relacionando as componentes de tensão,  $\sigma_{ij}^{\mathcal{S}}$ , (ou de deformação efetiva,  $\epsilon_{ij}^{\mathcal{S},ef}$ ) às componentes dos

saltos nos deslocamentos,  $\Delta[u_i]$ . Três delas são, de fato, as equações constitutivas discretas 3.37b, que podem ser recuperadas pré-multiplicando ambos os lados da equação 3.39 por  $n_i$ . As demais três, envolvendo apenas componentes de tensão em  $\mathcal{S}$ , compõem as chamadas condições de descontinuidade forte, que devem ser satisfeitas durante todo o tempo  $t \geq t_{SD}$ . Para obtê-las de uma maneira mais direta, reescreve-se a equação 3.39 na sua forma matricial, considerando a base ortonormal  $\{\mathbf{n}, \mathbf{p}, \mathbf{q}\}$ , com  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$  tangenciando  $\mathcal{S}$ , i.e.,

$$\begin{bmatrix} \Delta[u_n] & \frac{1}{2}\Delta[u_p] & \frac{1}{2}\Delta[u_q] \\ \frac{1}{2}\Delta[u_p] & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\Delta[u_q] & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{\Delta\alpha}{q^{\mathcal{S}}} \begin{bmatrix} \epsilon_{nn}^{\mathcal{S},ef} & \epsilon_{np}^{\mathcal{S},ef} & \epsilon_{nq}^{\mathcal{S},ef} \\ \epsilon_{pn}^{\mathcal{S},ef} & \epsilon_{pp}^{\mathcal{S},ef} & \epsilon_{pq}^{\mathcal{S},ef} \\ \epsilon_{qn}^{\mathcal{S},ef} & \epsilon_{qp}^{\mathcal{S},ef} & \epsilon_{qq}^{\mathcal{S},ef} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

donde conclui-se que, para  $\mathcal{S}$  corresponder de fato a uma linha de descontinuidade forte, deve-se ter:

$$\epsilon_{pp}^{ef} = \epsilon_{pq}^{ef} = \epsilon_{qq}^{ef} = 0 \quad (3.41)$$

Atendo-se agora, apenas ao caso bidimensional, uma rápida simplificação das equações 3.41 merece ser destacada. Considerando os vetores unitários  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{p}$  co-planares à linha de descontinuidade, como representado na figura 2.3, é fácil perceber da definição das deformações efetivas ( $\epsilon_{ij}^{ef} := E_{ijkl}^{o,-1} \sigma_{kl} = (1 - D)\epsilon_{ij}$ ) que, tanto para o caso de estado plano de deformações como de tensões, tem-se (sempre)  $\epsilon_{pq}^{ef} = \epsilon_{qq}^{ef} = 0$ . Portanto, a condição de descontinuidade forte fica resumida a

$$\epsilon_{pp}^{ef} = \epsilon_{pp} = 0 \quad (3.42)$$

Substituindo a equação 3.42 na equação 2.58, obtém-se:

$$H^{crit} = 0 \quad (3.43)$$

o que significa dizer que, para o caso bidimensional, o regime de descontinuidade forte terá início imediatamente após a bifurcação apenas se o módulo de amolecimento for nulo neste instante. Como em geral isso não ocorre, um modelo de banda

variável, onde uma etapa transitória com descontinuidades fracas é adotada, mostra-se muitas vezes necessário para correta simulação das falhas materiais. Este modelo será detalhado na seção 3.4. Antes disso, expressões explícitas para o módulo de amolecimento discreto,  $H^*$ , são deduzidas na próxima seção, a partir da análise da energia consumida durante o regime de descontinuidade forte.

### 3.3 Energia Consumida no Regime de Descontinuidade Forte

A potência consumida,  $\mathcal{P}$ , durante um processo quase-estático de deformação em um domínio sólido  $\Omega$  é dada por:

$$\mathcal{P} = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} d\Omega \quad (3.44)$$

Restringindo a análise ao período após o início do regime de descontinuidade forte, i.e.,  $t \geq t_{SD}$ , pode-se substituir a equação 3.7 na equação 3.44, obtendo

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} d\Omega &= \int_{\Omega} \sigma_{ij} \left[ \dot{\epsilon}_{ij} + \frac{\delta_S}{2} (\llbracket \dot{u}_i \rrbracket n_j + \llbracket \dot{u}_j \rrbracket n_i) \right] d\Omega \\ &= \int_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \sigma_{ij}^{\Omega \setminus \mathcal{S}} \dot{\epsilon}_{ij} d\Omega + \underbrace{\int_{\mathcal{S}} \sigma_{ij}^{\mathcal{S}} \left[ \frac{1}{2} (\llbracket \dot{u}_i \rrbracket n_j + \llbracket \dot{u}_j \rrbracket n_i) \right] d\mathcal{S}}_{\mathcal{P}_S} \end{aligned} \quad (3.45)$$

onde a definição de  $\dot{\epsilon}_{ij}$  foi dada na equação 3.9 e  $\mathcal{P}_S$  é a potência consumida no desenvolvimento do salto no campo de deslocamentos.

Considerando a equação 3.11a e a simetria do tensor de tensões, pode-se reescrever:

$$\mathcal{P}_S = \int_{\mathcal{S}} t_i \llbracket \dot{u}_i \rrbracket d\mathcal{S} \quad (3.46)$$

Desta forma, a energia total consumida, desde o início do regime de descontinuidade forte até o alívio total da tensões, é dada por:

$$\mathcal{W}_S = \int_{t_{SD}}^{t_{\infty}} \mathcal{P}_S dt = \int_{t_{SD}}^{t_{\infty}} \int_{\mathcal{S}} t_i \llbracket \dot{u}_i \rrbracket d\mathcal{S} dt = \int_{\mathcal{S}} \underbrace{\left[ \int_{t_{SD}}^{t_{\infty}} t_i \llbracket \dot{u}_i \rrbracket dt \right]}_{G_{SD}} d\mathcal{S} \quad (3.47)$$

onde  $G_{SD}$  é a energia liberada em  $\mathcal{S}$ , por unidade de área, durante o regime de descontinuidade forte. Assumindo que a energia liberada durante a transição em regime de descontinuidade fraca é pequena quando comparada a  $G_{SD}$ , este termo pode ser entendido como a energia de fratura,  $G_f$ , usualmente adotada como uma propriedade do material e cujo valor pode ser determinado por ensaios padronizados.

Procura-se agora, reescrever o núcleo da integral da equação 3.46 numa forma mais conveniente, levando-se em conta o modelo de dano discreto das equações 3.37. Partindo da equação 3.33, tem-se:

$$\dot{\tau}_{\Delta[u]} = \frac{1}{\tau_{\Delta[u]}} (\Delta[u_i] Q_{ij}^e [\dot{u}_j]) \quad (3.48)$$

i.e.,

$$\Delta[u_i] Q_{ij}^e [\dot{u}_j] = \dot{\tau}_{\Delta[u]} \tau_{\Delta[u]} \quad (3.49)$$

Com isso, pós-multiplicando  $[\dot{u}_i]$  na equação constitutiva 3.37b (após a aplicação da equação 3.37c) e considerando a simetria de  $Q_{ij}^e$ , além da equivalência  $q_S = q^*(\Delta\alpha)$ , definida na equação 3.25, chega-se ao seguinte resultado:

$$t_i[\dot{u}_i] = \underbrace{\left[ \frac{q_S}{\Delta\alpha} \Delta[u_j] Q_{ji}^e \right]}_{t_i} [\dot{u}_i] = \frac{q_S}{\Delta\alpha} (\dot{\tau}_{\Delta[u]} \tau_{\Delta[u]}) \quad (3.50)$$

Das equações 3.37e e 3.37f, verifica-se que a dissipação ocorre somente se  $\tau_{\Delta[u]} = \Delta\alpha$  e  $\dot{\tau}_{\Delta[u]} = \dot{\alpha}$ . Portanto, a equação 3.50 equivale a

$$t_i[\dot{u}_i] = q_S \dot{\alpha} \quad (3.51)$$

Procede-se agora, à substituição da equação 3.51 na expressão de  $G_{SD}$ , definida na equação 3.47, i.e.,

$$G_{SD} = \int_{t_{SD}}^{t_\infty} q_S \dot{\alpha} dt = \int_{t_{SD}}^{t_\infty} q_S \frac{\dot{q}_S}{H^*} dt = \int_{q_{SD}}^0 q \frac{1}{H^*} dq \quad (3.52)$$

onde a lei de amolecimento discriminada na equação 3.37g foi utilizada. No caso  $G_{SD} \approx G_f$ , tem-se  $q_{SD} \approx q_o = r_o = \frac{f_t}{\sqrt{E}}$ , de forma que:

$$G_f = \int_{\frac{f_t}{\sqrt{E}}}^0 q \frac{1}{H^*} dq \quad (3.53)$$

Por fim, destaca-se que diferentes leis de amolecimento podem ser definidas de acordo com a estrutura do módulo de amolecimento discreto. Por exemplo, amolecimento linear é obtido a partir de um  $H^*$  constante, enquanto que amolecimento exponencial requer uma expressão do tipo  $H^*(q) = A^*q$ , onde  $A^*$  é uma constante. Desta forma, para cada um destes dois casos, a solução da equação 3.53 resulta em:

i. **Amolecimento linear:**

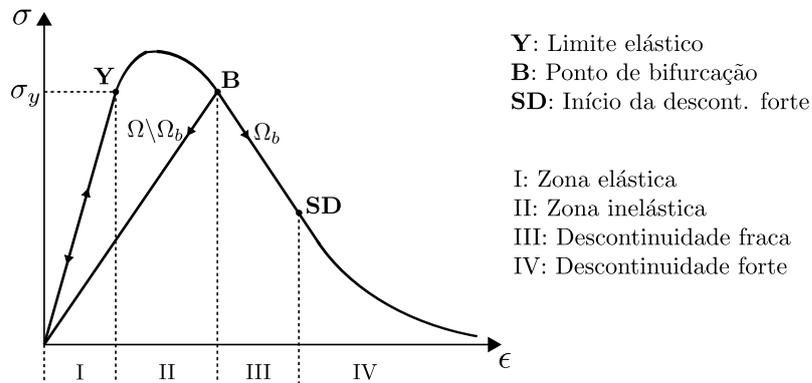
$$G_f = \frac{1}{H^*} \frac{q^2}{2} \Big|_{\frac{f_t}{\sqrt{E}}}^0 = -\frac{1}{H^*} \left[ \frac{f_t^2}{2E} \right] \Rightarrow H^* = -\frac{f_t^2}{2EG_f} \quad (3.54)$$

ii. **Amolecimento exponencial:**

$$G_f = \frac{1}{A^*} q \Big|_{\frac{f_t}{\sqrt{E}}}^0 \Rightarrow A^* = -\frac{f_t}{G_f \sqrt{E}}; \quad \therefore H^* = -\frac{f_t}{G_f \sqrt{E}} q \quad (3.55)$$

### 3.4 Modelo de Banda Variável

As diferentes etapas do processo de carregamento, adotadas nesta tese para um dado ponto material, são consolidadas nesta seção. Como já destacado anteriormente, o emprego de um modelo constitutivo de dano isotrópico faz com que tais etapas estejam associadas aos estágios de degradação que compõem a zona de processo de fratura em materiais parcialmente frágeis.

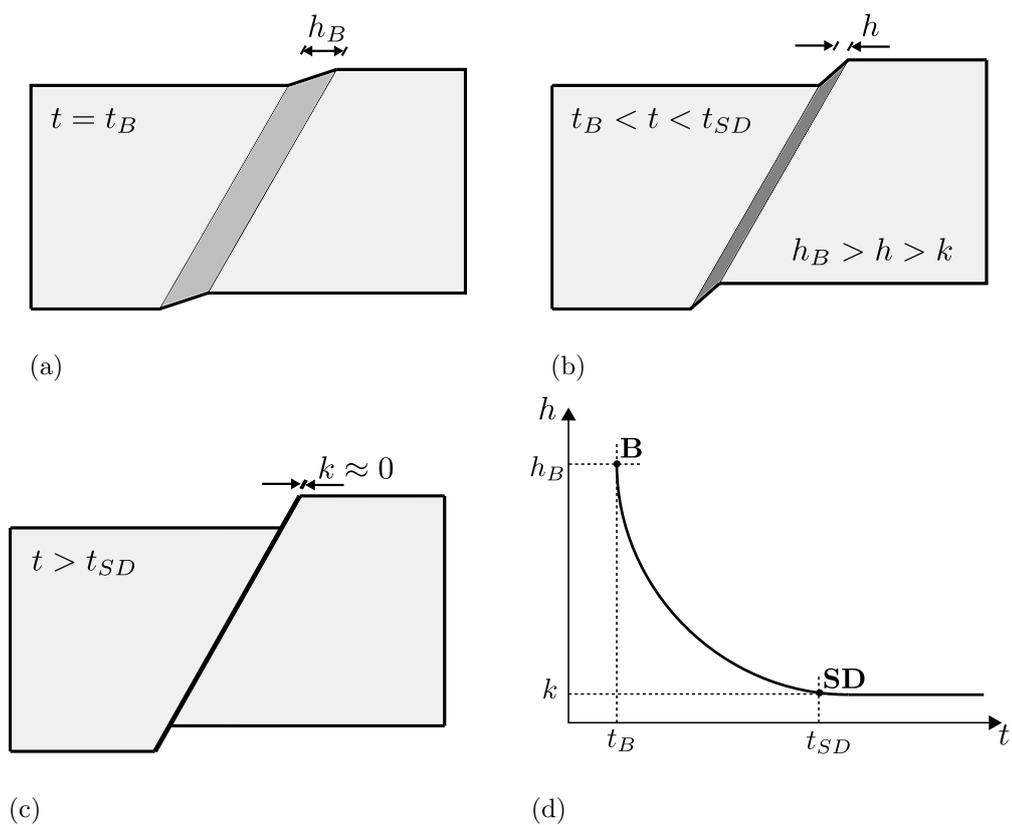


**Figura 3.3:** Diferentes fases do processo de carregamento.

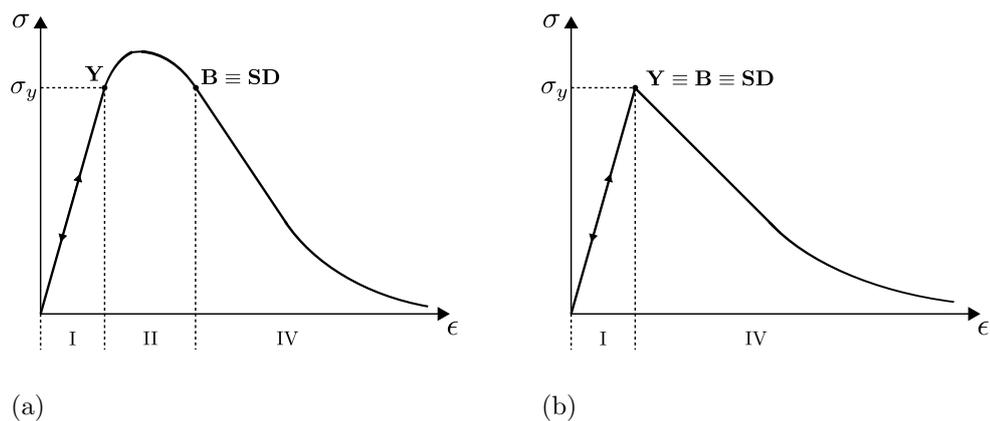
Com base na figura 3.3, pode-se distinguir:

- I. **Fase elástica:** Comportamento linear elástico, com  $\sigma_{ij} = E_{ijkl}^o \epsilon_{kl}$ , até o ponto limite **Y**;
- II. **Fase inelástica:** Comportamento não-linear com campos de deformação e deslocamento contínuos. Nesta etapa, o modelo constitutivo descrito na seção 2.2 é aplicado de forma direta, sendo que a cada novo estado de deformações (numericamente falando, a cada iteração), a análise de bifurcação sintetizada na seção 2.3.3 (para problemas planos) deve ser realizada. Quando a condição da equação 2.60 for satisfeita, ocorre a bifurcação, identificada pelo ponto **B**;
- III. **Fase com descontinuidade fraca:** Caracterizada pela presença de descontinuidades no campo de deformações. Adota-se a cinemática regularizada, descrita na seção 3.1.3, com valores finitos de  $h$ , que pode ser interpretado como a espessura da banda de localização. A medida que a análise avança, essa espessura diminui continuamente, desde um valor  $h_B$  no instante de bifurcação, **B**, até um valor nulo (numericamente falando, um parâmetro pequeno  $k$ ) no ponto **SD**, que marca o início do regime de descontinuidade forte. A lei que rege a variação desta banda é considerada pré-definida, i.e., entende-se que ela seja uma propriedade do material. Uma representação destas ideias é apresentada na figura 3.4;
- IV. **Fase com descontinuidade forte:** Caracterizada por descontinuidades no campo de deslocamentos, que produz deformações ilimitadas. Adota-se a cinemática regularizada na seção 3.1.3, com  $h = k \approx 0$ .

Se no instante de bifurcação **B**, a condição de descontinuidade forte (equação 3.43 para problemas planos) também for satisfeita, tem-se  $\mathbf{B} \equiv \mathbf{SD}$ , e a etapa III é suprimida, como indicado na figura 3.5a.



**Figura 3.4:** Modelo de banda de variável: (a) instante da bifurcação, (b) evolução da banda sob regime de descontinuidade fraca, (c) início do regime de descontinuidade forte, (d) variação da espessura da banda de localização em relação ao tempo.



**Figura 3.5:** Diferentes fases do carregamento para: (a)  $\mathbf{B} \equiv \mathbf{SD}$ , (b)  $\mathbf{Y} \equiv \mathbf{B} \equiv \mathbf{SD}$ .

Na simulação de fratura em materiais parcialmente frágeis, muitas vezes é razoável assumir o início do regime descontinuidade forte imediatamente após o final do comportamento elástico, i.e.,  $\mathbf{Y} \equiv \mathbf{B} \equiv \mathbf{SD}$ , conforme ilustrado na figura 3.5b. Nestas

situações, é comum definir a orientação da superfície de descontinuidade como sendo perpendicular à direção da máxima tensão principal, evitando-se, assim, a realização da análise de bifurcação, bem como a verificação das condições de descontinuidade forte, durante a solução computacional. De fato, apenas análises considerando tal simplificação haviam sido realizadas até recentemente no contexto do Método dos Elementos de Contorno - Manzoli e Venturini (2004, 2007) e Manzoli et al. (2009) - , onde bons resultados foram obtidos. Entretanto, de acordo com as simulações realizadas nesta tese, em alguns casos, a utilização do modelo de banda variável mostrou-se imprescindível para a correta captura da trajetória da trinca.

Em termos computacionais, considerando as equações 3.12c, 3.12g e 3.22, além da especificação de uma lei para a variação de  $h$ , as três etapas do carregamento inelástico diferem basicamente pela expressão de  $q(r)$  e, conseqüentemente, de  $D(r)$ , conforme detalhado a seguir.

### 3.4.1 Regime Inelástico Contínuo

No caso de dissipação com campos contínuos, a lei de amolecimento é postulada como propriedade do material. Classifica-se tal lei de acordo com a estrutura da função  $q(r)$ . Por exemplo, definindo  $C$  como uma constante escalar negativa arbitrária, se  $H = q'(r) = C$ , diz-se ter uma lei de amolecimento linear, enquanto que para  $H(q) = q'(r) = Cq$ , tem-se uma lei exponencial. Exemplos de expressões para ambos os casos são apresentadas aqui.

#### 3.4.1.1 Lei de Amolecimento Linear

$$q(r) = \begin{cases} r_o & \text{se } r \leq r_o \\ r_o + H(r - r_o) & \text{se } r_o < r < (r_o - \frac{r_o}{H}) \\ 0 & \text{se } r \geq (r_o - \frac{r_o}{H}) \end{cases} \quad (3.56)$$

$$D(r) = 1 - \frac{q(r)}{r} = \begin{cases} 0 & \text{se } r \leq r_o \\ 1 - \frac{r_o}{r} - H \left[ 1 - \frac{r_o}{r} \right] & \text{se } r_o < r < (r_o - \frac{r_o}{H}) \\ 1 & \text{se } r \geq (r_o - \frac{r_o}{H}) \end{cases} \quad (3.57)$$

### 3.4.1.2 Lei de Amolecimento Exponencial

$$q(r) = \begin{cases} r_o & \text{se } r \leq r_o \\ r_o e^{A(1-\frac{r}{r_o})} & \text{se } r > r_o \end{cases} \quad (3.58)$$

$$D(r) = 1 - \frac{q(r)}{r} = \begin{cases} 0 & \text{se } r \leq r_o \\ 1 - \frac{r_o}{r} e^{A(1-\frac{r}{r_o})} & \text{se } r > r_o \end{cases} \quad (3.59)$$

sendo  $A$ , uma constante positiva. Neste trabalho, adotou-se a expressão apresentada em Oliver et al. (1990):

$$A = \left[ \frac{G_f}{r^2 l^*} - \frac{1}{2} \right]^{-1} \quad (3.60)$$

onde  $l^*$  é um comprimento característico, correspondendo, no contexto do Método dos Elementos de Contorno, ao tamanho típico de uma célula interna, i.e., à média dos comprimentos dos seus lados.

## 3.4.2 Regime com Descontinuidade Fraca

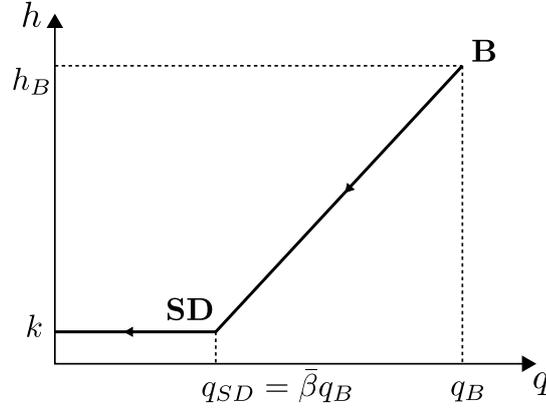
No regime com descontinuidade fraca, deve-se inicialmente postular uma lei de variação da banda de localização. Seguindo a ideia apresentada por Oliver et al. (1999), neste trabalho foi adotada uma lei de variação linear com a variável interna do tipo tensão que, fazendo referência à figura 3.6, pode ser escrita na forma:

$$h(q) = R(q - q_{SD}) + k \quad (3.61)$$

onde

$$R = \frac{h_B - k}{q_B - q_{SD}}; \quad q_{SD} = \bar{\beta} q_B \quad (3.62)$$

e  $\bar{\beta}$  é uma constante fixa pré-estabelecida, tal que  $0 < \bar{\beta} < 1$ .



**Figura 3.6:** Lei de variação linear para banda de localização,  $h(q)$  ( $0 < \bar{\beta} < 1$ ).

Nas equações 3.61 e 3.62,  $q_B$  refere-se à variável interna  $q$  no instante de bifurcação, i.e., quando a equação 2.60 é satisfeita. Resta definir o valor inicial da espessura da banda de localização,  $h_B$ . Para tal, destaca-se primeiramente, que o módulo de amolecimento contínuo, reinterpretado após aplicação da cinemática com descontinuidades, conforme destacado na equação 3.22, pode agora ser escrito em função de uma única variável ( $q$ ), tendo em vista também as equações 3.54 e 3.55, i.e.,

$$H(q) = H^*(q)h(q) \quad (3.63)$$

Desta forma, pode-se definir

$$h_B = \left| \frac{H(q_B)}{H^*(q_B)} \right| \quad (3.64)$$

A classificação da lei de amolecimento é feita, a partir de agora, com referência ao modelo discreto, ou seja, de acordo com a estrutura do módulo intrínseco,  $H^*$ , como nas equações 3.54 e 3.55.

### 3.4.2.1 Lei de Amolecimento Linear

Aplicando as equações 3.54 e 3.61 à 3.63, chega-se à seguinte equação diferencial ordinária:

$$H = q'(r) = -\frac{f_t^2 R}{2EG_f}(q - q_{SD}) - \frac{f_t^2 k}{2EG_f} \quad (3.65)$$

cuja solução resulta em

$$q(r) = q_{SD} - \frac{k}{R} + \left[ q_B - q_{SD} + \frac{k}{R} \right] e^{\frac{f_t^2 R}{2EG_f}(r_B - r)} \quad (3.66)$$

Com isso, da equação 3.12c,

$$D(r) = 1 - \frac{1}{r} \left[ q_{SD} - \frac{k}{R} + \left( q_B - q_{SD} + \frac{k}{R} \right) \right] e^{\frac{f_t^2 R}{2EG_f}(r_B - r)} \quad \text{se } r_B < r < r_{SD} \quad (3.67)$$

onde  $r_{SD}$  pode ser obtido diretamente da equação 3.66, i.e.,

$$r_{SD} = r_B - \frac{2EG_f}{f_t^2 R} \ln \left( \frac{k}{h_B} \right) \quad (3.68)$$

### 3.4.2.2 Lei de Amolecimento Exponencial

Introduzindo as equações 3.55 e 3.61 à 3.63, obtém-se agora:

$$H = q'(r) = aq^2 + bq \quad (3.69)$$

onde

$$a = -\frac{f_t R}{G_f \sqrt{E}}; \quad b = -\frac{f_t}{G_f \sqrt{E}}(k - Rq_{SD}) \quad (3.70)$$

A solução da equação 3.69 é dada por:

$$q(r) = b \left[ -a + \left( \frac{b + aq_B}{q_B} \right) e^{b(r_B - r)} \right]^{-1} \quad (3.71)$$

o que corresponde a

$$D(r) = 1 - \frac{b}{r} \left[ -a + \left( \frac{b + aq_B}{q_B} \right) e^{b(r_B - r)} \right]^{-1} \quad \text{se } r_B < r < r_{SD} \quad (3.72)$$

onde, da equação 3.71,

$$r_{SD} = r_B - \frac{1}{b} \ln \left[ \frac{q_B}{q_{SD}} \left( \frac{b + aq_{SD}}{b + aq_B} \right) \right] \quad (3.73)$$

### 3.4.3 Regime com Descontinuidade Forte

Como destacado na figura 3.6, durante todo o regime de descontinuidade forte, tem-se:

$$h = k \quad (3.74)$$

Expressões para a evolução da variável de dano são, então, deduzidas a seguir para leis de amolecimento linear e exponencial.

#### 3.4.3.1 Lei de Amolecimento Linear

Das equações 3.54, 3.63 e 3.74, obtém-se:

$$H = q'(r) = -\frac{f_t^2 k}{2EG_f} \quad (3.75)$$

cuja solução fornece

$$q(r) = q_{SD} - \frac{f_t^2 k}{2EG_f} (r - r_{SD}) \quad (3.76)$$

Daí,

$$D(r) = 1 + \frac{f_t^2 k}{2EG_f} - \frac{1}{r} \left[ q_{SD} + \frac{f_t^2 k}{2EG_f} r_{SD} \right] \quad \text{se } r > r_{SD} \quad (3.77)$$

onde  $r_{SD}$  é dado pela equação 3.68.

#### 3.4.3.2 Lei de Amolecimento Exponencial

Substituindo as equações 3.55 e 3.74 na equação 3.63,

$$H = q'(r) = -\frac{f_t k}{G_f \sqrt{E}} q \quad (3.78)$$

A solução da equação 3.78 é dada por:

$$q(r) = q_{SD} e^{\frac{f_t k}{G_f \sqrt{E}} (r_{SD} - r)} \quad (3.79)$$

o que resulta em

$$D(r) = 1 - \frac{q_{SD}}{r} e^{\frac{f_t k}{G_f \sqrt{E}} (r_{SD} - r)} \quad \text{se } r > r_{SD} \quad (3.80)$$

onde  $r_{SD}$  é dado pela equação 3.73.

Por fim, destaca-se aqui, que na simplificação referente à introdução direta de descontinuidades fortes ao final do regime elástico, i.e.,  $\mathbf{Y} \equiv \mathbf{B} \equiv \mathbf{SD}$ , tem-se  $r_{SD} \equiv q_{SD} = r_o (= f_t/\sqrt{E})$ . Com isso, a equação 3.80 assumiria a forma:

$$D(r) = 1 - \frac{r_o}{r} e^{\frac{r_o^2 k}{G_f} (1 - \frac{r}{r_o})} \quad \text{se } r > r_o \quad (3.81)$$

que corresponde à evolução da variável de dano utilizada por Manzoli et al. (2009).

## Capítulo 4

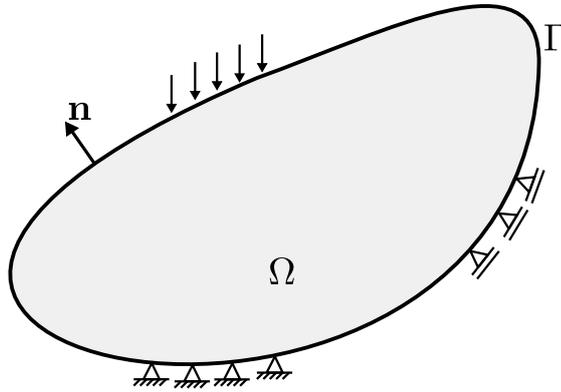
# Equações Integrais para Problemas Fisicamente Não-Lineares

Equações integrais para problemas de sólidos cujos materiais apresentam comportamento não-linear, sob determinadas condições de carga, em regime de pequenas deformações são apresentadas neste capítulo. Duas maneiras distintas de obtê-las são convencionalmente adotadas na literatura: uma baseada na aplicação do teorema da reciprocidade de Betti, como por exemplo em Aliabadi (2002), e outra nos conceitos de resíduos ponderados, como em Brebbia et al. (1984). O segundo caso foi adotado aqui. Em ambas, as equações diferenciais de equilíbrio e as condições de contorno naturais e essenciais são o ponto de partida. Com isso, o problema de valor de contorno fica implicitamente satisfeito (de forma completa) pelas formulações integrais obtidas.

O capítulo é dividido em duas seções. Na primeira, definem-se as equações integrais em meios contínuos convencionais, enquanto que na segunda, suas correspondentes para domínios com a presença de descontinuidades são obtidas. Estratégias de solução destas equações, através do Método dos Elementos de Contorno, serão tratadas no capítulo 5.

## 4.1 Meios Contínuos Convencionais

Considere um domínio sólido  $\Omega$ , delimitado por um contorno fechado  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma$ , onde sejam prescritos deslocamentos em  $\Gamma_u$  (condições de contorno essenciais) e forças de superfície em  $\Gamma_\sigma$  (condições de contorno naturais), conforme ilustrado na figura 4.1. Suponha ainda, que um conjunto de forças externas (por unidade de volume), cujo campo resultante será referenciado por  $b_i$ , atuem em  $\Omega$ .



**Figura 4.1:** Domínio sólido contínuo.

Nestes termos, um problema de mecânica quase-estática com deformações infinitesimais fica totalmente definido (em sua formulação diferencial) através do seguinte conjunto de equações:

$$\dot{\sigma}_{ij,j} + \dot{b}_i = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (\text{equilíbrio interno}) \quad (4.1a)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (\text{compatibilidade cinemática}) \quad (4.1b)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} - \dot{\tilde{\sigma}}_{ij}(\dot{\epsilon}_{ij}) = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (\text{compatibilidade constitutiva}) \quad (4.1c)$$

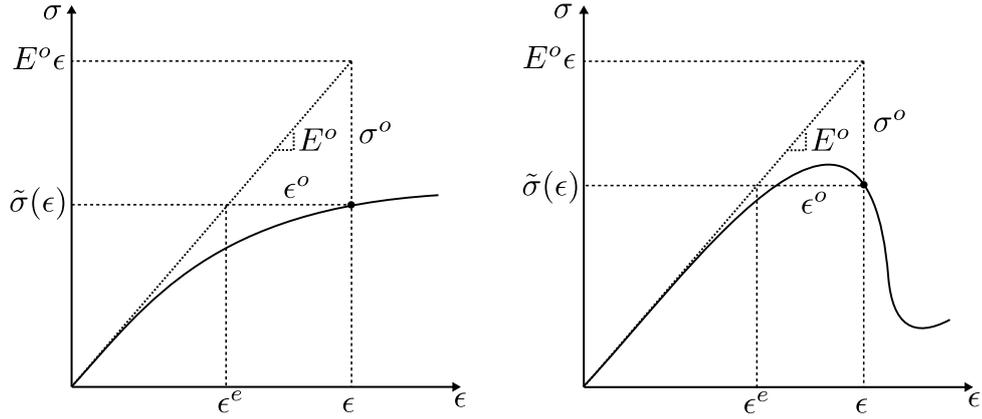
$$\dot{u}_i = \dot{u}_i \quad \text{em } \Gamma_u \quad (\text{c. c. essenciais}) \quad (4.1d)$$

$$\dot{\sigma}_{ij}n_j = \dot{t}_i \quad \text{em } \Gamma_\sigma \quad (\text{c. c. naturais}) \quad (4.1e)$$

onde  $\tilde{\sigma}_{ij}(\epsilon_{ij})$  representa qualquer função constitutiva não-linear. Em particular, para modelos de dano isotrópico, representa a relação secante da equação 3.12b.

Considere agora, os diagramas de equilíbrio uni-axial arbitrários apresentados na

figura 4.2. Percebe-se que qualquer ponto de uma trajetória de equilíbrio não-linear pode ser definido, independentemente do modelo constitutivo, como a combinação de duas partes lineares. Ou seja, para uma deformação  $\epsilon$ , a tensão real  $\tilde{\sigma}(\epsilon)$  pode ser dada pela subtração entre um estado de tensão obtido pela aplicação direta da relação elástica linear inicial,  $E^o\epsilon$ , e um resíduo  $\sigma^o = E^o\epsilon^o$ .



**Figura 4.2:** Trajetórias de equilíbrio uni-axial arbitrárias.

Generalizando para um domínio multi-axial, pode-se escrever:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^o \quad (4.2)$$

$$\tilde{\sigma}_{ij}(\epsilon_{ij}) = E_{ijkl}^o(\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^o) = E_{ijkl}^o\epsilon_{kl} - \sigma_{ij}^o \quad (4.3)$$

ou, derivando com relação ao tempo,

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^o \quad (4.4)$$

$$\dot{\tilde{\sigma}}_{ij}(\dot{\epsilon}_{ij}) = E_{ijkl}^o(\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\epsilon}_{kl}^o) = E_{ijkl}^o\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\sigma}_{ij}^o \quad (4.5)$$

Particularmente para os modelos de dano isotrópico, pode-se mostrar facilmente que as deformações residuais e suas taxas, normalmente denominadas deformações iniciais, correspondem respectivamente a  $\epsilon_{ij}^o = D\epsilon_{ij}$  e  $\dot{\epsilon}_{ij}^o = \dot{D}\epsilon_{ij} + D\dot{\epsilon}_{ij}$ .

Uma primeira formulação integral do problema definido nas equações 4.1 é obtida

assumindo-se uma solução,  $\dot{u}_i$ , cujo erro introduzido pode ser minimizado adotando-se a seguinte equação de resíduos ponderados:

$$\int_{\Omega} (\dot{\tilde{\sigma}}_{ij,j} + \dot{b}_i) u_i^* d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} (\dot{t}_i - \dot{t}_i) u_i^* d\Gamma + \int_{\Gamma_u} (\dot{u}_i - \dot{u}_i) t_i^* d\Gamma = 0 \quad (4.6)$$

onde  $u_i^*$  e  $t_i^*$  representam deslocamentos e forças de superfície de um campo ponderador, por hora, arbitrário. Particularmente para pontos localizados sobre o contorno,  $t_i^* = \sigma_{ij}^* n_j$ , onde  $n_j$  referem-se às componentes da normal unitária à  $\Gamma$ , apontando para fora do domínio.

Integrando por partes o primeiro termo da equação 4.6, i.e.,

$$\int_{\Omega} \dot{\tilde{\sigma}}_{ij,j} u_i^* d\Omega = \int_{\Omega} (\dot{\tilde{\sigma}}_{ij} u_i^*)_{,j} d\Omega - \int_{\Omega} \dot{\tilde{\sigma}}_{ij} u_{i,j}^* d\Omega = \int_{\Gamma} \dot{t}_i u_i^* d\Gamma - \int_{\Omega} \dot{\tilde{\sigma}}_{ij} u_{i,j}^* d\Omega \quad (4.7)$$

e aplicando a equação 4.7 à 4.6,

$$\int_{\Omega} \dot{\tilde{\sigma}}_{ij} u_{i,j}^* d\Omega = \int_{\Omega} \dot{b}_i u_i^* d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \dot{t}_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Gamma_u} [(\dot{u}_i - \dot{u}_i) t_i^* + \dot{t}_i u_i^*] d\Gamma \quad (4.8)$$

Considerando agora, as equações 4.1b e 4.5, além das simetrias associadas a pequenas deformações em meios isotrópicos, pode-se reformular o termo à esquerda na equação 4.8 da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \dot{\tilde{\sigma}}_{ij} u_{i,j}^* d\Omega &= \int_{\Omega} E_{ijkl}^o \dot{u}_{k,l} u_{i,j}^* d\Omega - \int_{\Omega} E_{ijkl}^o \dot{\epsilon}_{kl} u_{i,j}^* d\Omega \\ &= \int_{\Gamma} (E_{klij}^o u_{i,j}^*) n_l \dot{u}_k d\Gamma - \int_{\Omega} (E_{klij}^o u_{i,j}^*)_{,l} \dot{u}_k d\Omega - \int_{\Omega} (E_{klij}^o u_{i,j}^*) \dot{\epsilon}_{kl} d\Omega \\ &= \int_{\Gamma} \sigma_{kl}^* n_l \dot{u}_k d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{kl,l}^* \dot{u}_k d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{kl}^* \dot{\epsilon}_{kl} d\Omega \\ &= \int_{\Gamma} \dot{u}_i t_i^* d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij,j}^* \dot{u}_i d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij} d\Omega \end{aligned} \quad (4.9)$$

e a substituição da equação 4.9 na equação 4.8 leva a

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \sigma_{ij,j}^* \dot{u}_i d\Omega &= \int_{\Omega} \dot{b}_i u_i^* d\Omega + \underbrace{\int_{\Gamma_u} \dot{t}_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Gamma_{\sigma}} \dot{t}_i u_i^* d\Gamma}_{\int_{\Gamma} \dot{t}_i u_i^* d\Gamma} \\ &\quad - \underbrace{\int_{\Gamma_u} \dot{u}_i t_i^* d\Gamma - \int_{\Gamma_{\sigma}} \dot{u}_i t_i^* d\Gamma}_{-\int_{\Gamma} \dot{u}_i t_i^* d\Gamma} + \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \dot{b}_i u_i^* d\Omega + \int_{\Gamma} \dot{t}_i u_i^* d\Gamma - \int_{\Gamma} \dot{u}_i t_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij} d\Omega \end{aligned} \quad (4.10)$$

A seguir, a particularização do campo ponderador conduzirá às equações integrais pertinentes à aplicação ao Método dos Elementos de Contorno. São elas: equações integrais para deslocamentos em pontos internos (identidade de Somigliana), para deslocamentos em pontos do contorno e para deformações em pontos internos.

#### 4.1.1 Identidade de Somigliana

Assumindo que as funções de ponderação  $u_i^*$  referem-se a um campo de deslocamentos num meio homogêneo infinito, sob regime elástico linear, resultante de carregamentos unitários (linearmente independentes) aplicados em  $\mathbf{X} = \boldsymbol{\xi}$  ( $\boldsymbol{\xi} \in \Omega$ ,  $\boldsymbol{\xi} \notin \Gamma$ ), pode-se escrever:

$$b_i^* = \delta(\mathbf{X} - \boldsymbol{\xi})P_i \quad (4.11)$$

onde  $P_i = 1$  para qualquer valor do índice e  $\delta(\mathbf{X} - \boldsymbol{\xi})$  é a função delta de Dirac, que estabelece

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{X})\delta(\mathbf{X} - \boldsymbol{\xi})d\Omega = \begin{cases} f(\boldsymbol{\xi}) & \text{se } \boldsymbol{\xi} \in \Omega \\ 0 & \text{se } \boldsymbol{\xi} \notin \Omega \end{cases} \quad (4.12)$$

A esta configuração, da-se o nome de problema fundamental de Kelvin.

Agora, considerando a condição de equilíbrio  $\sigma_{ij,j}^* = -b_i^*$ , a substituição da equação 4.11 na equação 4.10 fornece:

$$\begin{aligned} \dot{u}_i(\boldsymbol{\xi})P_i &= \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})\dot{t}_j(\mathbf{X})P_i d\Gamma(\mathbf{X}) - \int_{\Gamma} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})\dot{u}_j(\mathbf{X})P_i d\Gamma(\mathbf{X}) \\ &\quad + \int_{\Omega} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})\dot{b}_j(\mathbf{X})P_i d\Omega(\mathbf{X}) + \int_{\Omega} \sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})\dot{\epsilon}_{jk}^o(\mathbf{X})P_i d\Omega(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (4.13)$$

onde

$$u_j^*(\mathbf{X}) = u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})P_i; \quad t_j^*(\mathbf{X}) = t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})P_i; \quad \sigma_{jk}^*(\mathbf{X}) = \sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})P_i \quad (4.14)$$

Os tensores  $u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})$ ,  $t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})$  e  $\sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})$  são as soluções fundamentais de Kelvin e representam, respectivamente, num ponto de campo,  $\mathbf{X}$ , deslocamentos e forças de superfície na direção  $j$  e componentes de tensão  $jk$  devido a uma carga unitária

concentrada no ponto fonte,  $\xi$ , e aplicada na direção  $i$ . Expressões para tais termos são apresentadas no apêndice A.

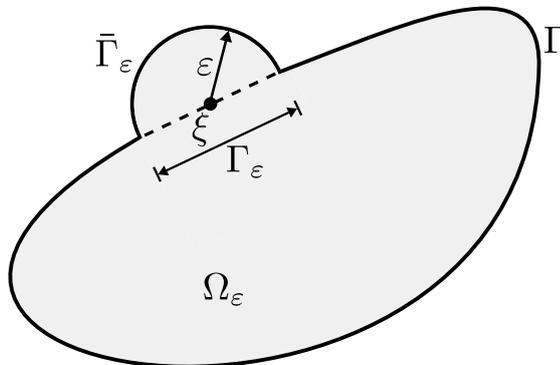
A partir do princípio da superposição, a equação 4.13 pode ser desmembrada para cada direção do espaço euclidiano, resultando na identidade de Somigliana, que fornece componentes de deslocamento (ou, no caso, de velocidade) para pontos internos, i.e.,

$$\begin{aligned} \dot{u}_i(\xi) = & \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, \mathbf{X}) \dot{t}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) - \int_{\Gamma} t_{ij}^*(\xi, \mathbf{X}) \dot{u}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) \\ & + \int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, \mathbf{X}) \dot{b}_j(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) + \int_{\Omega} \sigma_{ijk}^*(\xi, \mathbf{X}) \dot{\epsilon}_{jk}^o(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Das equações A.40 e A.43 (apêndice A), verifica-se que o núcleo da integral do último termo na equação 4.15 apresenta singularidade fraca. Desta forma, técnicas especiais de integração numéricas são requeridas, conforme tratado mais adiante.

### 4.1.2 Equação Integral para Deslocamentos no Contorno

A situação na qual  $\xi \in \Gamma$  é tratada aqui. Para tal, assume-se uma ampliação do domínio através do acréscimo de uma superfície esférica parcial (no caso tridimensional) ou uma parte de um círculo (no caso bidimensional), ambos de raio  $\varepsilon$  e englobando o ponto fonte,  $\xi$ , conforme ilustrado na figura 4.3. O domínio aumentado será referenciado por  $\Omega_\varepsilon$ .



**Figura 4.3:** Ponto fonte no contorno: domínio aumentado.

Desta forma, a equação 4.15 pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \dot{u}_i(\boldsymbol{\xi}) = & \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\bar{\Gamma}_\varepsilon} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{t}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) - \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\bar{\Gamma}_\varepsilon} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{u}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) \\ & + \int_{\Omega_\varepsilon} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{b}_j(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) + \int_{\Omega_\varepsilon} \sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{\epsilon}_{jk}^o(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Deve-se agora, tomar o limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  para recuperar o domínio original. Voltando a atenção inicialmente para o segundo termo à esquerda na equação 4.16, faz-se o seguinte desmembramento:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\bar{\Gamma}_\varepsilon} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{u}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) = & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{u}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) \\ & + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{u}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde a primeira integral à direita pode ser reescrita, a partir da adição e subtração de um campo constante  $\dot{u}_i(\boldsymbol{\xi})$ , na forma:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{u}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) = & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) [\dot{u}_j(\mathbf{X}) - \dot{u}_j(\boldsymbol{\xi})] d\Gamma(\mathbf{X}) \\ & + \dot{u}_i(\boldsymbol{\xi}) \left[ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) \right] \end{aligned} \quad (4.18)$$

O primeiro termo à direita na equação 4.18 resulta em valor nulo para campos de taxa de deslocamentos contínuos em  $\boldsymbol{\xi} \in \Gamma$ . Já o segundo, pode ser integrado analiticamente, gerando um tensor como termo livre em função apenas da geometria de  $\Gamma$  em torno de  $\boldsymbol{\xi}$  e de propriedades constitutivas do material. Com isso, e observando que o termo à esquerda na equação 4.16 pode ser escrito na forma  $\dot{u}_i(\boldsymbol{\xi}) = \delta_{ij} \dot{u}_j(\boldsymbol{\xi})$ , convém definir

$$c_{ij}(\boldsymbol{\xi}) = \delta_{ij} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) \quad (4.19)$$

Vale a pena destacar que, para pontos fonte em regiões suaves do contorno, a região acrescida ao domínio refere-se a uma semi-esfera (ou um semi-círculo) e a solução da equação 4.19 resulta em  $c_{ij} = (1/2)\delta_{ij}$  (uma dedução completa pode ser vista em Aliabadi (2002)). No caso de quinas, os ângulos limites de integração se alteram e a dependência, não somente neles, mas também nas constantes elásticas do material, torna-se explícita.

Retornando à equação 4.17, verifica-se das equações (ver apêndice) que o núcleo da última integral apresenta singularidade forte e o seu limite existirá apenas no sentido do valor principal de Cauchy, cuja existência requer que o campo  $\dot{u}_i(\mathbf{X})$  satisfaça a condição de continuidade de Hölder em  $\boldsymbol{\xi}$  (ver, por exemplo, Muskhelishvili (1953)). Tal condição pode ser expressa matematicamente por:

$$|\dot{u}_i(\mathbf{X}) - \dot{u}_i(\boldsymbol{\xi})| \leq \mathcal{A}|\mathbf{X} - \boldsymbol{\xi}|^{\mathcal{B}} \quad (4.20)$$

onde  $\mathbf{X}$  é qualquer ponto de  $\Gamma$  e  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  são constantes positivas, com  $0 < \mathcal{B} \leq 1$ , sendo  $\mathcal{B} = 1$  o caso mais restritivo. Para destacar esta peculiaridade, utiliza-se a seguinte notação:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{u}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) = \oint_{\Gamma} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{u}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) \quad (4.21)$$

Numericamente, métodos bastante específicos serão necessários para solução dessas integrais.

A primeira e a última integrais da equação 4.16 apresentam apenas singularidade fraca quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  e  $\mathbf{X} \rightarrow \boldsymbol{\xi}$ . Portanto, tal equação pode ser finalmente reescrita na seguinte forma:

$$\begin{aligned} c_{ij}(\boldsymbol{\xi}) \dot{u}_i(\boldsymbol{\xi}) = & \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{t}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) - \oint_{\Gamma} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{u}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) \\ & + \int_{\Omega} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{b}_j(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) + \int_{\Omega} \sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{\epsilon}_{jk}^o(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (4.22)$$

A equação 4.22 fornece as componentes de deslocamento (ou de velocidade) para pontos situados no contorno e é muitas vezes denominada simplesmente equação integral do contorno.

### 4.1.3 Equação Integral para Deformações internas

A taxa de deformações em pontos internos pode ser obtida tomando-se a parte simétrica do gradiente da equação 4.15, i.e.,

$$\dot{\epsilon}_{ij}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2} [\dot{u}_{i,j}(\boldsymbol{\xi}) + \dot{u}_{j,i}(\boldsymbol{\xi})] \quad (4.23)$$

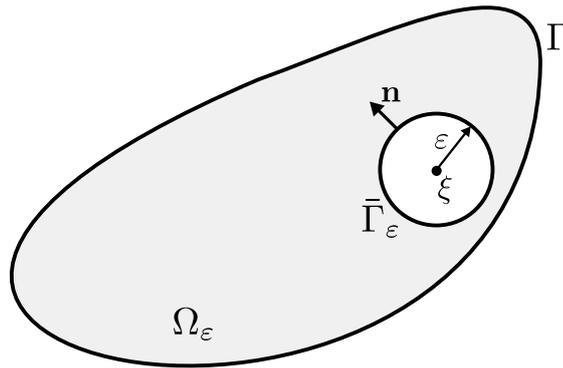
Nas três primeiras integrais, as derivações podem ser realizadas diretamente sobre os tensores de segunda ordem presentes em seus núcleos, visto que em nenhum caso surgem grandes problemas de singularidade (nas integrais de contorno tem-se  $\boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{X}$  e, na de domínio, a derivação resulta em um termo de singularidade fraca). Com isso, surgem dois novos tensores nas formas:

$$u_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) = \frac{1}{2} [u_{ik,j}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})|_{\boldsymbol{\xi}} + u_{jk,i}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})|_{\boldsymbol{\xi}}] \quad (4.24)$$

$$t_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) = \frac{1}{2} [t_{ik,j}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})|_{\boldsymbol{\xi}} + t_{jk,i}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})|_{\boldsymbol{\xi}}] \quad (4.25)$$

Expressões explícitas para estes termos são apresentadas no apêndice B.

A integral de domínio, da equação 4.15, que contém o termo inelástico,  $\dot{\epsilon}_{ij}^o$ , por sua vez, precisa ser melhor explorada, já que as derivações de  $\sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})$  (com relação ao ponto fonte) produzem tensores de singularidade forte quando  $\boldsymbol{\xi}$  e  $\mathbf{X}$  coincidem. Para tal, assume-se a exclusão de uma esfera (para domínios tridimensionais) ou de um círculo (para domínios bidimensionais), ambos de raio  $\varepsilon$  e centrados em  $\boldsymbol{\xi}$ , do domínio original,  $\Omega$ , como ilustrado na figura 4.4. O novo domínio será referenciado por  $\Omega_\varepsilon$ .



**Figura 4.4:** Subdomínio  $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$  considerando a exclusão de uma esfera ou círculo.

No limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , representa-se formalmente:

$$V_i = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} \sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{\epsilon}_{jk}^o(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) \quad (4.26)$$

Desta forma, o gradiente com relação ao ponto fonte pode ser escrito da seguinte maneira:

$$V_{i,l}|_{\boldsymbol{\xi}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi_l} \int_{\Omega_\varepsilon} \sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{\epsilon}_{jk}^o(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) \right] \quad (4.27)$$

Para tratar de forma correta o termo entre colchetes, deve-se perceber que o domínio  $\Omega_\varepsilon$  é função da posição do ponto fonte, i.e.,  $\Omega_\varepsilon \equiv \Omega_\varepsilon(\boldsymbol{\xi})$ . Desta forma, pode-se utilizar a fórmula de Leibnitz:

$$\frac{d}{d\alpha} \int_{\phi_1(\alpha)}^{\phi_2(\alpha)} f(x, \alpha) dx = \int_{\phi_1(\alpha)}^{\phi_2(\alpha)} \frac{df}{d\alpha} dx - f(\phi_1, \alpha) \frac{d\phi_1}{d\alpha} + f(\phi_2, \alpha) \frac{d\phi_2}{d\alpha} \quad (4.28)$$

onde, no caso da 4.27,  $\alpha$  estaria associado às coordenadas de  $\boldsymbol{\xi}$ ,  $\phi_1(\alpha)$  corresponderia à superfície  $\bar{\Gamma}_\varepsilon$ , referente à superfície da esfera (ou círculo) de raio  $\varepsilon$ , e  $\phi_2$  estaria associado ao contorno  $\Gamma$  do domínio original, de forma que  $\frac{d\phi_2}{d\alpha} = 0$ . Seguindo essas analogias, obtém-se:

$$V_{i,l}|_{\boldsymbol{\xi}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Omega_\varepsilon} [\sigma_{ijk,l}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})|_{\boldsymbol{\xi}}] \dot{\epsilon}_{jk}^o(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) - \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} \sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{\epsilon}_{jk}^o(\mathbf{X}) \bar{n}_l(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) \right\} \quad (4.29)$$

onde  $\bar{n}_i$  representa as componentes do vetor unitário ortogonal à  $\bar{\Gamma}_\varepsilon$ , apontando para a direção externa da esfera (ou círculo). Na equação 4.29, a relação  $r_{,i} = \frac{r_i}{r} = \bar{n}_i$ , sendo  $r_i = X_i - \xi_i$ , válida para  $\mathbf{X} \in \bar{\Gamma}_\varepsilon$ , também foi levada em conta.

Aplicando o processo limite à primeira integral da equação 4.29, pode-se mostrar, como em Telles (1983), que ela existe no sentido do valor principal de Cauchy, desde que  $\dot{\epsilon}_{ij}^o$  satisfaça à condição de continuidade de Hölder em  $\boldsymbol{\xi}$ . A seguinte representação é então adotada:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} [\sigma_{ijk,l}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})|_{\boldsymbol{\xi}}] \dot{\epsilon}_{jk}^o(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) = \int_{\Omega} [\sigma_{ijk,l}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})|_{\boldsymbol{\xi}}] \dot{\epsilon}_{jk}^o(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) \quad (4.30)$$

Considerando que na equação para deformações a parte simétrica do gradiente será requerida, deve-se definir:

$$\sigma_{ijkl}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) = \frac{1}{2} [\sigma_{ikl,j}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})|_{\boldsymbol{\xi}} + \sigma_{jkl,i}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})|_{\boldsymbol{\xi}}] \quad (4.31)$$

cujas expressões explícitas, também são apresentadas no apêndice B.

Por outro lado, a última integral da equação 4.29 contempla o fato de que o domínio  $\Omega_\varepsilon$  se modifica com uma variação nas coordenadas de  $\boldsymbol{\xi}$  e sua existência foi pioneiramente identificada por Bui (1978). No tratamento deste termo, inicia-se pela adoção da expansão em série de Taylor da taxa das deformações iniciais, em torno do ponto fonte, i.e.,

$$\dot{\epsilon}_{ij}^o(\mathbf{X}) = \dot{\epsilon}_{ij}^o(\boldsymbol{\xi}) + [X_k - \xi_k] \dot{\epsilon}_{ij,k}^o(\boldsymbol{\xi}) + \dots \quad (4.32)$$

Os termos lineares (e de ordem superior) na equação 4.32, quando aplicados à última integral da equação 4.29, resultam em núcleos desprezíveis no limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Desta forma, pode-se escrever:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} \sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{\epsilon}_{jk}^o(\mathbf{X}) \bar{n}_l(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) = \dot{\epsilon}_{jk}^o(\boldsymbol{\xi}) \underbrace{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} \sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \bar{n}_l(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X})}_{=-F_{ijkl}^\varepsilon} \quad (4.33)$$

onde  $F_{ijkl}^\varepsilon$  é um termo livre oriundo da solução analítica da integral em destaque na equação 4.33 e, novamente enfatizando que a parte simétrica do gradiente definido na equação 4.27 será necessária à formulação da equação integral para deformações, deve-se estabelecer:

$$F_{ijkl}^{\varepsilon\varepsilon} = \frac{1}{2} [F_{iklj}^\varepsilon + F_{jkli}^\varepsilon] \quad (4.34)$$

Expressões para os termos  $F_{ijkl}^\varepsilon$  e, conseqüentemente,  $F_{ijkl}^{\varepsilon\varepsilon}$  são apresentadas no apêndice C, considerando domínios tri e bidimensionais.

Finalmente, considerando as equações 4.24, 4.25, 4.31 e 4.34, a equação integral para taxa de deformações em pontos internos pode ser obtida a partir da operação da equação 4.23 sobre a equação 4.15, i.e.,

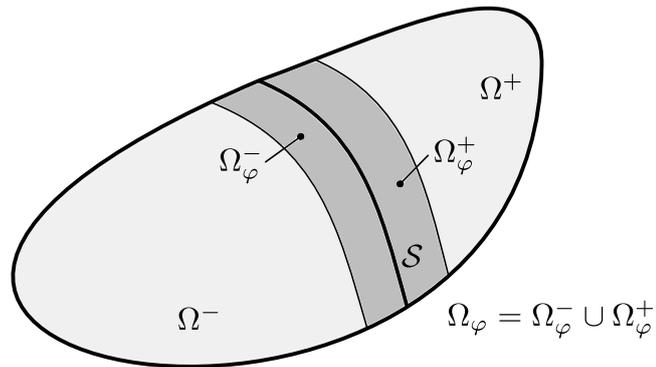
$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij}(\boldsymbol{\xi}) &= \int_{\Gamma} u_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{t}_k(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) - \int_{\Gamma} t_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{u}_k(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) \\ &+ \int_{\Omega} u_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{b}_k(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) + \int_{\Omega} \sigma_{ijkl}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{\epsilon}_{kl}^o(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) + F_{ijkl}^{\varepsilon\varepsilon} \dot{\epsilon}_{kl}^o(\boldsymbol{\xi}) \end{aligned} \quad (4.35)$$

## 4.2 Meios com Presença de Descontinuidades

Para a representação dos meios com descontinuidades, sejam elas fracas ou fortes, a cinemática regularizada apresentada na seção 3.1.3 pode ser utilizada. Entretanto, por questões numéricas, é importante reformula-la novamente, permitindo a distribuição dos efeitos da superfície descontínua sobre uma região finita (e arbitrária) do domínio. Tal reformulação é apresentada inicialmente. Em seguida, partindo da formulação diferencial do problema, as equações integrais são obtidas. Finalmente, a imposição da equação de equilíbrio na interface descontínua, em sua forma forte, é destacada como condição necessária para complementação das formulações integrais.

### 4.2.1 Reformulação das Equações Cinemáticas

Tomando como ponto de partida a figura 3.1c, a reformulação da cinemática com descontinuidades inicia-se pela definição de um subdomínio arbitrário  $\Omega_\varphi \subset \Omega$ , ao redor de  $\mathcal{S}$ , como apresentado na figura 4.5.



**Figura 4.5:** Subdomínio arbitrário  $\Omega_\varphi$  em torno da superfície descontínua.

Define-se ainda, uma função contínua  $\varphi(\mathbf{X})$ , também arbitrária em  $\Omega_\varphi$ , mas que satisfaça às seguintes condições:

$$\varphi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 0, & \text{para } \mathbf{X} \in \Omega^- \setminus \Omega_\varphi^- \\ 1, & \text{para } \mathbf{X} \in \Omega^+ \setminus \Omega_\varphi^+ \end{cases} \quad (4.36)$$

Com isso, a equação 3.8 pode ser reescrita na forma:

$$\begin{aligned} \dot{u}_i(\mathbf{X}, t) &= \underbrace{\hat{\dot{u}}_i(\mathbf{X}, t) + \varphi(\mathbf{X})[[\dot{u}_i]](\mathbf{X}, t)}_{\hat{\dot{u}}_i(\mathbf{X}, t)} + \underbrace{[\mathcal{H}_S(\mathbf{X}) - \varphi(\mathbf{X})][[\dot{u}_i]](\mathbf{X}, t)}_{\mathcal{M}_S^\varphi(\mathbf{X})} \\ &= \hat{\dot{u}}_i(\mathbf{X}, t) + \mathcal{M}_S^\varphi(\mathbf{X})[[\dot{u}_i]](\mathbf{X}, t) \end{aligned} \quad (4.37)$$

onde  $\hat{\dot{u}}_i(\mathbf{X}, t)$  são funções contínuas e  $\mathcal{M}_S^\varphi(\mathbf{X})$  possui valor nulo para todo  $\mathbf{X}$  em  $\Omega$ , exceto no subdomínio  $\Omega_\varphi$ . Nota-se, portanto, que o campo de deslocamentos (ou velocidades) fica composto por uma parcela regular,  $\hat{\dot{u}}_i(\mathbf{X}, t)$ , e outra que contém as componentes do salto,  $\mathcal{M}_S^\varphi(\mathbf{X})[[\dot{u}_i]](\mathbf{X}, t)$ , cuja região de influência é  $\Omega_\varphi$ .

Deve-se notar ainda, como descrito por Oliver (1996a), que as condições de contorno essenciais não podiam ser impostas diretamente sobre as parcelas  $\bar{u}_i$  ou  $[[u_i]]$  do campo de deslocamentos. Porém, com a reformulação definida na equação 4.37, tais condições podem ser aplicadas exclusivamente ao termo  $\hat{u}_i$ , desde que  $\Gamma_u \cap \Omega_\varphi = 0$ .

A equação 3.9, por sua vez, assume a forma:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij}(\mathbf{X}, t) &= \underbrace{\frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i})}_{\hat{\dot{\epsilon}}_{ij}} + \underbrace{\frac{\mathcal{M}_S^\varphi}{2}([[\dot{u}_{i,j}]] + [[\dot{u}_{j,i}]]) - \frac{1}{2}(\varphi_{,i}[[\dot{u}_j]] + \varphi_{,j}[[\dot{u}_i]])}_{-\dot{\epsilon}_{ij}^\varphi} \\ &\quad + \frac{\mu_S}{2h}([[\dot{u}_i]]n_j + [[\dot{u}_j]]n_i) \\ &= \hat{\dot{\epsilon}}_{ij} - \dot{\epsilon}_{ij}^\varphi + \frac{\mu_S}{2h}([[\dot{u}_i]]n_j + [[\dot{u}_j]]n_i) \end{aligned} \quad (4.38)$$

onde  $\hat{\dot{\epsilon}}_{ij}$  é uma parcela regular das deformações,  $\dot{\epsilon}_{ij}^\varphi$  possui valores não nulos apenas no subdomínio  $\Omega_\varphi$  e o último termo é restrito aos pontos sobre  $\mathcal{S}$ .

Assim como destacado para as equações 3.8 e 3.9 na seção 3.1.3, as equações 4.37 e 4.38 são cinematicamente compatíveis apenas sob regime de descontinuidade forte, i.e., quando  $\lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{\mu_S(\mathbf{X})}{h} \right] = \delta_S(\mathbf{X})$ .

## 4.2.2 Formulações do Problema

O problema de valor de contorno, considerando a presença de uma superfície de descontinuidade  $\mathcal{S}$ , fica totalmente definido através do seguinte conjunto de equações

diferenciais:

$$\dot{\sigma}_{ij,j} + \dot{b}_i = 0 \quad \text{em } \Omega \setminus \mathcal{S} \quad (\text{equilíbrio interno}) \quad (4.39a)$$

$$\dot{\sigma}_{ij}^+ n_j - \dot{\sigma}_{ij}^- n_j = 0 \quad \text{em } \mathcal{S} \quad (\text{cont. ext. forças de sup.}) \quad (4.39b)$$

$$\dot{\sigma}_{ij}^+ n_j - \dot{\sigma}_{ij}^{\mathcal{S}} n_j = \dot{\sigma}_{ij}^- n_j - \dot{\sigma}_{ij}^{\mathcal{S}} n_j = 0 \quad \text{em } \mathcal{S} \quad (\text{cont. int. forças de sup.}) \quad (4.39c)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (\text{compatibilidade cinemática}) \quad (4.39d)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij}^{\mathcal{S}}(\dot{\epsilon}_{ij}) \quad \text{em } \mathcal{S} \quad (\text{compatib. constitutiva}) \quad (4.39e)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij}^{\Omega \setminus \mathcal{S}}(\dot{\epsilon}_{ij}) = E_{ijkl}^o \dot{\epsilon}_{kl} \quad \text{em } \Omega \setminus \mathcal{S} \quad (\text{compatib. constitutiva}) \quad (4.39f)$$

$$\dot{u}_i = \dot{u}_i \quad \text{em } \Gamma_u \quad (\text{c. c. essenciais}) \quad (4.39g)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} n_j = \dot{t}_i \quad \text{em } \Gamma_\sigma \quad (\text{c. c. naturais}) \quad (4.39h)$$

onde  $\dot{\sigma}_{ij}^{\mathcal{S}}(\dot{\epsilon}_{ij})$  representa uma relação constitutiva contínua apropriada, como descrita no capítulo 3, e um regime elástico linear é considerado para  $\Omega \setminus \mathcal{S}$ . Os termos  $\dot{\sigma}_{ij}^+$  e  $\dot{\sigma}_{ij}^-$  referem-se, respectivamente, às tensões em  $\Omega^+$  e  $\Omega^-$ . As equações complementares de equilíbrio, 4.39b e 4.39c, estão associadas à continuidade, externa e interna (à  $\mathcal{S}$ ), das forças de superfície. A equação 4.39d corresponde à 4.38.

Considerando a arbitrariedade de  $\varphi(\mathbf{X})$  e uma orientação fixa da superfície de descontinuidade após o seu estabelecimento (caráter material de  $\mathcal{S}$ ), as relações constitutivas nas equações 4.39e e 4.39f, após aplicação da equação 4.38, podem ser reescritas nas formas:

$$\dot{\sigma}_{ij}^{\mathcal{S}}(\dot{\epsilon}_{ij}) = \dot{\sigma}_{ij}^{\mathcal{S}}(\dot{\hat{\epsilon}}_{ij}, [\dot{u}_i], [\dot{u}_{i,j}]) \quad (4.40)$$

$$\dot{\sigma}_{ij}^{\Omega \setminus \mathcal{S}}(\dot{\epsilon}_{ij}) = E_{ijkl}^o \dot{\epsilon}_{kl} = E_{ijkl}^o [\dot{\hat{\epsilon}}_{kl} - \dot{\epsilon}_{kl}^\varphi([\dot{u}_i], [\dot{u}_{i,j}])] \quad (4.41)$$

Uma primeira formulação integral desse problema pode ser obtida a partir da seguinte equação de resíduos ponderados:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \setminus \mathcal{S}} (\dot{\sigma}_{ij,j}^{\Omega \setminus \mathcal{S}} + \dot{b}_i) u_i^* d\Omega + \int_{\mathcal{S}} n_j (\dot{\sigma}_{ij}^+ - \dot{\sigma}_{ij}^-) u_i^* d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_\sigma} (\dot{t}_i - \dot{t}_i) u_i^* d\Gamma + \int_{\Gamma_u} (\dot{u}_i - \dot{u}_i) t_i^* d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (4.42)$$

onde, assim como na equação 4.6,  $u_i^*$  e  $t_i^*$  representam campos ponderadores, por enquanto, arbitrários. Deve-se notar também, que a segunda integral da equação 4.42 possui a mesma estrutura da terceira, interpretando-se  $\mathcal{S}$  como um complemento do contorno do problema.

Integrando o primeiro termo da equação 4.42 por partes, obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \dot{\sigma}_{ij,j}^{\Omega \setminus \mathcal{S}} u_i^* d\Omega &= \int_{\Omega \setminus \mathcal{S}} (\dot{\sigma}_{ij}^{\Omega \setminus \mathcal{S}} u_i^*)_{,j} d\Omega - \int_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \dot{\sigma}_{ij}^{\Omega \setminus \mathcal{S}} u_{i,j}^* d\Omega \\ &= \int_{\Gamma} \dot{\sigma}_{ij}^{\Omega \setminus \mathcal{S}} n_j u_i^* d\Gamma + \int_{\mathcal{S}} (\dot{\sigma}_{ij}^- - \dot{\sigma}_{ij}^+) n_j u_i^* d\Gamma - \int_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \dot{\sigma}_{ij}^{\Omega \setminus \mathcal{S}} u_{i,j}^* d\Omega \quad (4.43) \\ &= \int_{\Gamma} \dot{t}_i u_i^* d\Gamma + \int_{\mathcal{S}} (\dot{\sigma}_{ij}^- - \dot{\sigma}_{ij}^+) n_j u_i^* d\Gamma - \int_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \dot{\sigma}_{ij}^{\Omega \setminus \mathcal{S}} u_{i,j}^* d\Omega \end{aligned}$$

e, substituindo a equação 4.43 na equação 4.42,

$$\int_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \dot{\sigma}_{ij}^{\Omega \setminus \mathcal{S}} u_{i,j}^* d\Omega = \int_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \dot{b}_i u_i^* d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \dot{t}_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Gamma_u} [(\dot{u}_i - \mathbf{u}_i) t_i^* + \dot{t}_i u_i^*] d\Gamma \quad (4.44)$$

A partir das equações 4.38 e 4.41, e considerando as simetrias associadas ao regime de pequenas deformações em meios isotrópicos, pode-se escrever:

$$\dot{\sigma}_{ij}^{\Omega \setminus \mathcal{S}} = E_{ijkl}^o \dot{\hat{u}}_{k,l} - E_{ijkl}^o \dot{\epsilon}_{kl}^\varphi \quad (4.45)$$

Desta forma, aplicando a equação 4.45 ao integrando do termo à esquerda na equação 4.44, obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \dot{\sigma}_{ij}^{\Omega \setminus \mathcal{S}} u_{i,j}^* d\Omega &= \int_{\Omega \setminus \mathcal{S}} E_{ijkl}^o \dot{\hat{u}}_{k,l} u_{i,j}^* d\Omega - \int_{\Omega \setminus \mathcal{S}} E_{ijkl}^o \dot{\epsilon}_{kl}^\varphi u_{i,j}^* d\Omega \\ &= \int_{\Gamma} (E_{klij}^o u_{i,j}^*) n_l \dot{\hat{u}}_k d\Gamma + \underbrace{\int_{\mathcal{S}} (\sigma_{ij}^{*, -} - \sigma_{ij}^{*, +}) n_l \dot{\hat{u}}_k d\Gamma}_{=0} \\ &\quad - \int_{\Omega \setminus \mathcal{S}} (E_{klij}^o u_{i,j}^*)_{,l} \dot{\hat{u}}_k d\Omega - \int_{\Omega \setminus \mathcal{S}} (E_{klij}^o u_{i,j}^*) \dot{\epsilon}_{kl}^\varphi d\Omega \quad (4.46) \\ &= \int_{\Gamma} \sigma_{kl}^* n_l \dot{\hat{u}}_k d\Gamma - \int_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \sigma_{kl,l}^* \dot{\hat{u}}_k d\Omega - \int_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \sigma_{kl}^* \dot{\epsilon}_{kl}^\varphi d\Omega \\ &= \int_{\Gamma} \dot{u}_i t_i^* d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij,j}^* \dot{\hat{u}}_i d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^\varphi d\Omega \end{aligned}$$

e, finalmente, substituindo a equação 4.46 na equação 4.44, chega-se ao seguinte

resultado:

$$\begin{aligned}
-\int_{\Omega} \sigma_{ij,j}^* \dot{u}_i d\Omega &= \int_{\Omega} \dot{b}_i u_i^* d\Omega + \underbrace{\int_{\Gamma_u} \dot{t}_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Gamma_\sigma} \dot{t}_i u_i^* d\Gamma}_{\int_{\Gamma} \dot{t}_i u_i^* d\Gamma} \\
&\quad - \underbrace{\int_{\Gamma_u} \dot{u}_i t_i^* d\Gamma - \int_{\Gamma_\sigma} \dot{u}_i t_i^* d\Gamma}_{-\int_{\Gamma} \dot{u}_i t_i^* d\Gamma} + \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^\varphi d\Omega \quad (4.47) \\
&= \int_{\Omega} \dot{b}_i u_i^* d\Omega + \int_{\Gamma} \dot{t}_i u_i^* d\Gamma - \int_{\Gamma} \dot{u}_i t_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^\varphi d\Omega
\end{aligned}$$

As equações integrais de interesse são obtidas a seguir, através da particularização dos campos ponderadores.

### 4.2.3 Equações Integrais com Descontinuidades

A semelhança entre as equações 4.10 e 4.47 é perceptível. De fato, se as soluções do problema fundamental de Kelvin forem adotadas como campos ponderadores, todo o desenvolvimento apresentado nas seções 4.1.1 a 4.1.3 permanece válido, resguardadas as substituições de termos indicadas na tabela 4.1.

**Tabela 4.1:** Correspondência entre termos nas equações integrais.

Sólidos Contínuos Convencionais	Sólidos com Descontinuidades
$u_i$	$\hat{u}_i$
$\epsilon_{ij}$	$\hat{\epsilon}_{ij}$
$\epsilon_{ij}^o$	$\hat{\epsilon}_{ij}^\varphi$

Desta forma, os resultados referentes à identidade de Somigliana e às equações integrais de contorno e de deformações em pontos internos são, respectivamente, resumidos a seguir:

$$\begin{aligned}
\dot{u}_i(\boldsymbol{\xi}) &= \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{t}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) - \int_{\Gamma} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{u}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) \\
&\quad + \int_{\Omega} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{b}_j(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) + \int_{\Omega} \sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \dot{\epsilon}_{jk}^\varphi(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) \quad (4.48)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{ij}(\boldsymbol{\xi})\dot{u}_i(\boldsymbol{\xi}) &= \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})\dot{t}_j(\mathbf{X})d\Gamma(\mathbf{X}) - \int_{\Gamma} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})\dot{u}_j(\mathbf{X})d\Gamma(\mathbf{X}) \\
&\quad + \int_{\Omega} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})\dot{b}_j(\mathbf{X})d\Omega(\mathbf{X}) + \int_{\Omega} \sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})\dot{\epsilon}_{jk}^{\varphi}(\mathbf{X})d\Omega(\mathbf{X})
\end{aligned} \tag{4.49}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\epsilon}_{ij}(\boldsymbol{\xi}) &= \int_{\Gamma} u_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})\dot{t}_k(\mathbf{X})d\Gamma(\mathbf{X}) - \int_{\Gamma} t_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})\dot{u}_k(\mathbf{X})d\Gamma(\mathbf{X}) \\
&\quad + \int_{\Omega} u_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})\dot{b}_k(\mathbf{X})d\Omega(\mathbf{X}) + \int_{\Omega} \sigma_{ijkl}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})\dot{\epsilon}_{kl}^{\varphi}(\mathbf{X})d\Omega(\mathbf{X}) + F_{ijkl}^{\epsilon\epsilon}\dot{\epsilon}_{kl}^{\varphi}(\boldsymbol{\xi})
\end{aligned} \tag{4.50}$$

onde as mesmas considerações de singularidades feitas para as equações 4.15, 4.22 e 4.35 se repetem aqui.

Concluiu-se, com isso, que boa parte da estratégia de solução adotada para meios contínuos convencionais pode ser aproveitada na modelagem de sólidos contendo descontinuidades. Esta questão é abordada no capítulo 5.

#### 4.2.4 Equação de Equilíbrio da Interface Descontínua

Diferentemente do que ocorre com sólidos contínuos convencionais, as formulações integrais considerando a presença de descontinuidades não definem de forma completa o problema de valor de contorno representado pelas equações 4.39. De fato, a simples inspeção da equação 4.42 indica que a condição de continuidade externa das forças de superfície (equação 4.39b) é implicitamente satisfeita, porém, o mesmo não ocorre com a equação 4.39c. Portanto, a condição de continuidade interna deve ser imposta à parte. Assim como em Oliver et al. (2003), isto é feito adotando-se a forma forte da equação.

Observando que a equação 4.39c corresponde à 3.11b, pode-se trabalhar com sua correspondente instantânea: a equação 3.11a. Desta forma, considerando as equações 4.40 e 4.41, obtém-se:

$$f_i = \{E_{ijkl}^o[\hat{\epsilon}_{kl} - \epsilon_{kl}^{\varphi}(\llbracket u_i \rrbracket, \llbracket u_{i,j} \rrbracket)] - \sigma_{ij}^S(\epsilon_{ij})\} = 0 \tag{4.51}$$

onde  $\epsilon_{ij}$  é dado pela versão instantânea da equação 4.38, que para pontos sobre  $\mathcal{S}$ ,

corresponde a

$$\epsilon_{ij} = \hat{\epsilon}_{ij} - \epsilon_{ij}^{\varphi} + \frac{1}{2h}(\llbracket u_i \rrbracket n_j + \llbracket u_j \rrbracket n_i) \quad (4.52)$$

A equação 4.51 é denominada equação de equilíbrio da interface e, no contexto do método dos elementos de contorno, abordado no próximo capítulo, sua solução numérica é obtida através da adoção de células com descontinuidades embutidas, fornecendo as componentes do salto nos deslocamentos,  $\llbracket u_i \rrbracket$ , necessárias ao cálculo de  $\epsilon_{ij}^{\varphi}$ . Como ficará claro, estas componentes são consideradas constantes dentro de uma célula, resultando em tensores gradientes nulos, i.e.,  $\llbracket u_{i,j} \rrbracket = 0$ . Com isso, para uma dada deformação regular,  $\hat{\epsilon}_{ij}$ , e considerando a equação 4.52, a equação 4.51 possui como incógnitas apenas as componentes  $\llbracket u_i \rrbracket$ , i.e., pode-se escrever  $f_i \equiv f_i(\llbracket u_i \rrbracket) = 0$ . Neste formato, sua solução pode ser obtida pelo método de Newton após a linearização.

A partir daí, uma equação constitutiva regularizada, relacionando tensões às deformações regulares,  $\hat{\epsilon}_{ij}$ , pode ser definida utilizando-se a equação 4.41:

$$\tilde{\sigma}_{ij}(\hat{\epsilon}_{ij}) = \sigma_{ij}^{\Omega \setminus S} \left( \hat{\epsilon}_{ij} - \epsilon_{ij}^{\varphi}(\llbracket u_i \rrbracket(\hat{\epsilon}_{ij})) \right) = E_{ijkl}^o (\hat{\epsilon}_{kl} - \epsilon_{kl}^{\varphi}) \quad (4.53)$$

onde  $\llbracket u_i \rrbracket(\hat{\epsilon}_{ij})$  representa a solução da equação 4.51.

## Capítulo 5

# Formulação Implícita do Método dos Elementos de Contorno para Problemas com Descontinuidades

A formulação implícita do método dos elementos de contorno para problemas fisicamente não-lineares foi originalmente desenvolvida por Telles e Carrer (1991), onde apenas materiais com comportamento elastoplástico foram considerados. Posteriormente, a formulação foi estendida e adaptada por diversos autores. Dentre esses trabalhos, sem a pretensão de apresentar uma lista completa, podem ser destacados: Bonnet e Mukherjee (1996), Poon et al. (1998) e Bonnet et al. (1998), onde foram introduzidos operadores tangentes consistentes ou algorítmicos, cujo desenvolvimento inicial se deve a Simo e Taylor (1985); Benallal et al. (2002), Lin et al. (2002) e Sládek et al. (2003), onde modelos não-locais de plasticidade com leis de amolecimento foram adotados, evitando-se assim a dependência nas malhas associada à localização de deformações; Hatzigeorgiou e Beskos (2002), Botta et al. (2005) e Benallal et al. (2006), nos quais modelos contínuos de dano foram utilizados, no caso dos dois últimos, também com técnicas de regularização não-locais; e, finalmente, Manzoli e Venturini (2004, 2007) e Manzoli et al. (2009), que aplicaram o conceito de descontinuidades fortes.

Nestes últimos trabalhos, foram adotadas células com descontinuidade forte embutida, onde a função de regularização das equações cinemáticas,  $\varphi(\mathbf{X})$ , apresentada na seção 4.2.1, era construída a partir de parâmetros geométricos específicos de triângulos. Portanto, apenas células neste formato foram utilizadas. Além disso, a descontinuidade forte era introduzida imediatamente após o término do regime elástico. Particularmente, em Manzoli et al. (2009), um algoritmo de geração automática de células bastante eficaz foi desenvolvido. Nesta tese, tais ideias foram aprimoradas a partir da consideração de uma fase pré-bifurcação com degradação em meio contínuo, seguida de uma etapa transitória com descontinuidade fraca, ambas precedendo ao regime de descontinuidade forte, conforme descrito nos capítulos 2 e 3. Para a definição da função  $\varphi(\mathbf{X})$  foram adotadas as funções de parametrização da geometria das células, tornando mais geral a definição dos seus formatos. Por fim, um algoritmo de geração automática das células, bastante similar, porém não idêntico, ao apresentado em Manzoli et al. (2009), foi implementado.

Neste capítulo, as equações integrais 4.48 a 4.50 são aplicadas ao domínio dividido em elementos de contorno e células internas, gerando equações matriciais que, após manipulações algébricas, resultam em um vetor de equilíbrio, típico da formulação implícita. Na fase pré-bifurcação, rigorosamente falando, são utilizadas as equações 4.15, 4.22 e 4.35, visto que ainda não há presença de descontinuidades. Entretanto, os desenvolvimentos apresentados restringem-se às primeiras, já que estas últimas podem ser recuperadas pela simples substituição de termos indicada na tabela 4.1. Outras pequenas diferenças são oportunamente destacadas no texto.

Em Peixoto et al. (2016), foi apresentada uma estratégia de solução que possibilita a utilização de diversos modelos constitutivos contínuos, além de diferentes métodos de controle para a descrição das trajetórias de equilíbrio não-lineares. Tal estratégia foi adotada neste trabalho.

## 5.1 Equações Discretas

Considera-se, a partir de agora e sem perda de generalidade, ausência das forças de domínio,  $b_i$ . A obtenção das equações matriciais típicas do método dos elementos de contorno tem início pela definição de um conjunto discreto de pontos fonte (ou pontos de colocação), sendo um total de  $N$  pontos situados no contorno e  $M$  pontos internos ao domínio. Em seguida, o contorno  $\Gamma$  é dividido em  $N_e$  elementos de contorno, enquanto que a região do domínio onde ocorrem efeitos dissipativos (seja na fase pré-bifurcação ou na presença de descontinuidades) é dividida em  $N_c$  células. Com isso, as equações 4.48, 4.49 e 4.50 assumem as respectivas formas:

$$\begin{aligned} \dot{u}_i(\boldsymbol{\xi}^J) = & \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Gamma_e} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}^J, \mathbf{X}) \dot{t}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) - \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Gamma_e} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}^J, \mathbf{X}) \dot{u}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) \\ & + \sum_{c=1}^{N_c} \int_{\Omega_c} \sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}^J, \mathbf{X}) \dot{\epsilon}_{jk}^\varphi(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} c_{ij}(\boldsymbol{\xi}^I) \dot{u}_j(\boldsymbol{\xi}^I) = & \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Gamma_e} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}^I, \mathbf{X}) \dot{t}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) - \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Gamma_e} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}^I, \mathbf{X}) \dot{u}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) \\ & + \sum_{c=1}^{N_c} \int_{\Omega_c} \sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}^I, \mathbf{X}) \dot{\epsilon}_{jk}^\varphi(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij}(\boldsymbol{\xi}^J) = & \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Gamma_e} u_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}^J, \mathbf{X}) \dot{t}_k(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) - \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Gamma_e} t_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}^J, \mathbf{X}) \dot{u}_k(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) \\ & + \sum_{c=1}^{N_c} \int_{\Omega_c} \sigma_{ijkl}^*(\boldsymbol{\xi}^J, \mathbf{X}) \dot{\epsilon}_{kl}^\varphi(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) + F_{ijkl}^{\epsilon\epsilon} \dot{\epsilon}_{kl}^\varphi(\boldsymbol{\xi}^J) \end{aligned} \quad (5.3)$$

onde  $I = 1, \dots, N$  e  $J = 1, \dots, M$ . Os domínios de cada elemento de contorno e de cada célula são referenciados, respectivamente, por  $\Gamma_e$  e  $\Omega_c$ .

### 5.1.1 Elementos de Contorno Isoparamétricos

Numa formulação isoparamétrica, deslocamentos, forças de superfície e a geometria são aproximados, dentro de um elemento de contorno, pelas mesmas funções de interpolação entre os pontos discretos. No caso de domínios bidimensionais, por

exemplo, tem-se:

$$X_j(\eta) \approx N^\gamma(\eta)X_j^\gamma \quad (5.4a)$$

$$\dot{u}_j(\mathbf{X}(\eta)) \approx N^\gamma(\eta)\dot{u}_j^\gamma \quad (5.4b)$$

$$\dot{t}_j(\mathbf{X}(\eta)) \approx N^\gamma(\eta)\dot{t}_j^\gamma \quad (5.4c)$$

onde  $\eta \in [-1, +1]$  é uma coordenada paramétrica, o índice  $\gamma$  está associado aos pontos de interpolação dentro de um elemento de contorno e  $N^\gamma(\eta)$  são as funções de interpolação.

As equações 5.4b e 5.4c podem ser convenientemente reescritas nas seguintes formas matriciais:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1(\mathbf{X}(\eta)) \\ \dot{u}_2(\mathbf{X}(\eta)) \\ \vdots \\ \dot{u}_1^{n_e} \\ \dot{u}_2^{n_e} \end{Bmatrix} &\approx \begin{bmatrix} N^1(\eta) & 0 & \dots & N^{n_e}(\eta) & 0 \\ 0 & N^1(\eta) & \dots & 0 & N^{n_e}(\eta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1^1 \\ \dot{u}_2^1 \\ \vdots \\ \dot{u}_1^{n_e} \\ \dot{u}_2^{n_e} \end{Bmatrix} \\ &= [N(\eta)]\{\dot{u}^e\} \end{aligned} \quad (5.5)$$

e

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \dot{t}_1(\mathbf{X}(\eta)) \\ \dot{t}_2(\mathbf{X}(\eta)) \\ \vdots \\ \dot{t}_1^{n_e} \\ \dot{t}_2^{n_e} \end{Bmatrix} &\approx \begin{bmatrix} N^1(\eta) & 0 & \dots & N^{n_e}(\eta) & 0 \\ 0 & N^1(\eta) & \dots & 0 & N^{n_e}(\eta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{t}_1^1 \\ \dot{t}_2^1 \\ \vdots \\ \dot{t}_1^{n_e} \\ \dot{t}_2^{n_e} \end{Bmatrix} \\ &= [N(\eta)]\{\dot{t}^e\} \end{aligned} \quad (5.6)$$

onde  $n_e$  é o número de pontos de interpolação do elemento de contorno  $e$ .

Além disso, um comprimento infinitesimal do contorno,  $d\Gamma$ , se relaciona com a coordenada paramétrica através da seguinte transformação:

$$d\Gamma(\mathbf{X}(\eta)) = \sqrt{\left(\frac{dN^\gamma(\eta)}{d\gamma}X_1^\gamma\right)^2 + \left(\frac{dN^\gamma(\eta)}{d\gamma}X_2^\gamma\right)^2} d\eta = \mathcal{J}(\eta)d\eta \quad (5.7)$$

onde  $\mathcal{J}(\eta)$  é o denominado jacobiano da transformação de variáveis, que pode ser

expresso na seguinte forma matricial, mais adequada à manipulação numérica:

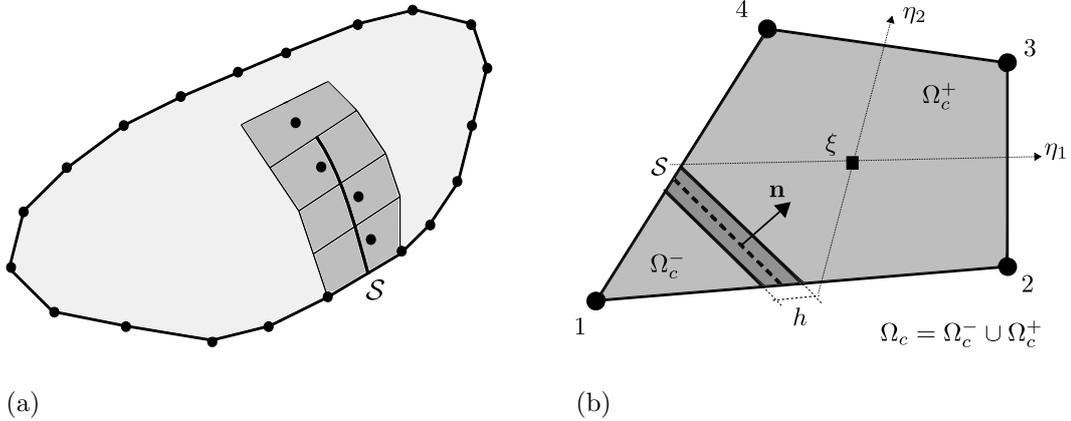
$$\mathcal{J}(\eta) = \| \{J(\eta)\} \| \equiv \sqrt{\{J(\eta)\}^T \{J(\eta)\}} \quad (5.8)$$

com

$$\{J(\eta)\} = \left\{ \frac{dN^1(\eta)}{d\eta} \quad \dots \quad \frac{dN^{n_e}(\eta)}{d\eta} \right\} \begin{bmatrix} X_1^1 & X_2^1 \\ \vdots & \vdots \\ X_1^{n_e} & X_2^{n_e} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

### 5.1.2 Células com Descontinuidade Embutida

O conjunto das células com descontinuidades embutidas compõem o subdomínio  $\Omega_\varphi$ , definido na seção 4.2.1. Além disso, as regiões sob comportamento inelástico, porém ainda na fase pré-bifurcação, também devem ser divididas em células, como ilustrado na figura 5.1a.



**Figura 5.1:** (a) Sólido dividido em elementos de contorno e células, (b) célula com descontinuidade embutida.

Neste trabalho, apenas um ponto de colocação é adotado em cada célula, de modo que as deformações iniciais são consideradas constantes em seu interior. No caso das células bidimensionais com descontinuidade embutida, tipicamente representadas na figura 5.1b, pode-se escrever, para  $\mathbf{X} \in \Omega_c$ ,

$$\begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_{11}^\varphi(\mathbf{X}) \\ \dot{\epsilon}_{22}^\varphi(\mathbf{X}) \\ \dot{\epsilon}_{12}^\varphi(\mathbf{X}) \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_{11}^{\varphi,c} \\ \dot{\epsilon}_{22}^{\varphi,c} \\ \dot{\epsilon}_{12}^{\varphi,c} \end{Bmatrix} = \{\dot{\epsilon}^{\varphi,c}\} \quad (5.10)$$

sendo que, na fase pré-bifurcação (na qual  $\epsilon_{ij}^{\varphi}$  é substituído por  $\epsilon_{ij}^o$ ) e no caso de estado plano de deformações, um quarto termo deve ser adicionado a este vetor:  $\dot{\epsilon}_{33}^o(\mathbf{X}) = \dot{\epsilon}_{33}^{o,c}$ , já que a componente fora do plano  $\sigma_{i33}^*$  não é necessariamente nula. Nas etapas pós-bifurcação, este quarto termo é naturalmente nulo.

Por outro lado, a geometria das células é parametrizada através de funções de forma lineares convencionais, i.e.,

$$X_j(\eta_1, \eta_2) \approx M^\alpha(\eta_1, \eta_2)X_j^\alpha \quad (5.11)$$

onde o índice  $\alpha$  refere-se aos vértices da célula (numerados de 1 a 4 na figura 5.1b) e  $\eta_i$  são coordenadas naturais, tais que  $\eta_i \in [-1, +1]$ .

As funções de interpolação da geometria também podem ser utilizadas para definir a função  $\varphi(\mathbf{X})$  (de regularização das equações cinemáticas) dentro de uma célula com descontinuidade embutida, visto que as condições da equação 4.36 são totalmente satisfeitas a a partir da escolha:

$$\varphi(\mathbf{X}(\eta_1, \eta_2)) = \sum_{\alpha^+} M^{\alpha^+}(\eta_1, \eta_2) \quad (5.12)$$

onde o somatório é realizado sobre as funções de interpolação associadas aos vértices localizados no lado  $\Omega_c^+$  da célula. Por exemplo, na figura 5.1b,  $\alpha^+ = 2, 3, 4$ .

Dentro da célula com descontinuidade embutida, assume-se ainda que as componentes do salto nos deslocamentos são constantes, de forma que

$$\begin{cases} \llbracket u_i \rrbracket(\mathbf{X}) \approx \llbracket u_i^c \rrbracket = \begin{cases} \llbracket u_1^c \rrbracket \\ \llbracket u_2^c \rrbracket \end{cases} = \{ \llbracket u^c \rrbracket \}, & \text{para } \mathbf{X} \in \Omega_c \\ \llbracket u_{i,j} \rrbracket = 0, & \text{para } \mathbf{X} \in \Omega_c \end{cases} \quad (5.13)$$

Na próxima subseção, é detalhada a forma de obtenção dessas componentes, a partir da solução numérica da equação 4.51. Antes disso, deve-se destacar a seguinte transformação para um infinitésimo de área, importante para as integrações numéricas sobre as células:

$$d\Omega(\mathbf{X}(\eta_1, \eta_2)) = \mathcal{J}(\eta_1, \eta_2)d\eta_1d\eta_2 \quad (5.14)$$

sendo

$$\mathcal{J}(\eta_1, \eta_2) = \det[J(\eta_1, \eta_2)] \quad (5.15)$$

com

$$[J(\eta_1, \eta_2)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial M^1(\eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_1} & \dots & \frac{\partial M^{n_c}(\eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_1} \\ \frac{\partial M^1(\eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_2} & \dots & \frac{\partial M^{n_c}(\eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1^1 & X_2^1 \\ \vdots & \vdots \\ X_1^{n_c} & X_2^{n_c} \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

onde  $n_c$  representa o número de pontos de interpolação da geometria da célula.

### 5.1.2.1 Cálculo das Componentes do Salto nos Deslocamentos

As componentes dos deslocamentos dentro de uma célula com descontinuidade embutida são obtidas através da solução numérica da equação de equilíbrio da interface. Para tal, é necessário determinar o gradiente da função regularizadora,  $\varphi(\mathbf{X})$ , o que pode ser feito a partir da equação 5.12, i.e.,

$$\varphi_{,i} = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_k} \frac{\partial \eta_k}{\partial X_i} = \left( \frac{\partial M^\alpha}{\partial \eta_k} X_i^\alpha \right)^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_k} = \left( \frac{\partial M^\alpha}{\partial \eta_k} X_i^\alpha \right)^{-1} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta_k} \left( \sum_{\alpha^+} M^{\alpha^+} \right) \right] \quad (5.17)$$

Reescrevendo numa forma matricial e aplicando ao ponto de colocação:

$$\{\nabla \varphi(\boldsymbol{\xi}^c)\} = [J(\eta_1^{\xi^c}, \eta_2^{\xi^c})]^{-1} \{\nabla_{\xi} \varphi(\eta_1^{\xi^c}, \eta_2^{\xi^c})\} \quad (5.18)$$

onde  $\eta_i^{\xi^c}$  referem-se às coordenadas naturais do ponto de colocação da célula (neste trabalho assumiu-se tal ponto como localizado no centróide da célula), a matriz  $[J(\eta_1^{\xi^c}, \eta_2^{\xi^c})]$  corresponde àquela definida na equação 5.16 e  $\{\nabla_{\xi} \varphi(\eta_1^{\xi^c}, \eta_2^{\xi^c})\}$  é o vetor definido pelo termo entre colchetes na equação 5.17.

Retornando, agora, à equação 4.38 e levando em conta a equação 5.13, pode-se notar que

$$\{\epsilon^{\varphi,c}\} = \begin{bmatrix} \varphi_{,1}(\boldsymbol{\xi}^c) & 0 \\ 0 & \varphi_{,2}(\boldsymbol{\xi}^c) \\ \frac{1}{2}\varphi_{,2}(\boldsymbol{\xi}^c) & \frac{1}{2}\varphi_{,1}(\boldsymbol{\xi}^c) \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \llbracket u_1^c \rrbracket \\ \llbracket u_2^c \rrbracket \end{bmatrix} \right\} = [\nabla^s \varphi] \{\llbracket u^c \rrbracket\} \quad (5.19)$$

Com isso, utilizando as equações 4.52, 5.13 e 5.19, obtém-se a seguinte forma matricial para a equação 4.51:

$$\begin{aligned} \{f\} = [\bar{N}^c]^T ([E^o]\{\hat{\epsilon}^c\} - [E^o][\nabla^s \varphi]\{\llbracket u^c \rrbracket\} \\ - \{\sigma^S(\{\hat{\epsilon}^c\} - [\nabla^s \varphi]\{\llbracket u^c \rrbracket\} + \frac{1}{h}[N^c]\{\llbracket u^c \rrbracket\})) = \{0\} \end{aligned} \quad (5.20)$$

onde  $[E^o]$  é a matriz constitutiva linear elástica, correspondente ao tensor  $E_{ijkl}^o$ , e

$$[\bar{N}^c] = \begin{bmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 \\ n_2 & n_1 \end{bmatrix}; \quad [N^c] = \begin{bmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 \\ \frac{1}{2}n_2 & \frac{1}{2}n_1 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

Para um dado estado de deformações regulares,  $\{\hat{\epsilon}^c\}$ , a equação 5.20 pode então ser resolvida a partir de sua linearização, i.e.,

$$\{f\}_{j-1} + \left[ \frac{\partial \{f\}}{\partial \{\llbracket u^c \rrbracket\}} \right]_{j-1} \{\delta \llbracket u^c \rrbracket\}_j \approx 0 \quad (5.22)$$

onde  $j$  é um índice iterativo,  $\{\delta \llbracket u^c \rrbracket\}_j = \{\llbracket u^c \rrbracket\}_j - \{\llbracket u^c \rrbracket\}_{j-1}$  e

$$\left[ \frac{\partial \{f\}}{\partial \{\llbracket u^c \rrbracket\}} \right]_{j-1} = [\bar{N}^c]^T \left[ -[E^o][\nabla^s \varphi] - \left[ \frac{\partial \sigma^S}{\partial \epsilon} \right]_{j-1} \left[ \frac{1}{h}[N^c] - [\nabla^s \varphi] \right] \right] \quad (5.23)$$

Enfatiza-se aqui que o vetor  $\{\sigma^S(\cdot)\}$ , presente na equação 5.20, corresponde às tensões fornecidas pelo modelo constitutivo adotado para representar os efeitos da descontinuidade. No caso desta tese, tais tensões são dadas pela equação 3.12b, sendo a variável de dano fornecida por uma das equações: 3.67, 3.72, 3.77 ou 3.80, dependendo do tipo de amolecimento escolhido (linear ou exponencial) e do regime da descontinuidade (fraca ou forte). Já o termo  $\left[ \frac{\partial \sigma^S}{\partial \epsilon} \right]$ , presente na equação 5.23, é a forma matricial do operador tangente  $E_{ijkl}^t$ , no caso desta tese, definido na equação 2.20.

No quadro a seguir, o algoritmo completo para o cálculo do salto nos deslocamentos, dentro de uma célula com descontinuidade embutida, é apresentado.

**ALGORITMO 5.1:** Solução da Equação de Equilíbrio da Interface.

- i. Inicializa-se:  
 $j = 0$  e  
 $\{\llbracket u^c \rrbracket\}_0$  com o valor acumulado até a última avaliação das componentes do salto nos deslocamentos;
- ii.  $j = j + 1$ ;
- iii. Se  $j >$  número máximo de iterações especificado, interrompe-se o processamento;
- iv. Calculam-se  $\{f\}_{j-1}$  e  $\left[ \frac{\partial \{f\}}{\partial \{\llbracket u^c \rrbracket\}} \right]_{j-1}$ , respectivamente das equações 5.20 e 5.23;
- v. Resolve-se a equação 5.22,  $\left[ \frac{\partial \{f\}}{\partial \{\llbracket u^c \rrbracket\}} \right]_{j-1} \{\delta \llbracket u^c \rrbracket\}_j = -\{f\}_{j-1}$ , para  $\{\delta \llbracket u^c \rrbracket\}_j$ ;
- vi. Atualiza-se:  $\{\llbracket u^c \rrbracket\}_j = \{\llbracket u^c \rrbracket\}_{j-1} + \{\delta \llbracket u^c \rrbracket\}_j$ ;
- vii. Se  $\frac{\|\{\delta \llbracket u^c \rrbracket\}_j\|}{\|\{\llbracket u^c \rrbracket\}_j\|} > \text{TOL}$ , onde TOL é uma tolerância especificada, volta-se ao passo (ii). Caso contrário:
- viii. Retornar-se o resultado  $\{\llbracket u^c \rrbracket\} = \{\llbracket u^c \rrbracket\}_j$ .

**5.1.2.2 Equação Constitutiva Regularizada: Operador Tangente**

Através da equação 5.19, pode-se escrever também, a forma matricial da equação constitutiva regularizada (equação 4.53) para uma célula com descontinuidade, i.e.,

$$\{\tilde{\sigma}(\hat{\epsilon}^c)\} = [E^o](\{\hat{\epsilon}^c\} - \{\epsilon^{\varphi,c}\}) = [E^o](\{\hat{\epsilon}^c\} - [\nabla^s \varphi]\{\llbracket u^c \rrbracket\}) \quad (5.24)$$

As tensões fornecidas pela equação 5.24 são necessárias à estratégia de solução descrita na seção 5.2, para as etapas pós-bifurcação. Além delas, deve-se definir um operador tangente para a equação constitutiva regularizada, o que pode ser feito tomando-se a derivada:

$$\begin{aligned}
\left[ \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \hat{\epsilon}^c} \right] &= [E^o] \left( [I] - \left[ \frac{\partial \{\epsilon^{\varphi, c}\}}{\partial \{\hat{\epsilon}^c\}} \right] \right) \\
&= [E^o] \left( [I] - \left[ \frac{\partial \{\epsilon^{\varphi, c}\}}{\partial \{\llbracket u^c \rrbracket\}} \right] \left[ \frac{\partial \{f\}}{\partial \{\llbracket u^c \rrbracket\}} \right]^{-1} \left[ \frac{\partial \{f\}}{\partial \{\hat{\epsilon}^c\}} \right] \right) \\
&= [E^o] \left( [I] - [\nabla^s \varphi] \left[ \frac{\partial \{f\}}{\partial \{\llbracket u^c \rrbracket\}} \right]^{-1} [\bar{N}^c]^T \left( [E^o] - \left[ \frac{\partial \sigma^S}{\partial \epsilon} \right] \right) \right)
\end{aligned} \tag{5.25}$$

### 5.1.3 Equações Matriciais

Retornando às equações 5.1 a 5.3, suas respectivas formas matriciais podem ser obtidas utilizando os resultados apresentados nas seções 5.1.1 e 5.1.2. Considera-se, como usual no método dos elementos de contorno, que o conjunto dos pontos de colocação internos,  $\boldsymbol{\xi}^J$ , coincide com os pontos de interpolação do campo  $\dot{\epsilon}_{ij}^\varphi$ , enquanto que os pontos de colocação no contorno,  $\boldsymbol{\xi}^I$ , coincidem com os pontos de interpolação dos campos  $\dot{u}_i$  e  $\dot{t}_i$ .

#### 5.1.3.1 Identidade de Somigliana

Considerando um ponto de colocação fixo e interno ao domínio, as integrais da equação 5.1 para cada elemento (célula interna ou elemento de contorno) assumem as seguintes estruturas após a introdução das equações 5.5, 5.6, 5.7, 5.10 e 5.14:

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_e} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}^J, \mathbf{X}) \dot{t}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) &\approx \\
&\approx \left( \int_{-1}^1 [u^*(\boldsymbol{\xi}^J, \eta)] [N(\eta)] \mathcal{J}(\eta) d\eta \right) \{t^e\} = [G_e^J] \{t^e\}
\end{aligned} \tag{5.26}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_e} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}^J, \mathbf{X}) \dot{u}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) &\approx \\
&\approx \left( \int_{-1}^1 [t^*(\boldsymbol{\xi}^J, \eta)] [N(\eta)] \mathcal{J}(\eta) d\eta \right) \{\dot{u}^e\} = [H_e^J] \{\dot{u}^e\}
\end{aligned} \tag{5.27}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_e} \sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}^J, \mathbf{X}) \dot{\epsilon}_{jk}^\varphi(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) &\approx \\
&\approx \left( \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\sigma^*(\boldsymbol{\xi}^J, \eta_1, \eta_2)] \mathcal{J}(\eta_1, \eta_2) d\eta_1 d\eta_2 \right) \{\dot{\epsilon}^{\varphi, c}\} = [Q_e^J] \{\dot{\epsilon}^{\varphi, c}\}
\end{aligned} \tag{5.28}$$

onde

$$[u^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})] = \begin{bmatrix} u_{11}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) & u_{12}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \\ u_{21}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) & u_{22}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \end{bmatrix}, \quad [t^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})] = \begin{bmatrix} t_{11}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) & t_{12}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \\ t_{21}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) & t_{22}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

e

$$[\sigma^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})] = \begin{bmatrix} \sigma_{111}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) & \sigma_{122}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) & 2\sigma_{112}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \\ \sigma_{211}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) & \sigma_{222}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) & 2\sigma_{212}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

Os termos das matrizes das equações 5.29 e 5.30 são dados pelos tensores definidos no apêndice A, sendo que na última delas, a simetria  $\sigma_{i12}^* = \sigma_{i21}^*$  foi utilizada. Ainda com referência à última matriz, no caso de estado plano de deformações, uma quarta coluna deve ser incluída para contemplar os termos  $\sigma_{i33}^*$ .

O vetor à esquerda na equação 5.1, por sua vez, pode ser escrito na seguinte forma, novamente considerando um ponto de colocação fixo:

$$\dot{u}_i(\boldsymbol{\xi}^J) = \begin{Bmatrix} \dot{u}_1(\boldsymbol{\xi}^J) \\ \dot{u}_2(\boldsymbol{\xi}^J) \end{Bmatrix} = \{\dot{u}^J\} \quad (5.31)$$

Agora, a aplicação da equação 5.1 ao conjunto completo dos pontos de colocação internos,  $\boldsymbol{\xi}^J$ , resulta, após a introdução das equações 5.26, 5.27, 5.28 e 5.31, na seguinte equação matricial:

$$\begin{aligned} \bigcup_{J=1}^M (\{\dot{u}^J\}) &= \bigcup_{J=1}^M \biguplus_{e=1}^{N_e} ([G_e^J]) \biguplus_{e=1}^{N_e} (\{t^e\}) - \bigcup_{J=1}^M \bigcup_{e=1}^{N_e} ([H_e^J]) \bigcup_{e=1}^{N_e} (\{u^e\}) \\ &\quad + \bigcup_{J=1}^M \bigcup_{c=1}^{N_c} ([Q_c^J]) \bigcup_{c=1}^{N_c} (\{\dot{\epsilon}^{\varphi,c}\}), \end{aligned}$$

i.e.,

$$\{\dot{u}^\Omega\} = [G^u]\{t\} - [H^u]\{\dot{u}\} + [Q_{e\varphi}^u]\{\dot{\epsilon}^\varphi\} \quad (5.32)$$

onde o sobrescrito  $\Omega$  em  $\{\dot{u}^\Omega\}$  foi adotado para indicar que o vetor em questão é formado por componentes referentes a pontos internos. Os símbolos  $\bigcup$  e  $\biguplus$  estão associados às formas de montagem das matrizes. O primeiro deles indica que coeficientes relativos a um mesmo ponto geométrico são alocados na mesma linha ou coluna da matriz. Já o segundo, indica que coeficientes referentes aos pontos de

interpolação de dois elementos distintos, mesmo que tais pontos sejam geometricamente coincidentes, são alocados em diferentes linhas ou colunas. A presença de apenas um símbolo indica a montagem das linhas de um vetor. Se dois símbolos são utilizados, o primeiro (ou da esquerda) refere-se à montagem das linhas e, o segundo, das colunas.

Com isso, pode-se verificar que as matrizes da equação 5.32, para domínios bidimensionais, possuem as seguintes dimensões:

$$\begin{aligned} [G^u] &\rightarrow (2M) \times (2N_e n_e); & [H^u] &\rightarrow (2M) \times (2N); & [Q_{\epsilon^\varphi}^u] &\rightarrow (2M) \times (\kappa M); \\ \{\hat{u}^\Omega\} &\rightarrow (2M); & \{\dot{t}\} &\rightarrow (2N_e n_e); & \{\hat{u}\} &\rightarrow (2N); & \{\dot{\epsilon}^\varphi\} &\rightarrow (\kappa M) \end{aligned}$$

onde  $\kappa = 3$  ou  $\kappa = 4$ , respectivamente para estados planos de tensão e deformação.

### 5.1.3.2 Equação Integral para Deslocamentos no Contorno

As integrais da equação 5.2 diferem em relação às da equação 5.1 apenas pela localização do ponto fonte: nas primeiras ele encontra-se sobre o contorno,  $\Gamma$ . Portanto, as equações 5.26 a 5.30 permanecem válidas aqui, desde que o índice  $J$  seja substituído por  $I$  (as questões relativas aos graus de singularidade dos integrandos são abordadas na subseção 5.1.3.4). Desta forma, pode-se escrever, para um ponto fonte fixo no contorno:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_e} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}^I, \mathbf{X}) \dot{t}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) &\approx \\ &\approx \left( \int_{-1}^1 [u^*(\boldsymbol{\xi}^I, \eta)] [N(\eta)] \mathcal{J}(\eta) d\eta \right) \{t^e\} = [G_e^I] \{t^e\} \end{aligned} \quad (5.33)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_e} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}^I, \mathbf{X}) \dot{u}_j(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) &\approx \\ &\approx \left( \int_{-1}^1 [t^*(\boldsymbol{\xi}^I, \eta)] [N(\eta)] \mathcal{J}(\eta) d\eta \right) \{\dot{u}^e\} = [H_e^I] \{\dot{u}^e\} \end{aligned} \quad (5.34)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_c} \sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}^I, \mathbf{X}) \dot{\epsilon}_{jk}^\varphi(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) &\approx \\ &\approx \left( \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\sigma^*(\boldsymbol{\xi}^I, \eta_1, \eta_2)] \mathcal{J}(\eta_1, \eta_2) d\eta_1 d\eta_2 \right) \{\dot{\epsilon}^{\varphi,c}\} = [Q_c^I] \{\dot{\epsilon}^{\varphi,c}\} \end{aligned} \quad (5.35)$$

O termo livre à esquerda na equação 5.2, por outro lado, assume a seguinte forma:

$$c_{ij}(\boldsymbol{\xi}^I) = \begin{bmatrix} c_{11}(\boldsymbol{\xi}^I) & c_{12}(\boldsymbol{\xi}^I) \\ c_{21}(\boldsymbol{\xi}^I) & c_{22}(\boldsymbol{\xi}^I) \end{bmatrix} = [C^I] \quad (5.36)$$

Levando-se em conta as equações 5.33 a 5.36, a aplicação da equação 5.2 ao conjunto de pontos de colocação situados no contorno,  $\boldsymbol{\xi}^I$ , fornece:

$$\begin{aligned} \bigcup_{I=1}^N \bigcup_{e=1}^{N_e} ([C^I] + [H_e^I]) \bigcup_{e=1}^{N_e} (\{\dot{u}^e\}) &= \bigcup_{I=1}^N \bigoplus_{e=1}^{N_e} ([G_e^I]) \bigoplus_{e=1}^{N_e} (\{t^e\}) \\ &+ \bigcup_{I=1}^N \bigcup_{c=1}^{N_c} ([Q_c^I]) \bigcup_{c=1}^{N_c} (\{\dot{\epsilon}^{\varphi,c}\}), \end{aligned}$$

i.e.,

$$[H]\{\dot{u}\} = [G]\{t\} + [Q_{\epsilon^\varphi}]\{\dot{\epsilon}^\varphi\} \quad (5.37)$$

Os símbolos de montagem das matrizes possuem o mesmo significado da seção anterior e deve-se perceber que os vetores da equação 5.37 são os mesmos presentes na equação 5.32. Já para as novas matrizes, as seguintes dimensões são verificadas no caso de domínios bidimensionais:

$$[H] \rightarrow (2N) \times (2N); \quad [G] \rightarrow (2N) \times (2N_e n_e); \quad [Q_{\epsilon^\varphi}] \rightarrow (2N) \times (\kappa M).$$

### 5.1.3.3 Equação Integral para Deformações Internas

Tomando novamente um ponto de colocação interno fixo, as integrais da equação 5.3 assumem as seguintes formas a partir da introdução das equações 5.5, 5.6, 5.7, 5.10 e 5.14:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_e} u_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}^J, \mathbf{X}) t_k(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) &\approx \\ &\approx \left( \int_{-1}^1 [\nabla_{\boldsymbol{\xi}} u^*(\boldsymbol{\xi}^J, \eta)] [N(\eta)] \mathcal{J}(\eta) d\eta \right) \{t^e\} = [\bar{G}_e^J] \{t^e\} \end{aligned} \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_e} t_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}^J, \mathbf{X}) \dot{u}_k(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) &\approx \\ &\approx \left( \int_{-1}^1 [\nabla_{\boldsymbol{\xi}} t^*(\boldsymbol{\xi}^J, \eta)] [N(\eta)] \mathcal{J}(\eta) d\eta \right) \{\dot{u}^e\} = [\bar{H}_e^J] \{\dot{u}^e\} \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_c} \sigma_{ijkl}^*(\boldsymbol{\xi}^J, \mathbf{X}) \dot{\epsilon}_{kl}^\varphi(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) &\approx \\ &\approx \left( \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\nabla_{\boldsymbol{\xi}} \sigma^*(\boldsymbol{\xi}^J, \eta_1, \eta_2)] \mathcal{J}(\eta_1, \eta_2) d\eta_1 d\eta_2 \right) \{\dot{\epsilon}^{\varphi,c}\} = [\bar{Q}_c^J] \{\dot{\epsilon}^{\varphi,c}\} \end{aligned} \quad (5.40)$$

onde

$$[\nabla_{\boldsymbol{\xi}} u^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})] = \begin{bmatrix} u_{111}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) & u_{112}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \\ u_{221}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) & u_{222}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \\ u_{121}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) & u_{122}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

$$[\nabla_{\boldsymbol{\xi}} t^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})] = \begin{bmatrix} t_{111}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) & t_{122}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \\ t_{221}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) & t_{222}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \\ t_{121}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) & t_{122}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

$$[\nabla_{\boldsymbol{\xi}} \sigma^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})] = \begin{bmatrix} \sigma_{1111}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) & \sigma_{1122}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) & 2\sigma_{1112}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \\ \sigma_{2211}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) & \sigma_{2222}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) & 2\sigma_{2212}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \\ \sigma_{1211}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) & \sigma_{1222}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) & 2\sigma_{1212}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

Expressões explícitas para os termos das matrizes das equações 5.41 a 5.43 são apresentadas no apêndice B. Na última matriz, levou-se em conta a simetria  $\sigma_{ij12}^* = \sigma_{ij21}^*$  e, novamente, uma quarta coluna deve ser acrescentada no caso de estado plano de deformações, para contemplar os termos  $\sigma_{ij33}^*$ , importantes para a fase pré-bifurcação.

As formas matriciais do vetor à esquerda e do último termo à direita na equação 5.3 são dadas, respectivamente, por:

$$\dot{\epsilon}_{ij}(\boldsymbol{\xi}^J) = \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_{11}(\boldsymbol{\xi}^J) \\ \dot{\epsilon}_{22}(\boldsymbol{\xi}^J) \\ \dot{\epsilon}_{12}(\boldsymbol{\xi}^J) \end{Bmatrix} = \{\dot{\epsilon}^J\} \quad (5.44)$$

e

$$F_{ijkl}^{\epsilon\epsilon} \dot{\epsilon}_{kl}^\varphi(\boldsymbol{\xi}^J) = \begin{bmatrix} F_{1111}^{\epsilon\epsilon} & F_{1122}^{\epsilon\epsilon} & 2F_{1112}^{\epsilon\epsilon} \\ F_{2211}^{\epsilon\epsilon} & F_{2222}^{\epsilon\epsilon} & 2F_{2212}^{\epsilon\epsilon} \\ F_{1211}^{\epsilon\epsilon} & F_{1222}^{\epsilon\epsilon} & 2F_{1212}^{\epsilon\epsilon} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_{11}^\varphi(\boldsymbol{\xi}^J) \\ \dot{\epsilon}_{22}^\varphi(\boldsymbol{\xi}^J) \\ \dot{\epsilon}_{12}^\varphi(\boldsymbol{\xi}^J) \end{Bmatrix} = [F^{\epsilon\epsilon,J}] \{\dot{\epsilon}^{\varphi,J}\} \quad (5.45)$$

onde as componentes de  $F_{ijkl}^{\epsilon\epsilon}$  são apresentadas no apêndice C e a simetria  $F_{ij12}^{\epsilon\epsilon} = F_{ij21}^{\epsilon\epsilon}$  foi utilizada.

Finalmente, considerando as equações 5.38 a 5.40, 5.44 e 5.45, ao aplicar a equação 5.3 ao conjunto completo dos pontos de colocação internos obtém-se:

$$\begin{aligned} \bigcup_{J=1}^M (\{\dot{\hat{\epsilon}}^J\}) &= \bigcup_{J=1}^M \bigoplus_{e=1}^{N_e} ([\bar{G}_e^J]) \bigoplus_{e=1}^{N_e} (\{\dot{t}^e\}) - \bigcup_{J=1}^M \bigcup_{e=1}^{N_e} ([\bar{H}_e^J]) \bigcup_{e=1}^{N_e} (\{\dot{u}^e\}) \\ &\quad + \bigcup_{J=1}^M \bigcup_{c=1}^{N_c} ([\bar{Q}_c^J] + [F^{\epsilon\epsilon, J}]) \bigcup_{c=1}^{N_c} (\{\dot{\epsilon}^{\varphi, c}\}), \end{aligned}$$

i.e.,

$$\{\dot{\hat{\epsilon}}\} = [G^\epsilon]\{\dot{t}\} - [H^\epsilon]\{\dot{u}\} + [Q_{\epsilon^\varphi}^\epsilon]\{\dot{\epsilon}^\varphi\} \quad (5.46)$$

As dimensões das novas matrizes são:

$$\{\dot{\hat{\epsilon}}\} \rightarrow (3M); [G^\epsilon] \rightarrow (3M) \times (2N_e n_e); [H^\epsilon] \rightarrow (3M) \times (2N); [Q_{\epsilon^\varphi}^\epsilon] \rightarrow (3M) \times (\kappa M).$$

#### 5.1.3.4 Tratamento Numérico das Integrais

As integrais apresentadas nas últimas três subseções são resolvidas numericamente. Entretanto, como já destacado no capítulo 4, em função da estrutura dos tensores provenientes da solução do problema fundamental (apêndices A e B), algumas dessas integrais apresentam núcleos de singularidade fraca ou forte, quando o elemento de contorno ou a célula interna contém o ponto fonte. Na tabela 5.1, são apresentados os graus de singularidade de cada uma delas.

**Tabela 5.1:** Grau de singularidade das integrais.

Integrais	Grau de singularidade
Equações 5.26, 5.27, 5.38 e 5.39	Regular
Equações 5.28, 5.33 e 5.35	Fraca
Equações 5.34 e 5.40	Forte

As integrais regulares são resolvidas por quadratura de Gauss convencional. As integrais fracamente singulares contendo os termos  $u_{ij}^*$  (equação 5.33) e  $\sigma_{ijk}^*$  (equações 5.28 e 5.35) são resolvidas, respectivamente, pelos métodos apresentados por

Huang e Cruse (1993) e Lachat e Watson (1976). As integrais fortemente singulares do contorno (equação 5.34) e do domínio (equação 5.40) são, por sua vez, resolvidas respectivamente pelas metodologias descritas em Guiggiani e Casalini (1987) e Gao e Davies (2000).

## 5.2 Estratégia de Solução

As equações matriciais obtidas na seção 5.1 são agora manipuladas algebricamente, gerando uma única equação não linear, típica da formulação implícita desenvolvida por Telles e Carrer (1991). Em seguida, a estratégia de solução apresentada em Peixoto et al. (2016), já adequada à fase pré-bifurcação, é estendida para contemplar também os regimes com descontinuidades.

Primeiramente, considerando as condições de contorno essenciais e naturais, as equações 5.32, 5.37 e 5.46 são reorganizadas nas respectivas formas:

$$\{\hat{u}^\Omega\} = [A^u]\{\hat{x}\} + [B^u]\{\hat{y}\} + [Q_{\epsilon^\varphi}^u]\{\hat{\epsilon}^\varphi\} \quad (5.47)$$

$$[A]\{\hat{x}\} = [B]\{\hat{y}\} + [Q_{\epsilon^\varphi}]\{\hat{\epsilon}^\varphi\} \quad (5.48)$$

$$\{\hat{\epsilon}\} = [A^\epsilon]\{\hat{x}\} + [B^\epsilon]\{\hat{y}\} + [Q_{\epsilon^\varphi}^\epsilon]\{\hat{\epsilon}^\varphi\} \quad (5.49)$$

onde, em  $\{\hat{y}\}$  são agrupados os valores prescritos no contorno, provenientes de  $\{\hat{u}\}$  ou  $\{\hat{t}\}$ , enquanto que o vetor  $\{\hat{x}\}$  contém as componentes desconhecidas destes campos. Já as matrizes referenciadas por  $[A]$  e  $[B]$  são compostas por coeficientes provenientes daquelas referenciadas por  $[H]$  e  $[G]$ . Na realidade, computacionalmente falando, as equações matriciais já são montadas diretamente nestas últimas formas, sem a necessidade de passar por uma etapa de rearranjo.

Isolando  $\{\hat{x}\}$  na equação 5.48, obtém-se:

$$\{\hat{x}\} = [N]\{\hat{y}\} + [M_{\epsilon^\varphi}]\{\hat{\epsilon}^\varphi\} \quad (5.50)$$

onde

$$[N] = [A]^{-1}[B]; \quad [M_{\epsilon^\varphi}] = [A]^{-1}[Q_{\epsilon^\varphi}] \quad (5.51)$$

Aplicando agora, a equação 5.50 às equações 5.47 e 5.49, os resultados seguintes são, respectivamente, obtidos:

$$\{\hat{u}^\Omega\} = [N^u]\{\dot{y}\} + [M_{\epsilon^\varphi}^u]\{\dot{\epsilon}^\varphi\} \quad (5.52)$$

$$\{\dot{\hat{\epsilon}}\} = [N^\epsilon]\{\dot{y}\} + [M_{\epsilon^\varphi}^\epsilon]\{\dot{\epsilon}^\varphi\} \quad (5.53)$$

onde

$$[N^u] = [A^u][A]^{-1}[B] + [B^u]; \quad [M_{\epsilon^\varphi}^u] = [A^u][A]^{-1}[Q_{\epsilon^\varphi}] + [Q_{\epsilon^\varphi}^u] \quad (5.54)$$

$$[N^\epsilon] = [A^\epsilon][A]^{-1}[B] + [B^\epsilon]; \quad [M_{\epsilon^\varphi}^\epsilon] = [A^\epsilon][A]^{-1}[Q_{\epsilon^\varphi}] + [Q_{\epsilon^\varphi}^\epsilon] \quad (5.55)$$

Em modelos constitutivos independentes do tempo, as taxas podem ser substituídas por incrementos finitos, i.e.,  $(\dot{\cdot}) = \Delta(\cdot) \equiv (\cdot)_i - (\cdot)_{i-1}$ , onde  $i$  é um índice incremental. Este é o caso considerado neste trabalho, ou seja, para um patamar fixo dos carregamentos externos (aplicados de forma quase-estática) não há evolução do dano. Desta forma, para o  $i$ -ésimo incremento das cargas prescritas,  $\{y\}$ , as equações 5.50, 5.52 e 5.53 podem ser reescritas como:

$$\{x\}^i = \lambda^i [N]\{y\} + [M_{\epsilon^\varphi}]\{\epsilon^\varphi\}^i \quad (5.56)$$

$$\{\hat{u}^\Omega\}^i = \lambda^i [N^u]\{y\} + [M_{\epsilon^\varphi}^u]\{\epsilon^\varphi\}^i \quad (5.57)$$

$$\{\hat{\epsilon}\}^i = \lambda^i [N^\epsilon]\{y\} + [M_{\epsilon^\varphi}^\epsilon]\{\epsilon^\varphi\}^i \quad (5.58)$$

onde o fator de carga  $\lambda^i$  é um valor escalar acumulativo, que define o percentual da carga externa necessário ao equilíbrio global em cada incremento.

Da equação 5.58, pode-se então, definir um vetor de equilíbrio em função das deformações regulares e do fator de carga,  $\{Q\}^i \equiv \{Q(\hat{\epsilon}^i, \lambda^i)\}$ , levando-se em conta a equação 5.24 (aplicada ao conjunto completo de células internas), i.e.,

$$\{Q\}^i = \lambda^i [N^\epsilon]\{y\} + [M_{\epsilon^\varphi}^\epsilon](\{\hat{\epsilon}\}^i - [E^o]^{-1}\{\tilde{\sigma}(\hat{\epsilon})\}^i) - \{\hat{\epsilon}\}^i = \{0\} \quad (5.59)$$

onde  $[E^o]$  representa agora, a matriz quase-diagonal elástica linear, referente ao conjunto dos pontos de colocação internos.

Quanto ao vetor  $\{\tilde{\sigma}(\hat{\epsilon})\}$ , deve-se destacar que as componentes referentes às células em regimes com descontinuidades são de fato obtidas pela equação constitutiva regularizada 5.24, que requer o cálculo dos saltos nos deslocamentos, como descrito em detalhes na subseção 5.1.2.1. Porém, nas células que ainda se encontram na fase pré-bifurcação, as deformações regulares correspondem às próprias deformações totais, como indicado na tabela 4.1, e as componentes de tensões devem ser obtidas conforme a equação 4.3, cuja representação matricial numa dada célula seria  $\{\tilde{\sigma}(\epsilon^c)\} = [E^o](\{\epsilon^c\} - \{\epsilon^{o,c}\})$ . Particularizando para o modelo de dano isotrópico adotado nesta tese, tais componentes são obtidas diretamente da equação 3.12b com a variável de dano,  $D$ , sendo dada pela equação 3.57, para amolecimento linear, ou pela equação 3.59, para amolecimento exponencial.

O fato dos campos iniciais,  $\epsilon_{ij}^o$  ou  $\epsilon_{ij}^{\varphi}$ , não aparecerem de forma explícita na equação 5.59 justifica a nomenclatura de *formulação implícita* adotada originalmente por Telles e Carrer (1991). Normalmente, tal equação é resolvida pelo método de Newton, a partir da sua linearização em relação ao vetor de deformações regulares, em conjunto com uma equação específica que estabeleça de forma adequada o incremento das cargas externas. Por outro lado, na estratégia de solução apresentada em Peixoto et al. (2016), que baseia-se nas ideias de Batoz e Dhett (1979) e Yang e Shieh (1990), o fator de carga é tratado como uma variável adicional de  $\{Q\}^i$  e o procedimento de linearização deve ser realizado levando-se isto em conta. Desta forma, o algoritmo torna-se suficientemente genérico para a adoção de diferentes métodos de controle para a análise não-linear. Inicia-se a descrição desta estratégia, reescrevendo a equação 5.59 na seguinte forma:

$$\{Q\}^i = \lambda^i \{P\} - \{F\}^i = \{0\} \quad (5.60)$$

onde

$$\{P\} = [N^e]\{y\} \quad (5.61)$$

$$\{F\}^i = \{\hat{\epsilon}\}^i - [M_{\epsilon^e}^e](\{\hat{\epsilon}\}^i - [E^o]^{-1}\{\tilde{\sigma}(\hat{\epsilon})\}^i) \quad (5.62)$$

Linearizando agora, a equação 5.60, i.e.,

$$\{Q\}_{j-1}^i + \left[ \frac{\partial\{Q\}}{\partial\{\hat{\epsilon}\}} \right]_{j-1}^i \{\delta\hat{\epsilon}\}_j^i + \left[ \frac{\partial\{Q\}}{\partial\lambda} \right]_{j-1}^i \delta\lambda_j^i \approx \{0\} \quad (5.63)$$

onde  $j$  é um índice iterativo e  $\delta(\cdot)_j^i = (\cdot)_j^i - (\cdot)_{j-1}^i$ , chega-se ao resultado:

$$[D]_{j-1}^i \{\delta\hat{\epsilon}\}_j^i = \delta\lambda_j^i \{P\} + \{Q\}_{j-1}^i \quad (5.64)$$

sendo

$$[D]_{j-1}^i = \left[ [I] - [M_{\epsilon^e}^e][E^o]^{-1} \left( [E^o] - \left[ \frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial\hat{\epsilon}} \right]_{j-1}^i \right) \right] \quad (5.65)$$

onde  $[I]$  é uma matriz identidade e  $\left[ \frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial\hat{\epsilon}} \right]$  é montada a partir da equação 5.25, para células com descontinuidade, e do operador tangente do modelo constitutivo,  $E_{ijkl}^t$ , particularizado para dano isotrópico na equação 2.20, no caso das células em regime pré-bifurcação.

O vetor de correção iterativa das deformações regulares,  $\{\delta\hat{\epsilon}\}_j^i$ , da equação 5.64, pode ser desmembrado nas seguintes parcelas:

$$\{\delta\hat{\epsilon}\}_j^i = \delta\lambda_j^i \{\hat{\epsilon}^P\}_j^i + \{\delta\hat{\epsilon}^Q\}_j^i \quad (5.66)$$

onde o vetor  $\{\hat{\epsilon}^P\}_j^i$  corresponde à solução devido à carga externa  $\{P\}$ , enquanto que  $\{\delta\hat{\epsilon}^Q\}_j^i$  está associado ao resíduo da condição de equilíbrio global,  $\{Q\}_{j-1}^i$ , i.e.,

$$[D]_{j-1}^i \{\hat{\epsilon}^P\}_j^i = \{P\} \quad (5.67)$$

$$[D]_{j-1}^i \{\delta\hat{\epsilon}^Q\}_j^i = \{Q\}_{j-1}^i \quad (5.68)$$

Com isso, numa determinada iteração, as equações 5.67 e 5.68 podem ser resolvidas de forma independente e a correção das deformações é obtida pela equação 5.66, após a avaliação de  $\delta\lambda_j^i$ , através do método de controle escolhido. Esta sequência

de atividades é sistematizada mais adiante. Antes disso, expressões para as correções iterativas dos vetores contendo as incógnitas do contorno e os deslocamentos internos, i.e.,  $\{\delta x\}_j^i$  e  $\{\delta \hat{u}^\Omega\}_j^i$ , são apresentadas. A mesma ideia de desmembramento da equação 5.66 é seguida e tais expressões são importantes para aplicação aos diferentes métodos de controle, listados no apêndice D.

Considerando as equações 5.56 e 5.58, pode-se escrever:

$$\{\delta x\}_j^i = \{x\}_j^i - \{x\}_{j-1}^i = \delta \lambda_j^i [N] \{y\} + [M_{\epsilon^\varphi}] \{\delta \epsilon^\varphi\}_j^i \quad (5.69)$$

$$\{\delta \hat{\epsilon}\}_j^i = \{\hat{\epsilon}\}_j^i - \{\hat{\epsilon}\}_{j-1}^i = \delta \lambda_j^i [N^\epsilon] \{y\} + [M_{\epsilon^\varphi}^\epsilon] \{\delta \epsilon^\varphi\}_j^i \quad (5.70)$$

Isolando o vetor  $\{\delta \epsilon^\varphi\}_j^i$  na equação 5.70 e substituindo o resultado no último termo da equação 5.69, obtém-se, após aplicação das equações 5.61, 5.66 e 5.67, a seguinte relação:

$$\{\delta x\}_j^i = \delta \lambda_j^i \{x^P\}_j^i + \{\delta x^Q\}_j^i \quad (5.71)$$

onde

$$\{x^P\}_j^i = [N] \{y\} + [M_{\epsilon^\varphi}] [M_{\epsilon^\varphi}^\epsilon]^{-1} ([I] - [D]_{j-1}^i) \{\hat{\epsilon}^P\}_j^i \quad (5.72)$$

$$\{\delta x^Q\}_j^i = [M_{\epsilon^\varphi}] [M_{\epsilon^\varphi}^\epsilon]^{-1} \{\delta \hat{\epsilon}^Q\}_j^i \quad (5.73)$$

Analogamente, partindo da equação 5.57, pode-se mostrar que

$$\{\delta \hat{u}^\Omega\}_j^i = \delta \lambda_j^i \{\hat{u}^{\Omega,P}\}_j^i + \{\delta \hat{u}^{\Omega,Q}\}_j^i \quad (5.74)$$

onde

$$\{\hat{u}^{\Omega,P}\}_j^i = [N^u] \{y\} + [M_{\epsilon^\varphi}^u] [M_{\epsilon^\varphi}^\epsilon]^{-1} ([I] - [D]_{j-1}^i) \{\hat{\epsilon}^P\}_j^i \quad (5.75)$$

$$\{\delta \hat{u}^{\Omega,Q}\}_j^i = [M_{\epsilon^\varphi}^u] [M_{\epsilon^\varphi}^\epsilon]^{-1} \{\delta \hat{\epsilon}^Q\}_j^i \quad (5.76)$$

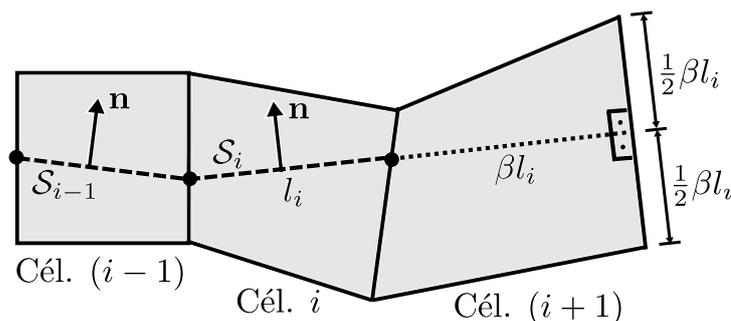
Finalmente, o algoritmo completo da estratégia de solução é apresentado no quadro a seguir.

**ALGORITMO 5.2:** Estratégia de Solução.

- i. Calcula-se:  $\{P\}$ , utilizando a equação 5.61 e inicializa-se  $i = 0$ ;
- ii.  $i = i + 1, j = 0$ ;
- iii. Se  $i >$  número máximo de incrementos especificado  $\Rightarrow$  FIM;
- iv.  $\{Q\}_j^i = \{0\}, \{F\}_j^i = \{0\}$ ;
- v.  $j = j + 1$ ;
- vi. Se  $j >$  número máximo de iterações especificado, interrompe-se o processamento;
- vii. Monta-se a matriz  $[D]_{j-1}^i$ , da equação 5.65;  
**Nota:** A matriz  $[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon}]$  é montada a partir da equação 5.25, para células com descontinuidade, e do operador tangente,  $E_{ijkl}^t$  (e.g., equação 2.20), para células em regime pré-bifurcação.
- viii. Resolvem-se as equações 5.67 e 5.68 para  $\{\hat{\epsilon}^P\}_j^i$  e  $\{\delta \hat{\epsilon}^Q\}_j^i$
- ix. Calculam-se  $\{x^P\}_j^i, \{\delta x^Q\}_j^i, \{\hat{u}^{\Omega, P}\}_j^i$  e  $\{\delta \hat{u}^{\Omega, Q}\}_j^i$ , utilizando as equações 5.72, 5.73, 5.75 e 5.76;
- x. Calcula-se  $\delta \lambda_j^i$ , utilizando um dos métodos de controle do apêndice D;
- xi. Montam-se  $\{\delta \hat{\epsilon}\}_j^i, \{\delta x\}_j^i$  e  $\{\delta \hat{u}^\Omega\}_j^i$ , a partir das equações 5.66, 5.71 e 5.74;
- xii. Atualizam-se  $\lambda_j^i, \{\hat{\epsilon}\}_j^i, \{x\}_j^i$  e  $\{\hat{u}^\Omega\}_j^i$ , fazendo  $(\cdot)_j^i = (\cdot)_{j-1}^i + \delta(\cdot)_j^i$ ;
- xiii. Monta-se  $\{F\}_j^i$ , utilizando a equação 5.62;  
**Nota:** As componentes de  $\{\tilde{\sigma}\}$  referentes às células em regime pré-bifurcação são dadas pela equação 4.3 (e.g., equação 3.12b com 3.57 ou 3.59). Já para as células com descontinuidades, executa-se o **ALGORITMO 5.1** (da subseção 5.1.2.1) para atualizar o vetor dos saltos nos deslocamentos,  $\{\llbracket u^c \rrbracket\}$ , e em seguida, aplica-o à equação 5.24.
- xiv. Calcula-se  $\{Q\}_j^i = \lambda_j^i \{P\} - \{F\}_j^i$  (equação 5.60);
- xv. Teste de convergência:  
 Se  $\frac{\|\{Q\}_j^i\|}{\|\lambda_j^i \{P\}\|} < \text{TOL}$ , retorna-se ao passo (ii) para o próximo incremento de carga, caso contrário, retorna-se ao passo (v) para nova iteração.

### 5.3 Algoritmo de Geração Automática de Células

Para acompanhar a propagação da linha de continuidade ao longo do domínio sólido, um algoritmo que gera células de forma automática foi implementado, conforme esquema ilustrado na figura 5.2.



**Figura 5.2:** Esquema representativo do algoritmo de geração automática de células.

À frente do ponto final da linha de descontinuidade sempre há uma célula em regime elástico ou com degradação em meio contínuo. Quando a condição de bifurcação é verificada nesta célula, um segmento de descontinuidade retilíneo é introduzido (e.g.,  $\mathcal{S}_i$  na célula  $i$ ) numa orientação definida pela própria análise de bifurcação. A continuidade da linha descontínua é imposta entre duas células adjacentes, como pode ser observado para os segmentos  $\mathcal{S}_{i-1}$  e  $\mathcal{S}_i$ . Neste mesmo instante, uma nova célula ( $i + 1$ ) é gerada, de acordo com os seguintes passos:

- i. O lado da célula ( $i$ ), no qual o ponto final da linha de descontinuidade se encontra, é assumido como o primeiro lado da nova célula ( $i + 1$ );
- ii. Um segmento retilíneo imaginário é então traçado a partir do ponto final do segmento de descontinuidade da célula anterior (célula  $i$ ), na mesma orientação deste segmento, porém, com comprimento ponderado por um fator  $\beta$  (uma constante escalar pré-definida);
- iii. Um segundo lado da nova célula é então criado, perpendicularmente a este segmento imaginário, com o mesmo comprimento, i.e.,  $\beta l_i$ , e com o ponto médio

coincidente com o ponto final do segmento;

- iv. Os outros dois lados da nova célula são criados conectando-se os pontos extremos dos dois primeiros.

Numericamente falando, a introdução de uma nova célula traduz-se na ampliação das matrizes apresentadas na seção 5.2, o que pode ocorrer em qualquer iteração do processo incremental-iterativo. A forma como tais matrizes são manipuladas é descrita no apêndice E.

Por fim, destaca-se que o algoritmo aqui descrito difere daquele apresentado por Pedrini (2008) e Manzoli et al. (2009) por dois aspectos principais. O primeiro deles seria a introdução do fator  $\beta$ , que permite variar o tamanho das células durante a análise, refletindo-se na redução do tempo de processamento em algumas aplicações. O segundo seria na definição do ponto inicial do segmento imaginário que estabelece a orientação da nova célula. Nos trabalhos anteriores, o ponto central do lado da última célula foi considerado, independentemente do posicionamento da extremidade do segmento de descontinuidade recém-criado. A modificação quanto à definição deste ponto inicial, utilizada nesta tese, foi essencial para garantir a captura da trajetória da trinca de forma estável.

# Capítulo 6

## Exemplos Numéricos

Neste capítulo, a metodologia descrita até aqui é aplicada a uma série de problemas, a maioria deles envolvendo fratura em peças de concreto com resultados empíricos disponíveis na literatura.

Estado plano de tensões foi assumido em todos os exemplos e os efeitos dissipativos nas linhas de descontinuidade foram tratados através de um modelo de dano isotrópico, com a deformação equivalente calculada como em Oliver, Huespe, Blanco, e Linero (2006) (ver tabela 2.1). Apenas leis de amolecimento exponencial foram adotadas.

De maneira geral, foram considerados os casos com introdução direta de descontinuidades fortes ao final do regime elástico e com o modelo de banda variável, descrito na seção 3.4. No primeiro caso, a lei de evolução da variável escalar de dano apresentada na equação 3.81 foi utilizada, assumindo-se  $k = 0.01$  mm, enquanto que a orientação do segmento de descontinuidade no interior de cada célula foi adotada como perpendicular à direção da tensão principal máxima. Já no segundo caso, a lei de variação linear da banda, representada na figura 3.6, também com  $k = 0.01$ mm e com  $\bar{\beta} = 0.9$ , foi utilizada. Como tolerância de convergência para os algoritmos 5.1 e 5.2, foi adotado  $TOL = 1 \times 10^{-4}$ .

Os dois exemplos iniciais, no entanto, foram trabalhados apenas com a introdução

direta do regime de descontinuidade forte, visto que a superfície de fissuração é gerada de maneira instantânea. Particularmente, o primeiro deles refere-se a um problema idealizado de tração simples, onde o fenômeno da localização de deformações em meios contínuos também foi estudado a partir da aplicação do mesmo modelo constitutivo de dano isotrópico, porém, a células convencionais, sem descontinuidades, formando bandas de espessura cada vez mais estreitas. Mostra-se, neste caso, que a utilização da cinemática de descontinuidade forte consegue, de fato, representar a condição limite da banda de localização com espessura nula. No segundo exemplo, o ensaio de compressão diametral, utilizado para a determinação indireta da resistência à tração em peças cilíndricas de concreto, é simulado.

Na sequência, três exemplos envolvendo modos mistos de fratura no concreto são abordados. Tratam-se dos ensaios de cisalhamento com forças em quatro pontos de Arrea e Ingraffea (1982) e de Gálvez et al. (1998), além do cisalhamento com forças em três pontos, também estudado por Gálvez et al. (1998).

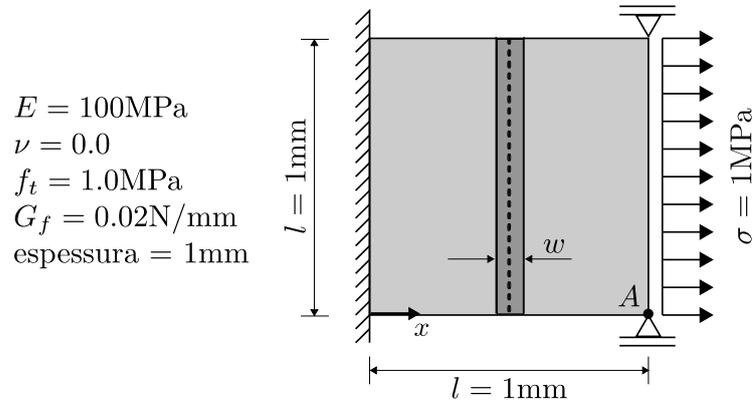
Posteriormente, a fratura de um painel de concreto em formato de “L”, conforme ensaios descritos por Winkler et al. (2004), é simulada.

Finalmente, o ensaio de flexão em três pontos de Petersson (1981), é analisado. Neste caso em específico, questões relativas à dependência do tamanho das células no modelo de banda variável são discutidas, e uma proposta de estabilização da resposta numérica é apresentada.

## **6.1 Tração Simples com Localização de Deformações**

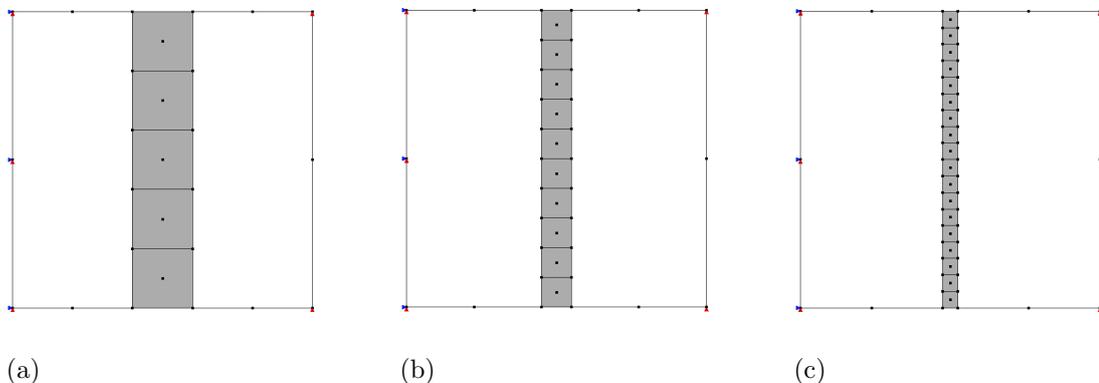
Um exemplo de tração simples, com geometria, propriedades físicas, condições de contorno e carregamentos apresentados na figura 6.1, é analisado aqui. A localização

de deformações é induzida pela consideração de uma banda central enfraquecida de espessura  $w$ .



**Figura 6.1:** Dados para o problema de tração simples com localização de deformações.

Como descrito no capítulo 2 (seção 2.1.1), a aplicação de modelos constitutivos contínuos com leis de amolecimento faz com que a resposta estrutural, força versus deslocamento, fique dependente do tamanho de  $w$ , já que a situação mais estável está associada a uma banda de localização com espessura nula. Por outro lado, quando células com descontinuidade forte embutida são empregadas, esta banda nula idealizada é intrinsecamente imposta pelas equações cinemáticas. Com isso, a dependência com relação a  $w$  deixaria de existir. Ilustrar numericamente estas ideias é o objetivo desta seção. Para tanto, são consideradas as três malhas apresentadas na figura 6.2, onde elementos lineares são utilizados na divisão do contorno.



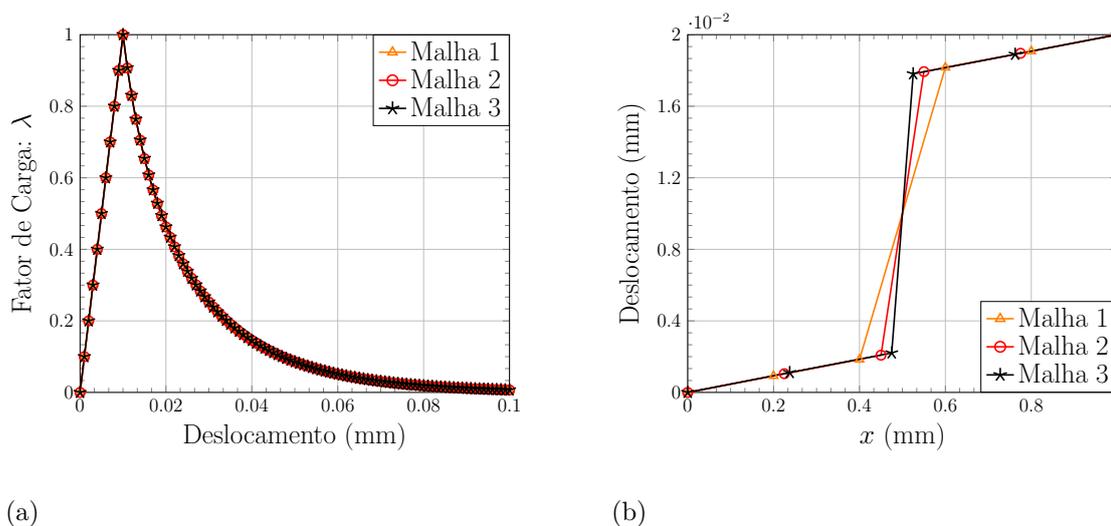
**Figura 6.2:** Malhas para o problema de tração simples: (a) malha 1:  $w = 0.20$  mm, (b) malha 2:  $w = 0.10$  mm, (c) malha 3:  $w = 0.05$  mm.

Todas as análises foram conduzidas controlando-se a componente de deslocamento livre do ponto  $A$ , destacado na figura 6.1.

Inicialmente, foram realizadas análises com células com descontinuidade embutida. Considerou-se apenas o caso no qual o regime de descontinuidade forte é imposto diretamente após o limite elástico do material ter sido atingido, sendo a orientação dos segmentos descontínuos, dentro das células, estabelecida pela direção normal à tensão principal máxima.

As células foram pré-definidas e o algoritmo de geração automática não foi utilizado. Porém, elas só eram ativadas quando necessário, i.e., quando o campo de deformações (inicialmente homogêneo) alcançava o limite elástico.

Na figura 6.3a, são apresentados resultados do fator de carga em função do deslocamento da extremidade onde o carregamento é aplicado. Percebe-se, de fato, independência da resposta estrutural em relação a  $w$ . Já na figura 6.3b, que apresenta resultados para os deslocamentos ao longo da face inferior, o efeito da descontinuidade pode ser verificado.

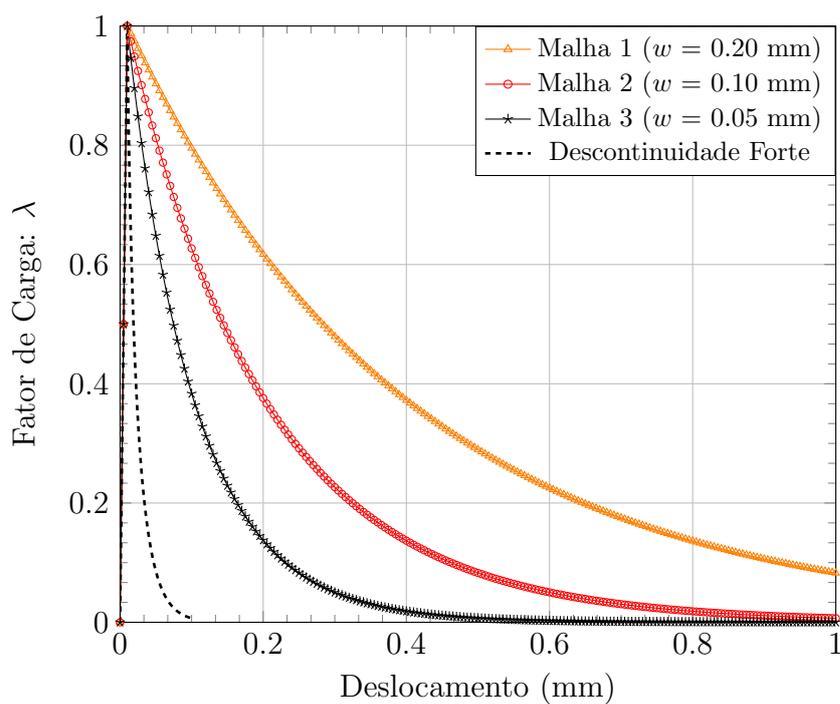


**Figura 6.3:** Resultados para o problema de tração simples com descontinuidade forte: (a) Fator de carga ( $\lambda$ ) versus deslocamento do lado de aplicação da carga, (b) Deslocamento ao longo da face inferior para  $\lambda = 0.2$ .

Em seguida, o problema foi estudado com células constantes convencionais. Para efeitos comparativos, a mesma função de evolução da variável de dano utilizada nas simulações com descontinuidade forte foi assumida, i.e., adotou-se a equação 3.81 com  $k = 0.01$  mm.

As respostas obtidas com as diferentes malhas são apresentadas na figura 6.4, onde os distintos comportamentos pós-pico são verificados, de forma que, quanto mais estreita é a banda de localização, mais acentuada é a curva de amolecimento.

A curva referente às análises com descontinuidade forte também é reproduzida na figura 6.4, onde fica claro que ela realmente representa o caso limite quando a banda de localização tende à espessura nula.



**Figura 6.4:** Resultados para o problema de tração simples com dano contínuo em bandas de localização com diferentes espessuras.

## 6.2 Cilindro sob Compressão Diametral

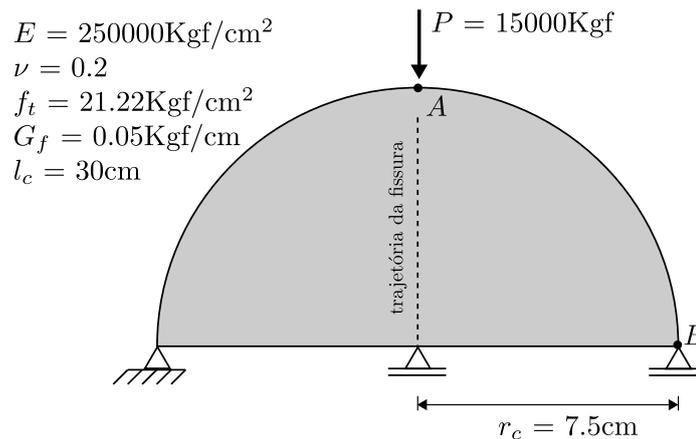
O ensaio de compressão diametral, também conhecido como ensaio brasileiro, foi proposto por Carneiro e Barcellos (1949) para verificação indireta da resistência à tração de corpos de prova de concreto. A partir de cálculos analíticos, para um cilindro de raio  $r_c$  e comprimento  $l_c$ , submetido a duas forças  $P$  de compressão diametralmente opostas, obtém-se a seguinte expressão para esta resistência:

$$f_t = \frac{P}{\pi r_c l_c} \quad (6.1)$$

Desta forma, para um corpo de prova cilíndrico com  $l_c = 30$  cm,  $r_c = 7.5$  cm e sujeito a  $P = 15 \times 10^3$  Kgf, uma resistência à tração de  $f_t = 21.22$  Kgf/cm<sup>2</sup> é esperada.

Nesta seção, o ensaio brasileiro é simulado através da aplicação direta do regime de descontinuidade forte quando o limite elástico é atingido, sem utilização do esquema transitório com espessura de banda de localização variável. Tal abordagem se justifica pelo fato da propagação completa da fissura ocorrer de forma instantânea.

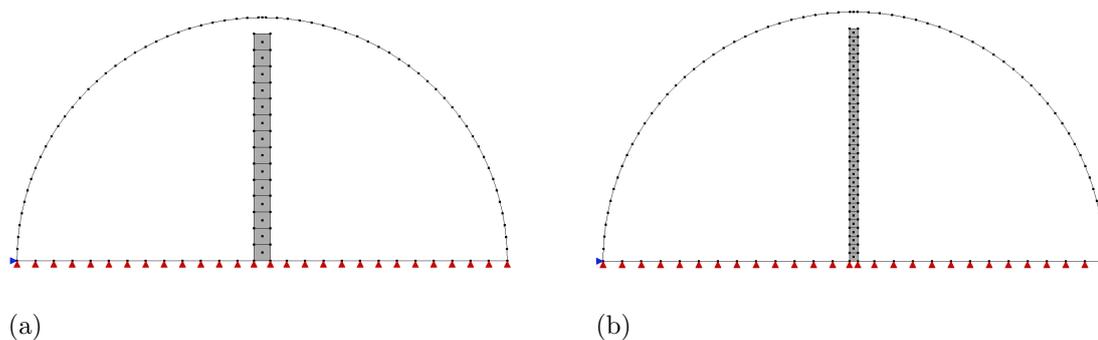
Utilizando a simetria diametral do problema, a geometria, propriedades físicas, condições de contorno e carregamentos são apresentados na figura 6.5.



**Figura 6.5:** Dados para o problema de compressão diametral de um cilindro de concreto.

O algoritmo de geração automática de células foi utilizado, porém, sem crescimento gradual de tamanho, i.e.,  $\beta = 1.0$ . Células quadradas com dois tamanhos distintos

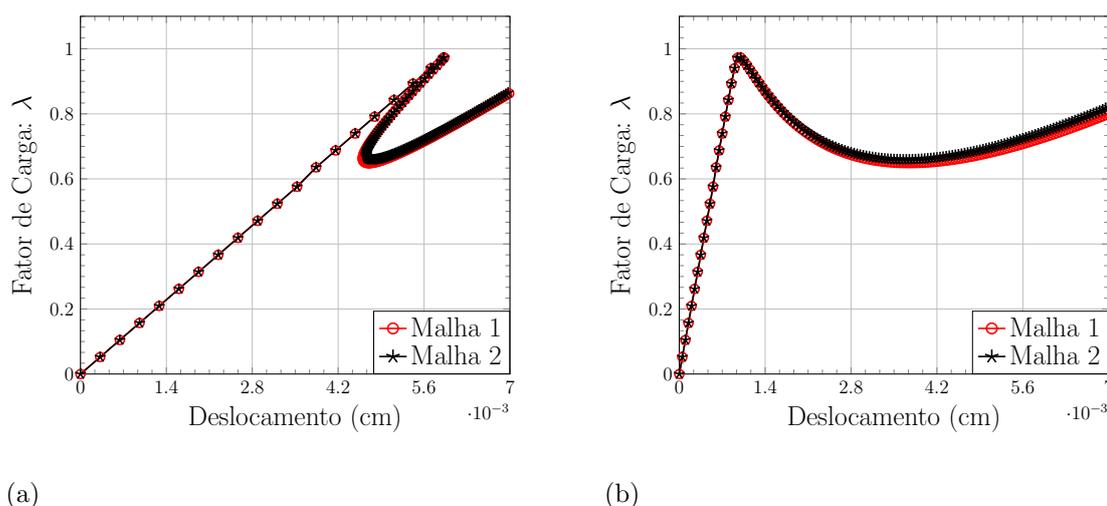
(de lados medindo 0.50 cm e 0.25 cm) foram consideradas e as malhas finais são apresentadas na figura 6.6. O contorno do problema foi dividido em 93 elementos lineares nos dois casos. O processo incremental-iterativo foi controlado através da componente de deslocamento livre do ponto  $B$ , destacado na figura 6.5.



**Figura 6.6:** Malhas para o problema de compressão diametral de um cilindro de concreto: (a) malha 1: células com lados de 0.50 cm, (b) malha 2: células com lados de 0.25 cm.

Resultados para fator de carga em função do deslocamento vertical do ponto  $A$  e do deslocamento horizontal do ponto  $B$  são traçados na figura 6.7. Assim como no exemplo anterior, essas trajetórias de equilíbrio são independentes do tamanho das células. Ressalta-se, porém, que este não é um resultado geral e tal independência deve ser entendida como relacionada somente à dimensão da célula na direção perpendicular ao segmento de descontinuidade e para as análises com adoção direta do regime de descontinuidade forte. O fato da trinca ser totalmente gerada num mesmo passo de carga também é fundamental para coincidência das curvas referentes às análises com malhas distintas. Mais adiante, esta questão será novamente abordada à luz de outros exemplos numéricos.

Por fim, levando-se em conta os argumentos imediatamente abaixo da equação 6.1, além das propriedades assumidas para as análises numéricas (figura 6.5), um fator de carga máximo unitário, i.e.,  $\lambda = 1.0$ , seria esperado. Desta forma, a simples inspeção da figura 6.7 atesta a qualidade dos resultados obtidos. Mais precisamente, valores máximos na ordem de  $\lambda = 0.973$  foram verificados.



**Figura 6.7:** Resultados para o problema de compressão diametral de um cilindro de concreto: (a) Fator de carga ( $\lambda$ ) versus deslocamento do ponto  $A$ , (b) Fator de carga ( $\lambda$ ) versus deslocamento do ponto  $B$ .

### 6.3 Cisalhamento com Forças em Quatro Pontos: Arrea e Ingraffea (1982)

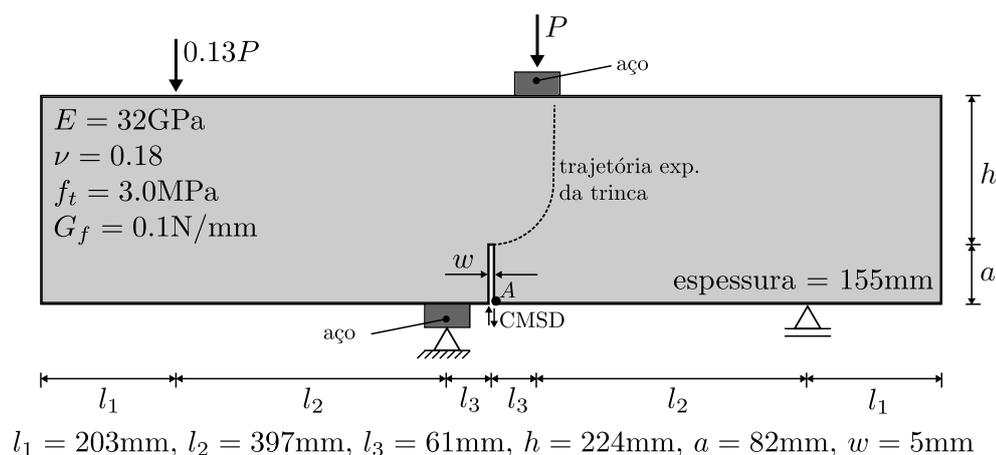
Considera-se agora a simulação de fratura em modo misto através da análise de uma viga pré-entalhada, sujeita a cisalhamento com forças em quatro pontos. Este problema foi estudado experimentalmente por Arrea e Ingraffea (1982) e é muito utilizado na verificação das formulações numéricas.

Na literatura, diferentes valores para as propriedades do material são encontrados nas simulações deste ensaio. Para a energia de fratura, por exemplo, foram adotados valores que vão desde  $G_f = 0.100$  N/mm, como em Saleh e Aliabadi (1995), Oliver, Huespe, Pulido, e Chaves (2002), Manzoli e Shing (2006), Manzoli e Venturini (2007) e Manzoli et al. (2009), passando por  $G_f = 0.105$  N/mm e  $G_f = 0.120$  N/mm, em Sancho et al. (2006) e Penna (2011), respectivamente, até  $G_f = 0.150$  N/mm, como em Xie e Gerstle (1995).

Já para a resistência à tração, Manzoli e Shing (2006) e Manzoli e Venturini (2007) utilizaram  $f_t = 2.5$  MPa, Saleh e Aliabadi (1995) e Oliver, Huespe, Pulido, e Chaves (2002),  $f_t = 2.8$  MPa, Penna (2011),  $f_t = 3.4$  MPa, Sancho et al. (2006) e Manzoli et al. (2009),  $f_t = 3.5$  MPa, e Xie e Gerstle (1995),  $f_t = 4.0$  MPa.

Finalmente, para o módulo de elasticidade, podem-se encontrar valores que variam entre  $E = 24.8$  GPa, como em Saleh e Aliabadi (1995), Oliver, Huespe, Pulido, e Chaves (2002), Sancho et al. (2006) e Penna (2011), e  $E = 32.0$  GPa, como em Manzoli e Shing (2006), Manzoli e Venturini (2007) e Manzoli et al. (2009).

Da mesma forma, não há consenso quanto à espessura,  $w$ , do entalhe inicial. Muitos autores se quer deixam claro o valor adotado. Oliver, Huespe, Pulido, e Chaves (2002) dão a entender, através de uma figura, que foi considerado um entalhe inicial com  $w = 10$  mm de abertura. Já em Penna (2011), uma espessura nula foi utilizada. Manzoli e Venturini (2007) e Manzoli et al. (2009), por sua vez, representaram a fissura inicial através de células com descontinuidades embutidas. Neste trabalho foi adotada  $w = 5$  mm. As demais propriedades geométricas, propriedades físicas, carregamentos e condições de contorno considerados são apresentados na figura 6.8, assim como a trajetória aproximada da trinca obtida nos experimentos.

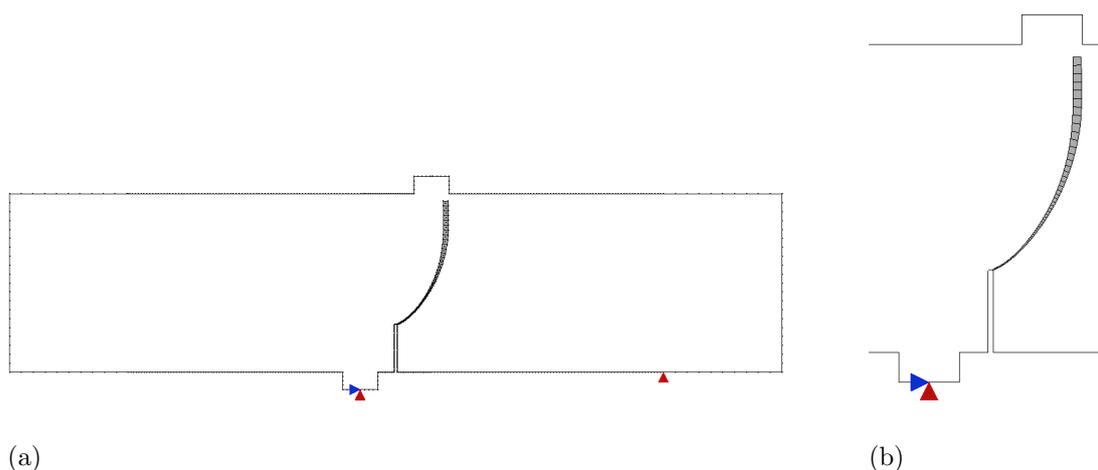


**Figura 6.8:** Dados para o ensaio de cisalhamento com forças em quatro pontos de Arrea e Ingraffea (1982).

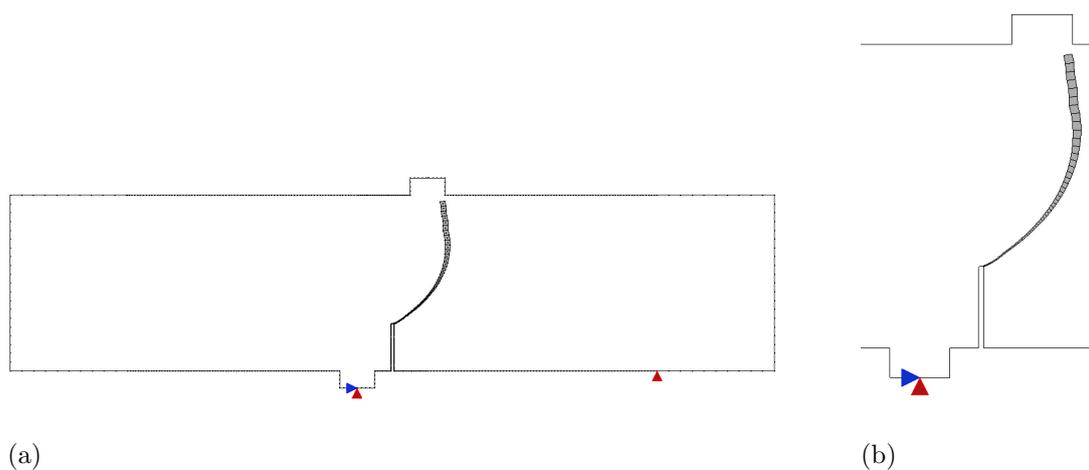
A progressão da análise não-linear foi realizada controlando-se a componente de deslocamento vertical do ponto *A*, destacado na figura 6.8. A discretização do contorno foi realizada com 642 elementos lineares. Uma célula quadrada, com diagonal de 1.6 mm foi previamente introduzida na ponta do entalhe, de forma que a origem do segmento de descontinuidade no interior desta célula é imposta como sendo o ponto médio do lado comum ao contorno do entalhe. O algoritmo de geração automática de células foi adotado, com  $\beta = 1.001$ . Porém, o crescimento das células era interrompido quando o novo segmento de descontinuidade excedia os 8 mm.

As malhas finais para as análises com descontinuidade forte direta (após o fim do regime elástico) e com o modelo de banda variável são apresentadas, respectivamente, nas figuras 6.9 e 6.10. Nota-se que, em ambos os casos, a trajetória esperada para a fissura foi adequadamente reproduzida.

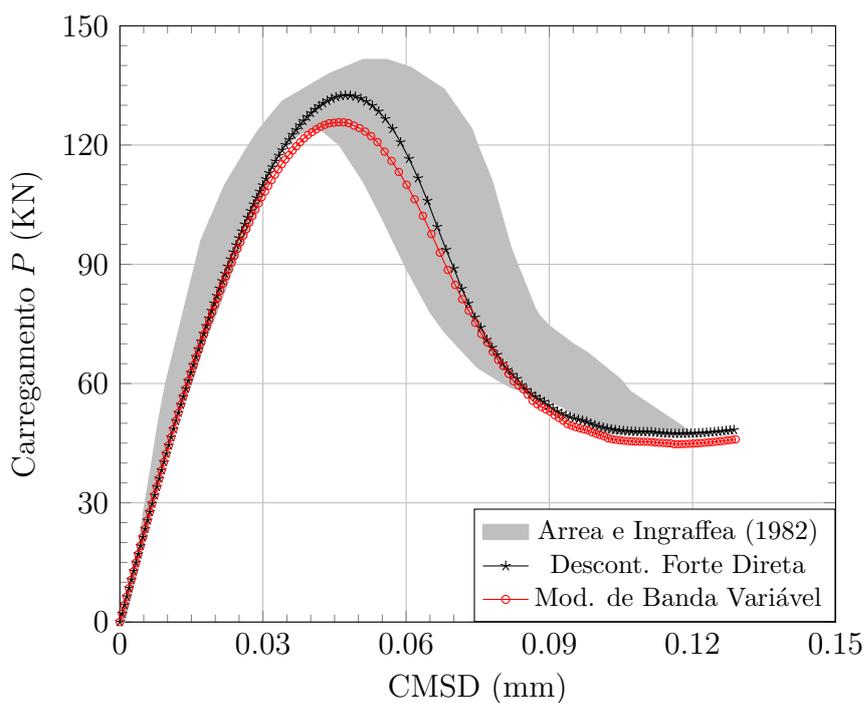
Na figura 6.11, por sua vez, resultados para a carga aplicada versus o deslocamento vertical relativo entre os dois lados na extremidade inicial do entalhe, usualmente conhecido pelo termo *crack mouth sliding displacement* (CMSD), são apresentados de forma sobreposta à envoltória experimental, obtida por Arrea e Ingraffea (1982).



**Figura 6.9:** Malha final para simulação do ensaio de Arrea e Ingraffea (1982) com descontinuidade forte direta: (a) malha completa, (b) detalhe.



**Figura 6.10:** Malha final para simulação do ensaio de Arrea e Ingraffea (1982) com modelo de banda variável: (a) malha completa, (b) detalhe.

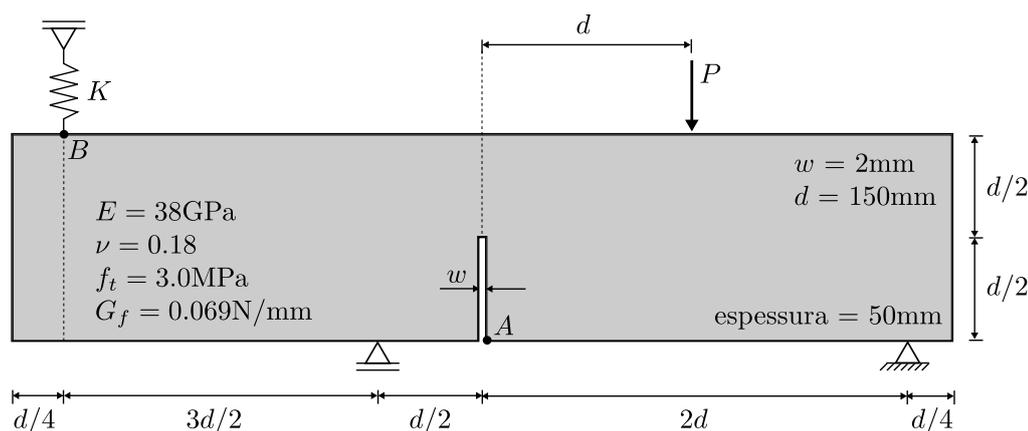


**Figura 6.11:** Resultados para carga  $P$  versus CMSD (*Crack Mouth Sliding Displacement*) para o ensaio de Arrea e Ingraffea (1982).

Novamente em ambas as análises, pode-se perceber uma boa adequação aos resultados experimentais.

## 6.4 Ensaios de Cisalhamento: Gálvez et al. (1998)

Outros ensaios de cisalhamento, resultando em fraturas de modos mistos do concreto, são reportados em Gálvez et al. (1998). A descrição completa do problema é apresentada na figura 6.12.



**Figura 6.12:** Dados para os ensaios de cisalhamento de Gálvez et al. (1998).

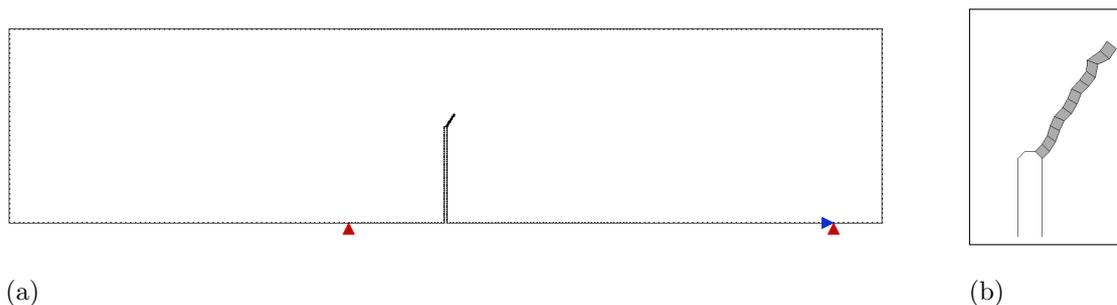
Dois casos foram estudados: cisalhamento com forças em três e quatro pontos. No primeiro deles, o ponto  $B$  da figura 6.12 encontra-se totalmente livre ( $K = 0$ ), enquanto no segundo, restringem-se os deslocamentos verticais deste mesmo ponto ( $K = \infty$ ). As simulações de cada um deles são apresentadas separadamente a seguir.

### 6.4.1 Forças em Três Pontos

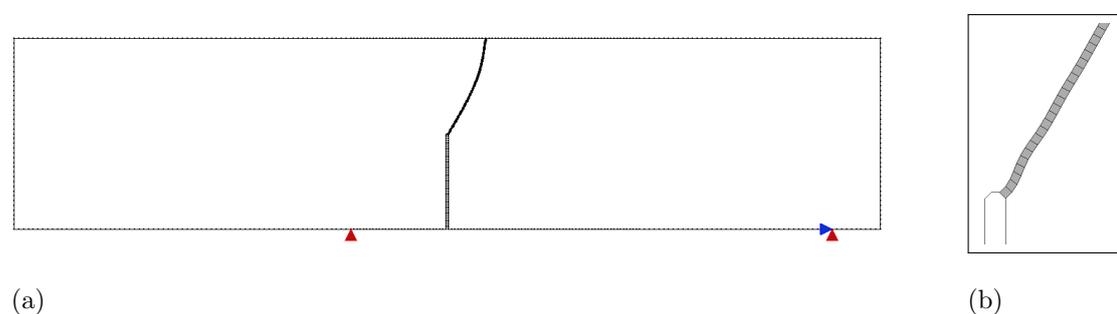
As análises numéricas com forças em três pontos foram conduzidas controlando-se o deslocamento vertical do ponto  $B$ . O contorno foi dividido em 607 elementos lineares e uma célula inicial quadrada, com diagonal medindo 1.2 mm, foi adicionada à ponta do entalhe inicial. O algoritmo de geração automática de células foi utilizado, porém, sem progressão do tamanho delas, i.e.,  $\beta = 1.0$ .

As malhas finais para as simulações com a introdução de descontinuidade forte direta ao final do regime elástico e com o modelo de banda variável são apresentadas,

respectivamente, nas figuras 6.13 e 6.14. Nota-se aqui, uma clara vantagem a favor da aplicação do modelo de banda variável, visto que na análise com descontinuidade forte direta, em determinado momento, a direção da tensão principal máxima conduziu a linha de fratura à uma trajetória inesperada, resultando em instabilidade numérica.

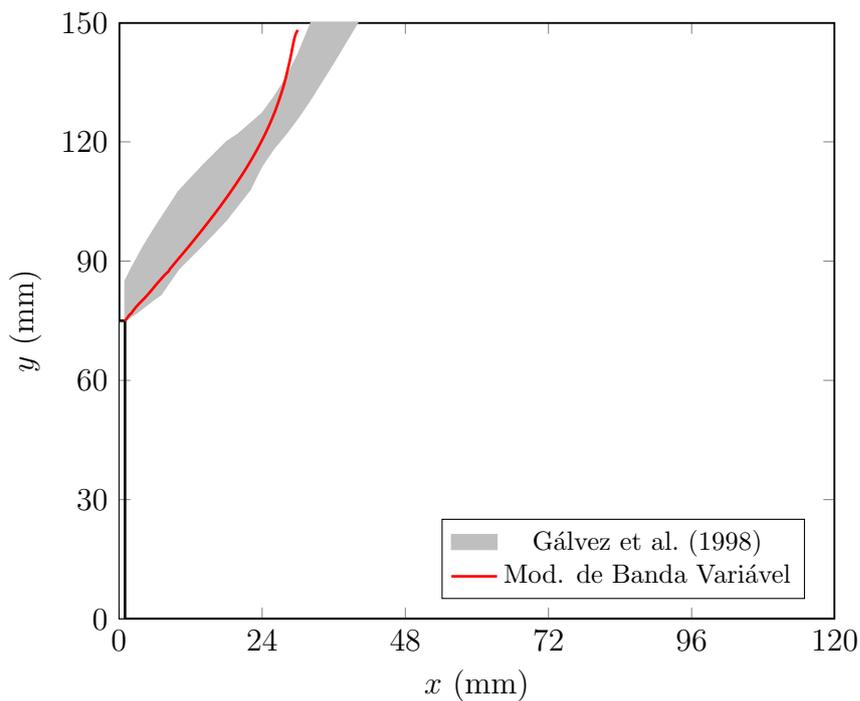


**Figura 6.13:** Malha final para simulação do ensaio com forças em três pontos de Gálvez et al. (1998) com descontinuidade forte direta: (a) malha completa, (b) detalhe.

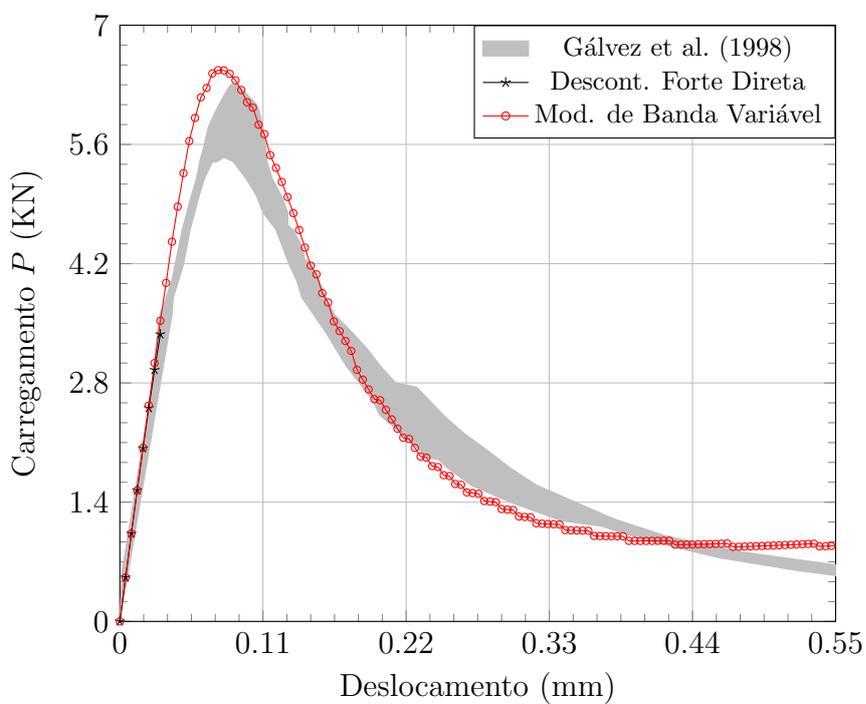


**Figura 6.14:** Malha final para simulação do ensaio com forças em três pontos de Gálvez et al. (1998) com modelo de banda variável: (a) malha completa, (b) detalhe.

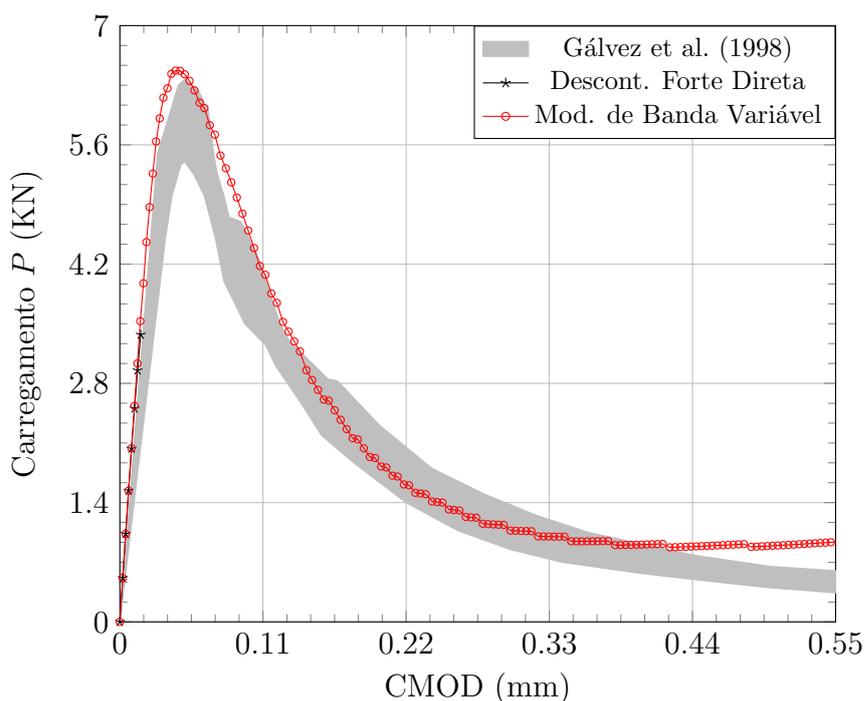
As próximas três figuras apresentam outros resultados das análises executadas. Na figura 6.15 tem-se a trajetória da trinca obtida com o modelo de banda variável. Já nas figuras 6.16 e 6.17, encontram-se as curvas da carga externa  $P$  em função, respectivamente, do deslocamento vertical do ponto  $B$  e da variação abertura da extremidade inicial do entalhe. Este último parâmetro é conhecido pelo termo *crack mouth opening displacement* (CMOD). Todos estes resultados são comparados com os experimentos de Gálvez et al. (1998).



**Figura 6.15:** Trajetória da trinca para o ensaio de Gálvez et al. (1998) com forças em três pontos.



**Figura 6.16:** Resultados para carga  $P$  versus o deslocamento vertical do ponto B no ensaio de Gálvez et al. (1998) com forças em três pontos.



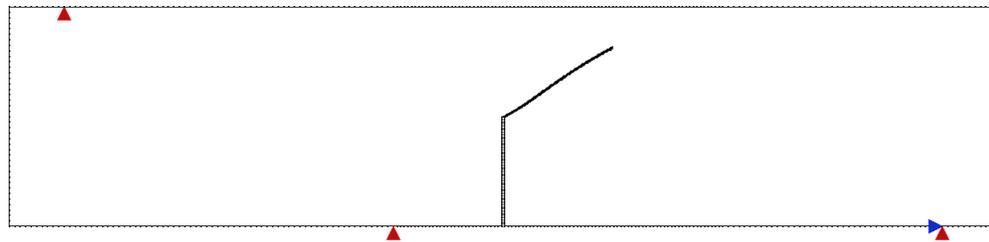
**Figura 6.17:** Resultados para carga  $P$  versus CMOD (*Crack Mouth Opening Displacement*) no ensaio de Gálvez et al. (1998) com forças em três pontos.

## 6.4.2 Forças em Quatro Pontos

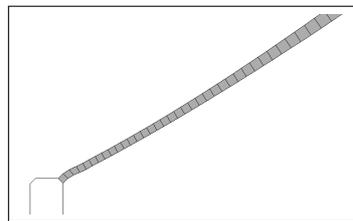
Para as análises com forças em quatro pontos, foi adotado o método de controle de deslocamento, utilizando a componente vertical do deslocamento no ponto  $A$ , destacado na figura 6.12. A discretização do contorno foi a mesma considerada nas simulações do ensaio com forças em três pontos, i.e., 607 elementos lineares. Uma célula original quadrada, com diagonal de 0.6 mm, foi introduzida à ponta do entalhe. O algoritmo de geração automática de células, com  $\beta = 1.001$ , foi empregado, suspendendo-se o crescimento assim que os segmentos de descontinuidade ultrapassavam o comprimento de 0.75 mm.

As malhas finais para as análises com descontinuidade forte direta e com o modelo de banda variável são apresentadas, respectivamente, nas figuras 6.18 e 6.19. Novamente, para o primeiro caso, dificuldades na determinação da orientação da linha

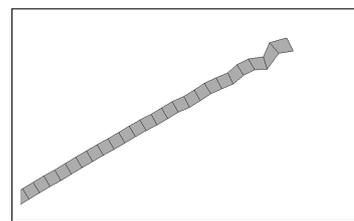
de descontinuidade, em determinado momento, produziram instabilidade numérica e resultaram na interrupção da análise.



(a)

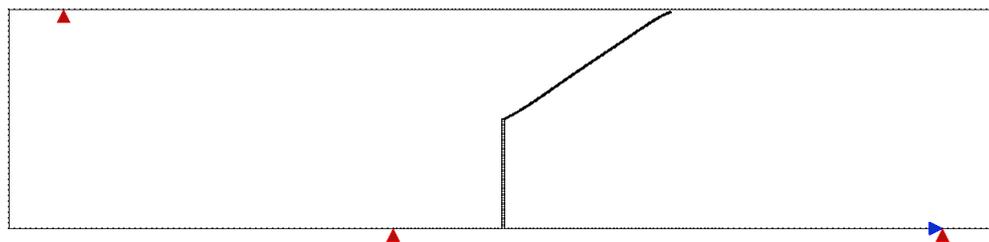


(b)

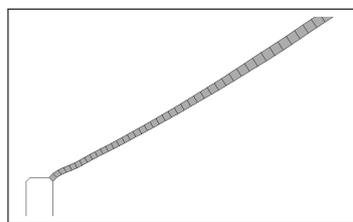


(c)

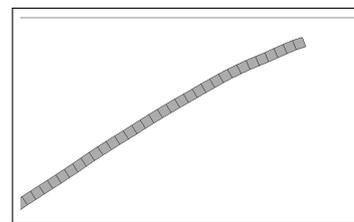
**Figura 6.18:** Malha final para simulação do ensaio com forças em quatro pontos de Gálvez et al. (1998) com descontinuidade forte direta: (a) malha completa, (b) detalhe do início da trinca, (c) detalhe do final da trinca.



(a)



(b)

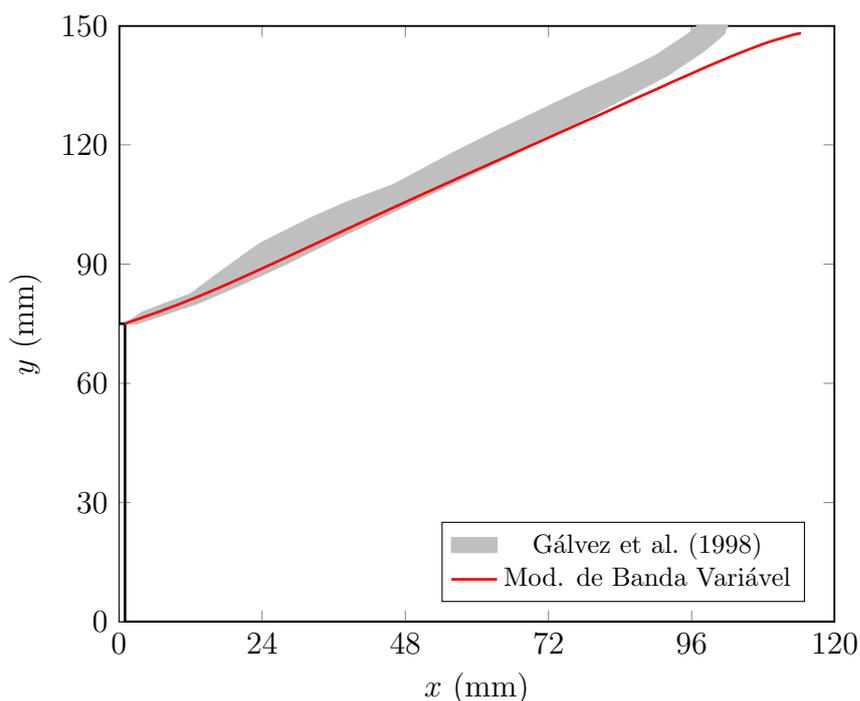


(c)

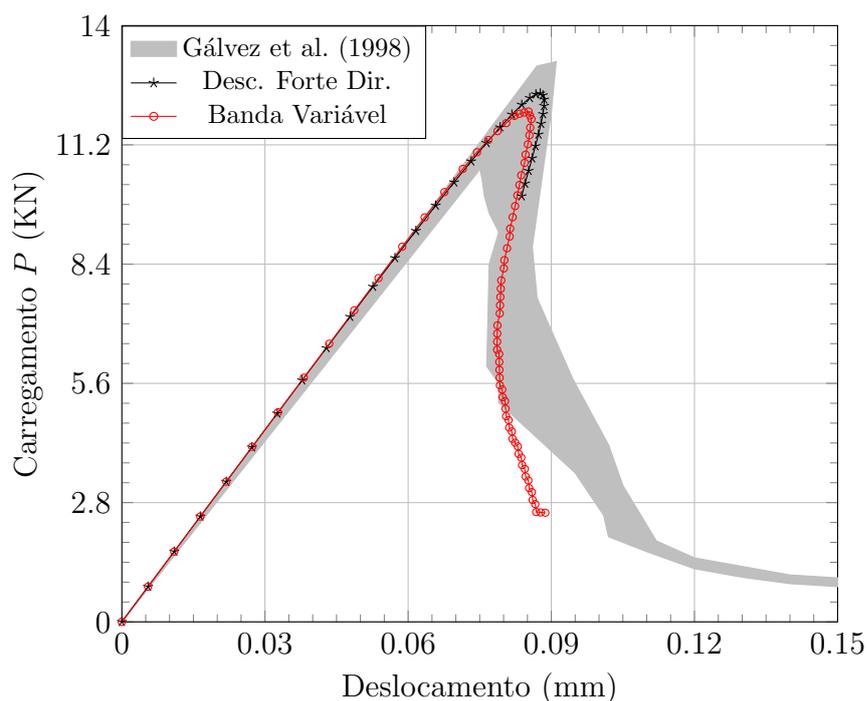
**Figura 6.19:** Malha final para simulação do ensaio com forças em quatro pontos de Gálvez et al. (1998) com modelo de banda variável: (a) malha completa, (b) detalhe do início da trinca, (c) detalhe do final da trinca.

A seguir, resultados para a trajetória da trinca (figura 6.20), utilizando o modelo de banda variável, e para o deslocamento do ponto de aplicação da carga  $P$  (figura 6.21) são comparados aos resultados empíricos reportados por Gálvez et al. (1998).

Assim como verificado para o ensaio com forças em três pontos (figura 6.15), a trajetória numérica da fissura nas regiões superiores da viga apresentou ligeiro desvio em relação à envoltória experimental. A explicação deste fato pode estar associada a fatores relacionados ao próprio experimento, como a presença de heterogeneidades internas nas peças ensaiadas ou a dificuldade do estabelecimento de uma carga de fato pontual, bem como a fatores numéricos, como o grau de discretização do contorno ou a ocorrência de efeitos de quase-singularidade a medida que as células se aproximam dele.



**Figura 6.20:** Trajetória da trinca para o ensaio de Gálvez et al. (1998) com forças em quatro pontos.



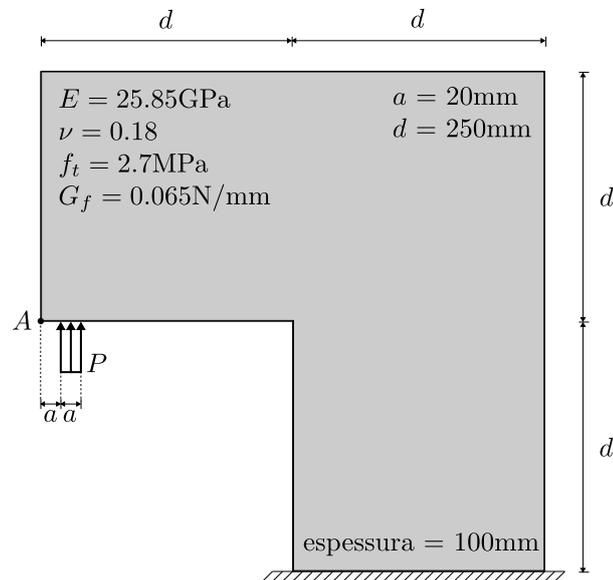
**Figura 6.21:** Resultados para carga  $P$  versus o deslocamento vertical do ponto carregado no ensaio de Gálvez et al. (1998) com forças em quatro pontos.

## 6.5 Painel em L: Winkler et al. (2004)

Winkler et al. (2004) realizaram ensaios experimentais em painéis de concreto em forma de “L”, conforme ilustrado na figura 6.22. As propriedades mecânicas do material também foram obtidas, por eles, de forma experimental. Tais propriedades foram consideradas nas análises numéricas. A carga  $P$  foi aplicada através de um pino, de diâmetro  $a = 20$  mm, parcialmente embutido à peça de concreto, o que justifica a distribuição dessa carga total sobre o comprimento representado na figura.

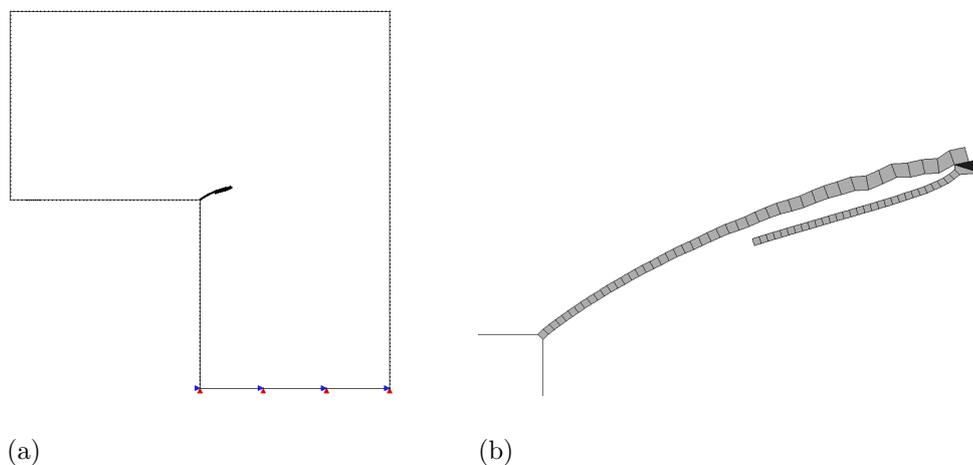
As análises numéricas foram controladas pelo método do deslocamento, considerando-se a componente vertical do ponto  $A$ , destacado na figura 6.22. O contorno foi dividido em 356 elementos lineares e uma célula inicial, com diagonal de 1 mm, foi adicionada ao vértice do “L”. Para o crescimento progressivo das células, adotou-se

$\beta = 1.001$ , limitando o tamanho dos novos segmentos de descontinuidade ao comprimento de 1.3 mm.

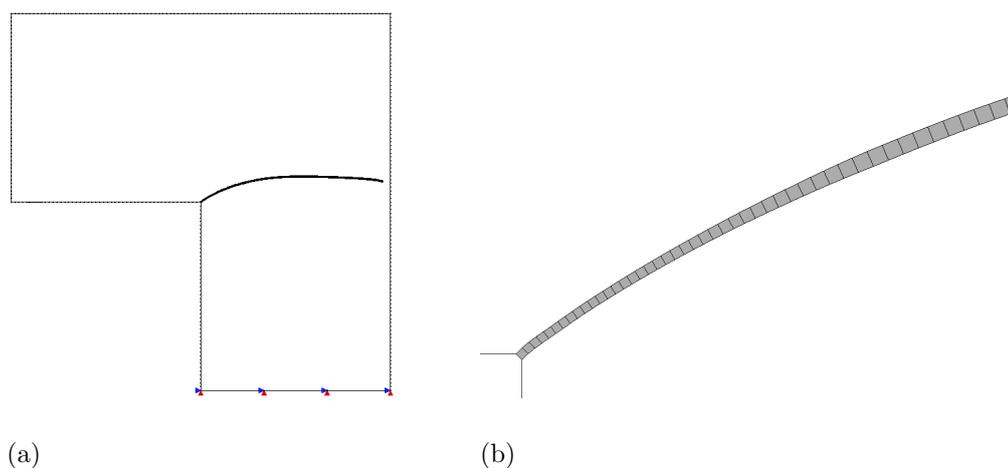


**Figura 6.22:** Dados para o ensaio do painel em L de Winkler et al. (2004).

As malhas obtidas ao final das análises com descontinuidade forte direta e com o modelo de banda variável são apresentadas, respectivamente, nas figuras 6.23 e 6.24. Assim como verificado nos exemplos da seção 6.4, a utilização do modelo de banda variável mostra-se necessária para a captura adequada do encaminhamento da fissura.

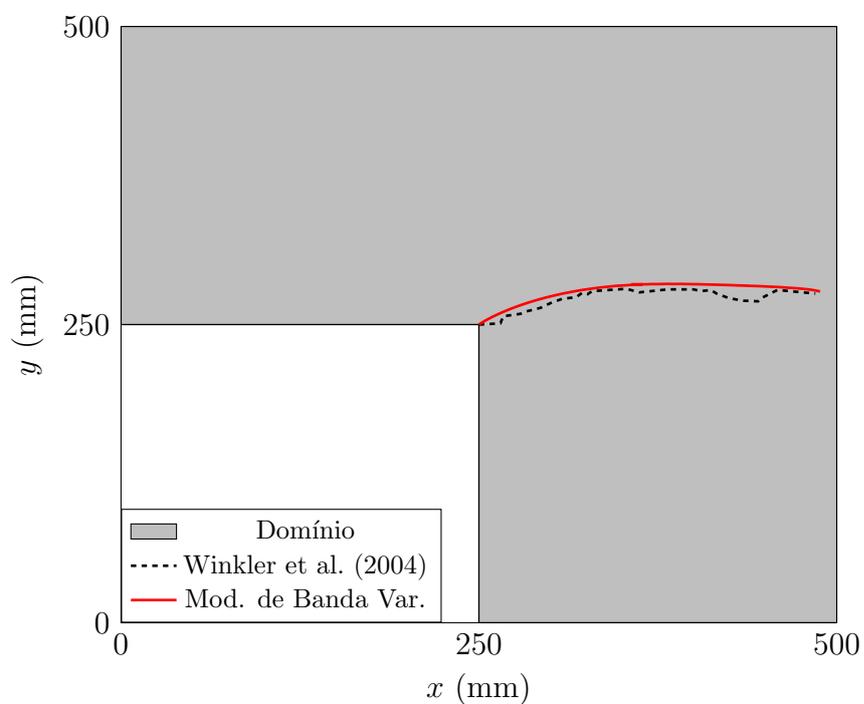


**Figura 6.23:** Malha final para simulação do ensaio do painel em “L” de Winkler et al. (2004) com descontinuidade forte direta: (a) malha completa, (b) detalhe.



**Figura 6.24:** Malha final para simulação do ensaio do painel em “L” de Winkler et al. (2004) com modelo de banda variável: (a) malha completa, (b) detalhe.

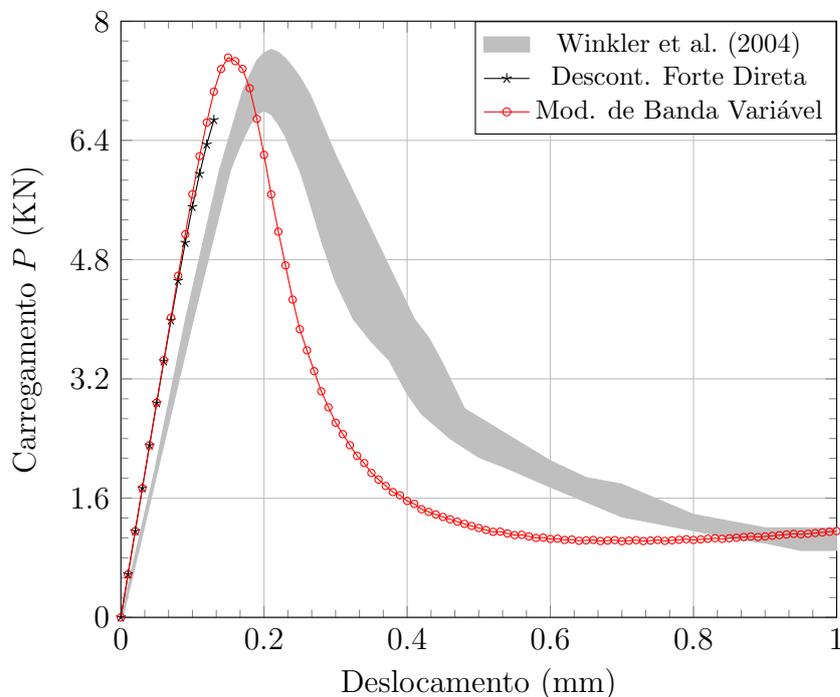
A comparação direta entre a trajetória da trinca obtida com o modelo de banda variável e aquela reportada experimentalmente em Winkler et al. (2004) é apresentada na figura 6.25. Percebe-se uma boa concordância entre elas.



**Figura 6.25:** Trajetória da trinca para o ensaio do painel em “L” de Winkler et al. (2004).

Já a curva da carga total aplicada em função do deslocamento vertical do ponto A

pode ser vista na figura 6.26. Neste caso, houve uma certa discrepância entre os resultados numéricos e a envoltória experimental.



**Figura 6.26:** Resultados para carga total  $P$  versus o deslocamento vertical do ponto  $A$  no ensaio do painel em L de Winkler et al. (2004).

Algumas considerações, no entanto, podem ser feitas a respeito destes resultados. Primeiramente, na figura 6.26, observa-se que a curva numérica já destoa dos resultados experimentais desde os primeiros passos de carga, quando a análise ainda se encontra no regime elástico (apenas no terceiro passo, o limite deste regime é alcançado na célula inicial). Isto pode estar associado a uma apuração imprecisa de alguma propriedade do material, como o módulo de elasticidade ou o limite à tração. No próprio trabalho de Winkler et al. (2004) e também em Penna (2011), diferenças semelhantes nesta inclinação inicial são verificadas a partir da utilização de modelos de fissuração distribuída. Porém, nestas análises, o comportamento pós-crítico se aproximou de forma mais adequada às curvas experimentais.

No caso da formulação empregada nesta tese, cabe ressaltar que a necessidade de

aplicação de células com dimensões reduzidas, para evitar um retardamento no processo de geração de novos segmentos de descontinuidade, pode gerar um aumento de rigidez irreal em problemas onde regiões maiores do domínio apresentem dano material. Este tema será melhor explorado no próximo exemplo.

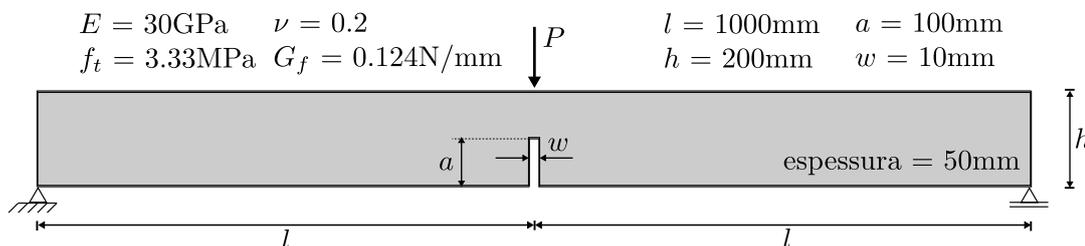
Finalmente, merece ser destacado o fato de que dois dos parâmetros mais importantes nos estudos de falhas estruturais em engenharia foram bem determinados pela análise com o modelo de banda variável. Tais parâmetros referem-se à carga de pico e à trajetória da fissura. Portanto, os resultados aqui descritos não devem ser subestimados.

## 6.6 Flexão em Três Pontos: Petersson (1981)

Vigas de concreto pré-entalhadas, submetidas à flexão em três pontos, foram estudadas experimentalmente por Petersson (1981). Nesse trabalho são apresentados valores para energia de fratura,  $G_f$ , e para a resistência à tração,  $f_t$ , do material, obtidas de ensaios específicos. Para o módulo de elasticidade, o autor assumiu o valor de  $E = 30$  GPa. Tais propriedades foram adotadas nas análises descritas a seguir e encontram-se listadas na figura 6.27, juntamente com a geometria, as condições de contorno e o carregamento considerados.

Uma certa divergência com relação à espessura,  $w$ , do entalhe inicial pode ser verificada na comparação entre diferentes estudos disponíveis na literatura, visto que sua medida não é apresentada de forma clara no trabalho original. Nguyen (2008), por exemplo, adotou espessura nula, Manzoli e Venturini (2004) trataram o entalhe através de células com descontinuidade forte embutida e Rots et al. (1985), Chaves (2003) e Penna (2011) consideraram  $w = 20$  mm. No desenvolvimento desta tese, os valores  $w = 10$  mm e  $w = 20$  mm foram testados e, como as diferenças foram pouco significativas, optou-se por reportar apenas os resultados referentes ao primeiro caso,

que corresponde ao valor intermediário dentre os listados acima.



**Figura 6.27:** Dados para o ensaio de flexão em três pontos de Petersson (1981).

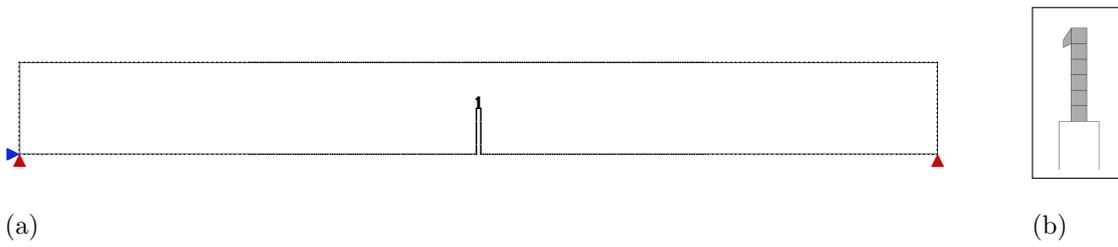
O avanço das análises numéricas foi controlado pelo deslocamento vertical do ponto de atuação da carga  $P$ . O contorno do problema foi dividido em 705 elementos lineares e uma célula inicial quadrada foi inserida na ponta do entalhe. O algoritmo de geração automática de células foi utilizado com  $\beta = 1.0$ , i.e., sem variação nos tamanhos delas.

As análises com descontinuidade forte direta e com modelo de banda variável, principalmente esta última, possuem algumas peculiaridades que justificam discuti-las em duas seções distintas, como a seguir.

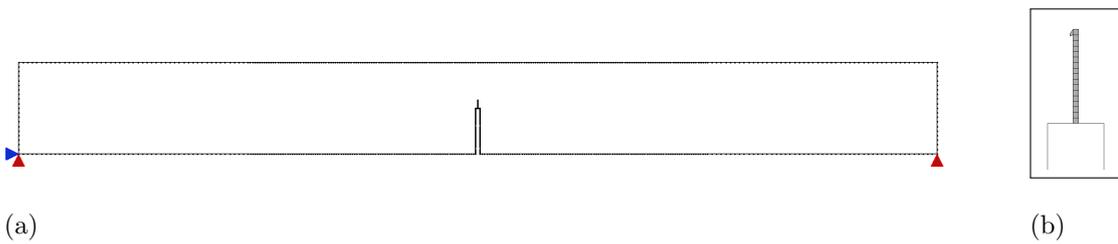
### 6.6.1 Análises com Descontinuidade Forte Direta

As análises com descontinuidade forte direta foram realizadas empregando-se células com lados de 1 mm e 4 mm. Novamente, o encaminhamento da fissura não foi reproduzido de forma consistente, visto que, em determinado momento da análise, a tensão principal máxima foi obtida na direção paralela ao entalhe original, como pode ser verificado nas figuras 6.28 e 6.29.

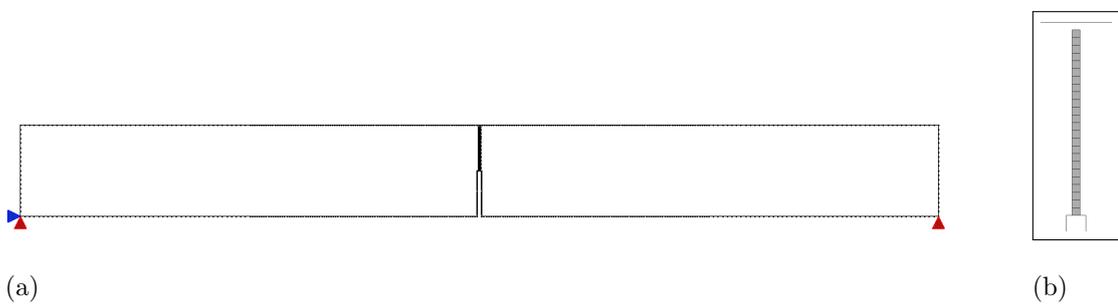
Entretanto, pela própria simetria do problema, a trajetória da trinca é previamente conhecida e pode ser induzida artificialmente, pré-definindo a orientação de cada segmento de descontinuidade no interior das células. Fazendo-se isso, as malhas finais apresentadas nas figuras 6.30 e 6.31 foram obtidas.



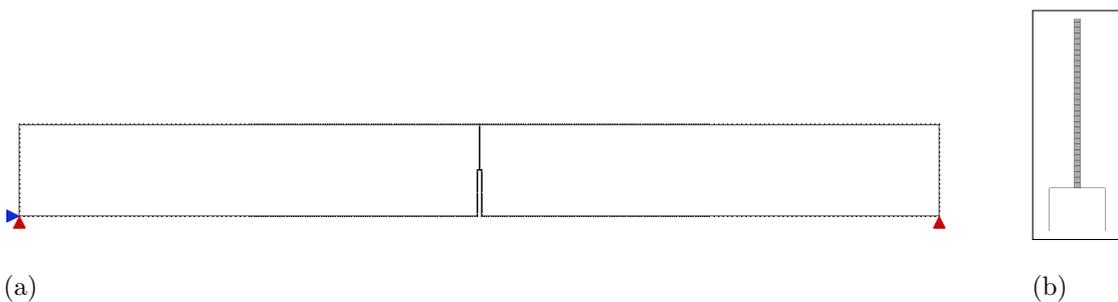
**Figura 6.28:** Malha final para simulação do ensaio de Petersson (1981) com células de 4 mm e descontinuidade forte direta: (a) malha completa, (b) detalhe.



**Figura 6.29:** Malha final para simulação do ensaio de Petersson (1981) com células de 1 mm e descontinuidade forte direta: (a) malha completa, (b) detalhe.



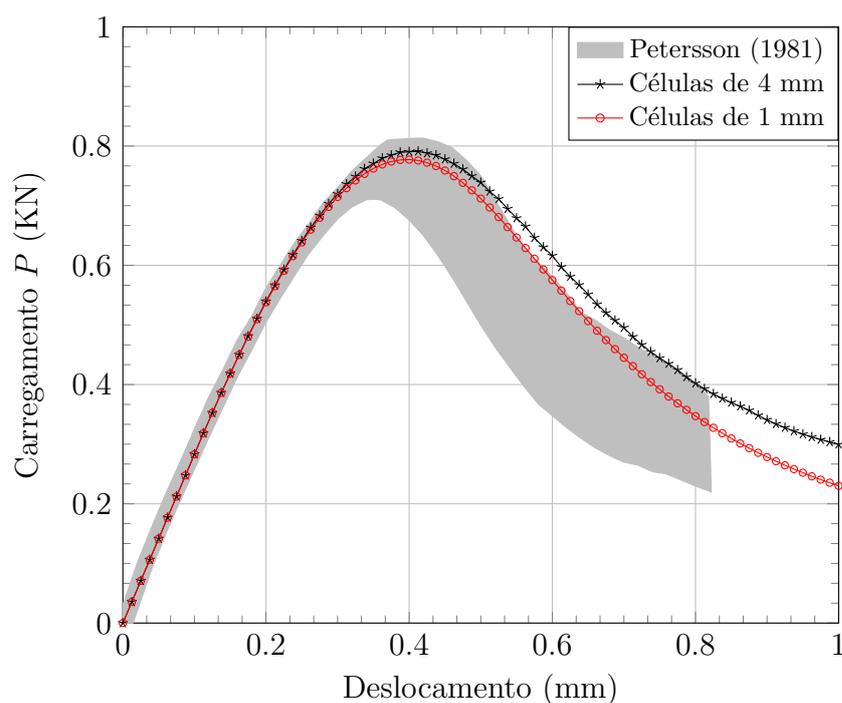
**Figura 6.30:** Malha final para simulação do ensaio de Petersson (1981) com células de 4 mm e descont. forte direta com orientação pré-definida: (a) malha completa, (b) detalhe.



**Figura 6.31:** Malha final para simulação do ensaio de Petersson (1981) com células de 1 mm e descont. forte direta com orientação pré-definida: (a) malha completa, (b) detalhe.

Os resultados para a carga  $P$  em função do deslocamento vertical do ponto onde ela é aplicada são apresentados na figura 6.32, de forma sobreposta à envoltória definida pelos ensaios experimentais. Nota-se uma ligeira diferença no comportamento pós-crítico entre as duas análises, que pode ser explicada pela diferença nas distâncias do ponto de colocação da célula em regime elástico à extremidade momentânea da fissura. Ou seja, quando células maiores são utilizadas, um trecho onde eventualmente já deveria haver um prolongamento da linha descontínua ainda é tratado como elástico pela formulação numérica.

Esta questão toma um viés mais complexo quando o modelo de banda variável é adotado, conforme descrito na próxima seção.

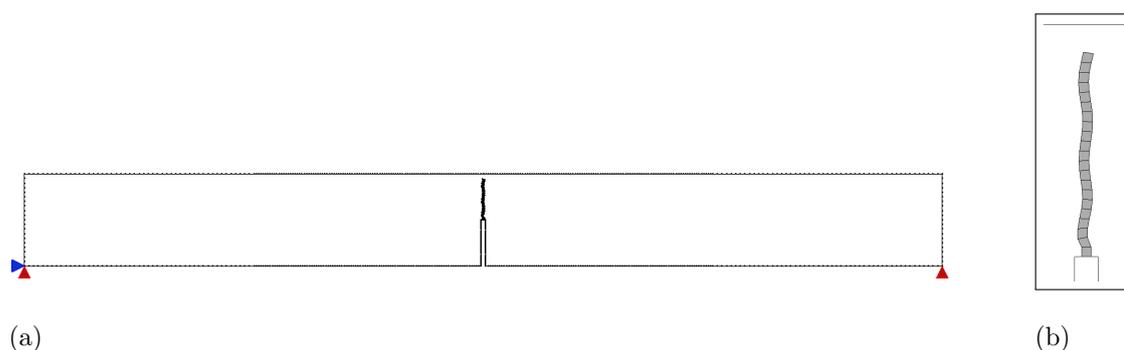


**Figura 6.32:** Resultados para carga  $P$  versus o deslocamento vertical do ponto carregado no ensaio de flexão em três pontos de Petersson (1981): descontinuidade forte direta com orientação pré-definida.

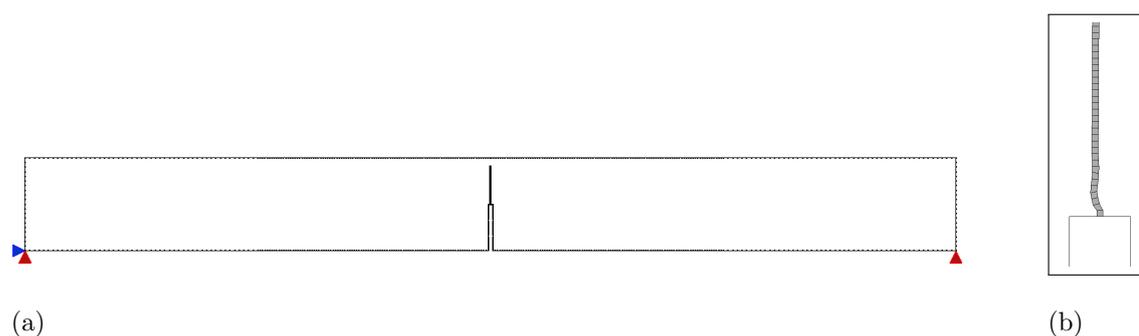
## 6.6.2 Análises com Modelo de Banda Variável

Na formulação com o modelo de banda variável, a trajetória da fissura foi capturada naturalmente, sem a necessidade de imposição da orientação dos segmentos de descontinuidades. Entretanto, uma forte dependência no tamanho das células foi verificada, gerando dificuldades no traçado adequado das curvas de equilíbrio típicas do problema. Tais dificuldades são provenientes do seguinte dilema: ao utilizar células de tamanho muito reduzido, regiões que deveriam apresentar dano são consideradas elásticas durante a análise numérica, traduzindo-se num aumento incorreto da resistência estrutural. Em contrapartida, se as células forem demasiadamente grandes, o processo de geração de descontinuidades é retardado, visto que o ponto de aferição das deformações encontra-se mais distante da extremidade momentânea da fissura. Neste caso, podem ocorrer oscilações no traçado da trajetória de equilíbrio, com a presença de uma espécie de “pseudo-enrijecimento” em alguns passos de carga.

Para ilustrar esta questão, duas análises são apresentadas a seguir. Uma utilizando células de lados medindo 4 mm, cuja malha final é apresentada na figura 6.33, e outra com células de lados medindo 1 mm, sendo a malha final reproduzida na figura 6.34.

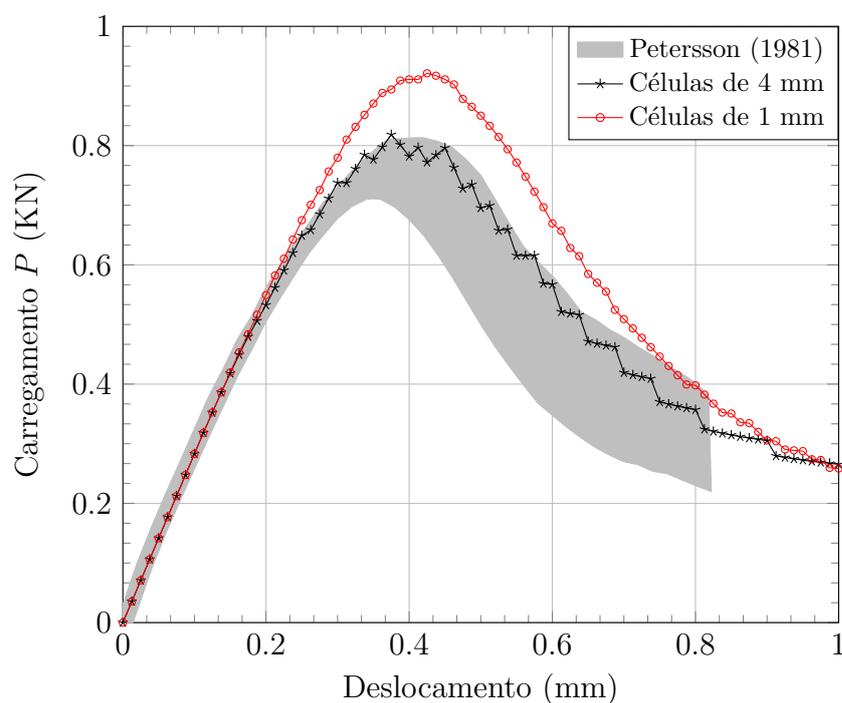


**Figura 6.33:** Malha final para simulação do ensaio de flexão em três pontos de Petersson (1981) com células de 4 mm e modelo de banda variável: (a) malha completa, (b) detalhe.



**Figura 6.34:** Malha final para simulação do ensaio de flexão em três pontos de Petersson (1981) com células de 1 mm e modelo de banda variável: (a) malha completa, (b) detalhe.

As curvas da carga  $P$  versus o deslocamento vertical do ponto de sua aplicação são apresentadas na figura 6.35, juntamente com os resultados experimentais de Petersson (1981).



**Figura 6.35:** Resultados para carga  $P$  versus o deslocamento vertical do ponto carregado no ensaio de flexão em três pontos de Petersson (1981): modelo de banda variável.

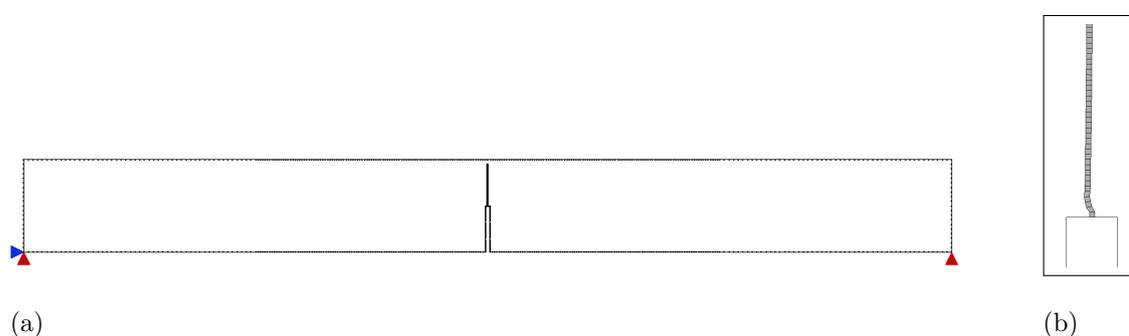
Pode-se observar com clareza que a análise com células de 1 mm superestimou a

carga de pico, indicando que uma região maior do domínio deve apresentar dano, além da fissura central. Por outro lado, quando as células de 4 mm são utilizadas, as referidas oscilações na curva de equilíbrio são verificadas.

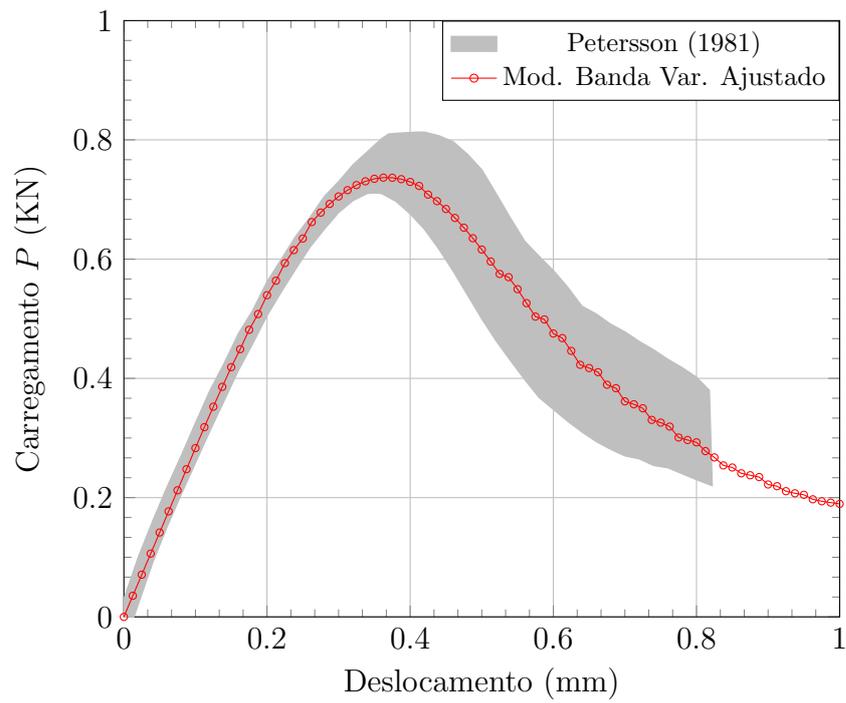
Deve-se ressaltar aqui, que a escolha das células com 4 mm de lado não foi ao acaso. Medidas intermediárias foram testadas, porém, elas foram as primeiras a adequar os resultados numéricos aos experimentais.

A partir das colocações realizadas até aqui, uma ideia surge naturalmente no sentido de corrigir as deficiências observadas. Trata-se da adoção de células suficientemente pequenas, como as de 1 mm de lado no problema aqui em questão, para evitar as oscilações nas respostas estruturais, em conjunto com uma modificação na lei de evolução da variável de dano referente à fase pré-bifurcação. Para tanto, deve-se voltar a atenção às equações 3.59 e 3.60. Nessas expressões, que foram obtidas a partir da avaliação da energia dissipada no domínio do elemento de discretização, o termo  $l^*$  está associado ao tamanho característico da célula, mais precisamente, à média dos comprimentos dos seus lados. A proposta apresentada agora é a modificação artificial deste termo, afim de evitar o aumento espúrio da resistência estrutural.

Nas figuras 6.36 e 6.37, são apresentados os resultados para células com 1 mm de lado e  $l^* = 4$  mm. A melhora no traçado da curva de equilíbrio é sensível.



**Figura 6.36:** Malha final para simulação do ensaio de flexão em três pontos de Petersson (1981) com células de 1 mm e  $l^* = 4$  mm: (a) malha completa, (b) detalhe.



**Figura 6.37:** Resultados para carga  $P$  versus o deslocamento vertical do ponto carregado no ensaio de flexão em três pontos de Petersson (1981): modelo de banda variável com células de 1 mm e  $l^* = 4$  mm.

# Capítulo 7

## Considerações Finais

Uma continuidade da linha de pesquisa iniciada nos trabalhos de Manzoli e Venturini (2004, 2007), associados à aplicação dos conceitos de descontinuidades fortes, até então bastante difundidos em análises numéricas via método dos elementos finitos, a estudos de falhas materiais através do método dos elementos de contorno, foi o fio condutor do desenvolvimento do presente trabalho.

Neste sentido, a metodologia foi ampliada fazendo-se uso da análise de bifurcação como critério desencadeador do processo de localização de deformações. Tal análise baseia-se na singularidade do tensor de localização, muitas vezes denominado de tensor acústico por questões históricas. A determinação desta condição não é trivial e sua generalização numérica é demasiadamente custosa. No entanto, para um modelo constitutivo específico e restringindo o modelo de análise aos estados planos, expressões simplificadas para um módulo de amolecimento crítico, correspondente ao referido critério, podem ser obtidas em função do estado momentâneo de deformações. Estas expressões foram deduzidas no capítulo 2, considerando o modelo de dano utilizado nesta tese. A análise de bifurcação fornece ainda a orientação da banda de localização, cuja espessura inicial pode ser obtida através dos valores das variáveis internas do modelo constitutivo.

Uma vez estabelecida a banda de localização, uma lei (pré-definida) de evolução

para sua espessura é utilizada até que o regime de descontinuidade forte, caracterizado por campos de deslocamentos descontínuos e deformações ilimitadas numa determinada superfície, seja alcançado. Esta etapa transitória é tratada através de equações cinemáticas regularizadas, incompatíveis entre si, porém, capazes de representar, num único ponto geométrico, a presença de superfícies de descontinuidades fracas, caracterizadas por deformações descontínuas, mas limitadas, que delimitam a banda. No regime de descontinuidade forte, estas equações cinemáticas regularizadas recuperam a condição de compatibilidade.

Como já enfatizado anteriormente, a metodologia posta desta maneira torna-se mais adequada para representar a zona de processo de fratura, quando comparada aos trabalhos iniciais com simulação de descontinuidades fortes via método dos elementos de contorno, nos quais, imediatamente após o fim do regime elástico, segmentos de superfícies com descontinuidade forte eram induzidos no interior das células. Na prática, isto traduziu-se numa forma mais eficiente de capturar a trajetória da fissura, como pôde ser visto nos exemplos apresentados nas seções 6.4 a 6.6 do capítulo 6.

Tal fato, por si próprio, já atesta os benefícios da formulação aqui desenvolvida. Porém, algumas ressalvas foram identificadas e merecem ser apontadas. Conforme discutido na seção 6.6, o estudo de propagação de fissura numa viga de concreto pré-entanhada e sujeita à flexão em três pontos deixou transparecer o seguinte dilema quanto à escolha do tamanho característico das células: elas deveriam ser suficientemente pequenas na direção da trinca, afim de simular corretamente a taxa de propagação e evitar, assim, uma superestimação da carga de pico; por outro lado, se suas dimensões forem demasiadamente reduzidas, as regiões de degradação em meio contínuo ficam subestimadas, gerando oscilações nas curvas de equilíbrio.

Para remediar esta situação, algumas soluções poderiam ter sido testadas. Dentre elas, pode-se citar a utilização de células distorcidas, reduzindo suas dimensões

apenas no sentido da linha de descontinuidade; a discretização, com células convencionais, das regiões ao redor das células com descontinuidade incorporada ou, ainda, a discretização completa (ou semi-completa) do domínio, abandonando-se o processo de geração automática de células. No primeiro caso, além da necessidade de modificação do algoritmo de geração automática, resultados menos precisos associados às integrações numéricas, principalmente das integrais singulares, podem afetar a resposta como um todo. Quanto à discretização complementar das regiões adjacentes às células com descontinuidade, a dúvida com relação ao tamanho da área a ser considerada permaneceria e sua eficácia estaria condicionada a esquemas de reconstrução de malhas, principalmente nas regiões à frente da ponta da trinca, o que agregaria um custo computacional extra, além de um grande esforço de implementação. Finalmente, a ideia de manter uma discretização fixa, semelhante às formulações via método dos elementos finitos, vai contra a principal vantagem do método dos elementos de contorno, que refere-se à discretização do domínio apenas nas regiões onde efeitos inelásticos são verificados.

Desta forma, uma proposta bastante simples e promissora que, no entanto, ainda deve ser melhor estudada, foi apresentada. Trata-se da adequação da lei de evolução da variável de dano referente à fase pré-bifurcação. No exemplo da seção 6.6, isto foi realizado através da modificação artificial do fator de escala associado a esta lei.

A seguir, as principais contribuições desta tese, bem como sugestões para futuros trabalhos, são listadas de forma condensada.

## 7.1 Contribuições deste Trabalho

- Extensão das metodologias de análise de descontinuidades fortes via método dos elementos de contorno, a partir da adoção de etapas sucessivas, incluindo:

degradação em meio contínuo, localização de deformações em bandas de espessura variável (regime com descontinuidades fracas), que tem seu início estabelecido pela análise de bifurcação e sua evolução é determinada por uma lei pré-definida, e, finalmente, regime de descontinuidade forte.

- Generalização quanto ao formato geométrico das células com descontinuidade incorporada (ou embutida), a partir da utilização de funções de forma lineares, baseadas em seus vértices, para a construção da função de regularização cinemática, que distribui os efeitos das descontinuidades por todo o domínio da célula.
- Adaptação da formulação implícita do método dos elementos de contorno para problemas fisicamente não-lineares à estratégia de solução utilizada no sistema INSANE, possibilitando o emprego de diferentes métodos de controle e de uma biblioteca de modelagem constitutiva numa única estrutura computacional.
- Apresentação de um algoritmo de geração automática de células suficientemente robusto para capturar a trajetória de superfícies de falha, fazendo uso de uma das principais potencialidades do método dos elementos de contorno, que refere-se à discretização parcial do domínio.

## 7.2 Sugestões para Trabalhos Futuros

- Simulação de falhas em outros tipos de materiais, como solos e metais, a partir da adoção de modelos constitutivos distintos na representação dos efeitos dissipativos na superfície descontínua.
- Generalização do conceito das células com descontinuidade forte embutida, considerando a incorporação componentes não uniformes dos saltos no campo de deslocamentos. Tal ideia poderia reduzir a dependência das respostas estruturais em relação à dimensão das células no sentido da superfície descontínua.

- Desenvolvimento de um esquema de adaptação do tamanho das células, integrado ao algoritmo de geração automática, baseado na avaliação das deformações em pontos internos avulsos.
- Aplicação, à metodologia aqui apresentada, do método global de geração e propagação de fissuras, proposto por Oliver, Huespe, Samaniego, e Chaves (2002) no contexto do método dos elementos finitos. No caso do método dos elementos de contorno, o problema de potencial escalar associado pode ser tratado a partir de pontos internos avulsos, sem a necessidade de discretização do domínio em células.
- Utilização de métodos mais genéricos na avaliação da condição de bifurcação, i.e., métodos independentes do modelo constitutivo adotado.
- Extensão da formulação aos problemas tridimensionais.

# Apêndice A

## Soluções Fundamentais de Kelvin

Apresentam-se aqui, soluções do problema fundamental de Kelvin, referente à aplicação de cargas unitárias em três direções ortogonais do espaço euclidiano ( $P_i = 1$ , para qualquer valor do índice  $i$ ), concentradas num ponto,  $\boldsymbol{\xi}$ , de um domínio sólido infinito, com comportamento elástico linear e sujeito a deformações infinitesimais. Com isso, formula-se o problema a partir das seguintes equações:

$$\sigma_{ij,j}^* + \delta(\mathbf{X} - \boldsymbol{\xi})P_i = 0 \quad (\text{equilíbrio}) \quad (\text{A.1a})$$

$$\epsilon_{ij}^* - \frac{1}{2}(u_{i,j}^* + u_{j,i}^*) = 0 \quad (\text{compatibilidade cinemática}) \quad (\text{A.1b})$$

$$\sigma_{ij}^* - E_{ijkl}^o \epsilon_{kl}^* = 0 \quad (\text{compatibilidade constitutiva}) \quad (\text{A.1c})$$

onde  $\delta(\mathbf{X} - \boldsymbol{\xi})$  é a função delta de Dirac, cuja principal propriedade é dada na equação 4.12 e  $E_{ijkl}^o$  é o tensor constitutivo elástico linear isotrópico, definido nas equações 2.10 a 2.12. Os termos  $u_i^*$ ,  $\epsilon_{ij}^*$  e  $\sigma_{ij}^*$  referem-se respectivamente aos campos de deslocamento, deformação e tensão.

A partir da manipulação algébrica dessas equações, obtém-se a equação de Navier para os deslocamentos, i.e.,

$$\mu u_{j,kk}^* + (\bar{\lambda} + \mu)u_{k,kj}^* + \delta(\mathbf{X} - \boldsymbol{\xi})P_j = 0 \quad (\text{A.2})$$

Dentre as diferentes técnicas de solução existentes para esta equação, adota-se aqui a formulação do vetor de Galerkin,  $G_i$ , definido pela seguinte expressão (ver, por

exemplo, Aliabadi (2002)):

$$u_j^* = G_{j,ii} - \left( \frac{\bar{\lambda} + \mu}{\bar{\lambda} + 2\mu} \right) G_{i,ji} \quad (\text{A.3})$$

Aplicando a equação A.3 à A.2,

$$\begin{aligned} \mu G_{j,ii} - \underbrace{\left[ \mu \left( \frac{\bar{\lambda} + \mu}{\bar{\lambda} + 2\mu} \right) - (\bar{\lambda} + \mu) + (\bar{\lambda} + \mu) \left( \frac{\bar{\lambda} + \mu}{\bar{\lambda} + 2\mu} \right) \right]}_{=0} G_{i,jikk} \\ + \delta(\mathbf{X} - \boldsymbol{\xi}) P_j = 0 \quad (\text{A.4}) \\ \Rightarrow \mu G_{j,ii} + \delta(\mathbf{X} - \boldsymbol{\xi}) P_j = 0 \end{aligned}$$

A equação A.4 pode ser transformada num conjunto de equações típicas de problemas de potencial escalar, a partir da definição de um vetor  $F_i$  como sendo o laplaciano do vetor de Galerkin, i.e.,

$$F_j = G_{j,ii} \quad (\text{A.5})$$

Substituindo a equação A.5 na equação A.4, tem-se:

$$F_{j,kk} + \frac{1}{\mu} \delta(\mathbf{X} - \boldsymbol{\xi}) P_j = 0 \quad (\text{A.6})$$

Tratam-se a seguir, de forma separada, os domínios tri e bidimensionais.

## A.1 Domínios Tridimensionais

No domínio infinito original, toma-se um subdomínio fechado,  $\Omega'$ , delimitado pelo contorno  $\Gamma'$ , que contenha o ponto fonte de aplicação da carga,  $\boldsymbol{\xi}$ , desde que  $\boldsymbol{\xi} \notin \Gamma'$ .

Integrando a equação A.6 neste subdomínio, obtém-se:

$$\int_{\Omega'} F_{j,kk} d\Omega = -\frac{P_j}{\mu} \int_{\Omega'} \delta(\mathbf{X} - \boldsymbol{\xi}) d\Omega = -\frac{P_j}{\mu} \quad (\text{A.7})$$

Sendo  $n_i$  o vetor normal unitário em  $\Gamma'$ , direcionado para a região externa ao subdomínio, tem-se, aplicando o teorema da divergência:

$$\int_{\Omega'} F_{j,kk} d\Omega = \oint_{\Gamma'} F_{j,k} n_k d\Gamma = -\frac{P_j}{\mu} \quad (\text{A.8})$$

Particularizando agora,  $\Omega'$  por uma esfera centrada no ponto fonte e utilizando um sistema de coordenadas radial e angulares, definido pela base ortonormal  $\{\hat{\mathbf{e}}_r, \hat{\mathbf{e}}_\theta, \hat{\mathbf{e}}_\phi\}$  ( $\hat{\mathbf{e}}_r \equiv \mathbf{n}$ ), com origem também localizada em  $\boldsymbol{\xi}$ , pode-se escrever para o gradiente de  $F_i$  (na forma expandida):

$$F_{j,k} \equiv F_{j,r} \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r} F_{j,\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{1}{r(\sin \theta)} F_{j,\phi} \hat{\mathbf{e}}_\phi \quad (\text{A.9})$$

Como  $\hat{\mathbf{e}}_\theta \cdot \mathbf{n} = \hat{\mathbf{e}}_\phi \cdot \mathbf{n} = 0$ , conclui-se que as duas última parcelas da equação A.9 resultam em valor nulo quando aplicadas à equação A.8. Desta forma, tem-se que:

$$\oint_{\Gamma'} F_{j,k} n_k d\Gamma = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi F_{j,r} r^2 (\sin \theta) d\phi d\theta = -\frac{P_j}{\mu} \quad (\text{A.10})$$

i.e.,

$$F_{j,r} = -\frac{P_j}{4\pi\mu r^2} \quad (\text{A.11})$$

donde podem-se definir as seguintes funções potenciais:

$$F_j = \frac{P_j}{4\pi\mu r} \quad (\text{A.12})$$

Deve-se atentar agora, ao fato de que a esfera  $\Omega'$  foi definida com um tamanho arbitrário. Assim sendo, o raio  $r$  na equação A.12 pode ser interpretado como a função que fornece a distância entre o ponto,  $\boldsymbol{\xi}$ , e um ponto de campo qualquer,  $\mathbf{X}$ . Escreve-se, portanto,

$$r \equiv r(\boldsymbol{\xi}; \mathbf{X}) \quad (\text{A.13})$$

onde as seguintes propriedades são válidas:

$$r_i = X_i - \xi_i \quad (\text{A.14a})$$

$$r = (r_i r_i)^{1/2} \quad (\text{A.14b})$$

$$r_{,i} \equiv r_{,i} |_{\mathbf{X}} = \frac{\partial r}{\partial X_i} = \frac{\partial r}{\partial r_j} \frac{\partial r_j}{\partial X_i} = \frac{r_i}{r} \quad (\text{A.14c})$$

$$r_{,ij} \equiv r_{,ij} |_{\mathbf{X}} = \left( \frac{r_i}{r} \right)_{,j} = \frac{r_{i,j}}{r} - \frac{r_i}{r^2} r_{,j} = \frac{\delta_{ij}}{r} - \frac{r_{,i} r_{,j}}{r} \quad (\text{A.14d})$$

Das equações A.5 e A.12, obtém-se:

$$G_{j,ii} = \frac{P_j}{4\pi\mu r} \quad (\text{A.15})$$

e, considerando a simetria radial, em torno de  $\boldsymbol{\xi}$ , do problema fundamental, pode-se escrever:

$$G_{j,ii} = \left( \frac{\partial G_j}{\partial r} r_{,i} \right)_{,i} = r_{,ii} \frac{\partial G_j}{\partial r} + \frac{\partial^2 G_j}{\partial r^2} \quad (\text{A.16})$$

Aplicando as equações A.14d e A.15 à A.16, chega-se à seguinte equação não-homogênea de segunda ordem para o vetor de Galerkin:

$$\frac{\partial^2 G_j}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial G_j}{\partial r} = \frac{P_j}{4\pi\mu r} \quad (\text{A.17})$$

Uma solução particular desta equação seria:

$$G_j = \frac{P_j}{8\pi\mu} r \quad (\text{A.18})$$

Substituindo agora, a equação A.18 na equação A.3 e levando em conta as equações 2.11, 2.12 e A.14d, obtém-se um campo de deslocamentos que é solução do problema representado pela equação A.2, i.e.,

$$u_j^* = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} [(3-4\nu)\delta_{ij} + r_{,i}r_{,j}]P_i \quad (\text{A.19})$$

A equação A.19 é a solução fundamental de Kelvin para problemas tridimensionais. Deve-se notar que esta equação fornece a componente de deslocamento na direção  $j$ , num ponto de campo,  $\mathbf{X}$ , em função de uma carga de componentes unitárias ( $P_i = 1$ ;  $i = 1, 2, 3$ ), aplicada no ponto fonte,  $\boldsymbol{\xi}$ . Os tensores de deformações infinitesimais e tensões de Cauchy, em  $\mathbf{X}$ , correspondentes ao campo de deslocamentos da equação A.19 são obtidos a seguir.

Primeiramente, deve-se notar que o gradiente dos deslocamentos é dado por:

$$\begin{aligned} u_{j,k}^* \equiv u_{j,k}^* \Big|_{\mathbf{X}} &= \frac{-r_{,k}}{16\pi\mu(1-\nu)r^2} [(3-4\nu)\delta_{ij} + r_{,i}r_{,j}]P_i \\ &\quad + \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} [r_{ik}r_{,j} + r_{,i}r_{,jk}]P_i \\ &= \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r^2} [\delta_{jk}r_{,i} + \delta_{ik}r_{,j} - 3r_{,i}r_{,j}r_{,k} - (3-4\nu)\delta_{ij}r_{,k}]P_i \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Toma-se então, a parte simétrica da equação A.20 para obter as deformações infinitesimais:

$$\begin{aligned}\epsilon_{jk}^* &= \frac{1}{2}(u_{j,k}^* + u_{k,j}^*) \\ &= \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r^2}[\delta_{jk}r_{,i} + (2\nu - 1)(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{ij}r_{,k}) - 3r_{,i}r_{,j}r_{,k}]P_i\end{aligned}\quad (\text{A.21})$$

As tensões, por sua vez, podem ser obtidas utilizando-se as equações A.1c e 2.10 a 2.12, i.e.,

$$\begin{aligned}\sigma_{jk}^* &= \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}\delta_{jk}\epsilon_{ll}^* + 2\mu\epsilon_{jk}^* \\ &= \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2}[(2\nu - 1)(-\delta_{jk}r_{,i} + \delta_{ik}r_{,j} + \delta_{ij}r_{,k}) - 3r_{,i}r_{,j}r_{,k}]P_i\end{aligned}\quad (\text{A.22})$$

Finalmente, uma expressão para forças de superfície, num ponto de campo arbitrário de uma superfície também arbitrária, orientada por vetor normal unitário  $n_i$ , é estabelecida:

$$\begin{aligned}t_j^* &= \sigma_{jk}^*n_k \\ &= \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2}[(2\nu - 1)(-n_jr_{,i} + n_ir_{,j} + \delta_{ij}n_kr_{,k}) - 3r_{,i}r_{,j}n_kr_{,k}]P_i \\ &= \frac{-1}{8\pi(1-\nu)r^2}\left\{\frac{\partial r}{\partial n}[(1-2\nu)\delta_{ij} + 3r_{,i}r_{,j}] - (1-2\nu)(n_jr_{,i} - n_ir_{,j})\right\}P_i\end{aligned}\quad (\text{A.23})$$

onde

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{r_i}{r}n_i = n_ir_{,i}\quad (\text{A.24})$$

## A.2 Domínios Bidimensionais

Seguem-se, nesta seção, as mesmas ideias descritas para o caso tridimensional. Tomando novamente um subdomínio fechado  $\Omega'$ , delimitado pelo contorno  $\Gamma'$ , que contenha o ponto de aplicação da carga,  $\boldsymbol{\xi}$ , as equações A.7 e A.8 permanecem válidas, considerando que os índices, agora, variam apenas entre 1 e 2.

No caso bidimensional,  $\Omega'$  pode ser particularizado por círculo, centrado no ponto fonte. Adota-se então, um sistema de coordenadas polares, definido pela base ortonormal  $\{\hat{\mathbf{e}}_r \equiv \mathbf{n}, \hat{\mathbf{e}}_\theta\}$ , com a origem em  $\boldsymbol{\xi}$ . Desta forma, pode-se escrever para o

gradiente de  $F_j$ :

$$F_{j,k} \equiv F_{j,r} \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r} F_{j,\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta \quad (\text{A.25})$$

Com isso, aplicando a equação A.25 à A.8, tem-se

$$\oint_{\Gamma'} F_{j,k} n_k d\Gamma = \int_0^{2\pi} F_{j,r} r d\theta = -\frac{P_j}{\mu} \quad (\text{A.26})$$

i.e.,

$$F_{j,r} = -\frac{P_j}{2\pi\mu r} \quad (\text{A.27})$$

donde,

$$F_j = -\frac{P_j}{2\pi\mu} \ln(r) \quad (\text{A.28})$$

sendo  $r \equiv r(\boldsymbol{\xi}; \mathbf{X})$  definido como nas equações A.14.

Agora, das equações A.5 e A.28, obtém-se:

$$G_{j,ii} = -\frac{P_j}{2\pi\mu} \ln(r) \quad (\text{A.29})$$

Novamente, considerando a simetria radial do problema fundamental em torno de  $\boldsymbol{\xi}$ , percebe-se que a equação A.16 também permanece válida para duas dimensões, resguardadas as variações dos índices. Desta forma, aplicando as equações A.14d e A.29 à A.16, chega-se à seguinte equação para o vetor de Galerkin:

$$\frac{\partial^2 G_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial G_j}{\partial r} = -\frac{P_j}{2\pi\mu} \ln(r) \quad (\text{A.30})$$

Da qual uma solução particular seria:

$$G_j = \frac{P_j}{8\pi\mu} r^2 - \frac{P_j}{8\pi\mu} r^2 \ln(r) \quad (\text{A.31})$$

No entanto, pode-se notar, da aplicação da equação A.31 à A.3, que o primeiro termo desta solução resulta num deslocamento de corpo rígido, podendo ser desprezado.

Assume-se, portanto,

$$G_j = -\frac{P_j}{8\pi\mu} r^2 \ln(r) \quad (\text{A.32})$$

Substituindo a equação A.32 na equação A.3 e levando em conta as equações 2.11, 2.12 e A.14d, obtém-se o seguinte campo de deslocamentos como solução do problema fundamental:

$$u_j^* = \frac{-1}{8\pi\mu(1-\bar{\nu})} [(3-4\bar{\nu}) \ln(r) \delta_{ij} - r_{,i} r_{,j}] P_i \quad (\text{A.33})$$

A equação A.33 é a solução fundamental de Kelvin para problemas bidimensionais. Novamente, destaca-se que esta equação fornece a componente de deslocamento na direção  $j$ , num ponto de campo,  $\mathbf{X}$ , em função de uma carga de componentes unitárias ( $P_i = 1$ ;  $i = 1, 2$ ), aplicada no ponto fonte,  $\boldsymbol{\xi}$ .

A seguir, são apresentados, respectivamente, o gradiente do campo de deslocamentos, as deformações infinitesimais, as tensões de Cauchy e as forças de superfície - numa superfície cuja normal é dada por  $n_i$  - todos relativos a um ponto de campo arbitrário,  $\mathbf{X}$ .

$$\begin{aligned} u_{j,k}^* &\equiv u_{j,k}^* \Big|_{\mathbf{X}} = \frac{-1}{8\pi\mu(1-\bar{\nu})} \left[ (3-4\bar{\nu}) \frac{r_{,k}}{r} \delta_{ij} - r_{,ik} r_{,j} - r_{,i} r_{,jk} \right] P_i \\ &= \frac{-1}{8\pi\mu(1-\bar{\nu})r} [(3-4\bar{\nu}) r_{,k} \delta_{ij} - (r_{,j} \delta_{ik} + r_{,i} \delta_{jk}) + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k}] P_i \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{jk}^* &= \frac{1}{2} (u_{j,k}^* + u_{k,j}^*) \\ &= \frac{-1}{8\pi\mu(1-\bar{\nu})r} [(1-2\bar{\nu})(\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{ij} r_{,k}) - \delta_{jk} r_{,i} + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k}] P_i \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{jk}^* &= \frac{2\mu\bar{\nu}}{1-2\bar{\nu}} \delta_{jk} \epsilon_{il}^* + 2\mu \epsilon_{jk}^* \\ &= \frac{-1}{4\pi(1-\bar{\nu})r} [(1-2\bar{\nu})(-\delta_{jk} r_{,i} + \delta_{ik} r_{,j} + \delta_{ij} r_{,k}) + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k}] P_i \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

$$\begin{aligned} t_j^* &= \sigma_{jk}^* n_k \\ &= \frac{-1}{4\pi(1-\bar{\nu})r} [(1-2\bar{\nu})(-n_j r_{,i} + n_i r_{,j} + \delta_{ij} n_k r_{,k}) + 2r_{,i} r_{,j} n_k r_{,k}] P_i \\ &= \frac{-1}{4\pi(1-\bar{\nu})r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\bar{\nu}) \delta_{ij} + 2r_{,i} r_{,j}] - (1-2\bar{\nu})(n_j r_{,i} - n_i r_{,j}) \right\} P_i \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

onde a equação A.24 permanece válida.

## A.3 Síntese

Tomando separadamente cada componente da carga  $P_i$ , obtêm-se os tensores ponderadores presentes nas equações integrais para deslocamentos, tanto em pontos internos como no contorno, apresentados no capítulo 4. Aqui, expressões explícitas para tais tensores são listadas a partir da simples comparação entre a equação 4.14 e as equações A.19 a A.23 (para domínios tridimensionais) ou A.33 a A.37 (para domínios bidimensionais).

### A.3.1 Domínios Tridimensionais

$$u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} [(3-4\nu)\delta_{ij} + r_{,i}r_{,j}] \quad (\text{A.38})$$

$$t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{ij} + 3r_{,i}r_{,j}] - (1-2\nu)(n_j r_{,i} - n_i r_{,j}) \right\} \quad (\text{A.39})$$

$$\sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} [(2\nu-1)(-\delta_{jk}r_{,i} + \delta_{ik}r_{,j} + \delta_{ij}r_{,k}) - 3r_{,i}r_{,j}r_{,k}] \quad (\text{A.40})$$

### A.3.2 Domínios Bidimensionais

$$u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) = \frac{-1}{8\pi\mu(1-\bar{\nu})} [(3-4\bar{\nu})\ln(r)\delta_{ij} - r_{,i}r_{,j}] \quad (\text{A.41})$$

$$t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) = \frac{-1}{4\pi(1-\bar{\nu})r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\bar{\nu})\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j}] - (1-2\bar{\nu})(n_j r_{,i} - n_i r_{,j}) \right\} \quad (\text{A.42})$$

$$\sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) = \frac{-1}{4\pi(1-\bar{\nu})r} [(1-2\bar{\nu})(-\delta_{jk}r_{,i} + \delta_{ik}r_{,j} + \delta_{ij}r_{,k}) + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k}] \quad (\text{A.43})$$

# Apêndice B

## Derivadas das Soluções Fundamentais de Kelvin em Relação ao Ponto Fonte

Na dedução das equações integrais para deformações em pontos internos, como relatado no capítulo 4, é necessário realizar a derivação dos tensores provenientes da solução do problema fundamental de Kelvin, em relação ao ponto fonte,  $\boldsymbol{\xi}$ . Portanto, apresentam-se aqui tais derivadas, referentes às equações A.38 a A.43 (apêndice A), bem como expressões explícitas para os tensores definidos nas equações 4.24, 4.25 e 4.31.

Deve-se, porém, destacar inicialmente os seguintes resultados, provenientes das equações A.14:

$$r_{,i} \Big|_{\boldsymbol{\xi}} = \frac{\partial r}{\partial \xi_i} = \frac{\partial r}{\partial r_j} \frac{\partial r_j}{\partial \xi_i} = -\frac{r_i}{r} = -r_{,i} \quad (\text{B.1a})$$

$$(r_{,i} \Big|_{\mathbf{x}})_{,j} \Big|_{\boldsymbol{\xi}} \equiv (r_{,i})_{,j} \Big|_{\boldsymbol{\xi}} = \left( \frac{r_i}{r} \right)_{,j} \Big|_{\boldsymbol{\xi}} = -\frac{\delta_{ij}}{r} + \frac{r_{,i} r_{,j}}{r} = -r_{,ij} \quad (\text{B.1b})$$

A seguir, domínios tri e bidimensionais são tratados de forma separada.

## B.1 Domínios Tridimensionais

Utilizando as equações B.1, obtêm-se, respectivamente, das equações A.38 a A.40, os seguintes resultados:

$$u_{ij,k}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})|_{\boldsymbol{\xi}} = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r^2}[(3-4\nu)\delta_{ij}r_{,k} - (\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}) + 3r_{,i}r_{,j}r_{,k}] \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{aligned} t_{ij,k}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})|_{\boldsymbol{\xi}} = & \frac{-1}{8\pi(1-\nu)r^3} \left\{ n_i(1-2\nu)(3r_{,j}r_{,k} - \delta_{jk}) \right. \\ & + n_j(1-2\nu)(\delta_{ik} - 3r_{,i}r_{,k}) - n_k[(1-2\nu)\delta_{ij} + 3r_{,i}r_{,j}] \\ & \left. + 3\frac{\partial r}{\partial n}[(1-2\nu)\delta_{ij}r_{,k} - \delta_{jk}r_{,i} - \delta_{ik}r_{,j} + 5r_{,i}r_{,j}r_{,k}] \right\} \quad (\text{B.3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ijk,l}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})|_{\boldsymbol{\xi}} = & \frac{-1}{8\pi(1-\nu)r^3} [3(1-2\nu)(\delta_{ik}r_{,j}r_{,l} + \delta_{ij}r_{,k}r_{,l} \\ & - \delta_{jk}r_{,i}r_{,l}) + (1-2\nu)(\delta_{jk}\delta_{il} - \delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{ik}\delta_{jl}) \\ & - 3(\delta_{il}r_{,j}r_{,k} + \delta_{jl}r_{,i}r_{,k} + \delta_{kl}r_{,i}r_{,j}) + 15r_{,i}r_{,j}r_{,k}r_{,l}] \quad (\text{B.4}) \end{aligned}$$

Com isso, expressões explícitas para os tensores apresentados nas equações 4.24, 4.25 e 4.31 são dadas por:

$$\begin{aligned} u_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) &= \frac{1}{2} [u_{ik,j}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})|_{\boldsymbol{\xi}} + u_{jk,i}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})|_{\boldsymbol{\xi}}] \\ &= \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r^2} [(1-2\nu)(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}) - \delta_{ij}r_{,k} + 3r_{,i}r_{,j}r_{,k}] \quad (\text{B.5}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) &= \frac{1}{2} [t_{ik,j}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})|_{\boldsymbol{\xi}} + t_{jk,i}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})|_{\boldsymbol{\xi}}] \\ &= \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^3} \left\{ (1-2\nu)[n_i\delta_{jk} + n_j\delta_{ik} - n_k\delta_{ij} + 3r_{,i}r_{,j}n_k] \right. \\ & \quad + 3\frac{\partial r}{\partial n} [\nu(r_{,j}\delta_{ik} + r_{,i}\delta_{jk}) + r_{,k}\delta_{ij} - 5r_{,i}r_{,j}r_{,k}] \\ & \quad \left. + 3\nu(n_jr_{,i}r_{,k} + n_i r_{,j}r_{,k}) \right\} \quad (\text{B.6}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{ijkl}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) &= \frac{1}{2} [\sigma_{ikl,j}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})|_{\boldsymbol{\xi}} + \sigma_{jkl,i}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})|_{\boldsymbol{\xi}}] \\
&= \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^3} \{ (1-2\nu)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{jk}\delta_{il} - \delta_{ij}\delta_{kl}) \\
&\quad + 3\nu(\delta_{il}r_{,j}r_{,k} + \delta_{ik}r_{,j}r_{,l} + \delta_{jk}r_{,i}r_{,l} + \delta_{jl}r_{,i}r_{,k}) \\
&\quad + 3[(1-2\nu)\delta_{kl}r_{,i}r_{,j} + \delta_{ij}r_{,k}r_{,l}] - 15r_{,i}r_{,j}r_{,k}r_{,l} \}
\end{aligned} \tag{B.7}$$

## B.2 Domínios Bidimensionais

Considerando agora as equações A.41 a A.43, obtêm-se:

$$u_{ij,k}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})|_{\boldsymbol{\xi}} = \frac{1}{8\pi\mu(1-\bar{\nu})r} [(3-4\bar{\nu})\delta_{ij}r_{,k} - (\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}) + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k}] \tag{B.8}$$

$$\begin{aligned}
t_{ij,k}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})|_{\boldsymbol{\xi}} &= \frac{-1}{4\pi(1-\bar{\nu})r^2} \left\{ n_i(1-2\bar{\nu})(2r_{,j}r_{,k} - \delta_{jk}) \right. \\
&\quad + n_j(1-2\bar{\nu})(\delta_{ik} - 2r_{,i}r_{,k}) - n_k[(1-2\bar{\nu})\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j}] \\
&\quad \left. + 2\frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\bar{\nu})\delta_{ij}r_{,k} - \delta_{jk}r_{,i} - \delta_{ik}r_{,j} + 4r_{,i}r_{,j}r_{,k}] \right\}
\end{aligned} \tag{B.9}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{ijk,l}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})|_{\boldsymbol{\xi}} &= \frac{-1}{4\pi(1-\bar{\nu})r^2} [2(1-2\bar{\nu})(\delta_{ik}r_{,j}r_{,l} + \delta_{ij}r_{,k}r_{,l} \\
&\quad - \delta_{jk}r_{,i}r_{,l}) + (1-2\bar{\nu})(\delta_{jk}\delta_{il} - \delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{ik}\delta_{jl}) \\
&\quad - 2(\delta_{il}r_{,j}r_{,k} + \delta_{jl}r_{,i}r_{,k} + \delta_{kl}r_{,i}r_{,j}) + 8r_{,i}r_{,j}r_{,k}r_{,l}]
\end{aligned} \tag{B.10}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}
u_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) &= \frac{1}{2} [u_{ik,j}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})|_{\boldsymbol{\xi}} + u_{jk,i}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})|_{\boldsymbol{\xi}}] \\
&= \frac{1}{8\pi\mu(1-\bar{\nu})r} [(1-2\bar{\nu})(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}) - \delta_{ij}r_{,k} + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k}]
\end{aligned} \tag{B.11}$$

$$\begin{aligned}
t_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) &= \frac{1}{2} [t_{ik,j}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})|_{\boldsymbol{\xi}} + t_{jk,i}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})|_{\boldsymbol{\xi}}] \\
&= \frac{1}{4\pi(1-\bar{\nu})r^2} \left\{ (1-2\bar{\nu})[n_i\delta_{jk} + n_j\delta_{ik} - n_k\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j}n_k] \right. \\
&\quad + 2\frac{\partial r}{\partial n} [\bar{\nu}(r_{,j}\delta_{ik} + r_{,i}\delta_{jk}) + r_{,k}\delta_{ij} - 4r_{,i}r_{,j}r_{,k}] \\
&\quad \left. + 2\bar{\nu}(n_jr_{,i}r_{,k} + n_i r_{,j}r_{,k}) \right\}
\end{aligned} \tag{B.12}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{ijkl}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) &= \frac{1}{2} [\sigma_{ikl,j}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})|_{\boldsymbol{\xi}} + \sigma_{jkl,i}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})|_{\boldsymbol{\xi}}] \\
&= \frac{1}{4\pi(1-\bar{\nu})r^2} \{ (1-2\bar{\nu})(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{jk}\delta_{il} - \delta_{ij}\delta_{kl}) \\
&\quad + 2\bar{\nu}(\delta_{il}r_{,j}r_{,k} + \delta_{ik}r_{,j}r_{,l} + \delta_{jk}r_{,i}r_{,l} + \delta_{jl}r_{,i}r_{,k}) \\
&\quad + 2[(1-2\bar{\nu})\delta_{kl}r_{,i}r_{,j} + \delta_{ij}r_{,k}r_{,l}] - 8r_{,i}r_{,j}r_{,k}r_{,l} \}
\end{aligned} \tag{B.13}$$

# Apêndice C

## Termos Livres para Equação Integral de Deformações em Pontos Internos

Soluções analíticas para a integral da equação 4.33, assim como expressões para os termos livres definidos na equação 4.34, são apresentadas aqui. Para tal, faz-se referência à figura 4.4. Deve-se notar inicialmente que, independentemente da dimensão do domínio, a seguinte expressão é válida para pontos na superfície  $\bar{\Gamma}_\varepsilon$ :

$$r_{,i} = \frac{r_i}{r} = \bar{n}_i \quad (\text{C.1})$$

onde  $\bar{n}_i$  são as componentes do vetor normal unitário e externo à  $\bar{\Gamma}_\varepsilon$  e  $r$  refere-se à distância entre um ponto de campo  $\mathbf{X}$  (aqui considerado sobre  $\bar{\Gamma}_\varepsilon$ ) e o ponto fonte  $\boldsymbol{\xi}$ , como definido nas equações A.14 do apêndice A.

Domínios tri e bidimensionais são tratados em separado a seguir.

### C.1 Domínios Tridimensionais

Neste caso,  $\bar{\Gamma}_\varepsilon$  representa uma superfície esférica. Adotando assim, um sistema de coordenadas esféricas, com origem em  $\boldsymbol{\xi}$  e coordenadas angulares  $\theta$  ( $\in [0, 2\pi]$ ) e  $\phi$  ( $\in [0, \pi]$ ), as componentes do vetor unitário normal à superfície podem ser expressas

por:

$$\bar{n}_1 = (\text{sen } \theta)(\text{sen } \phi); \quad \bar{n}_2 = (\text{cos } \theta)(\text{sen } \phi); \quad \bar{n}_3 = \text{cos } \phi \quad (\text{C.2})$$

Os seguintes resultados podem, então, ser verificados:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \bar{n}_i \bar{n}_j (\text{sen } \phi) d\phi d\theta = \frac{4\pi}{3} \delta_{ij} \quad (\text{C.3})$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \bar{n}_i \bar{n}_j \bar{n}_k \bar{n}_l (\text{sen } \phi) d\phi d\theta = \frac{4\pi}{15} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (\text{C.4})$$

Aplicando agora as equações A.40 e C.1 à equação 4.33, obtém-se:

$$\begin{aligned} F_{ijkl}^\epsilon &= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} \sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \bar{n}_l(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) \\ &= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[ \frac{1}{8\pi(1-\nu)\epsilon^2} \right] [(1-2\nu)(\delta_{ik}\bar{n}_j + \delta_{ij}\bar{n}_k - \delta_{jk}\bar{n}_i) \right. \\ &\quad \left. + 3\bar{n}_i\bar{n}_j\bar{n}_k] \bar{n}_l \epsilon^2 (\text{sen } \phi) d\phi d\theta \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Introduzindo os resultados apresentados nas equações C.3 e C.4, a equação C.5 pode ser resolvida na seguinte forma:

$$F_{ijkl}^\epsilon = \frac{1}{15(1-\nu)} [(4-5\nu)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{ij}\delta_{kl}) - (1-5\nu)\delta_{il}\delta_{jk}] \quad (\text{C.6})$$

Com isso, o termo livre definido na equação 4.34, no caso de domínios tridimensionais, fica dado por:

$$\begin{aligned} F_{ijkl}^{\epsilon\epsilon} &= \frac{1}{2} [F_{iklj}^\epsilon + F_{jkli}^\epsilon] \\ &= \frac{1}{15(1-\nu)} [(4-5\nu)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - (1-5\nu)\delta_{ij}\delta_{kl}] \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

## C.2 Domínios Bidimensionais

Num domínio bidimensional,  $\bar{\Gamma}_\epsilon$  corresponde a uma circunferência. Adota-se então, um sistema de coordenadas polares com origem em  $\boldsymbol{\xi}$ , de forma que  $\theta$  ( $\in [0, 2\pi]$ ) representa a coordenada angular. Com isso, tem-se:

$$\bar{n}_1 = \text{sen } \theta; \quad \bar{n}_2 = \text{cos } \theta \quad (\text{C.8})$$

Desta forma, os seguintes resultados podem ser verificados:

$$\int_0^{2\pi} \bar{n}_i \bar{n}_j d\theta = \delta_{ij} \quad (\text{C.9})$$

$$\int_0^{2\pi} \bar{n}_i \bar{n}_j \bar{n}_k \bar{n}_l d\theta = \frac{\pi}{4} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (\text{C.10})$$

Aplicando agora as equações A.43 e C.1 à equação 4.33, obtém-se:

$$\begin{aligned} F_{ijkl}^\epsilon &= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} \sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \bar{n}_l(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) \\ &= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{4\pi(1-\bar{\nu})\epsilon} \right] [(1-2\bar{\nu})(\delta_{ik}\bar{n}_j + \delta_{ij}\bar{n}_k - \delta_{jk}\bar{n}_i) \right. \\ &\quad \left. + 2\bar{n}_i\bar{n}_j\bar{n}_k] \bar{n}_l \epsilon d\theta \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Utilizando os resultados apresentados nas equações C.9 e C.10, a equação C.11 pode ser resolvida na seguinte forma:

$$F_{ijkl}^\epsilon = \frac{1}{8(1-\bar{\nu})} [(3-4\bar{\nu})(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{ij}\delta_{kl}) - (1-4\bar{\nu})\delta_{il}\delta_{jk}] \quad (\text{C.12})$$

Finalmente, o termo livre definido na equação 4.34, no caso de domínios bidimensionais, fica dado por:

$$\begin{aligned} F_{ijkl}^{\epsilon\epsilon} &= \frac{1}{2} [F_{iklj}^\epsilon + F_{jkli}^\epsilon] \\ &= \frac{1}{8(1-\bar{\nu})} [(3-4\bar{\nu})(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - (1-4\bar{\nu})\delta_{ij}\delta_{kl}] \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

# Apêndice D

## Métodos de Controle para a Estratêgia de Solução Não-Linear

A principal vantagem da estratêgia de solução descrita na seção 5.2 está associada a sua generalidade, especialmente no que tange à utilização de diferentes métodos de controle para solução não-linear numa única estrutura numérica.

Métodos de controle são equações que determinam a correção do fator de carga,  $\delta\lambda_j^i$ , a cada iteração do método de Newton. Dependendo principalmente do comportamento do material, um determinado método de controle pode apresentar vantagens, desvantagens ou, até mesmo, limitações. Por esta razão, uma variedade deles foi desenvolvida ao longo das últimas décadas. A tabela D.1 apresenta alguns destes métodos, onde o vetor  $\{U\}$  representa a coleção das componentes de deslocamentos em todos os pontos de colocação, sejam eles internos ou localizados no contorno. A partir das equações 5.71 e 5.74, a seguinte decomposição para a correção iterativa deste vetor pode ser considerada:

$$\{\delta U\}_j = \delta\lambda_j^i \{U^P\}_j + \{\delta U^Q\}_j \quad (\text{D.1})$$

onde o índice  $j$  representa iterações num incremento de carga  $i$ , cujo índice foi omitido para uma maior clareza na apresentação das equações.

**Tabela D.1:** Diferentes tipos de métodos de controle.

Método de Controle	$\delta\lambda_j$ para $j = 1$	$\delta\lambda_j$ para $j > 1$
Carga	$\delta\lambda_1 = \text{constante}$	$\delta\lambda_j = 0$
Deslocamento	$\frac{\delta U_1^k}{U_1^{P,k}}$	$-\frac{\delta U_j^{Q,k}}{U_j^{P,k}}$
Comprimento de arco	$\pm \frac{\Delta S}{\sqrt{\{U^P\}_1^T \cdot \{U^P\}_1}}$	$-\frac{\{\Delta U\}_1^T \cdot \{\delta U^Q\}_j}{\{\Delta U\}_1^T \cdot \{U^P\}_j}$ $-\frac{\{\Delta U\}_{j-1}^T \cdot \{\delta U^Q\}_j}{\{\Delta U\}_{j-1}^T \cdot \{U^P\}_j}$
Deslocamento generalizado	$\delta\lambda_1^1 \sqrt{\frac{\{U^P\}_1^{1,T} \cdot \{U^P\}_1^1}{\{U^P\}_1^{i-1,T} \cdot \{U^P\}_1^{i-1}}}$	$-\frac{\{U^P\}_1^{i-1,T} \cdot \{\delta U^Q\}_j^i}{\{U^P\}_1^{i-1,T} \cdot \{U^P\}_j^{i-1}}$
Deformações	$\frac{\Delta e}{\{C^\Omega\}^T \cdot \{\epsilon^P\}_1}$	$-\frac{\{C^\Omega\}^T \cdot \{\delta \epsilon^Q\}_j}{\{C^\Omega\}^T \cdot \{\epsilon^P\}_j}$

Trajetória cilíndrica:  
equação quadrática

No método de controle de carga, o incremento do fator de carga é pré-definido e totalmente aplicado no início de cada passo incremental, sem nenhuma variação durante o processo iterativo. Este método, apesar da sua simplicidade, não pode ser empregado a materiais que apresentam amolecimento em suas leis constitutivas, visto que um dado patamar de tensão pode estar associado a diferentes valores de deformação.

Quando uma componente específica de deslocamento (de um determinado ponto), identificada por  $k$  na tabela D.1, é adotada para definir o tamanho de cada passo incremental, tem-se o método de controle de deslocamento, desenvolvido por Batoz e Dhett (1979). Se a componente de controle é corretamente escolhida, o método pode ser aplicado a materiais que apresentam amolecimento. Entretanto, se a trajetória de equilíbrio do ponto adotado apresentar retorno (*snap-back*) para a direção

de controle escolhida, instabilidades na análise numérica serão verificadas. Por essa razão, foram desenvolvidos métodos de controle de comprimento de arco, onde combinações entre as componentes de deslocamentos e as correções iterativas do fator de carga são controladas.

Nas expressões dos métodos de controle de arco apresentadas na tabela D.1,  $\Delta S$  é uma constante que limita o valor da referida combinação de deslocamentos e correção no fator de carga e, portanto, estabelece o tamanho do incremento. Já o termo  $\{\Delta U\}_j$  representa o valor acumulado das componentes de deslocamentos dentro do passo de carga atual, até a iteração  $j$ . Três variantes do método foram destacadas na tabela D.1. Na primeira, como utilizado por Ricks (1972, 1979), as correções iterativas seguem uma trajetória ortogonal à tangente da primeira iteração do passo. No segundo caso, proposto originalmente por Ramm (1981), a trajetória é perpendicular à tangente da iteração anterior. Por fim, na terceira variante, desenvolvida por Crisfield (1981, 1983), uma trajetória de iteração cilíndrica é obtida a partir da solução de uma equação algébrica do segundo grau.

Com o objetivo de automatizar o ajuste do tamanho do passo, Yang e Shieh (1990) propuseram o método de controle de deslocamento generalizado, que relaciona as componentes de deslocamentos entre dois incrementos consecutivos, referenciados por  $i$  e  $i - 1$  nas equações da tabela D.1.

No método de controle de deformações, baseado no trabalho de Chen e Schreyer (1990), uma combinação linear de determinadas componentes de deformação é adotada na definição do tamanho do passo incremental. Nas equações da tabela D.1,  $\Delta e$  é um valor escalar limite para tal combinação e  $\{C^\Omega\}$  é um vetor de ponderação que estabelece a influência de cada componente.

Uma descrição mais detalhada dos métodos apresentados aqui, incluindo deduções para as expressões da tabela D.1, pode ser vista em Fuina (2004).

## Apêndice E

# Modificações nas Matrizes da Formulação Implícita Associadas ao Algoritmo de Geração Automática de Células

Quando novas células são adicionadas ao modelo numérico, os vetores referentes às taxas de deslocamentos, deformações e campos iniciais, todos associados a pontos internos, são ampliados pela introdução dos respectivos subvetores:  $\{\dot{u}_N^\Omega\}$ ,  $\{\dot{\epsilon}_N\}$  e  $\{\dot{\epsilon}_N^\varphi\}$ . Com isso, as equações 5.47, 5.48 e 5.49 assumem as seguintes formas:

$$\begin{Bmatrix} \dot{u}^\Omega \\ \dot{u}_N^\Omega \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A^u \\ a^u \end{bmatrix} \{ \dot{x} \} + \begin{bmatrix} B^u \\ b^u \end{bmatrix} \{ \dot{y} \} + \begin{bmatrix} Q_{\epsilon^\varphi}^u & q_C^u \\ q_R^u & q_{RC}^u \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}^\varphi \\ \dot{\epsilon}_N^\varphi \end{Bmatrix} \quad (\text{E.1})$$

$$[A]\{ \dot{x} \} = [B]\{ \dot{y} \} + \begin{bmatrix} Q_{\epsilon^\varphi} & q_{\epsilon^\varphi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}^\varphi \\ \dot{\epsilon}_N^\varphi \end{Bmatrix} \quad (\text{E.2})$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\epsilon} \\ \dot{\epsilon}_N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A^\epsilon \\ a^\epsilon \end{bmatrix} \{ \dot{x} \} + \begin{bmatrix} B^\epsilon \\ b^\epsilon \end{bmatrix} \{ \dot{y} \} + \begin{bmatrix} Q_{\epsilon^\varphi}^\epsilon & q_C^\epsilon \\ q_R^\epsilon & q_{RC}^\epsilon \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}^\varphi \\ \dot{\epsilon}_N^\varphi \end{Bmatrix} \quad (\text{E.3})$$

onde os coeficientes das novas submatrizes são obtidos conforme discriminado na tabela E.1.

**Tabela E.1:** Construção das submatrizes.

Submatrizes	Ponto fonte	Região de integração
$[q_{\epsilon^\varphi}]$	Ptos. contorno	Células novas
$[q_C^u], [q_C^\epsilon]$	Ptos. internos antigos	Células novas
$[q_R^u], [q_R^\epsilon]$	Ptos. internos novos	Células antigas
$[q_{RC}^u], [q_{RC}^\epsilon]$	Ptos. internos novos	Células novas
$[a^u], [b^u], [a^\epsilon], [b^\epsilon]$	Ptos. internos novos	Elementos do contorno

A partir daí, as matrizes apresentadas nas equações 5.51, 5.54 e 5.55 são também ampliadas, como detalhado a seguir. A exceção seria a matriz  $[N]$ , da equação 5.51, que permanece inalterada.

$$\left[ M_{\epsilon^\varphi} \mid m_{\epsilon^\varphi} \right] = [A]^{-1} \left[ Q_{\epsilon^\varphi} \mid q_{\epsilon^\varphi} \right] \Rightarrow [m_{\epsilon^\varphi}] = [A]^{-1}[q_{\epsilon^\varphi}] \quad (\text{E.4})$$

$$\begin{bmatrix} N^u \\ n^u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^u \\ a^u \end{bmatrix} [A]^{-1}[B] + \begin{bmatrix} B^u \\ b^u \end{bmatrix} \Rightarrow [n^u] = [a^u][A]^{-1}[B] + [b^u] \quad (\text{E.5})$$

$$\begin{bmatrix} M_{\epsilon^\varphi}^u \mid m_C^u \\ m_R^u \mid m_{RC}^u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^u \\ a^u \end{bmatrix} [A]^{-1} \left[ Q_{\epsilon^\varphi} \mid q_{\epsilon^\varphi} \right] + \begin{bmatrix} Q_{\epsilon^\varphi}^u \mid q_C^u \\ q_R^u \mid q_{RC}^u \end{bmatrix} \quad (\text{E.6})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} [m_C^u] = [A^u][A]^{-1}[q_{\epsilon^\varphi}] + [q_C^u] \\ [m_R^u] = [a^u][A]^{-1}[Q_{\epsilon^\varphi}] + [q_R^u] \\ [m_{RC}^u] = [a^u][A]^{-1}[q_{\epsilon^\varphi}] + [q_{RC}^u] \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} N^\epsilon \\ n^\epsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^\epsilon \\ a^\epsilon \end{bmatrix} [A]^{-1}[B] + \begin{bmatrix} B^\epsilon \\ b^\epsilon \end{bmatrix} \Rightarrow [n^\epsilon] = [a^\epsilon][A]^{-1}[B] + [b^\epsilon] \quad (\text{E.7})$$

$$\left[ \begin{array}{c|c} M_{\epsilon^\varphi}^\epsilon & m_C^\epsilon \\ \hline m_R^\epsilon & m_{RC}^\epsilon \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} A^\epsilon \\ a^\epsilon \end{array} \right] [A]^{-1} \left[ \begin{array}{c|c} Q_{\epsilon^\varphi} & q_{\epsilon^\varphi} \\ \hline \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c|c} Q_{\epsilon^\varphi}^\epsilon & q_C^\epsilon \\ \hline q_R^\epsilon & q_{RC}^\epsilon \end{array} \right] \quad (\text{E.8})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} [m_C^\epsilon] = [A^\epsilon][A]^{-1}[q_{\epsilon^\varphi}] + [q_C^\epsilon] \\ [m_R^\epsilon] = [a^\epsilon][A]^{-1}[Q_{\epsilon^\varphi}] + [q_R^\epsilon] \\ [m_{RC}^\epsilon] = [a^\epsilon][A]^{-1}[q_{\epsilon^\varphi}] + [q_{RC}^\epsilon] \end{cases}$$

Nas implementações numéricas, os coeficientes pré-existentes dessas matrizes não precisam ser recalculados. Quando uma nova célula é gerada, basta que elas sejam ampliadas com as submatrizes apresentadas nas equações E.4 a E.8.

# Referências Bibliográficas

- Aliabadi, M. H., 2002. *The boundary element method: volume 2 - applications in solids and structures*. John Wiley & Sons, Chichester.
- Anacleto, F. E. S., Ribeiro, T. S. A., Ribeiro, G. O., Pitangueira, R. L. S. e Penna, S. S., 2013. ‘An object-oriented tridimensional self-regular boundary element method implementation’. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 37, pp. 1276–1284.
- Arrea, M. e Ingraffea, A. R., (1982), Mixed-mode crack propagation in mortar and concrete, Technical report, 81-13, Department of Structural Engineering, Cornell University, Ithaca, USA.
- Barenblatt, G. I., 1962. ‘The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture’. *Advances in Applied Mechanics*, vol. 7, pp. 55–129.
- Batoz, J. L. e Dhatt, G., 1979. ‘Incremental displacement algorithms for nonlinear problems’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 14, pp. 1262–1267.
- Bažant, Z. P., Belytschko, T. B. e Chang, T.-P., 1984. ‘Continuum theory of strain-softening’. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 110, pp. 1666–1692.
- Bažant, Z. P. e Oh, B. H., 1983. ‘Crack band theory for fracture of concrete’. *Matériaux et Constructions*, vol. 16, pp. 155–177.
- Benallal, A., Botta, A. S. e Venturini, W. S., 2006. ‘On the description of localization and failure phenomena by the boundary element method’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, pp. 5833–5856.

- Benallal, A., Fudoli, C. A. e Venturini, W. S., 2002. 'An implicit BEM formulation for gradient plasticity and localization phenomena'. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 53, pp. 1853–1869.
- Bonnet, M. e Mukherjee, S., 1996. 'Implicit BEM formulations for usual and sensitivity problems in elasto-plasticity using the consistent tangent operator concept'. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 33(30), pp. 4461–4480.
- Bonnet, M., Poon, H. e Mukherjee, S., 1998. 'Hypersingular formulation for boundary strain evaluation in the context of a CTO-based implicit BEM scheme for small strain elasto-plasticity'. *International Journal of Plasticity*, vol. 14, pp. 1033–1058.
- Botta, A. S., Venturini, W. S. e Benallal, A., 2005. 'BEM applied to damage models emphasizing localization and associated regularization techniques'. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 29, pp. 814–827.
- Brebbia, C. A., Telles, J. C. F. e Wrobel, L. C., 1984. *Boundary element techniques - theory and applications in engineering*. Springer-Verlag, Berlin.
- Bui, H. D., 1978. 'Some remarks about the formulation of three-dimensional thermoelastoplastic problems by integral equations'. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 14, pp. 935–939.
- Carneiro, F. L. e Barcellos, A., (1949), Résistance a la traction des bétons, in 'RI-LEM Bull. 13. Int. Assoc. Test. Res. Lab. Mater. Struct.', pp. 98–125.
- Carol, I., Rizzi, E. e Willam, K., 1994. 'A unified theory of elastic degradation and damage based on a loading surface'. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 31(20), pp. 2835–2865.
- Chaves, E. A., 2003. A three dimensional setting for strong discontinuities modelling in failure mechanics. Tese de Doutorado, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona.
- Chen, Z. e Schreyer, H. L., 1990. 'A numerical solution scheme for softening problems involving total strain control'. *Computers & Structures*, vol. 37, pp. 1043–1050.

- Coleman, B. D. e Gurtin, M. E., 1967. ‘Thermodynamics with internal state variables’. *The Journal of Chemical Physics*, vol. 47(2), pp. 597–613.
- Cope, R. J., Rao, P. V., Clark, L. A. e Norris, P., (1980), Modelling of reinforced concrete behaviour for finite element analysis of bridgeslabs, *in* C. Taylor, E. Hinton e D. R. J. Oden, eds, ‘Numerical Methods for Nonlinear Problems 1’, Pineridge Press, Swansea, pp. 457–470. Citado por Chaves (2003).
- Crisfield, M. A., 1981. ‘A fast incremental-iterative solution procedure that handles snap-through’. *Computers & Structures*, vol. 13, pp. 55–82.
- Crisfield, M. A., 1983. ‘An arc length method including line searches and accelerations’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 19, pp. 1269–1289.
- de Borst, R., 1991. ‘Simulation of strain localization: A reappraisal of the Cosserat continuum’. *Engineering Computations*, vol. 8, pp. 317–332.
- de Borst, R. e Muhlhaus, H.-B., 1992. ‘Gradient-dependent plasticity: Formulation and algorithmic aspects’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 35, pp. 521–539.
- Dugdale, D., 1960. ‘Yielding of steel sheets containing slits’. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 8, pp. 100–108.
- Dvorkin, E., Cuitino, A. e Gioia, G., 1990. ‘Finite elements with displacement embedded localization lines insensitive to mesh sizes and distortions’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 30, pp. 541–564. Citado por Samaniego (2002).
- Fuina, J. S., 2004. Métodos de controle de deformações para análise não-linear de estruturas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Gálvez, J. C., Elices, M., Guinea, G. V. e Planas, J., 1998. ‘Mixed mode fracture of concrete under proportional and nonproportional loading’. *International Journal of Fracture*, vol. 94, pp. 267–284.

- Gao, X.-W. e Davies, T. G., 2000. ‘An effective boundary element algorithm for 2D and 3D elastoplastic problems’. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 37, pp. 4987–5008.
- Griffith, A. A., 1921. ‘The phenomena of rupture and flow in solids’. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, vol. 221, pp. 163–198.
- Guiggiani, M. e Casalini, P., 1987. ‘Direct computation of Cauchy principal value integrals in advanced boundary elements’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 24, pp. 1711–1720.
- Hatzigeorgiou, G. D. e Beskos, D. E., 2002. ‘Static analysis of 3D damaged solids and structures by BEM’. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 26, pp. 521–526.
- Hillerborg, A., Modeer, M. e Petersson, P. E., 1976. ‘Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements’. *Cement and Concrete Research*, vol. 6, pp. 773–782.
- Huang, Q. e Cruse, T. A., 1993. ‘Some notes on singular integral techniques in boundary element analysis’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 36, pp. 2643–2659.
- Ingraffea, A. R. e Saouma, V., (1985), Numerical modeling of discrete crack propagation in reinforced and plain concrete, in G. C. Sih e A. D. Tommaso, eds, ‘Fracture Mechanics of Concrete. Structural Application and Numerical Calculation’, Martinus Nijhoff, Dordrecht, pp. 171–225. Citado por Chaves (2003).
- Jirásek, M., 2007. ‘Mathematical analysis of strain localization’. *Revue Européenne de Génie Civil*, vol. 11, pp. 977–991.
- Klisinski, M., Runesson, K. e Sture, S., 1991. ‘Finite element with inner softening band’. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 117, pp. 575–587.
- Lachat, J. C. e Watson, J. O., 1976. ‘Effective numerical treatment of boundary integral equations - a formulation for three dimensional elastostatics’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 10, pp. 991–1005.

- Lemaitre, J. e Chaboche, J. L., 1990. *Mechanics of solid materials*. Cambridge University Press, Cambridge. Citado por Penna (2011).
- Lin, F.-B., Yan, G., Bažant, Z. P. e Ding, F., 2002. ‘Non-local strain softening model of quasi-brittle materials using boundary element method’. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 26, pp. 417–424.
- Maia, A. F., Anacleto, F. E., Ribeiro, G. O. e Pitangueira, R. L. S., (2013), Analysis of Reissner’s plate with boundary element method, *in* Z. J. G. N. D. Prado, ed., ‘Proceedings of the XXXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering - CILAMCE’, Pirenópolis, GO, Brasil.
- Manzoli, O. L., Pedrini, R. A. e Venturini, W. S., (2009), Strong discontinuity analysis in solid mechanics using boundary element method, *in* E. J. Spoultzakis e M. H. Aliabadi, eds, ‘Avances in Boundary Element Techniques X’, Atenas, Grécia, pp. 323–329.
- Manzoli, O. L. e Shing, P. B., 2006. ‘A general technique to embed non-uniform discontinuities into standard solid finite elements’. *Computers & Structures*, vol. 84, pp. 742–757.
- Manzoli, O. L. e Venturini, W. S., 2004. ‘Uma formulação do MEC para simulação numérica de descontinuidades fortes’. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, vol. 20(3), pp. 215–234.
- Manzoli, O. L. e Venturini, W. S., 2007. ‘An implicit BEM formulation to model strong discontinuities’. *Computational Mechanics*, vol. 40, pp. 901–909.
- Manzoli, O., Oliver, J. e Cervera, M., 1998, ‘Localización de deformación: Análisis y simulación numérica de discontinuidades en mecánica de sólidos’. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE). Monografía n. 44. Barcelona.
- Mazars, J. e Lemaitre, J., (1984), Application of continuous damage mechanics to strain and fracture behaviour of concrete, *in* S. P. Shah, ed., ‘Application of fracture mechanics to cementitious composites. NATO advanced research workshop’, Northwestern University, pp. 375–378. Citado por Carol et al. (1994).

- Muhlhaus, H.-B. e Vadoulakis, I., 1987. 'The thickness of shear bands in granular materials'. *Geotechnique*, vol. 37, pp. 271–283.
- Muskhelishvili, N. I., 1953. *Singular integral equations - boundary problems of function theory and their application to mathematical physics*. P. Noordhoff N. V., Groningen, Holanda. Traduzido do russo para o inglês por J. R. M. Radok e reeditado por Dover Publications, Mineola, 2008.
- Nguyen, G. D., 2008. 'A thermodynamic approach to non-local damage modelling of concrete'. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 45, pp. 1918–1934.
- Oliver, J., 1996a. 'Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part 1: Fundamentals'. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 39, pp. 3575–3600.
- Oliver, J., 1996b. 'Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part 2: Numerical simulation'. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 39, pp. 3601–3623.
- Oliver, J., 2000. 'On the discrete constitutive models induced by strong discontinuity kinematics and continuum constitutive equations'. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 37, pp. 7207–7229.
- Oliver, J., Cervera, M. e Manzoli, O., (1998), On the use of strain-softening models for the simulation of strong discontinuities in solids, *in* R. de Borst e E. van der Giessen, eds, 'Material instabilities in solids', John Wiley & Sons, Chichester, chapter 8, pp. 107–123.
- Oliver, J., Cervera, M. e Manzoli, O., 1999. 'Strong discontinuities and continuum plasticity models: the strong discontinuity approach'. *International Journal of Plasticity*, vol. 15, pp. 319–351.
- Oliver, J., Cervera, M., Oller, S. e Lubliner, J., (1990), Isotropic damage models and smeared crack analysis of concrete, *in* N. Bicanic, ed., 'SCI-C Computer aided analysis and design of concrete structures', pp. 945–957.

- Oliver, J. e Huespe, A. E., 2004a. ‘Continuum approach to material failure in strong discontinuity settings’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 193, pp. 3195–3220.
- Oliver, J. e Huespe, A. E., 2004b. ‘Theoretical and computational issues in modelling material failure in strong discontinuity scenarios’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 193, pp. 2987–3014.
- Oliver, J., Huespe, A. E., Blanco, S. e Linero, D. L., 2006. ‘Stability and robustness issues in numerical modeling of material failure with the strong discontinuity approach’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, pp. 7093–7114.
- Oliver, J., Huespe, A. E., Pulido, M. D. G. e Chaves, E., 2002. ‘From continuum mechanics to fracture mechanics: the strong discontinuity approach’. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 69, pp. 113–136.
- Oliver, J., Huespe, A. E. e Samaniego, E., 2003. ‘A study on finite elements for capturing strong discontinuities’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 56, pp. 2135–2161.
- Oliver, J., Huespe, A. E. e Sánchez, P. J., 2006. ‘A comparative study on finite elements for capturing strong discontinuities: E-FEM vs X-FEM’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, pp. 4732–4752.
- Oliver, J., Huespe, A., Samaniego, E. e Chaves, E., (2002), On strategies for tracking strong discontinuities in computational failure mechanics, in ‘WCCM V. Proceedings of the Fifth World Congress on Computational Mechanics’, Vienna University of Technology.
- Ortiz, M., Leroy, Y. e Needleman, A., 1987. ‘A finite element method for localized failure analysis’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 61, pp. 189–214.
- Paris, P., Gomez, M. e Anderson, W., 1961. ‘A rational analytic theory of fatigue’. *The Trend in Engineering*, vol. 13, pp. 9–14.

- Pedrini, R. A. A., 2008. Análise de propagação arbitrária de descontinuidades fortes em sólidos bidimensionais pelo método dos elementos de contorno. Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- Peixoto, R. G., Anacleto, F. E. S., Ribeiro, G. O., Pitangueira, R. L. S. e Penna, S. S., 2016. ‘A solution strategy for non-linear implicit BEM formulation using a unified constitutive modelling framework’. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 64, pp. 295–310.
- Penna, S. S., 2011. Formulação multipotencial para modelos de degradação elástica: unificação teórica, proposta de novo modelo, implementação computacional e modelagem de estruturas de concreto. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.
- Petersson, P. E., (1981), Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials, Technical report, TVBM-1006, Division of Building Materials, Lund Institute of Technology, Lund, Sweden.
- Pijaudier-Cabot, G. e Bažant, Z. P., 1987. ‘Nonlocal damage theory’. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 113, pp. 1512–1533.
- Poon, H., Mukherjee, S. e Bonnet, M., 1998. ‘Numerical implementation of a CTO-based implicit approach for the BEM solution of usual and sensitivity problems in elasto-plasticity’. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 22, pp. 257–269.
- Portela, A., Aliabadi, M. H. e Rooke, D. P., 1992. ‘The dual boundary element method: effective implementation for cracked problems’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 33, pp. 1269–1287.
- Portela, A., Aliabadi, M. H. e Rooke, D. P., (1993), Dual boundary element analysis of fatigue crack growth, *in* M. H. Aliabadi e C. A. Brebbia, eds, ‘Advances in Boundary Element Methods for Fracture Mechanics’, Elsevier Applied Science, Londres, chapter 1, pp. 1–46.
- Ramm, E., (1981), Strategies for tracing the nonlinear response near limit points, *in* ‘Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics’, Springer, Berlim.

- Rashid, Y. R., 1968. 'Ultimate strength analysis of prestressed concrete pressure vessels'. *Nuclear Engineering and Design*, vol. 7, pp. 334–344.
- Rice, J., 1968. 'A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks'. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 35, pp. 379–386.
- Rice, J. R. e Rudnicki, J. W., 1980. 'A note on some features of the theory of localization of deformation'. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 16, pp. 597–605.
- Ricks, E., 1972. 'The application of Newton method to the problem of elastic stability'. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 94, pp. 1060–1065.
- Ricks, E., 1979. 'An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems'. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 15, pp. 529–551.
- Rots, J. G., Nauta, P., Kusters, G. M. A. e Blaauwendraad, J., 1985. 'Smearred crack approach and fracture localization in concrete'. *HERON*, vol. 30, pp. 1–48.
- Saleh, A. L. e Aliabadi, M. H., 1995. 'Crack growth analysis in concrete using boundary element method'. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 51, pp. 533–545.
- Samaniego, E., 2002. Contributions to the continuum modelling of strong discontinuities in two-dimensional solids. Tese de Doutorado, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona.
- Sancho, J. M., Planas, J., Gálvez, J. C., Reyes, E. e Cendón, D. A., 2006. 'An embedded cohesive crack model for finite element analysis of mixed mode fracture of concrete'. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, vol. 29, pp. 1056–1065.
- Shephard, M. S., Yehia, N. A. B., Burd, G. S. e Weidner, T. J., 1985. 'Computational strategies for nonlinear and fracture mechanics problems: automatic crack propagation tracking'. *Computers & Structures*, vol. 20, pp. 211–223.

- Simo, J. C. e Ju, J. W., 1987. ‘Strain- and stress-based continuum damage models - I. Formulation’. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 23(7), pp. 821–840.
- Simo, J. C., Oliver, J. e Armero, F., 1993. ‘An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids’. *Computational Mechanics*, vol. 12, pp. 277–296.
- Simo, J. C. e Taylor, R. L., 1985. ‘Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 48, pp. 101–118.
- Sládek, J., Sládek, V. e Bažant, Z. P., 2003. ‘Non-local boundary integral formulation for softening damage’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 57, pp. 103–116.
- Suidan, M. e Schnobrich, W. C., 1973. ‘Finite element analysis of reinforced concrete’. *Journal of Structural Division, ASCE*, pp. 2109–2121.
- Swenson, D. V. e Ingraffea, A. R., 1988. ‘Modeling mixed-mode dynamic crack propagation using finite elements: Theory and applications’. *Computational Mechanics*, vol. 3, pp. 381–397.
- Telles, J. C. F., 1983. *Boundary Element Method applied to inelastic problems*. Springer-Verlag, Berlin.
- Telles, J. C. F. e Carrer, J. A. M., 1991. ‘Implicit procedures for the solution of elastoplastic problems by the boundary element method’. *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 15, pp. 303–311.
- van der Giessen, E. e de Borst, R., (1998), Introduction to material instabilities in solids, in R. de Borst e E. van der Giessen, eds, ‘Material instabilities in solids’, John Wiley & Sons, Chichester, chapter 1.
- Winkler, B., Hofstetter, G. e Lehar, H., 2004. ‘Application of a constitutive model for concrete to the analysis of a precast segmental tunnel lining’. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 28, pp. 797–819.

Xie, M. e Gerstle, W., 1995. 'Energy-based cohesive crack propagation modelling'. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 121, pp. 1349–1358. Citado por Sancho et al. (2006).

Yang, Y.-B. e Shieh, M.-S., 1990. 'Solution method for nonlinear problems with multiple critical points'. *AIAA Journal*, vol. 28(12), pp. 2110–2116.