

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
Escola de Engenharia  
Departamento de Engenharia de Estruturas  
Curso de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas

**MODELOS DE ARMADURA E ADERÊNCIA PARA  
ANÁLISE NÃO-LINEAR DE ESTRUTURAS DE  
CONCRETO ARMADO**

**Wolnei Iris de Sousa Simão**

Dissertação apresentada ao curso de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, como parte dos requisitos para obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS.

Orientador: Prof. Dr. Roque Luiz da Silva Pitangueira

**Belo Horizonte  
Agosto de 2003**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

Os componentes da banca examinadora aqui citados certifica que leram e recomendam ao departamento de Engenharia de Estruturas à aceitação da dissertação intitulada “**MODELOS DE ARMADURA E ADERÊNCIA PARA ANÁLISE NÃO-LINEAR DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO**” defendida por **Wolnei Iris de Sousa Simão** como parte dos requisitos para obtenção do título de **Mestre em Engenharia de Estruturas**.

Datado: Agosto de 2003

Orientador:

---

Prof. Dr. Roque Luiz da Silva Pitangueira

Examinadores:

---

Prof. Dr. Alcebiades

---

Prof. Dr. Gabriel

*Se uma coisa é difícil de ser feita por ti mesmo, não penses que é impossível para o homem; mas se algo é possível para o homem e conforme à sua natureza, pensa que isso pode ser conseguido também por ti.*

*(Marco Aurélio - Imperador Romano)*

*Os homens morrem porque esquecem.*

*(O Trabalho e os Dias, Hesíodo)*

*Dedico este trabalho aos meus **pais e mestres**, que com **carinho** e **amor** sempre me acompanharão e incentivarão.*

# Índice

Índice	v
Lista de Tabelas	viii
Lista de Figuras	ix
Resumo	xiii
Abstract	xiv
Agradecimentos	xv
<b>1 INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1 Objetivos do Trabalho . . . . .	1
1.2 Organização do Texto . . . . .	2
<b>2 ANÁLISE NÃO-LINEAR DE ESTRUTURAS DE CONCRETO</b>	<b>4</b>
2.1 Introdução . . . . .	4
2.2 Métodos Incrementais-Iterativos de Controle . . . . .	6
2.2.1 Controle de Carga . . . . .	7
2.2.2 Controle Direto de Deslocamento . . . . .	7
2.2.3 Controle de Comprimento de Arco . . . . .	8
2.2.4 Controle de Deslocamento Generalizado . . . . .	10
2.3 Modelos Constitutivos para Concreto . . . . .	10
2.3.1 Modelos de Dano Escalar . . . . .	11
2.3.2 Modelos Constitutivos de Microplanos . . . . .	13
<b>3 MODELOS DE ARMADURA</b>	<b>18</b>
3.1 Introdução . . . . .	18
3.2 Modelos de Armadura Discreta . . . . .	19
3.3 Modelos de Armadura Embutida . . . . .	19
3.3.1 Formulação Geométrica . . . . .	21
3.3.2 Mapeamento Inverso das Coordenadas Locais da Camada de Armadura	23
3.3.3 Campo de Deformação . . . . .	24
3.3.4 Matriz de Rigidez do Elemento de Armadura Embutida . . . . .	25
3.4 Modelo de Armadura Axissimétrico Pontual . . . . .	27

3.5	Relações Tensão-Deformação para Armadura . . . . .	29
<b>4</b>	<b>MODELOS DE ADERÊNCIA</b>	<b>31</b>
4.1	Introdução . . . . .	31
4.2	Modelo de Perda de Aderência de Molas . . . . .	31
4.3	Modelo de Perda de Aderência de Contato . . . . .	32
4.4	Relações Tensão-Escorregamento . . . . .	37
<b>5</b>	<b>IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL</b>	<b>38</b>
5.1	Introdução . . . . .	38
5.2	Expansão do <i>FEMOOP</i> . . . . .	40
5.2.1	Classe <i>Node</i> . . . . .	40
5.2.2	Classe <i>Element</i> . . . . .	40
5.2.3	Classe <i>Material</i> . . . . .	41
5.2.4	Classe <i>AnalysisModel</i> . . . . .	41
5.2.5	Classe <i>Shape</i> . . . . .	43
5.2.6	Classe <i>ConstModel</i> . . . . .	44
5.2.7	Síntese da Expansão . . . . .	44
<b>6</b>	<b>VALIDAÇÃO DOS MODELOS IMPLEMENTADOS</b>	<b>46</b>
6.1	Introdução . . . . .	46
6.2	Anel com uma Camada de Armadura . . . . .	46
6.2.1	Modelo de Armadura Discreta com Aderência Perfeita . . . . .	49
6.2.2	Modelo de Armadura Discreta com Elementos de Contato . . . . .	52
6.2.3	Modelo de Armadura Discreta com Elementos de Molas . . . . .	52
6.2.4	Modelo de Armadura Embutida com Aderência Perfeita . . . . .	57
6.2.5	Modelo de Armadura Embutida com Perda de Aderência . . . . .	57
6.3	Anel com duas Camadas de Armadura . . . . .	62
6.3.1	Modelo de Armadura Discreta com Aderência Perfeita . . . . .	63
6.3.2	Modelo de Armadura Discreta com Perda de Aderência . . . . .	63
6.3.3	Modelo de Armadura Embutida . . . . .	63
6.4	Pilar Axissimétrico . . . . .	69
<b>7</b>	<b>COMPARAÇÕES COM RESULTADOS EXPERIMENTAIS</b>	<b>72</b>
7.1	Introdução . . . . .	72
7.2	Chapa Poligonal . . . . .	72
7.3	Viga com Entalhe . . . . .	75
7.4	Viga Parede . . . . .	78
7.5	Pilar Circular . . . . .	81
<b>8</b>	<b>OUTRAS SIMULAÇÕES NUMÉRICAS</b>	<b>85</b>
8.1	Introdução . . . . .	85
8.2	Arrancamento . . . . .	85
8.3	Pilar com Capitel . . . . .	91
8.3.1	Discretização do Pilar . . . . .	92
8.3.2	Aderência Perfeita . . . . .	93

8.3.3	Perda de Aderência com Modelo de Contato . . . . .	95
8.3.4	Perda de Aderência com Modelo de Molas . . . . .	96
8.4	Diferentes Modos de Ruptura em Vigas . . . . .	99
8.4.1	Ruptura por Tração Diagonal . . . . .	100
8.4.2	Ruptura por Cisalhamento em Compressão . . . . .	100
<b>9</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>106</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>109</b>

# Lista de Tabelas

2.1	Parâmetros do material para o modelo de dano escalar . . . . .	14
2.2	Parâmetros do material para modelo de microplanos . . . . .	16
5.1	Subclasses criadas para inclusão dos modelos de armadura e aderência . . . . .	45
7.1	Constantes do material concreto . . . . .	79
7.2	Constantes para o material aço . . . . .	79
8.1	Constantes do material concreto . . . . .	100

# Lista de Figuras

2.1	Algoritmo para processos incrementais-iterativos . . . . .	5
2.2	Trajétórias de equilíbrio típicas da análise de estruturas de concreto . . . . .	6
2.3	Processo incremental-iterativo de controle de carga . . . . .	7
2.4	Processo incremental-iterativo de controle direto de deslocamento . . . . .	8
2.5	Comprimento de arco com trajetória de iteração ortogonal à tangente inicial . . . . .	9
2.6	Comprimento de arco com trajetória de iteração ortogonal à tangente anterior . . . . .	9
2.7	Comprimento de arco com trajetória de iteração circular . . . . .	9
2.8	Modelos representativos da fissuração . . . . .	11
2.9	Relação $\sigma\varepsilon$ para o modelo de dano escalar em tração . . . . .	12
2.10	Relação $\sigma\varepsilon$ para o modelo de dano escalar em compressão . . . . .	12
2.11	Esquema de funcionamento dos Modelos de Microplanos . . . . .	14
2.12	Componentes de deformação do modelo de microplanos . . . . .	15
2.13	Relações $\sigma\varepsilon$ para o modelo de microplanos . . . . .	15
3.1	Modelos de representação da armadura . . . . .	18
3.2	Elemento de armadura discreta . . . . .	19
3.3	Elemento de armadura embutida . . . . .	20
3.4	Armadura embutida curva . . . . .	22
3.5	Coordenadas ao longo da camada de armadura . . . . .	22
3.6	Elemento axissimétrico . . . . .	27
3.7	Elemento axissimétrico pontual . . . . .	28
3.8	Relações tensão-deformação para o aço . . . . .	29
4.1	Elemento finito de molas . . . . .	31
4.2	Sistema de coordenadas para o elemento de mola . . . . .	32
4.3	Elementos finitos de contato . . . . .	33
4.4	Deslocamento relativo . . . . .	34
4.5	Sistema global e local para o elemento de contato . . . . .	35



4.6	Leis de aderência implementadas . . . . .	37
5.1	Instâncias de classes do <i>FEMOOP</i> . . . . .	39
5.2	Expansão da hierarquia da classe <i>Element</i> . . . . .	41
5.3	Expansão da hierarquia da classe <i>Material</i> . . . . .	42
5.4	Expansão da hierarquia da classe <i>AnalysisModel</i> . . . . .	42
5.5	Expansão da hierarquia da classe <i>Shape</i> . . . . .	43
5.6	Expansão da hierarquia da classe <i>ConstModel</i> . . . . .	44
6.1	Anel de concreto armado com uma camada de aço . . . . .	47
6.2	Malhas para análise do anel com uma camada de armadura . . . . .	48
6.3	Tensão no aço para o modelo de armadura discreta com aderência perfeita . .	50
6.4	Tensão no aço para o modelo de armadura discreta com aderência perfeita . .	51
6.5	Tensão no aço para o modelo de armadura discreta com modelo de contato . .	53
6.6	Tensão no aço para o modelo de armadura discreta com modelo de contato . .	54
6.7	Tensão no aço para o modelo de armadura discreta com modelo de molas . . .	55
6.8	Tensão no aço para o modelo de armadura discreta com modelo de molas . . .	56
6.9	Tensão no aço para o modelo de armadura embutida com aderência perfeita .	58
6.10	Tensão no aço para o modelo de armadura embutida com aderência perfeita .	59
6.11	Tensão no aço para o modelo de armadura embutida com perda de aderência .	60
6.12	Tensão no aço para o modelo de armadura embutida com perda de aderência .	61
6.13	Anel de concreto armado com duas camadas de armadura . . . . .	62
6.14	Malhas para análise do anel com duas camadas de armadura . . . . .	62
6.15	Tensão no aço para o modelo de armadura discreta com aderência perfeita . .	64
6.16	Tensão no aço para o modelo de armadura discreta - Malha <i>MRD3</i> . . . . .	65
6.17	Tensão no aço para o modelo de armadura discreta - Malha <i>MRD4</i> . . . . .	66
6.18	Tensão no aço para o modelo de armadura embutida - Malha <i>MRE2</i> (3 nós) .	67
6.19	Tensão no aço para o modelo de armadura embutido - Malha <i>MRE2</i> (4 nós) .	68
6.20	Pilar de concreto de armado . . . . .	70
6.21	Malha de elementos finitos . . . . .	70
6.22	Deformada do modelo de elementos finitos para o pilar circular . . . . .	71
6.23	Diagrama de corpo livre do ponto A do modelo para o pilar circular . . . . .	71
7.1	Chapa de concreto armado em duas direções . . . . .	73
7.2	Malha de elementos finitos . . . . .	73
7.3	Curva carga $\times$ deformação vertical . . . . .	74

7.4	Estado de tensão normal vertical para o ponto <i>A</i> . . . . .	74
7.5	Geometria da viga . . . . .	75
7.6	Discretização da viga . . . . .	75
7.7	Carga×deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga . . . . .	76
7.8	Deformada e variação de tensões normais horizontais . . . . .	77
7.9	Geometria da viga (mm) . . . . .	78
7.10	Malha e divisão por Materiais . . . . .	78
7.11	Curva $P \times w$ . . . . .	80
7.12	Estado de tensão normal vertical para a carga máxima . . . . .	80
7.13	Pilar de concreto de armado . . . . .	81
7.14	Malha de elementos finitos . . . . .	81
7.15	Carga $\times$ deformação axial . . . . .	82
7.16	Estado de tensão normal vertical para modelo de contato . . . . .	83
7.17	Estado de tensão normal vertical para modelo de molas . . . . .	84
8.1	Geometria . . . . .	86
8.2	Discretização . . . . .	86
8.3	Trajatória de equilíbrio do ponto de aplicação da carga . . . . .	87
8.4	Variação da tensão na barra de aço . . . . .	87
8.5	Variação das tensões normais horizontais - Aderência Perfeita . . . . .	88
8.6	Variação das tensões normais horizontais - Modelo de Molas . . . . .	89
8.7	Variação das tensões normais horizontais - Modelo de Contato . . . . .	90
8.8	Pilar com capitel (medidas em <i>mm</i> ) . . . . .	91
8.9	Malhas adotadas . . . . .	92
8.10	Trajórias de equilíbrio - Aderência Perfeita . . . . .	93
8.11	Estado de tensão para o ponto <i>A</i> - Aderência Perfeita . . . . .	94
8.12	Deformadas e modos de ruptura - Aderência Perfeita . . . . .	94
8.13	Trajórias de equilíbrio - Modelo de Contato . . . . .	95
8.14	Deformadas e modos de ruptura - Modelo de Contato . . . . .	96
8.15	Trajórias de equilíbrio - Modelo de Molas . . . . .	97
8.16	Deformadas e modos de ruptura - Modelo de Molas . . . . .	97
8.17	Trajórias de equilíbrio - Perda de Aderência . . . . .	98
8.18	Geometria e carregamento da viga . . . . .	99
8.19	Malha para a viga com ruptura por tração diagonal . . . . .	101
8.20	Curva Carga×deslocamento vertical do ponto <i>A</i> - ruptura por tração diagonal . . . . .	101

8.21	Deformada para ruptura por tração diagonal . . . . .	101
8.22	Estado de tensão para ruptura por tração diagonal . . . . .	102
8.23	Malha para a viga com ruptura por cisalhamento em compressão . . . . .	103
8.24	Curva Carga×deslocamento vertical - ruptura por cisalhamento em compressão	103
8.25	Deformada para ruína por cisalhamento em compressão . . . . .	103
8.26	Estado de tensão para ruptura por cisalhamento em compressão . . . . .	104

# Resumo

Este trabalho discute a análise não-linear de estruturas de concreto armado através do método de elementos finitos, utilizando-se diversos modelos de armadura e perda de aderência.

Os modelos adotam elementos finitos planos ou axissimétricos para representar o concreto. Para o aço, adotam-se elementos de armadura discreta, embutida ou axissimétrico pontual. Para tratamento da aderência, além da possibilidade de incorporá-la no elemento de armadura embutida, empregam-se também elementos finitos de molas e contato.

O comportamento constitutivo do concreto, do aço da armadura e da região de interface concreto-aço é representado por modelos não-lineares apropriados para cada um dos materiais: modelos de dano ou microplanos para o concreto, modelos elasto-plásticos para o aço e diferentes leis tensão-escorregamento para a aderência.

Uma breve discussão sobre os métodos incrementais-iterativos de obtenção de trajetórias de equilíbrio, destacando-se as vantagens e desvantagens de cada um, é apresentada. Revisa-se também os modelos representativos do comportamento constitutivo dos materiais.

Apresenta-se um estudo detalhado dos principais modelos para inclusão das armaduras e tratamento da perda de aderência. A implementação destes modelos, como expansão de um programa computacional orientado a objetos, também é discutida.

Simulações numéricas de peças de concreto armado, submetidas a estados de deformação diversos, são apresentadas. Estas simulações são comparadas com resultados experimentais, visando a validação dos modelos implementados.

A discussão dos resultados mostra que os recursos de modelagem utilizados permitem compreender melhor os mecanismos de deterioração e colapso das estruturas de concreto armado.

# Abstract

This work discusses the nonlinear finite element analysis of reinforced concrete structures, using several reinforcement and bond-slip models.

Plane and axis-symmetric finite elements are used to represent the concrete. To the reinforcement bars, the discrete, embedded and axis-symmetric point reinforcement elements are adopted. To treatment of the bond between materials, the bond-link and contact models can be used or it can be incorporated into the embedded reinforcement element.

The constitutive behavior of the concrete, reinforcement bar and concrete-steel interface region, is described by appropriate nonlinear models: the damage and microplane models to concrete, elastoplastic to steel and different stress-slip laws to bond.

The incremental-iterative methods used to perform the equilibrium paths and some materials constitutive models, are briefly discussed.

A detailed study about the main models to include the reinforcement and to treatment of the bond lost is presented. The models implementation, as expansion of an object oriented computational program, is also discussed.

Some numerical simulations of reinforced concrete members, subjected to different strain states, are presented. These simulations are compared with experimental results in order to validate the implemented models.

The discussion of the results shows that the modeling tools utilized permit better comprehension of the deterioration and collapse of the reinforced concrete structures.

# Agradecimentos

Acima de tudo e todos, a Deus causa *primeira e única*, que protege e ilumina a todos em todos os momentos.

A meus pais, que mesmo à distância, sempre apoiaram, incentivaram e sempre acreditaram neste projeto. Demonstrando enorme paciência e devotado *amor*.

Ao meu orientador, Prof. Roque Luiz da Silva Pitangueira, por suas sugestões e orientação que tornaram este trabalho menos árduo e menos cansativo, pela sua confiança e apoio em todos os momentos ao longo deste trabalho.

Aos professores e funcionários do Departamento de Engenharia de Estruturas da *UFMG* pela atenção e prestabilidade nos momentos de necessidade.

Ao apoio financeiro dado pela Pró-Reitoria de Pesquisa da *UFMG* na forma de projeto de pesquisa e pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais na forma de bolsa parcial de mestrado.

# Capítulo 1

## INTRODUÇÃO

O Método de Elementos Finitos é uma poderosa ferramenta para análise de estruturas de concreto simples e armado permitindo o modelamento de diferentes fenômenos inerentes a estes materiais. Fissuração progressiva, rigidez residual em tração e compressão, propriedades multi-axiais não-lineares, amolecimento, armadura, perda de aderência entre concreto e aço e outros fenômenos podem ser racionalmente modelados.

Tal modelamento requer a utilização dos seguintes recursos:

1. Métodos de obtenção de trajetórias de equilíbrio;
2. Modelos constitutivos para representar os materiais: concreto e armadura;
3. Elementos finitos representativos dos diversos fenômenos.

Apesar do grande desenvolvimento presenciado, os diferentes recursos ainda precisam ser disponibilizados conjuntamente de modo a fomentar o avanço tecnológico nesta área do conhecimento.

### 1.1 Objetivos do Trabalho

O Projeto de pesquisa do qual este trabalho faz parte visa o desenvolvimento de um sistema computacional para análise através do método de elementos finitos, que disponibilize

conjuntamente diversos modelos representativos do comportamento de estruturas de concreto simples e armado.

O sistema em desenvolvimento tem como base um programa de elementos finitos que utiliza o paradigma de programação orientada a objetos como técnica de implementação. O uso desta metodologia permite a fácil expansão do sistema, sem alterações nas ferramentas básicas já implementadas.

Ao início desta dissertação, alguns recursos fundamentais já encontravam-se implementados, ressaltando-se métodos de obtenção de trajetórias de equilíbrio e modelos constitutivos para caracterização dos materiais.

Este trabalho trata da expansão do referido sistema com a inclusão de modelos para armadura e tratamento de perda de aderência. Para inclusão das barras da armadura, foram disponibilizados os modelos de armadura discreta, embutida e axissimétrico pontual. Para tratamento da aderência entre os materiais, foram implementados os modelos de molas e de contato. Tanto para os modelos de armadura como para os modelos de aderência, elementos finitos com diversos graus de interpolação foram disponibilizados.

## 1.2 Organização do Texto

Este trabalho está organizado em 9 capítulos.

Discute-se, no capítulo 2, dois recursos fundamentais para a análise não-linear de estruturas de concreto: os métodos de obtenção de trajetórias de equilíbrio e os modelos constitutivos. Os principais processos incrementais-iterativos de obtenção de trajetórias de equilíbrio são apresentados resumidamente, com a finalidade de destacar as principais vantagens e desvantagens de cada um. Na seqüência, é feito um histórico dos principais modelos constitutivos utilizados para descrever o comportamento do concreto, destacando-se os modelos de dano escalar e de microplanos.

Os modelos de armadura e aderência são descritos, respectivamente, nos capítulos 3 e 4. Inicialmente a evolução destes modelos é apresentada enfatizando-se os pontos comuns entre os mesmos e as limitações observadas nos modelos iniciais. Em seguida, as formulações dos



modelos implementados são devidamente detalhadas.

O capítulo 5 trata da implementação computacional. Este capítulo inicia-se apresentando a estrutura do programa de elementos finitos utilizado neste trabalho. A implementação dos modelos de armadura e aderência são então detalhadas e as principais classes são apresentadas, ressaltando-se o papel de cada uma no corpo do programa.

O capítulo 6 é dedicado ao estudo de validação dos diferentes modelos implementados, através de uma análise linear-elástica de duas estruturas de concreto armado, um anel e um pilar.

Após esta etapa, nos capítulos 7 e 8, uma série de simulações numéricas mostra o desempenho destes modelos para diferentes estados de tensão. No capítulo 7, os resultados obtidos são comparados com resultados experimentais.

O capítulo 9 é dedicado às conclusões obtidas a partir deste trabalho, bem como sugestões para futuros trabalhos de pesquisa.

# Capítulo 2

## ANÁLISE NÃO-LINEAR DE ESTRUTURAS DE CONCRETO

### 2.1 Introdução

Em mecânica estrutural, um problema é dito não-linear se a rigidez depende dos deslocamentos da estrutura. Esta dependência é dita *geometricamente* não-linear quando a rigidez é afetada por um estado excessivo de deformação, sem influência no comportamento do material.

Quando a resposta do material é dependente do estado de deformação a que o mesmo é submetido, diz-se tratar-se de um problema *fisicamente* não-linear. Em estruturas de concreto é comum o tratamento de problemas de fissuração, esmagamento, rigidez residual em regiões danificadas, aderência concreto-aço, entre outros, como problemas fisicamente não-lineares.

Em uma análise fisicamente não-linear, através do Método de Elementos Finitos, dois problemas devem ser solucionados:

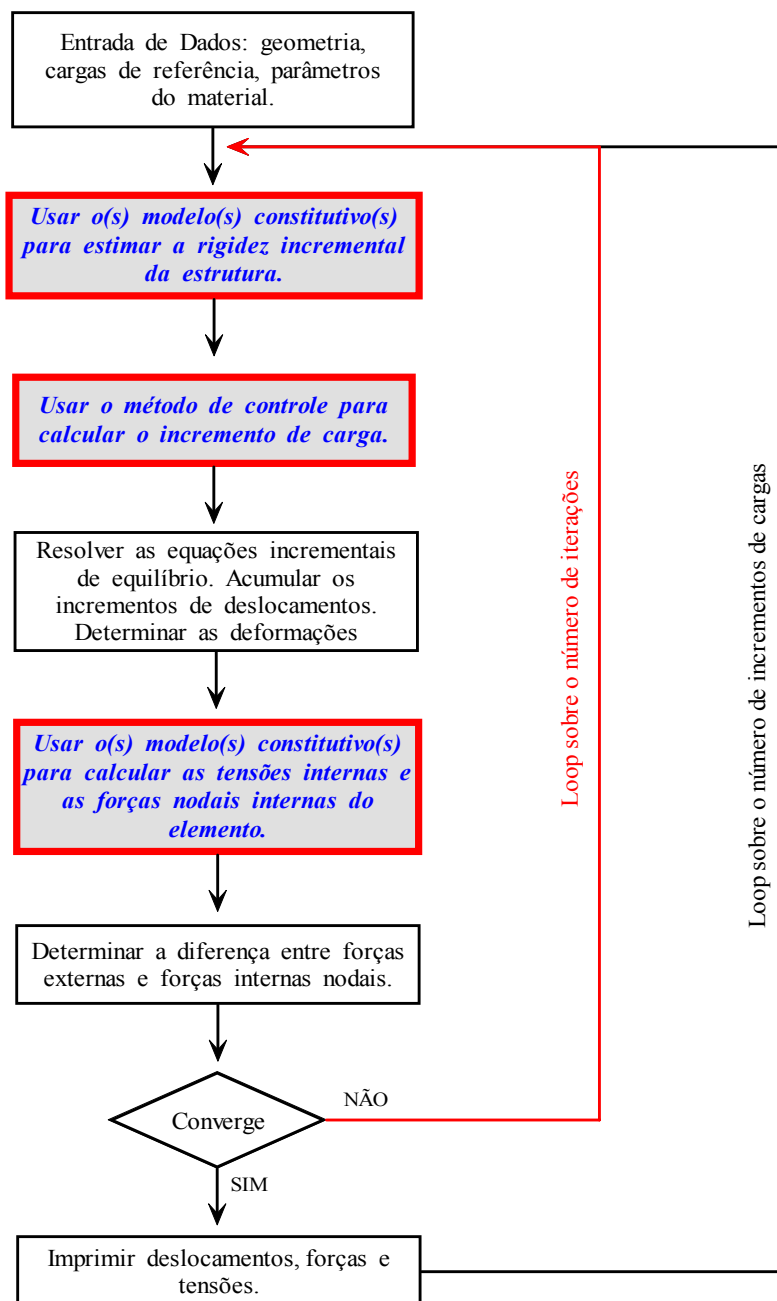
1. Estabelecer técnicas de obtenção das trajetórias de equilíbrio da estrutura;
2. Escolher modelos constitutivos adequados para o cálculo das tensões e da variação da rigidez estrutural.

Na figura 2.1 é apresentado um fluxograma do processo de obtenção de pontos de equilíbrio em uma análise não-linear. Como destacado na figura, os *modelos constitutivos* e o *método incremental-iterativo* de controle são os elementos mais importantes do processo.

Os modelos constitutivos são responsáveis pelo cálculo das tensões e pela estimativa da

rigidez incremental. O método incremental-iterativo de controle é, como o próprio nome sugere, o responsável por estabelecer quais variáveis têm seus valores controlados, quando se incrementam cargas e deslocamentos entre dois pontos de equilíbrio sucessivos.

Estes dois aspectos da análise não-linear de estruturas de concreto são discutidos a seguir.



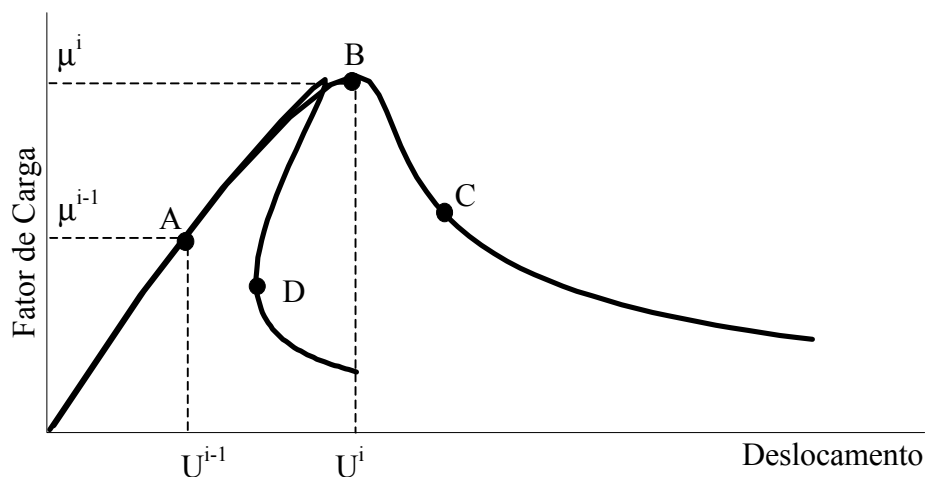
**Figura 2.1:** Algoritmo para processos incrementais-iterativos

## 2.2 Métodos Incrementais-Iterativos de Controle

A representação do comportamento não-linear de estruturas de concreto, no espaço parâmetro de carga-deslocamentos envolve fenômenos de aumento de deslocamentos com decréscimo de cargas ou mesmo decréscimo de deslocamentos com decréscimo de cargas como mostram as trajetórias de equilíbrio da figura 2.2.

As trajetórias de equilíbrio são normalmente obtidas executando-se um processo incremental-iterativo nas variáveis do problema.

Assim, dado um campo de deslocamentos  $\{U\}$  e um fator de carga proporcional  $\mu$ , equivalentes a um ponto da trajetória de equilíbrio (ponto  $A$  na figura 2.2), deseja-se encontrar outro ponto de equilíbrio (ponto  $B$  na figura 2.2) de modo que a variação de determinadas grandezas do problema no passo incremental (do ponto  $A$  ao ponto  $B$ ), seja controlada.



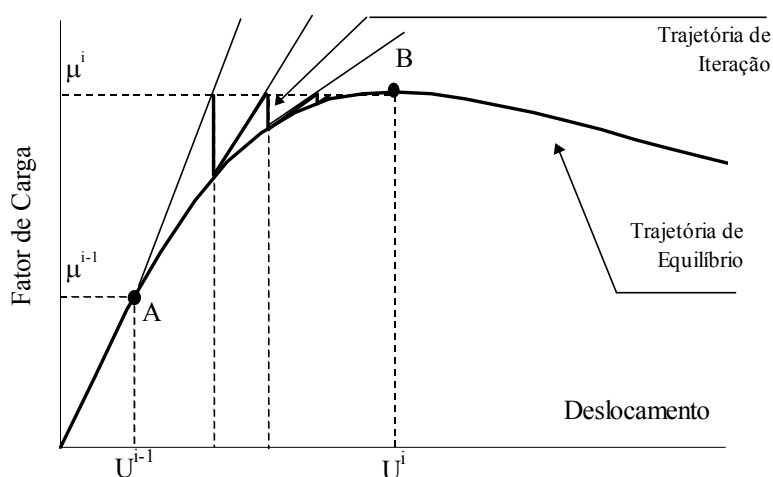
**Figura 2.2:** Trajetórias de equilíbrio típicas da análise de estruturas de concreto

Diferentes métodos incrementais-iterativos têm sido usados para análise não-linear de estruturas de concreto, destacando-se os métodos de controle de carga, de controle direto de deslocamentos, de controle de comprimento de arco e de controle de deslocamento generalizado. A seguir, estes métodos, disponíveis no programa de elementos finitos utilizado neste trabalho, são discutidos brevemente.

### 2.2.1 Controle de Carga

Neste método a carga externa é incrementada de um valor constante somente na primeira iteração de cada passo. Para as demais iterações, o incremento de carga é feito igual a zero, implicando num carregamento externo sempre constante (ver figura 2.3).

Como as iterações são processadas à carga constante, este método falha na passagem por pontos limites. Quando a carga externa ultrapassa o valor correspondente ao ponto limite (ponto  $B$  na figura 2.3), a linha horizontal que controla a trajetória de iteração nunca cruza a trajetória de equilíbrio e nenhum ponto de convergência pode ser obtido.

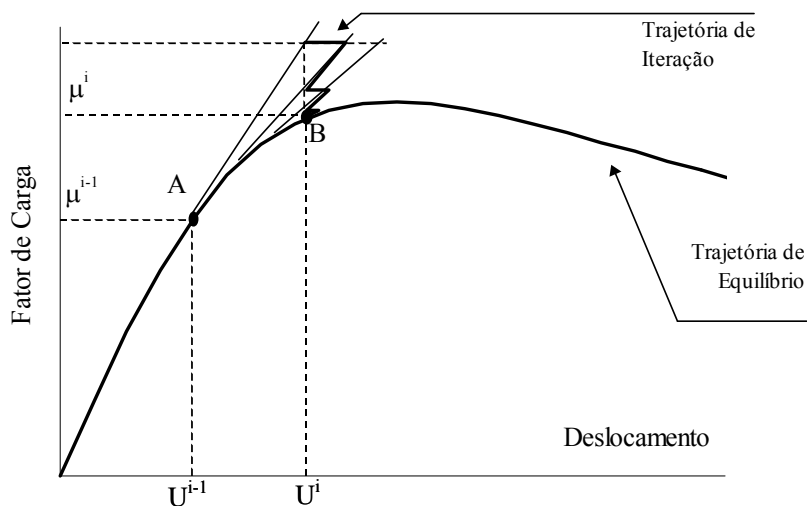


**Figura 2.3:** Processo incremental-iterativo de controle de carga

### 2.2.2 Controle Direto de Deslocamento

Este método (Batoz & Dhatt 1979) supõe que as iterações são processadas a um deslocamento constante (figura 2.4). Uma componente de deslocamento é escolhida como o parâmetro de controle, e é incrementada de um valor constante na primeira iteração. Para as demais iterações a condição de incremento nulo na componente de controle deve ser satisfeita.

Da mesma forma que o método de controle de cargas não permite a passagem por pontos limites, o controle direto de deslocamento é ineficiente se o deslocamento de controle experimenta diminuição (“snap-back”) de um nível de carga para outro. Para solucionar as



**Figura 2.4:** Processo incremental-iterativo de controle direto de deslocamento

dificuldades destes métodos, combinações de deslocamentos e fator de carga para controlar as iterações, têm sido adotadas nos métodos de controle de comprimento de arco e deslocamento generalizado.

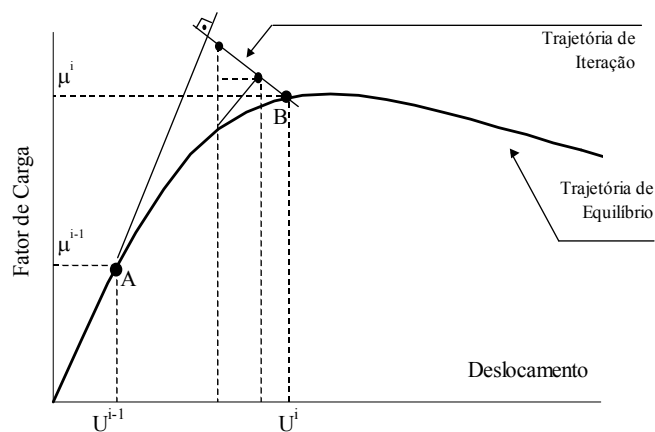
### 2.2.3 Controle de Comprimento de Arco

Nos métodos de comprimento de arco, uma combinação geométrica entre as variáveis deslocamentos e fator de carga proporcional, controla o processo iterativo.

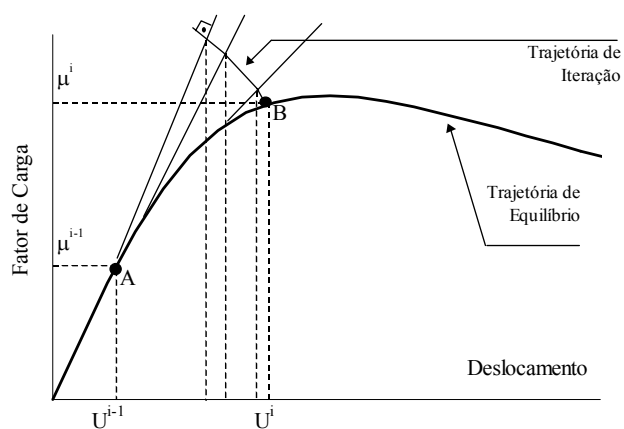
Impondo-se restrições à forma da trajetória de iteração, várias possibilidades para o método do comprimento de arco podem ser derivadas.

As figuras 2.5, 2.6 e 2.7 mostram três variações deste método. Na figura 2.5 tem-se o método atribuído à Ricks (Ricks 1972, Ricks 1979), onde a trajetória de iteração é sempre mantida ortogonal à tangente inicial em cada passo.

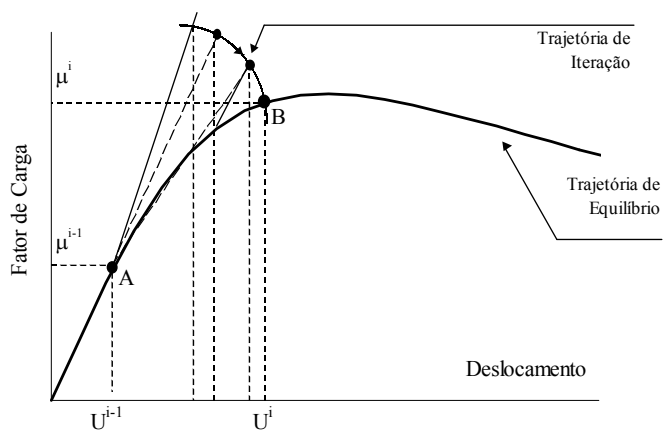
Na variante proposta por Ramm (Ramm 1981) a trajetória de iteração é mantida ortogonal à tangente da iteração anterior (figura 2.6). No método atribuído a Crisfield (Crisfield 1981, Crisfield 1983), a trajetória de iteração é um arco de circunferência como mostra a figura 2.7.



**Figura 2.5:** Comprimento de arco com trajetória de iteração ortogonal à tangente inicial



**Figura 2.6:** Comprimento de arco com trajetória de iteração ortogonal à tangente anterior



**Figura 2.7:** Comprimento de arco com trajetória de iteração circular

## 2.2.4 Controle de Deslocamento Generalizado

Uma outra combinação entre deslocamentos e fator de carga foi proposta por Yang e Shieh (Yang & Shieh 1990). Tal combinação utiliza os valores dos incrementos de deslocamentos e fator de carga da primeira iteração do primeiro passo e da primeira iteração do passo anterior, para controlar a iteração do passo corrente.

A utilização de informações relativas ao primeiro passo a ao passo anterior, permite automatizar o ajuste do tamanho do passo incremental, através do acompanhamento da variação da rigidez, e a troca de sinal do incremento de carga proporcional na ocorrência de pontos limites.

Detalhes das formulações dos métodos de controle acima discutidos podem ser encontrados nas referências citadas e também em (Crisfield 1986, Yang & Kuo 1994).

## 2.3 Modelos Constitutivos para Concreto

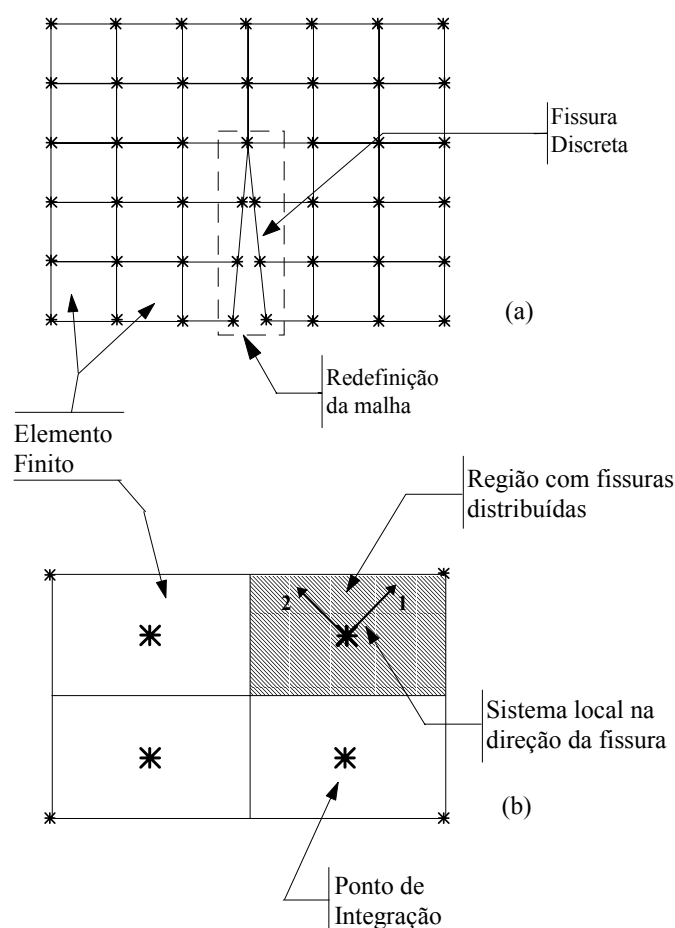
Ainda que considerando o concreto como inicialmente homogêneo, com a aplicação de cargas e conseqüentes deformações o material se torna heterogêneo, pela deterioração do mesmo nas regiões mais solicitadas. Tal processo leva eventualmente à formação de fissuras, sendo a fissuração distribuída e progressiva o principal mecanismo responsável pelo comportamento não-linear do material.

Diferentes modelos têm sido propostos para a representação deste fenômeno, podendo-se agrupá-los em: modelos de fissuras discretas e modelos de fissuras distribuídas.

A formulação discreta considera a fissura como descontinuidades geométricas. Neste enfoque imagina-se a separação entre os lados dos elementos finitos adjacentes à fissura formada (figura 2.8(a)). Isto implica numa mudança contínua da conectividade nodal e na restrição da localização da fissura ao longo dos lados dos elementos finitos. Algoritmos de redefinição automática da malha e técnicas que permitem fissuras discretas estendendo-se através dos elementos finitos constituem esforços na tentativa de eliminar as desvantagens desta formulação.

Nos modelos de fissuras distribuídas, a região danificada (um elemento finito ou a região





**Figura 2.8:** Modelos representativos da fissuração

em torno dos pontos de integração do mesmo) é imaginada como um meio contínuo formado por um número infinito de pequenas fissuras paralelas (figura 2.8(b)).

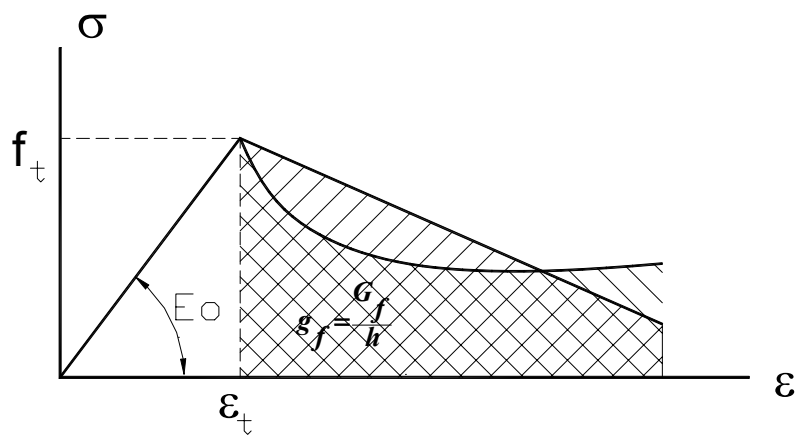
Estes modelos consideram a deterioração da rigidez a partir de uma modificação das relações constitutivas locais (sistema 1–2 na figura 2.8, por exemplo), permitindo que a formulação possa ser generalizada para considerar também regiões deterioradas por compressão.

### 2.3.1 Modelos de Dano Escalar

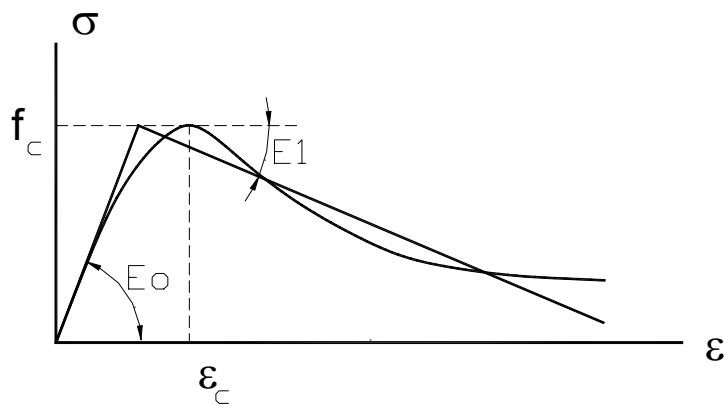
O modelo inicialmente introduzido por (Valliappan & Doolan 1972) é um dos modelos distribuídos mais utilizados, e considera que o material torna-se ortotrópico na região fissurada. O modelo ortotrópico teve grande evolução, desde sua concepção até as abordagens mais recentes (Bazant & Oh 1983, Hillerborg, Modéer & Peterson 1976).

Esta evolução levou ao refinamento do modelo considerando a degradação gradativa da rigidez em lugar da redução brusca dos modelos iniciais, a possibilidade de ocorrência de dano tanto em tração como em compressão e o acoplamento entre as deformações devido ao efeito de Poisson. Os modelos com estas características passaram a ser denominados modelos de *dano escalar*. Nestes modelos, a variação da rigidez é acompanhada através de relações tensão-deformação escalares, admitidas válidas para cada direção de ortotropia.

No modelo disponibilizado no sistema computacional utilizado neste trabalho, as direções de ortotropia são coincidentes com as direções principais de deformação e as relações tensão-deformação, admitidas válidas para estas direções, são as mostradas nas figuras 2.9 e 2.10 (Pitangueira 1998).



**Figura 2.9:** Relação  $\sigma\varepsilon$  para o modelo de dano escalar em tração



**Figura 2.10:** Relação  $\sigma\varepsilon$  para o modelo de dano escalar em compressão

As curvas da figura 2.9, adotadas para regiões de tração, ficam completamente definidas

pela resistência limite, suposta constante e igual à resistência a tração uniaxial ( $f_t$ ), o módulo de elasticidade inicial ( $E_0$ ), a forma do ramo descendente e a área sob o diagrama ( $g_f$ ) que é obtida a partir de parâmetros de Mecânica da Fratura.

A energia de fratura ( $G_f$ ) é definida como a energia necessária para criar uma unidade de área de uma fissura contínua. Nos modelos de fissuras distribuídas,  $G_f$  relaciona o acúmulo de deformações atuando numa faixa  $h$  do elemento, chamada tamanho característico do material. Admitindo que as microfissuras estão distribuídas uniformemente sobre a faixa  $h$  chega-se à seguinte relação:

$$g_f = \frac{G_f}{h} \quad (2.3.1)$$

As curvas da figura 2.10, adotadas para regiões de compressão, ficam completamente definidas pela resistência limite, suposta constante e igual à resistência de compressão axial ( $f_c$ ), o módulo de elasticidade inicial ( $E_0$ ), o módulo de elasticidade do ramo descendente ( $E_1$ ), para a curva bi-linear e a deformação limite à compressão ( $\varepsilon_c$ ), para a curva não-linear, que é a proposta por (Carreia & Chu 1985).

Além das propriedades necessárias à completa descrição das curvas das figuras 2.9 e 2.10, o modelo de dano escalar requer os valores do coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) e do fator de retenção ao cisalhamento ( $\beta$ ). Este último é um escalar ( $0, 0 < \beta < 1, 0$ ) que, ao ser multiplicado pelo módulo de elasticidade transversal inicial ( $G_0$ ), simula o fenômeno do engrenamento de agregado no plano de fissura.

A tabela 2.1 resume os parâmetros necessários à utilização do modelo de dano escalar disponíveis no programa.

### 2.3.2 Modelos Constitutivos de Microplanos

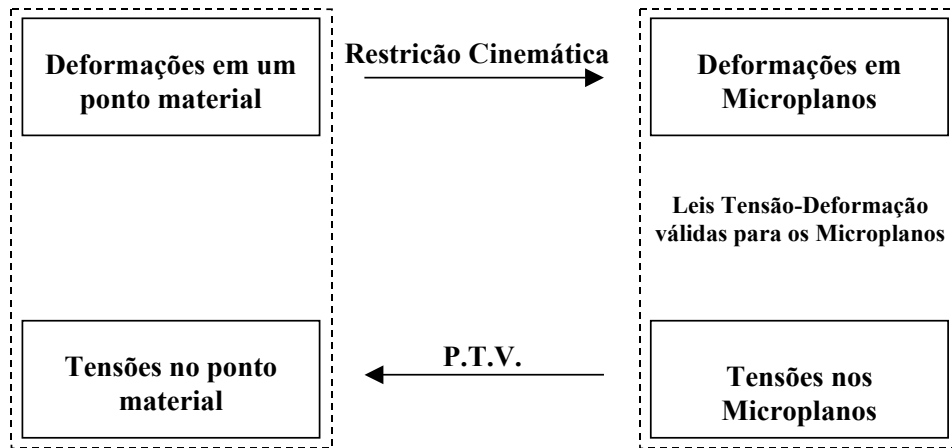
Nos últimos anos, os modelos distribuídos denominados modelos de microplanos, tiveram grande desenvolvimento.

Nestes modelos, em lugar de especificar as propriedades constitutivas segundo direções ortogonais como nos modelos ortotrópicos, vários pesquisadores (Bazant & Gambarova 1984,

**Tabela 2.1:** Parâmetros do material para o modelo de dano escalar

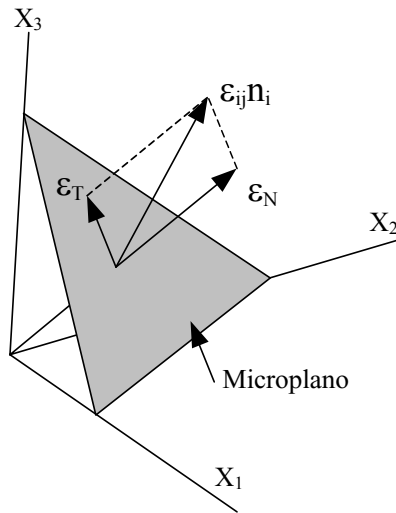
Propriedade		Figura
Módulo de elasticidade inicial	$E_0$	2.9 e 2.10
Resistência à tração	$f_t$	2.9
Energia de fratura	$G_f$	2.9
Comprimento característico	$h$	2.9
Resistência à compressão	$f_c$	2.10
Deformação limite em compressão	$\varepsilon_c$	2.10
Módulo de elasticidade do ramo descendente	$E_1$	2.10
Coefficiente de Poisson	$\nu$	
Fator de retenção ao cisalhamento	$\beta$	

Carol, Bazant & Prat 1992, Ozbolt & Li 2001, Liu & Foster 1998) têm proposto especificar tais propriedades através de relações tensão-deformação admitidas válidas sobre planos de orientação arbitrária no material.

**Figura 2.11:** Esquema de funcionamento dos Modelos de Microplanos

A figura 2.11 ilustra o esquema de funcionamento dos modelos de microplanos. Conhecendo-se as deformações de um ponto material, são gerados vários planos (microplanos) de orientação arbitrária em torno do referido ponto e localizados na superfície de uma esfera de raio unitário. As deformações nestes microplanos são calculadas através da aplicação de uma restrição cinemática ao tensor macroscópico de deformações.

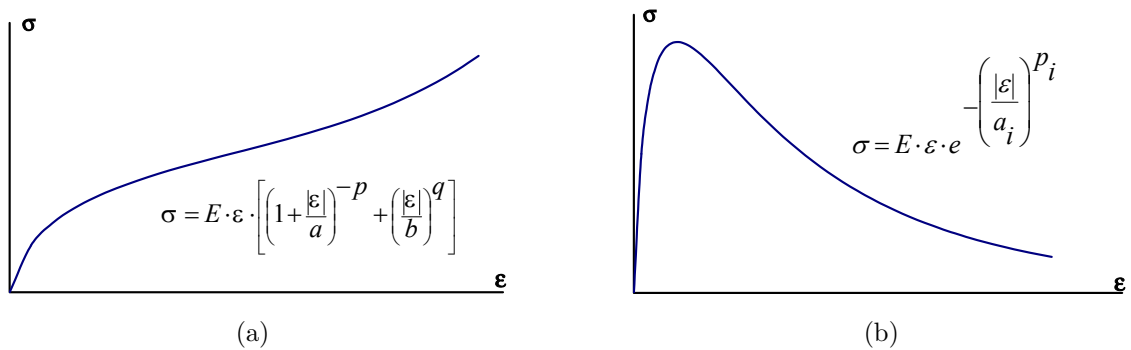
Através de relações tensão-deformação, admitidas válidas para os microplanos, calculam-se as tensões em cada microplano. Aplica-se, por fim, o Princípio dos Trabalhos Virtuais (*P.T.V.*) obtendo-se o estado macroscópico de tensões e uma avaliação da degradação da rigidez.



**Figura 2.12:** Componentes de deformação do modelo de microplanos

Na formulação proposta por (Liu & Foster 1998) a restrição cinemática é tal que as deformações normal e tangencial ( $\varepsilon_N$  e  $\varepsilon_T$ ) nos microplanos (figura 2.12) são iguais a decomposição do tensor macroscópico de deformação  $\varepsilon_{ij}$  naquela direção. Além disso, a deformação normal é dividida em duas parcelas: deformação volumétrica ( $\varepsilon_V$ ) e deformação desviadora ( $\varepsilon_D$ ).

As leis tensão-deformação para as componentes volumétrica ( $\sigma_V \times \varepsilon_V$ ), desviadora ( $\sigma_D \times \varepsilon_D$ ) e tangencial ( $\sigma_T \times \varepsilon_T$ ), utilizadas pelo modelo de (Liu & Foster 1998) estão ilustradas na figura 2.13 e os parâmetros que as definem estão na tabela 2.2.



**Figura 2.13:** Relações  $\sigma\varepsilon$  para o modelo de microplanos

Além das constantes empíricas do material ( $a$ ,  $b$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ ,  $p_1$ ,  $p_2$  e  $p_3$ ), os valores do módulo de elasticidade  $E$  para as leis volumétricas ( $E_V$ ), desviadora ( $E_D$ ) e tangencial ( $E_T$ ) são dados, respectivamente, por:

**Tabela 2.2:** Parâmetros do material para modelo de microplanos

Medida de Deformação	Parâmetros	Figura
Componente Volumétrica em Compressão	$a, b, p, q$	2.13(a)
Componente Volumétrica em Tração	$a_1, p_1$	2.13(b)
Componente Desviadora em Compressão	$a_2, p_2$	2.13(b)
Componente Desviadora em Tração	$a_1, p_1$	2.13(b)
Comprimento da Componente Tangencial	$a_3, p_3$	2.13(b)

$$E_V = \frac{E_0}{1 - 2\nu} \quad (2.3.2)$$

$$E_D = \eta E_V \quad (2.3.3)$$

$$E_T = \frac{1}{3} \left[ \frac{5(1 - 2\nu)}{1 + \nu} - 2\eta_0 \right] E_V \quad (2.3.4)$$

onde  $E_0$  é o módulo de elasticidade inicial,  $\nu$  é o coeficiente de Poisson do concreto e  $\eta$  é outro parâmetro empírico do material.

As constantes empíricas do material são geradas a partir de ajustes de curvas obtidas experimentalmente. Este processo é bastante trabalhoso e por isso o número de materiais já descritos não é muito grande. Além disto, encontram-se sugestões de diferentes parâmetros para descrever o mesmo material.

Após estudarem os dados experimentais disponíveis na literatura, (Liu & Foster 1998) propuseram que as constantes empíricas do material fossem modificadas durante a análise, em função da relação entre a maior ( $\sigma_1$ ) e a menor ( $\sigma_3$ ) tensão principal através da relação:

$$c = s_0 + s_1 \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_3} \right) + s_2 \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_3} \right)^2 + s_3 \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_3} \right)^3 \quad (2.3.5)$$

onde  $c$  é a constante empírica a ser calculada e  $s_0, s_1, s_2$  e  $s_3$  são os coeficientes da curva cúbica.

Os valores dos coeficientes  $s_0$ ,  $s_1$ ,  $s_2$  e  $s_3$  para concretos com resistência à compressão entre 20 *MPa* e 100 *MPa* e para as diversas constantes empíricas estão tabelados e disponíveis em (Liu & Foster 1998).

Os métodos incrementais-iterativos e o modelo constitutivo de dano escalar já estavam implementados no programa de elementos finitos adotado no início deste trabalho. O modelo de microplanos proposto (Liu & Foster 1998), entretanto, foi aqui implementado, como expansão dos modelos de microplanos existente no programa, resultados do trabalho de (Silva & Pitangueira 2001). Detalhes da referida implementação serão discutidos no capítulo 5.

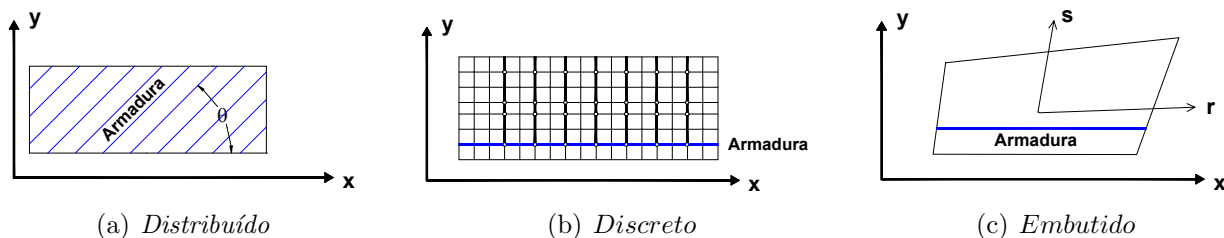
# Capítulo 3

## MODELOS DE ARMADURA

### 3.1 Introdução

Na análise via método de elementos finitos de estruturas de concreto armado, as barras de aço da armadura podem ser introduzidas segundo três alternativas distintas: modelos de armadura distribuída, modelos de armadura discreta e modelos de armadura embutida (figura 3.1).

No enfoque de armadura distribuída (figura 3.1(a)) supõe-se que o aço está distribuído no elemento de concreto com uma orientação particular  $\theta$ . Uma relação tensão-deformação para o material composto (concreto-aço) pode então ser derivada, considerando-se aderência perfeita entre os componentes (Gerstle, Ingreffea, Murray, Nilson & Mirza 1982). Este modelo não é muito utilizado e não foi adotado para o sistema computacional de que trata este trabalho.



**Figura 3.1:** Modelos de representação da armadura

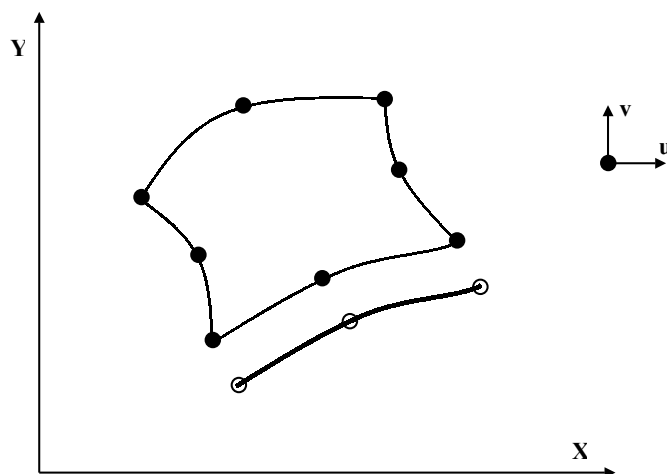


## 3.2 Modelos de Armadura Discreta

É um enfoque bastante utilizado e considera elementos unidimensionais de treliça ou de viga conectados aos nós e, preferivelmente, também às arestas dos elementos de concreto (ver figura 3.2). A rigidez do elemento discreto é sobreposta à rigidez do elemento de concreto, nos respectivos graus de liberdade.

Os métodos para incluir os efeitos de aderência são usualmente relacionados com a representação discreta da armadura. Elementos de mola ou elementos contínuos de contato são introduzidos entre o concreto e a armadura para considerar este efeito. Além da simplicidade da representação, este enfoque tem a vantagem de considerar possíveis deslocamentos da armadura em relação ao concreto envolvente, uma vez que as barras só afetam os graus de liberdade em que incidem.

Elementos finitos unidimensionais (figura 3.2) com diferentes graus de interpolação foram introduzidos no sistema computacional que aqui se apresenta.



**Figura 3.2:** Elemento de armadura discreta

## 3.3 Modelos de Armadura Embutida

Nos modelos de armadura embutida, a barra de aço é considerada um elemento unidimensional dentro do elemento de concreto. Os deslocamentos da barra, neste caso, devem ser

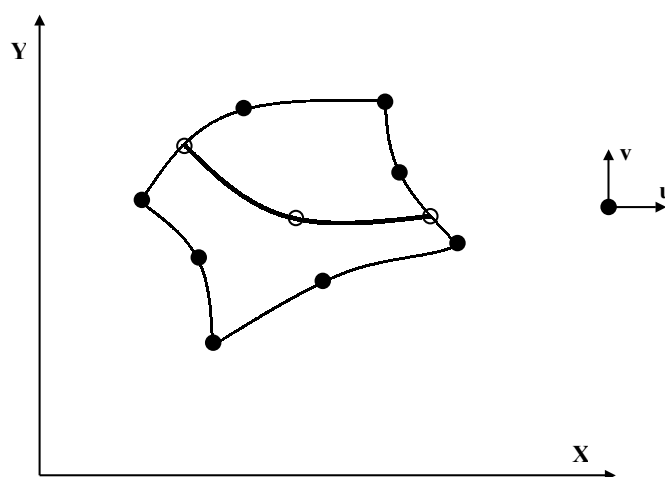
consistentes com os deslocamentos do elemento de concreto.

As formulações iniciais dos modelos de barra embutida supunham que o elemento unidimensional dentro do elemento principal mantém aderência perfeita com o concreto e seu posicionamento é tal que coincide com o sistema de coordenadas local do elemento principal (Gerstle et al. 1982).

Alguns trabalhos tentam remover as limitações da formulação de barra embutida. Pode-se considerar (Balakrishna & Murray 1987) os efeitos de aderência introduzindo nós extras ao longo da barra de armadura nos quais características de aderência são prescritas. Os graus de liberdade extras associados com os nós de aderência provocam aumento do número total de graus de liberdade.

Em outro trabalho (Allwood & Bajarwan 1989), desenvolveu-se um enfoque no qual a direção da barra no interior do elemento de concreto pode ser generalizada e efeitos de aderência também podem ser introduzidos.

Outros pesquisadores (Phillips & Wu 1990) optaram por introduzir nós artificiais nas barras de aço de modo que os graus de liberdade associados a estes nós sejam condensados e os efeitos de aderência estejam relacionados com os graus de liberdade do elemento de concreto.



**Figura 3.3:** Elemento de armadura embutida

O modelo de armadura embutida implementado no sistema em desenvolvimento foi o proposto por (Elwi & Hruday 1988). Neste modelo, uma barra com geometria curva genérica é

introduzida no elemento de concreto conforme ilustra a figura 3.3.

A formulação é baseada na descrição da geometria da camada de aço em relação ao sistema de coordenadas do elemento de concreto que a contém. O comportamento da camada de aço é descrito utilizando-se os graus de liberdade e as funções de interpolação do elemento de concreto e uma relação constitutiva apropriada para o aço.

A perda de aderência da barra de aço em relação ao concreto é tratada com a introdução de graus de liberdades adicionais, através da utilização da função de interpolação do elemento unidimensional curvo e uma relação tensão de aderência-escorregamento apropriada (ver seção 4.4).

Esta formulação apresenta a vantagem da independência entre a malha de elementos finitos e a localização e geometria das camadas de armadura.

Apresenta-se a seguir a formulação dos elementos embutidos disponibilizados no sistema.

### 3.3.1 Formulação Geométrica

As coordenadas globais  $(x, y)$  de qualquer ponto do elemento de concreto, mostrado na figura 3.4, podem ser expressas em termos das funções de interpolação dos deslocamentos  $\phi(\xi, \eta)$  do elemento por:

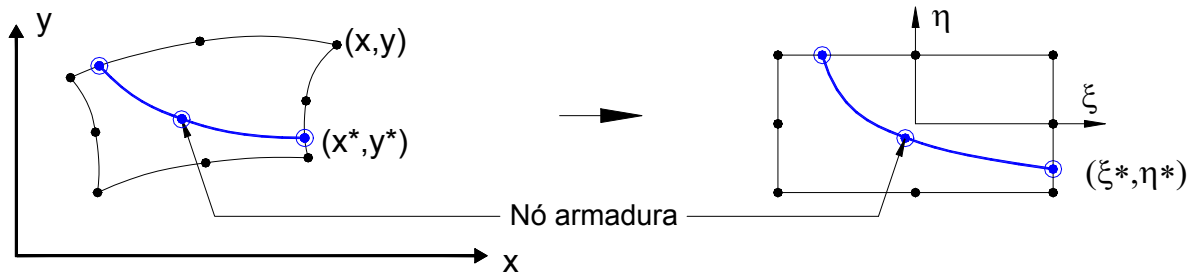
$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \phi \rangle & 0 \\ 0 & \langle \phi \rangle \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{y\} \end{Bmatrix} \quad (3.3.1)$$

onde  $\{x\}$  e  $\{y\}$  são os vetores com as coordenadas nodais do elemento. Os valores diferenciais das coordenadas  $x$  e  $y$  são calculados por:

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix} \quad (3.3.2)$$

onde  $[J]$  é a matriz da transformação jacobiana.

Para garantir a continuidade entre elementos, é necessário a presença de nós, nos pontos onde a armadura intercepta o elemento de concreto. As coordenadas dos pontos sobre a camada de armadura são obtidos por interpolação.

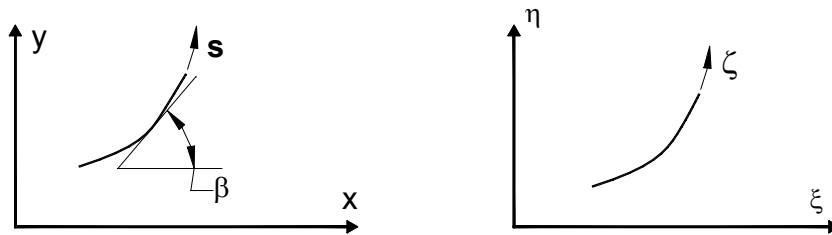


**Figura 3.4:** Armadura embutida curva

Sejam  $\{x^*\}$ ,  $\{y^*\}$  os vetores de coordenadas globais de todos os nós da camada de armadura, associados com um único elemento de concreto. As coordenadas de qualquer ponto sobre a camada de armadura são dadas por:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \psi \rangle & 0 \\ 0 & \langle \psi \rangle \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x^*\} \\ \{y^*\} \end{Bmatrix} \quad (3.3.3)$$

As funções de interpolação unidimensionais  $\psi$  são expressas em termos das coordenadas normalizadas independentes  $\zeta$  (figura 3.5). O grau das funções, bem como o número de nós da camada de armadura, na prática, depende da complexidade da geometria e da precisão, com a qual se deseja representá-la.



**Figura 3.5:** Coordenadas ao longo da camada de armadura

Vários termos da matriz de rigidez estão associados com a camada de armadura, bem como com o escorregamento devido à perda de aderência e requerem a realização de integração ao longo da camada. Assim, um elemento diferencial de comprimento  $ds$ , ao longo da camada, deve ser obtido. A orientação da tangente à camada (ver figura 3.5) é dada pelo ângulo  $\beta$ , para o qual

$$\langle \cos \beta \quad \sin \beta \rangle = \left\langle \frac{dx}{ds} \quad \frac{dy}{ds} \right\rangle \quad (3.3.4)$$

Desde que  $\cos^2 \beta + \sin^2 \beta = 1$ , têm-se

$$\frac{ds}{d\zeta} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\zeta}\right)^2} \quad (3.3.5)$$

na qual

$$\begin{Bmatrix} \frac{dx}{d\zeta} \\ \frac{dy}{d\zeta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \frac{d\psi}{d\zeta} \rangle & 0 \\ 0 & \langle \frac{d\psi}{d\zeta} \rangle \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x^*\} \\ \{y^*\} \end{Bmatrix} \quad (3.3.6)$$

Deste modo, os cossenos diretores da tangente em qualquer ponto ao longo da camada, assim como o fator  $\frac{ds}{d\zeta}$ , podem ser facilmente calculados usando as equações 3.3.3 à 3.3.6.

Um elemento diferencial de volume  $dV_s$  e um elemento diferencial de superfície  $dS_s$  da camada de armadura podem ser expressos em função de  $ds$ , da espessura do elemento  $t$ , da área da armadura por unidade de espessura  $A_s$  e do perímetro da camada de armadura por unidade de espessura  $O_s$ .

$$dV_s = t \cdot A_s \cdot ds \quad (3.3.7)$$

$$dS_s = t \cdot O_s \cdot ds \quad (3.3.8)$$

### 3.3.2 Mapeamento Inverso das Coordenadas Locais da Camada de Armadura

Para obtenção da matriz de rigidez do elemento de armadura embutida é necessário determinar a deformação no elemento de concreto para pontos sobre a camada de armadura.

Assim, para um ponto da camada com coordenadas globais  $(x, y)$ , deve-se ser capaz de determinar as coordenadas locais  $(\xi, \eta)$  associadas ao elemento de concreto.

O mapeamento entre o sistema local e global de coordenadas é dado na formulação isoparamétrica por

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \phi(\xi, \eta) \rangle & 0 \\ 0 & \langle \phi(\xi, \eta) \rangle \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{y\} \end{Bmatrix} \quad (3.3.9)$$

A forma inversa explicita da equação 3.3.9, normalmente, não é facilmente calculada. Entretanto, o mapeamento inverso pode ser feito numericamente. Neste trabalho, o referido mapeamento é feito através de um método iterativo baseado no processo de Newton-Raphson, proposto por (Elwi & Hrudehy 1988).

Considera-se que as coordenadas  $(\xi_p, \eta_p)$  correspondentes à um ponto de coordenadas  $(x_p, y_p)$  são as raízes da função

$$\{f(\xi, \eta)\} = \begin{Bmatrix} x_p \\ y_p \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \langle \phi \rangle & 0 \\ 0 & \langle \phi \rangle \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{y\} \end{Bmatrix} \quad (3.3.10)$$

Tais raízes podem ser determinadas usando o esquema iterativo de Newton-Raphson, para o qual a solução após  $n + 1$  iterações é dada por

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix}_p^{n+1} = \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix}_p^n + \begin{Bmatrix} \Delta\xi \\ \Delta\eta \end{Bmatrix}_p^{n+1} \quad (3.3.11)$$

onde

$$\begin{Bmatrix} \Delta\xi \\ \Delta\eta \end{Bmatrix}_p^{n+1} = -[J^n]^{T-1} \left( \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}_p - \begin{bmatrix} \langle \phi^n \rangle & 0 \\ 0 & \langle \phi^n \rangle \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{y\} \end{Bmatrix} \right) \quad (3.3.12)$$

com  $[J^n] = [J(\xi^n, \eta^n)]$  e  $\langle \phi^n \rangle = \langle \phi(\xi^n, \eta^n) \rangle$ .

### 3.3.3 Campo de Deformação

(Elwi & Hrudehy 1988) propõem que o incremento da deformação normal na direção tangente à camada de armadura seja calculado por:

$$\Delta\varepsilon_s = \frac{d\Delta w_b}{ds} + \Delta\varepsilon_x \cos^2 \beta + \Delta\varepsilon_y \sin^2 \beta + \Delta\gamma_{xy} \cos \beta \sin \beta \quad (3.3.13)$$

Na equação 3.3.13, os incrementos de deformação  $\Delta\varepsilon_x$ ,  $\Delta\varepsilon_y$  e  $\Delta\gamma_{xy}$  são obtidos diretamente dos incrementos do campo de deslocamentos do elemento de concreto. O primeiro termo da equação 3.3.13 representa a contribuição do escorregamento ( $w_b$ ). O incremento do

escorregamento ao longo da camada é interpolado como

$$\Delta w_b(\zeta) = \langle \psi(\zeta) \rangle \{ \Delta w_b^* \} \quad (3.3.14)$$

Assim, o incremento da deformação na armadura pode ser expressa da seguinte forma

$$\Delta \varepsilon_s = \left\langle \begin{matrix} \langle B_b \rangle & \langle B_s \rangle \end{matrix} \right\rangle \left\{ \begin{matrix} \{ \Delta w_b^* \} \\ \{ \Delta q \} \end{matrix} \right\} \quad (3.3.15)$$

onde

$$\{ B_b \} = \frac{d\zeta}{ds} \{ \psi_{,\zeta} \} \quad (3.3.16)$$

$$\{ B_s \} = \left\{ \begin{matrix} \cos^2 \beta \{ \phi'_{,x} \} + \cos \beta \sin \beta \{ \phi'_{,y} \} \\ \cos \beta \sin \beta \{ \phi'_{,x} \} + \sin^2 \beta \{ \phi'_{,y} \} \end{matrix} \right\} \quad (3.3.17)$$

e

$$\{ \Delta q \} = \left\{ \begin{matrix} \{ \Delta u \} \\ \{ \Delta v \} \end{matrix} \right\} \quad (3.3.18)$$

### 3.3.4 Matriz de Rigidez do Elemento de Armadura Embutida

A formulação é baseada na forma incremental do Princípio dos Trabalhos Virtuais e a deformação ocorre *somente* na direção ao longo da camada de armadura.

Quando a perda de aderência é considerada, a forma incremental do P. T. V. é

$$\delta \Delta W = \int_{V_s} (\sigma_s + \Delta \sigma_s) \delta \Delta \varepsilon_s dV + \int_{S_s} (\sigma_b + \Delta \sigma_b) \delta \Delta w_b dS \quad (3.3.19)$$

Segundo Balakrishna (Balakrishna & Murray 1987), a forma incremental da relação constitutiva da armadura pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_s &= E_s \Delta \varepsilon_s \\ \Delta \sigma_b &= E_b \Delta w_b \end{aligned} \quad (3.3.20)$$

onde  $E_s$  é o módulo tangente para a relação tensão-deformação do aço da armadura e  $E_b$  é o módulo tangente para a relação tensão-escorregamento da lei de aderência.

Usando as equações 3.3.20, a equação 3.3.19 pode ser escrita na forma:

$$\delta\Delta W = \int_S (\delta\Delta\varepsilon_s E_s \Delta\varepsilon_s A_s + \delta\Delta w_b O_s) t ds + \int_S (\delta\Delta\varepsilon_s \sigma_s A_s + \delta\Delta w_b \sigma_s O_s) t ds \quad (3.3.21)$$

Substituindo para  $\Delta\varepsilon_s$  e  $\Delta w_b$  vindos das equações 3.3.14 e 3.3.15, o incremento do trabalho virtual pode ser escrito na forma matricial

$$\delta\Delta W = \left\langle \begin{matrix} \langle \delta\Delta w_b^* \rangle & \langle \delta\Delta q \rangle \end{matrix} \right\rangle \left\{ \begin{matrix} [K_{bb}] & [K_{bs}] \\ [K_{sb}] & [K_{ss}] \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \{\Delta w_b^*\} \\ \{\Delta q\} \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \{Q_b\} \\ \{Q_s\} \end{matrix} \right\} \quad (3.3.22)$$

onde

$$[K_{bb}] = \int_{\zeta} (\{\psi\} E_b \langle \psi \rangle O_s + \{B_b\} E_s \langle B_b \rangle A_s) \frac{ds}{d\zeta} t d\zeta \quad (3.3.23)$$

$$[K_{bs}] = [K_{sb}]^T = \int_{\zeta} \{B_b\} E_s \langle B_s \rangle A_s \frac{ds}{d\zeta} t d\zeta \quad (3.3.24)$$

$$[K_{ss}] = \int_{\zeta} \{B_s\} E_s \langle B_s \rangle A_s \frac{ds}{d\zeta} t d\zeta \quad (3.3.25)$$

$$\{Q_b\} = \int_{\zeta} (\{B_b\} \sigma_s A_s + \{\psi\} \sigma_b O_s) \frac{ds}{d\zeta} t d\zeta \quad (3.3.26)$$

e

$$\{Q_s\} = \int_{\zeta} \{B_s\} \sigma_s A_s \frac{ds}{d\zeta} t d\zeta \quad (3.3.27)$$

As submatrizes  $[K_{ss}]$ ,  $[K_{bs}]$  e  $[K_{bb}]$  representam contribuições à rigidez e os vetores  $\{Q_b\}$  e  $\{Q_s\}$  são forças internas associadas as tensões  $\sigma_b$  e  $\sigma_s$ .

Combinando o incremento do trabalho virtual interno da camada de armadura, incluindo a contribuição do escorregamento, com aquele do elemento de concreto, têm-se:

$$\delta\Delta W_{ELM} = \left\langle \begin{matrix} \langle \delta\Delta w_b^* \rangle & \langle \delta\Delta q \rangle \end{matrix} \right\rangle \left( \begin{matrix} [K_{bb}] & [K_{bs}] \\ [K_{sb}] & [K_{ss}] + [K_{cc}] \end{matrix} \right) \left\{ \begin{matrix} \{\Delta w_b^*\} \\ \{\Delta q\} \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \{Q_b\} \\ \{Q_s\} - \{F\} - \{\Delta F\} \end{matrix} \right\} \quad (3.3.28)$$

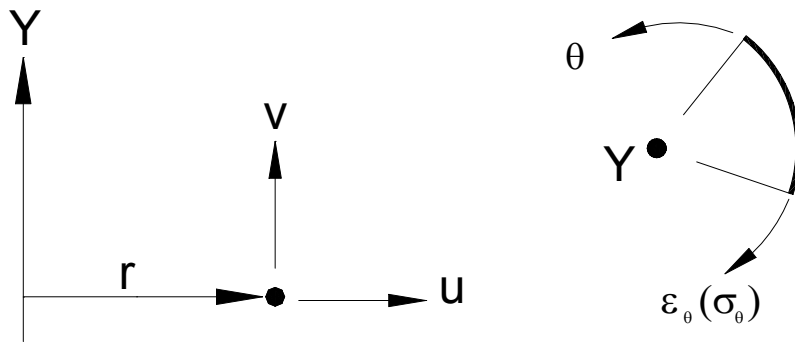


Os vetores  $\{F\}$  e  $\{\Delta F\}$  são vetores correspondentes às forças de corpo do elemento de concreto e  $[K_{cc}]$  é a rigidez do mesmo na ausência de armadura.

### 3.4 Modelo de Armadura Axissimétrico Pontual

Um outro importante elemento introduzido no sistema é o denominado axissimétrico pontual (figura 3.6). Pode ser caracterizado como pertencente à classe dos modelos discretos por ser introduzido à malha de elementos finitos diretamente sobre um nó.

É um elemento fundamental para a representação de anéis e espirais de aço existentes em estruturas de concreto armado de seção circular. A implementação deste elemento foi feita a partir do trabalho de (Liu & Foster 1998).



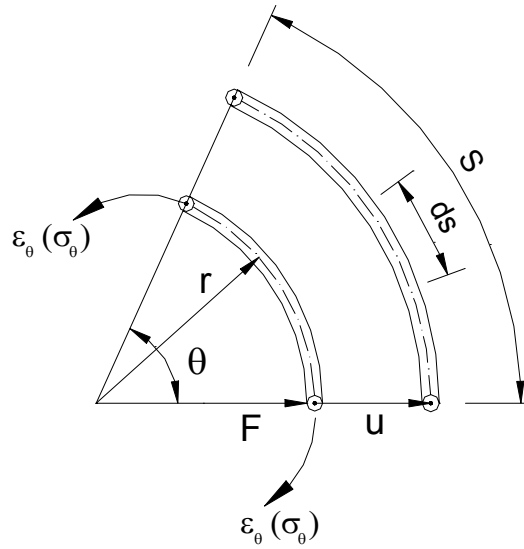
**Figura 3.6:** Elemento axissimétrico

Para o modelo axissimétrico, dado o raio  $r$  e o campo de deslocamentos  $\{q\} = \{ u \ v \}^T$ , as deformações são dadas por:

$$\{\varepsilon\} = \left\{ \varepsilon_r \quad \varepsilon_z \quad \varepsilon_\theta \right\}^T \quad (3.4.1)$$

Para o elemento axissimétrico pontual (ver figura 3.7) a equação 3.4.1 assume a seguinte forma:

$$\{\varepsilon\} = \left\{ 0 \quad 0 \quad \varepsilon_\theta \right\}^T \quad (3.4.2)$$



**Figura 3.7:** Elemento axissimétrico pontual

onde a deformação  $\varepsilon_\theta$  é dada por

$$\varepsilon_\theta = \frac{(r+u) \cdot \theta - r \cdot \theta}{r \cdot \theta} = \frac{(r+u-r) \cdot \theta}{r \cdot \theta} = \frac{u}{r} \quad (3.4.3)$$

E a tensão  $\sigma_\theta$

$$\sigma_\theta = C \cdot \varepsilon_\theta \quad (3.4.4)$$

onde  $C$  é a matriz constitutiva do material, que para o elemento axissimétrico pontual é dada por  $E_s$ .

Aplicando o Princípio dos Trabalhos Virtuais para o setor de 1 radiano, o trabalho interno  $W_i$  é

$$W_i = \int_V \delta \varepsilon_\theta \sigma_\theta dV = \int_0^S \int_A \delta \varepsilon_\theta \sigma_\theta dA_s ds = \int_0^S \delta \varepsilon_\theta \sigma_\theta A_s r d\theta = \delta \varepsilon_\theta \sigma_\theta A_s r \quad (3.4.5)$$

$$W_i = \frac{\delta u}{r} \cdot C \cdot \frac{u}{r} \cdot A_s \cdot r = \delta u \cdot \frac{C \cdot A_s}{r} \cdot u \quad (3.4.6)$$

O trabalho externo é dado por

$$W_e = F \cdot \delta u \quad (3.4.7)$$

Igualando o  $W_i = W_e$ , tem-se

$$\begin{aligned} \delta u \cdot \frac{C \cdot A_s}{r} \cdot u &= F \cdot \delta u \\ \delta u \left( \frac{C \cdot A_s}{r} \cdot u - F \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

para  $\delta u$  arbitrário

$$\frac{C \cdot A_s}{r} \cdot u = F \quad (3.4.9)$$

ou

$$k \cdot u = F \quad (3.4.10)$$

com

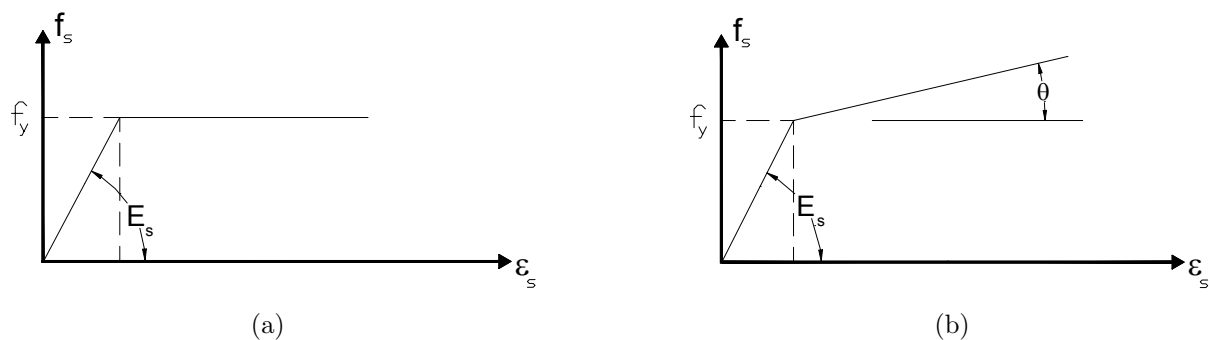
$$k = \frac{C \cdot A_s}{r} \quad (3.4.11)$$

Portanto, a rigidez do elemento axissimétrico pontual é dada pela equação 3.4.11.

### 3.5 Relações Tensão-Deformação para Armadura

As barras de aço das armaduras das peças de concreto armado são representadas através de modelos constitutivos elasto-plásticos unidimensionais, também disponibilizados no programa.

Nestes modelos, as relações tensão-deformação são caracterizadas por um trecho inicial elástico seguido de um patamar de escoamento.



**Figura 3.8:** Relações tensão-deformação para o aço

As curvas tensão-deformação são consideradas idênticas na compressão e na tração. A figura 3.8 mostra estas curvas.

O módulo de elasticidade longitudinal ( $E_s$ ), a tensão de escoamento ( $f_y$ ) e a inclinação do trecho posterior ao escoamento são os parâmetros necessários à completa caracterização do material.

# Capítulo 4

## MODELOS DE ADERÊNCIA

### 4.1 Introdução

Como já comentado, a utilização de elementos de armadura pertencentes à classe dos modelos discretos, requer a adição de elementos específicos para tratamento da perda de aderência, diferentemente dos elementos embutidos onde tal fenômeno pode ser automaticamente introduzido. Assim, foram disponibilizados no sistema elementos finitos de molas e de contato.

### 4.2 Modelo de Perda de Aderência de Molas

A perda de aderência pode ser tratada através da introdução de duas molas ortogonais ligando os nós do concreto e do aço, conforme mostra a figura 4.1. O comportamento da região da interface concreto-aço é representado através de relações tensão-escorregamento apropriadamente associadas a cada uma das molas (ver seção 4.4).

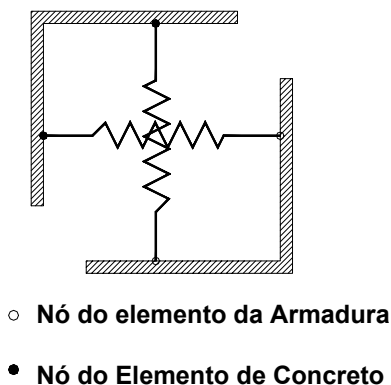
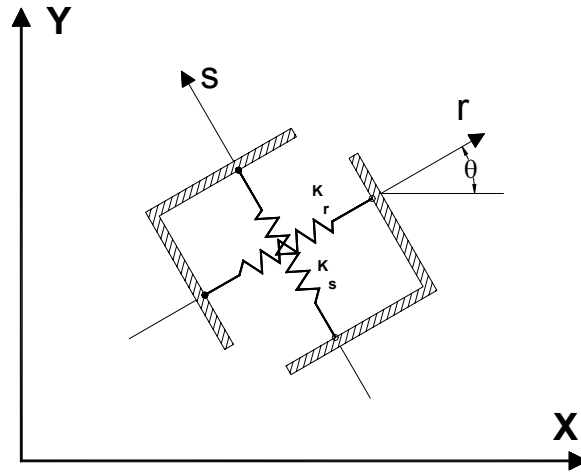


Figura 4.1: Elemento finito de molas

O elemento de molas pode ter uma orientação qualquer em relação ao eixo horizontal, expressa pelo ângulo  $\theta$ . O elemento de mola não tem *dimensão física* e somente suas propriedades mecânicas são de importância.

Por não ter dimensão física, os nós de incidência do elemento de mola mantêm a mesma posição espacial.



**Figura 4.2:** Sistema de coordenadas para o elemento de mola

A relação entre as tensões e os deslocamentos relativos para o elemento é dada por:

$$\begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_r & 0 \\ 0 & k_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_r \\ \Delta_s \end{Bmatrix} \quad (4.2.1)$$

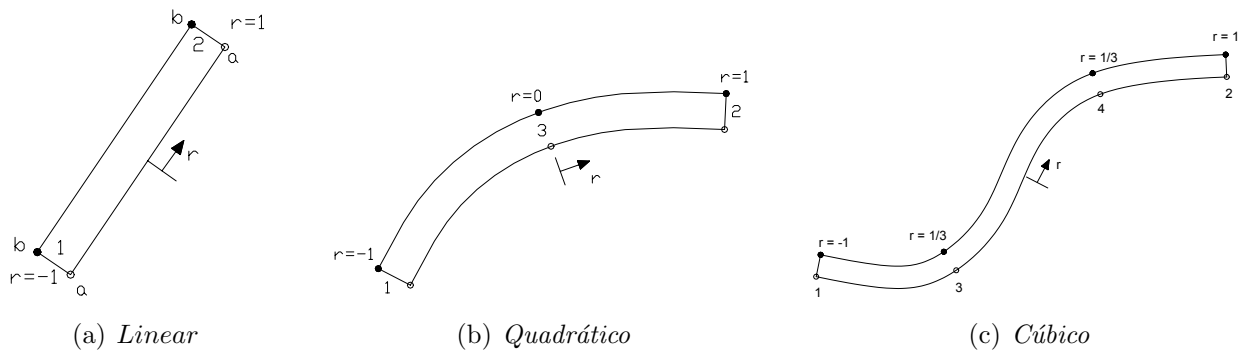
onde,  $k_r$  e  $k_s$  são os coeficientes de rigidez da mola na direção  $r$  e  $s$ , respectivamente (ver figura 4.2). Os valores de  $k_r$  e  $k_s$  são obtidos a partir de curvas tensão-escorregamento representativas de resultados experimentais.

### 4.3 Modelo de Perda de Aderência de Contato

Um outro grupo de elementos disponibilizados no sistema foi o grupo de elementos de contato proposto por (Mehlhorn & Keuser 1986). Elementos com diferentes graus de interpolação são usados para simular o comportamento unidimensionalmente contínuo da perda de aderência no contato entre os materiais.

A figura 4.3 mostra os elementos implementados. Como se pode observar nesta figura, o deslocamento relativo (normal ou tangencial) em qualquer ponto da camada de contato pode ser obtido interpolando-se de forma linear, quadrática ou cúbica os valores dos mesmos nos nós.

Novamente, o comportamento constitutivo da região de contato é representado através de relações tensão-escorregamento apropriadas, discutidas na seção 4.4.



**Figura 4.3:** Elementos finitos de contato

Diferentemente do elemento de mola, o elemento de contato tem uma dimensão finita e, portanto, mantém uma conexão contínua entre dois materiais.

O elemento é isoparamétrico e na posição indeformada não tem dimensão física na direção transversal. Portanto, os nós possuem as mesmas coordenadas.

Os deslocamentos  $\underline{u}$  de qualquer ponto do elemento estão relacionados aos deslocamentos nodais  $\underline{u}_i$  pelas funções de forma (ver equação 4.3.1 ).

$$\begin{aligned} u(r) &= \sum_{i=1}^n N_i(r) \cdot u_i \\ v(r) &= \sum_{i=1}^n N_i(r) \cdot v_i \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

ou na forma matricial,

$$\underline{u} = \underline{N} \cdot \underline{u}_i \quad (4.3.2)$$

Tão logo, a estrutura seja solicitada, deslocamentos relativos  $\underline{\Delta}$  entre os pontos  $i$  e  $k$  podem

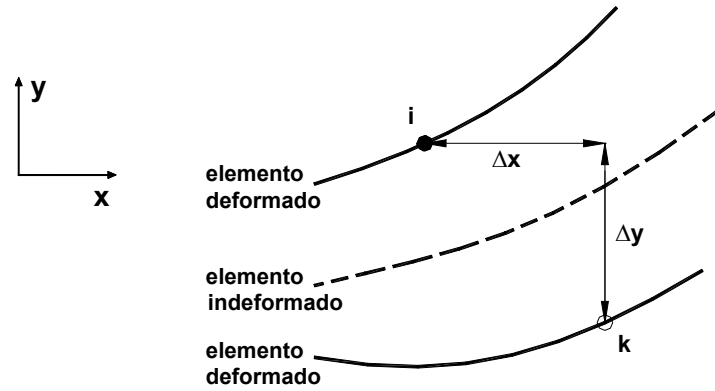


Figura 4.4: Deslocamento relativo

ocorrer (veja figura 4.4). Os deslocamentos relativos são dados por:

$$\begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix} \quad (4.3.3)$$

$$\underline{\Delta} = \underline{A} \cdot \underline{u}$$

Substituindo a equação 4.3.2 na equação 4.3.3 obtém-se:

$$\begin{aligned} \underline{\Delta} &= \underline{A} \cdot \underline{N} \cdot \underline{u}_i \\ \underline{\Delta} &= \underline{B} \cdot \underline{u}_i \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

com

$$\underline{B} = \underline{A} \cdot \underline{N} \quad (4.3.5)$$

Analogamente à equação 4.3.3, as tensões nos pontos  $P_i$  e  $P_k$  são relacionadas às tensões de aderência  $\sigma$  entre os elementos, por:

$$\begin{bmatrix} P_{xi} \\ P_{yi} \\ P_{xk} \\ P_{yk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{bmatrix} \quad (4.3.6)$$

$$\underline{P} = \underline{A}^T \cdot \underline{\sigma}$$

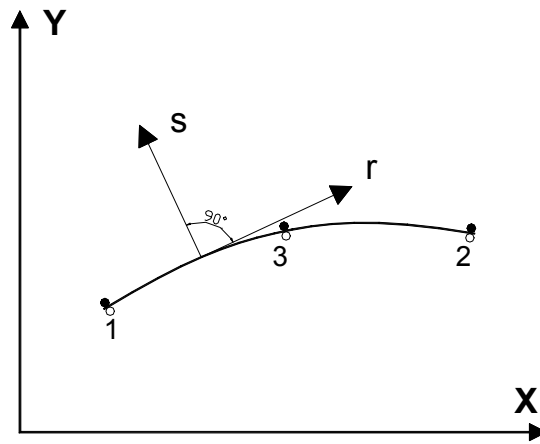


Os deslocamentos relativos, referidos ao sistema local de coordenadas ( $\underline{\Delta}^L$ ), podem ser obtidos através da transformação

$$\begin{bmatrix} \Delta_r \\ \Delta_s \end{bmatrix} = \underline{T} \begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{bmatrix} \quad (4.3.7)$$

$$\underline{\Delta}^L = \underline{T} \cdot \underline{\Delta}$$

onde  $\underline{T}$  é formada pelos cossenos diretores do sistema local de coordenadas (ver figura 4.5).



**Figura 4.5:** Sistema global e local para o elemento de contato

De maneira semelhante, as tensões referidas ao sistema global de coordenadas podem ser obtidas por:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{bmatrix} = \underline{T}^T \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_s \end{bmatrix} \quad (4.3.8)$$

ou

$$\underline{\sigma} = \underline{T}^T \cdot \underline{\sigma}^L \quad (4.3.9)$$

A relação entre as tensões de contato e os deslocamentos relativos, no sistema local é

expressa por:

$$\begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{rr} & C_{rs} \\ C_{sr} & C_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_r \\ \Delta_s \end{bmatrix} \quad (4.3.10)$$

$$\underline{\sigma}^L = \underline{C}^L \cdot \underline{\Delta}^L$$

No caso em que o comportamento nas três direções é independente entre si, a matriz constitutiva do material assume a seguinte forma

$$C^L = \begin{bmatrix} C_{rr} & 0 \\ 0 & C_{ss} \end{bmatrix} \quad (4.3.11)$$

onde  $C_{rr}$  e  $C_{ss}$  são módulos de aderência nas direções  $r$  e  $s$ , respectivamente.

A matriz de rigidez é obtida transformando a matriz  $\underline{C}^L$  do sistema local para o sistema global de coordenadas. Então, a matriz de rigidez do elemento  $\underline{K}^e$  e o vetor de forças nodais do elemento  $\underline{F}^e$  podem ser transferidos para a matriz de rigidez da estrutura e para o vetor de forças nodais da estrutura.

$$\underline{C} = \underline{T}^T \cdot \underline{C}^L \cdot \underline{T} \quad (4.3.12)$$

$$\underline{K}^e = \int_A \underline{B}^T \cdot \underline{C} \cdot \underline{B} \cdot dA \quad (4.3.13)$$

$$\underline{F}^e = \int_A \underline{B}^T \cdot \underline{\sigma} \cdot dA \quad (4.3.14)$$

e

$$\underline{\sigma} = \underline{C} \cdot \underline{\Delta} \quad (4.3.15)$$

O diferencial  $dA$  para elemento unidimensional é

$$dA = t \cdot \det J \cdot dr \quad (4.3.16)$$

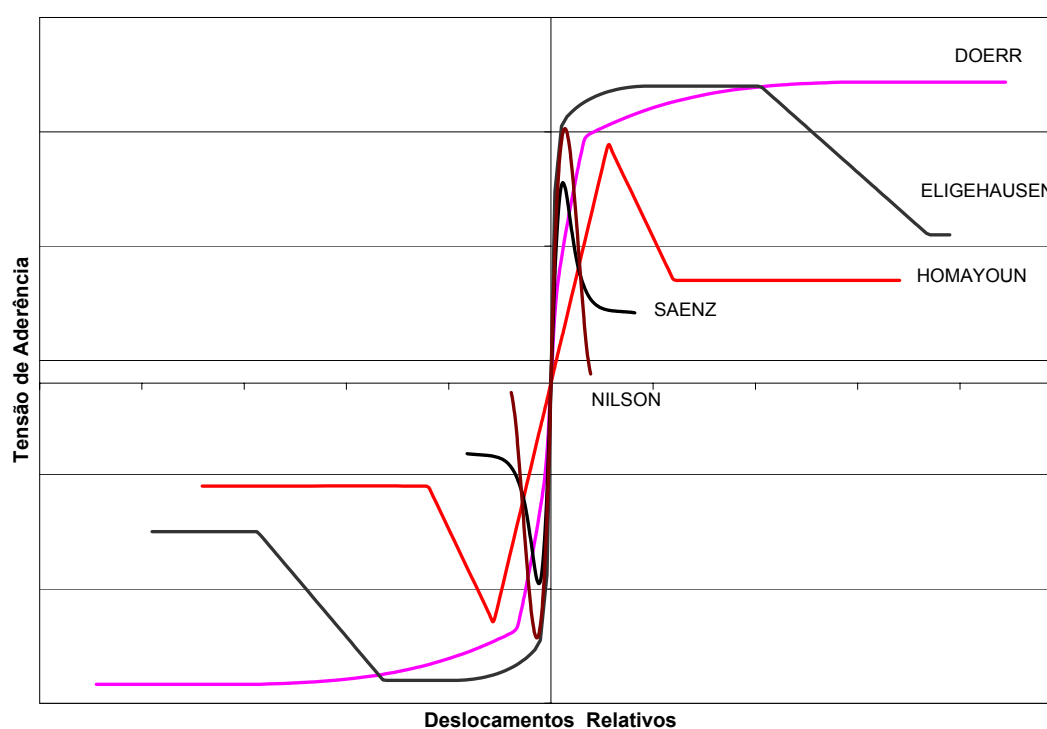
onde  $t$  é a espessura da superfície de contato e  $\det J$  é o determinante do Jacobiano.

A integração das equações acima é deve ser realizada sobre a superfície de contato.

## 4.4 Relações Tensão-Escorregamento

Os elementos de molas e de contato utilizados no modelamento discreto da armadura, bem como o elemento finito de armadura embutida, requerem a descrição do comportamento da região de interface concreto-aço segundo leis tensão-escorregamento.

No sistema em desenvolvimento foram disponibilizadas relações constitutivas propostas por diversos autores (Doerr 1978, Eligehausen, Popov & Bertero 1983, Saenz 1964, Nilson 1968, Homayoun & Mitchell 1996). Os gráficos representativos das leis implementadas estão mostrados na figura 4.6.



**Figura 4.6:** Leis de aderência implementadas

# Capítulo 5

## IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

### 5.1 Introdução

A implementação computacional dos modelos propostos neste trabalho foi realizada seguindo a filosofia de programação orientada a objetos.

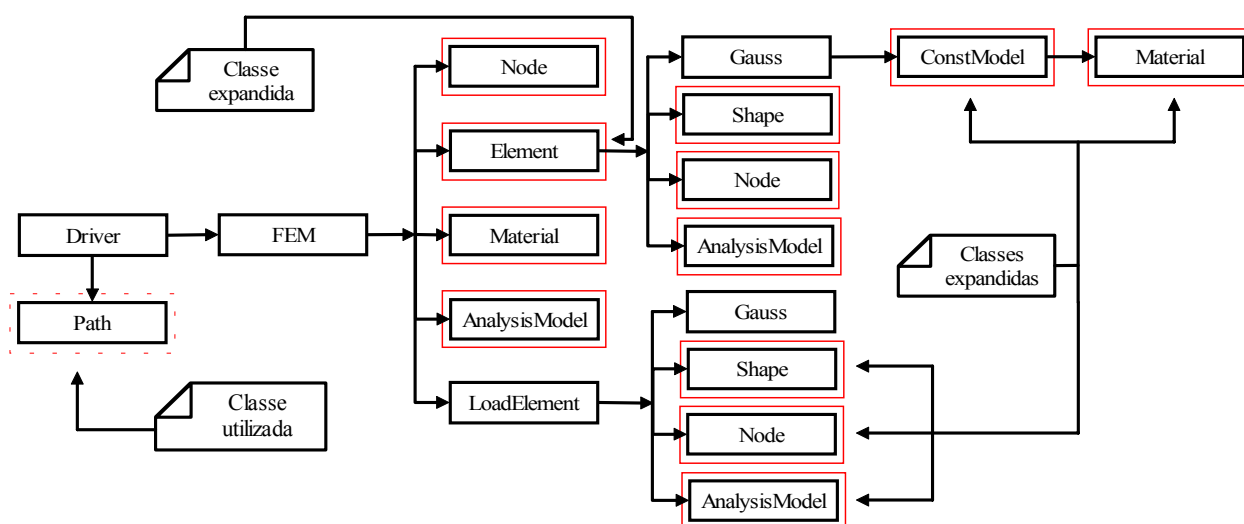
Utilizou-se o **FEMOOP** ("*Finite Element Method - Object Oriented Program*"), um programa de elementos finitos que teve desenvolvimento inicial no Departamento de Engenharia Civil da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (*PUC – Rio*).

A metodologia de implementação adotada facilitou o trabalho de expansão e manutenção, de tal maneira que os novos modelos foram implementados sem alterações nos recursos já existentes.

A figura 5.1 (Pitangueira 1998) mostra, simplificada, a organização das superclasses do programa, destacando-se as classes utilizadas sem qualquer alteração, bem como as classes que foram expandidas para a implementação dos modelos propostos neste trabalho.

A classe *Driver* é responsável pela definição do tipo de problema a ser solucionado (mecânico, temperatura, etc.), inicializa os objetos da classe *FEM* ("*Finite Element Method*") e da classe *Path*.

A classe *Path* é a responsável pela solução de problemas lineares ou não-lineares através de algoritmos apropriados de obtenção de trajetória de equilíbrio (controle de carga, deslocamentos, comprimento de arco, etc.), conforme visto no capítulo 2.



**Figura 5.1:** Instâncias de classes do *FEMOOP*

A discretização espacial do domínio em elementos finitos fica a cargo da classe *FEM* que contém métodos para montagem de matrizes e vetores globais bem como impressão de resultados.

A responsável pelos dados e métodos que dependem unicamente do tipo de análise escolhido (estado plano de tensões e deformações, sólido, axissimétrico, etc.) é a classe *AnalysisModel*.

A classe *Material* descreve os materiais que compõem a discretização através de métodos para a leitura dos dados e para consulta de todos os parâmetros.

As informações relativas aos nós (coordenadas, condições de suporte, carregamento, etc.) são de responsabilidade da classe *Node* que possui métodos para numeração dos graus de liberdade do modelo bem como para consulta e atribuição de valores nodais.

A classe *Shape* responde pelas funções de mapeamento, pela conectividade dos elementos e pelo cálculo do jacobiano.

A classe *Gauss* responde por coordenadas e pesos dos pontos de integração numérica como também responde pelo estado constitutivo do material naquele ponto.

A classe *LoadElement* utiliza os métodos da classe *Shape* e da classe *Gauss* para efeito de cálculo de forças equivalentes nodais.

A classe *ConstModel* é responsável pelo cálculo de tensões e modificação das relações constitutivas dos materiais.

Como mencionado anteriormente, alguns recursos já encontravam-se implementados no *FEMOOP*. Dentre tais recursos, este trabalho utilizou, sem qualquer alteração, os métodos de controle da análise não-linear, discutidos na seção 2.2, e os modelos constitutivos discutidos na seção 2.3.

## 5.2 Expansão do *FEMOOP*

Para implementação dos modelos de armadura e de aderência foi necessário expandir algumas classes do *FEMOOP*.

Como destacado na figura 5.1 as classes expandidas foram: *Node*, *Element*, *Material*, *AnalysisModel*, *Shape* e *ConstModel*.

### 5.2.1 Classe *Node*

O sistema considera que todos os nós da discretização possuem graus de liberdade vinculados aos mesmos. Entretanto, no caso do elemento embutido, quando não se considera a aderência, os nós da camada de armadura são utilizados apenas para a representação geométrica da mesma.

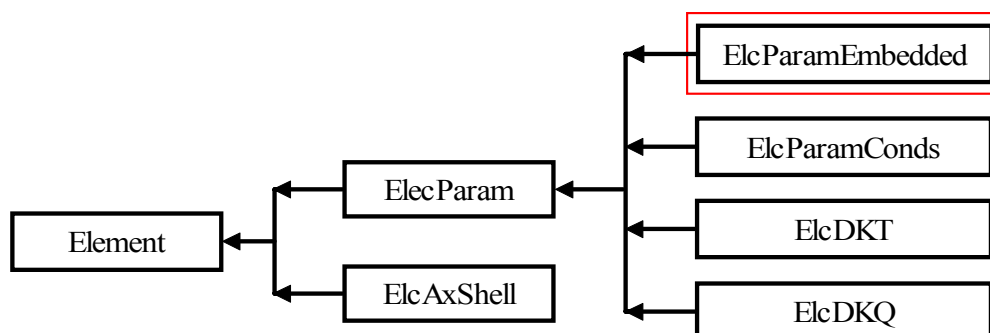
Desde modo, a alteração na classe *Node* objetivou identificar os nós da camada de armadura, que não estão associados a nenhum estado de tensão, caracterizando-os como nós de geometria.

### 5.2.2 Classe *Element*

Como pode ser visto na figura 5.2, e mostrado nas formulações (ver capítulos 3 e 4), todos os elementos destinados ao modelamento de armadura e perda de aderência têm formulação isoparamétrica, já disponível no sistema.

Entretanto, o elemento finito de armadura embutida foi implementado como uma combinação dos elementos isoparamétricos plano (para o concreto), de barra (para a armadura) e

de contato (para a aderência). Por este motivo foi necessário criar a classe derivada *ElcParamEmbed*, destacada na figura 5.2.



**Figura 5.2:** Expansão da hierarquia da classe *Element*

Tal procedimento foi necessário porque, como dito anteriormente, a estrutura do *FEMOOP* considera que cada elemento finito possui apenas uma lei constitutiva e é constituído por apenas um material. No caso do elemento embutido, não há dúvidas de que é obrigatório uma lei constitutiva diferente para o concreto, para a armadura e para a região de interface entre ambos.

### 5.2.3 Classe *Material*

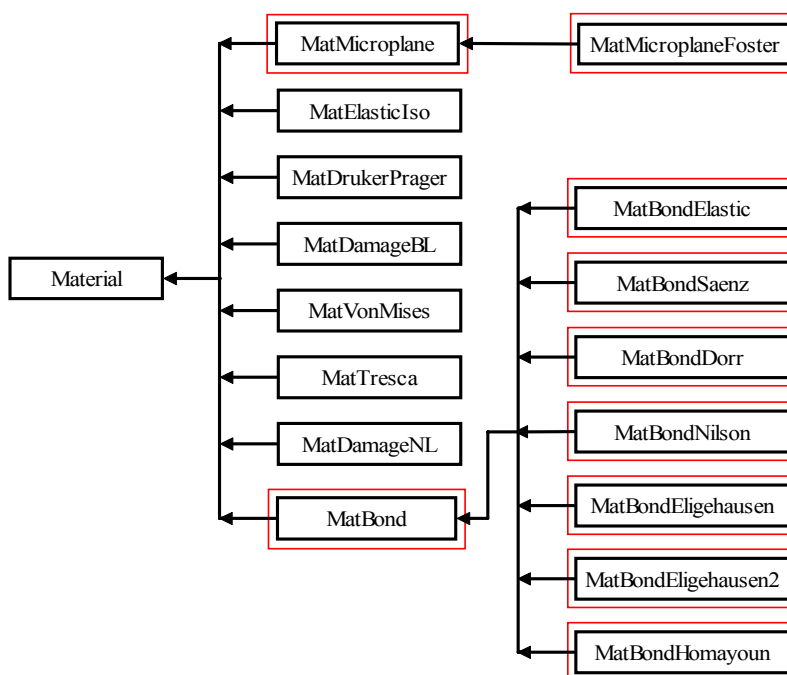
A figura 5.3 mostra a hierarquia da classe *Material*, a qual foi expandida para considerar os diferentes materiais de aderência e microplano.

A partir da classe *MatMicroplane*, que gerencia os parâmetros dos modelos de microplano, foi derivada a classe *MatMicroplaneFoster* a qual contempla o modelo de microplanos discutido na seção 2.3.2.

A figura 5.3 também mostra a expansão da classe *MatBond*, que é responsável pelo gerenciamento dos parâmetros necessários à descrição das diversas leis constitutivas de aderência.

### 5.2.4 Classe *AnalysisModel*

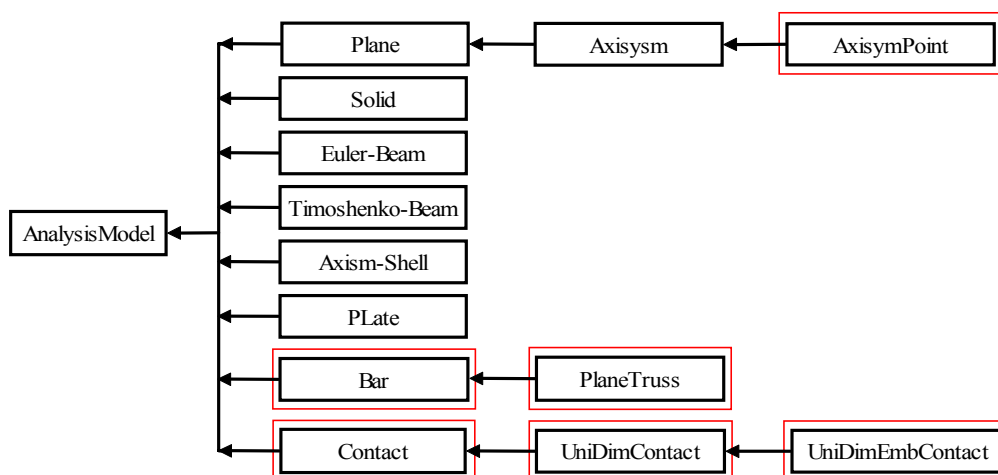
A expansão da classe *AnalysisModel* (figura 5.4) envolveu a criação das classes *PlaneTruss* (usada para as barras dos modelos de armadura discreta e embutida), *UnidimContact* (usada



**Figura 5.3:** Expansão da hierarquia da classe *Material*

pelo modelo de molas (contato em um ponto) e pelo modelo de contato), *UnidimEmbContact* (usada para o modelamento da aderência do modelo de armadura embutida) e *AxisymPoint* (usada pelo modelo axissimétrico pontual).

A criação da classe adicional *UnidimEmbContact* se deveu à diferença entre as fórmulas de cálculo do deslizamento entre aço e concreto adotadas no modelo de armadura embutida e no modelo de contato.

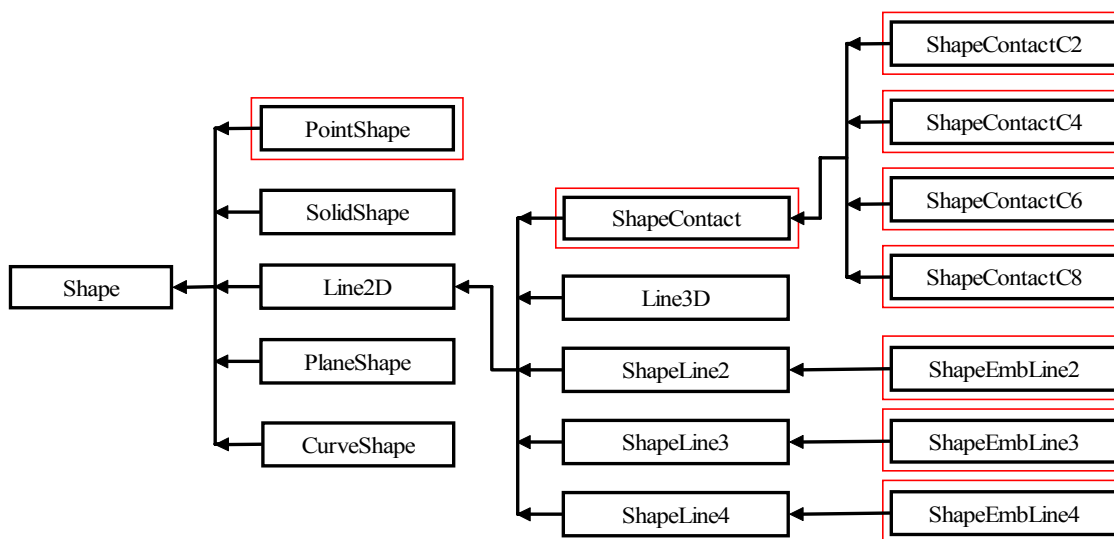


**Figura 5.4:** Expansão da hierarquia da classe *AnalysisModel*



### 5.2.5 Classe *Shape*

Como a classe *Shape* é a classe responsável por guardar a conectividade dos elementos finitos e como a conectividade de cada um dos modelos de armadura e aderência tem características particulares, foram criadas subclasses distintas para cada caso (figura 5.5).



**Figura 5.5:** Expansão da hierarquia da classe *Shape*

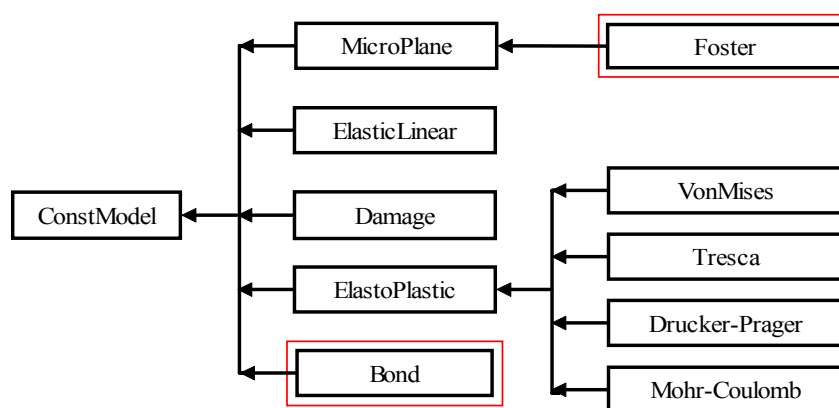
No caso do modelo de armadura discreta, foram usadas as subclasses *ShapeLine2*, *ShapeLine3* e *ShapeLine4* responsáveis, respectivamente, por funções de interpolação linear, quadrática e cúbica de elementos axialmente deformáveis. Para o modelo de armadura embutida, que envolve a combinação de análise de estado plano para o concreto, de barra para o aço e de contato unidimensional para a aderência foram criadas as subclasses *ShapeEmbLine2*, *ShapeEmbLine3* e *ShapeEmbLine4*.

No caso do modelo axissimétrico pontual, cuja conectividade se reduz a um nó da malha de elementos finitos, criou-se a subclasse *PointShape*.

Para o modelo de molas (contato em um ponto) e de contato, que têm conectividades associadas à existência de uma camada sem dimensão transversal inicial (ver seção 4.3) foram criadas as classes *ShapeContactC2*, *ShapeContactC4*, *ShapeContactC6* e *ShapeContactC8*.

### 5.2.6 Classe *ConstModel*

A hierarquia da classe *ConstModel* (figura 5.6) também foi expandida para tratamento da perda de aderência nos modelos de armadura embutida, de molas e de contato, bem como para considerar o modelo de microplano proposto por (Liu & Foster 1998).



**Figura 5.6:** Expansão da hierarquia da classe *ConstModel*

A classe *Bond*, derivada de *ConstModel*, implementa o cálculo das tensões globais e dos tensores constitutivos tangente e secante segundo as diversas leis de aderência disponibilizadas (ver seção 4.4). Esta classe se auxilia da classe *MatBond*, derivada de *Material* de modo a gerenciar os parâmetros que definem as referidas leis.

Da mesma forma, a classe *Foster* foi derivada da classe *MicroPlane* tendo em vista as alterações introduzidas no cálculo das tensões pelo modelo de microplano proposto por (Liu & Foster 1998). Todas as classes derivadas de *ConstModel* fazem uso da classe material para obterem os parâmetros que caracterizam cada modelo a elas associados.

### 5.2.7 Síntese da Expansão

A tabela 5.1 resume as subclasses das classes *Element*, *Material*, *AnalysisModel*, *Shape* e *ConstModel* que foram utilizadas para disponibilizar os modelos de armadura discreta, embutida e axissimétrico pontual e os modelos de aderência de mola e de contato.

Estas subclasses podem ser vistas nos diagramas de herança das figuras 5.2, 5.3, 5.4, 5.5 e 5.6.

**Tabela 5.1:** Subclasses criadas para inclusão dos modelos de armadura e aderência

Modelo Implementado	classe <i>Element</i> (figura 5.2)	classe <i>Material</i> (figura 5.3)	classe <i>AnalysisModel</i> (figura 5.4)	classe <i>Shape</i> (figura 5.5)	classe <i>ConstModel</i> (figura 5.6)
<b>Armadura Discreta</b>	<i>ElcParam</i>	<i>MatVonMises</i>	<i>PlaneTruss</i>	<i>ShapeLine2</i> <i>ShapeLine3</i> <i>ShapeLine4</i>	<i>Elasto-Plástico</i>
<b>Armadura Embutida</b>	<i>ElcParamEmbed</i>	<i>MatMicroplane</i> e <i>MatDamage</i> (concreto) <i>MatVonMises</i> (aço) <i>MatBond</i> (aderência)	<i>Plane</i> (concreto) <i>PlaneTruss</i> (aço) <i>UnidimEmbContact</i> (aderência)	<i>ShapeEmbLine2</i> <i>ShapeEmbLine3</i> <i>ShapeEmbLine4</i>	<i>Microplane</i> e <i>Damage</i> (concreto) <i>Elasto-Plástico</i> (aço) <i>Bond</i> (aderência)
<b>Axissimétrico Pontual</b>	<i>ElcParam</i>	<i>MatVonMises</i>	<i>AxisymmetricPoint</i>	<i>PointShape</i>	<i>Elasto-Plástico</i>
<b>Molas</b>	<i>ElcParam</i>	<i>MatBond</i>	<i>UnidimContact</i>	<i>ShapeContactC2</i>	<i>Bond</i>
<b>Contato</b>	<i>ElcParam</i>	<i>MatBond</i>	<i>UnidimContact</i>	<i>ShapeContactC4</i> <i>ShapeContactC6</i> <i>ShapeContactC8</i>	<i>Bond</i>

# Capítulo 6

## VALIDAÇÃO DOS MODELOS IMPLEMENTADOS

### 6.1 Introdução

Este capítulo apresenta duas simulações numéricas que visam validar os modelos e os elementos implementados.

Na primeira simulação, um anel de concreto armado foi analisado usando os modelos de armadura discreta e embutida. Em ambos os modelos, considerou-se tanto a aderência perfeita, quanto a perda de aderência entre os materiais. Neste último caso, adotou-se elementos de contato e de molas.

O anel foi modelado, primeiramente, com uma única camada de armadura (seção 6.2), e posteriormente foi modelado com duas camadas de armadura (seção 6.3).

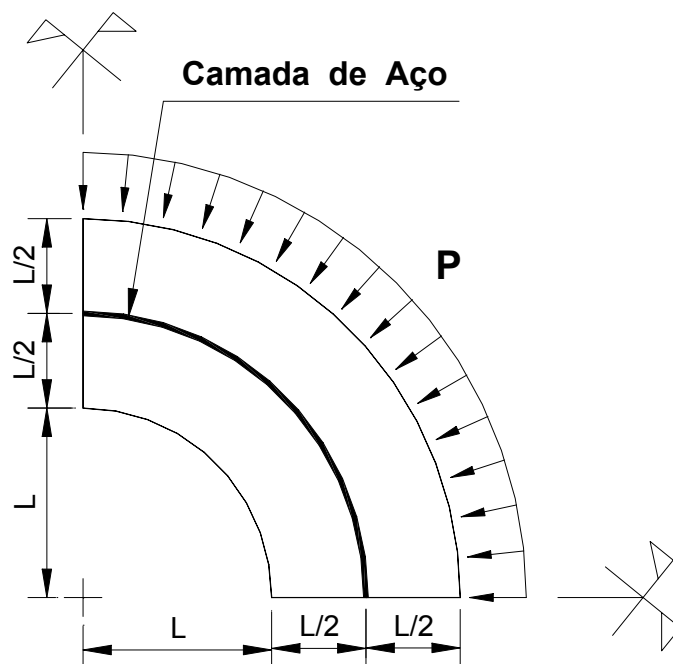
Na segunda simulação, analisou-se um pilar de seção circular (seção 6.4) visando validar o modelo de armadura axissimétrico pontual.

Em ambas as simulações adotou-se materiais lineares-elásticos, tanto na representação do concreto, quanto do aço e da região de interface concreto-aço.

### 6.2 Anel com uma Camada de Armadura

A figura 6.1 mostra o anel de concreto com uma camada de armadura adotada para esta simulação. Os valores dos parâmetros usados foram tais que:  $A_s/L = 0.025$ ,  $O_s = 0.45$ ,

$E_s/E_c = 8$ ,  $\nu = 0.25$ ,  $E_b L/E_s = 0.27$ ,  $E_s = 2.1 \times 10^5 \text{ MPa}$  e  $P = 100 \text{ MN/m}$ .



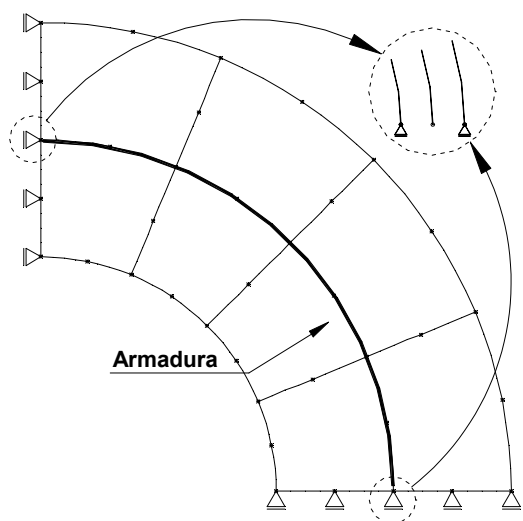
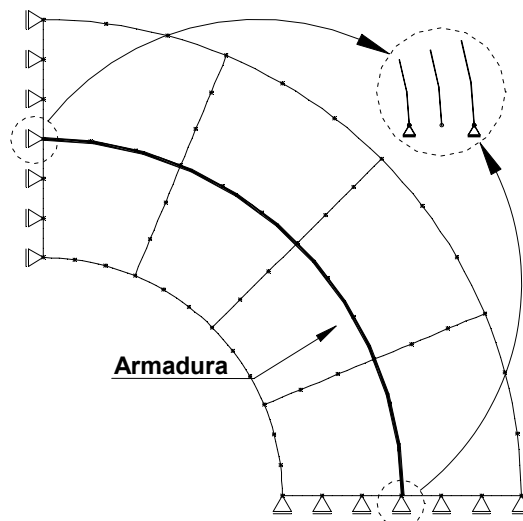
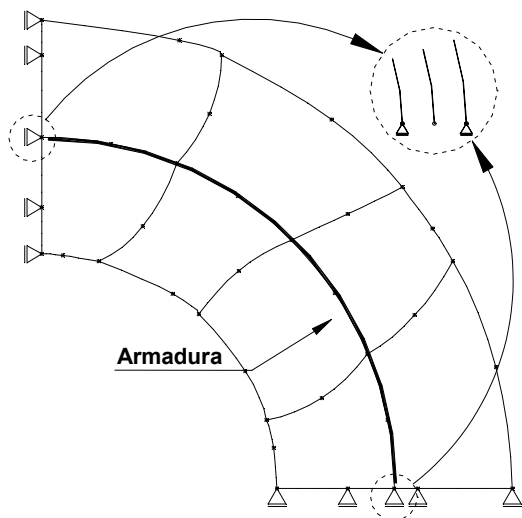
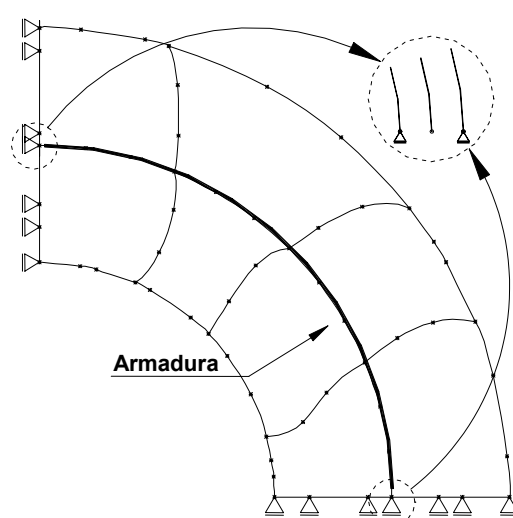
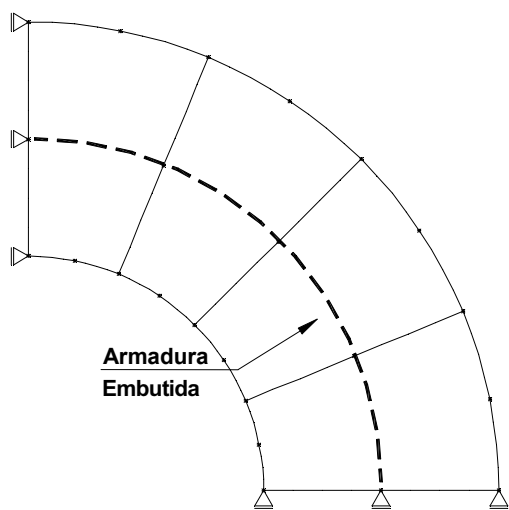
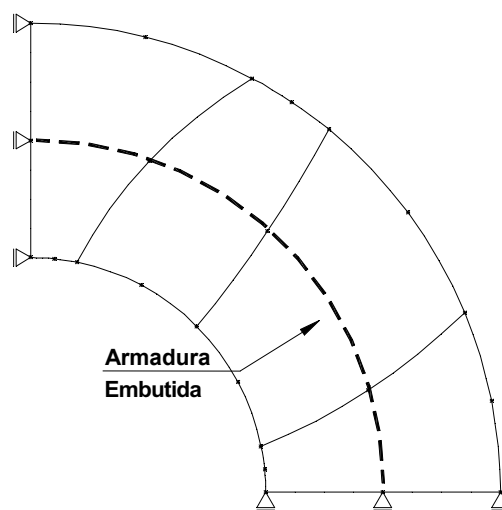
**Figura 6.1:** Anel de concreto armado com uma camada de aço

A figura 6.2 mostra as malhas adotadas no estudo, conforme a seguinte denominação:

- *MRD1* e *MRD2*: malhas com geometria regular e armadura discreta.
- *MID1* e *MID2*: malhas com geometria irregular e armadura discreta.
- *MRE1*: malha com geometria regular e armadura embutida.
- *MIE1*: malha com geometria irregular e armadura embutida.

Conforme mostra a figura 6.2, para as malhas com armadura discreta usaram-se 4 elementos de barra para representar a armadura. As malhas *MRD1* e *MID1* são compostas de 8 elementos quadriláteros de 8 nós para representar o concreto e elementos de barra de 3 nós para representar a armadura. Nas *MRD2* e *MID2* são usados 8 elementos de 12 nós para representar o concreto e elementos de barra de 4 nós para simular a armadura.

Quando a perda de aderência é levada em conta, é necessário para o modelo discreto o uso de elementos específicos, sejam elementos de mola ou de contato. Neste caso, para as malhas *MRD1* e *MID1* empregaram-se elementos de contato de 6 nós e, para as malhas *MRD2* e

(a) *Malha MRD1*(b) *Malha MRD2*(c) *Malha MID1*(d) *Malha MID2*(e) *Malha MRE1*(f) *Malha MIE1*

**Figura 6.2:** Malhas para análise do anel com uma camada de armadura

*MID2*, elementos de contato de 8 nós. Para representação da perda de aderência através de molas, cada nó da interface recebeu um elemento.

As malhas *MRE1* e *MIE1* foram usadas com o modelo de armadura embutida. Ambas são formadas por 4 elementos de 8 nós. Neste caso, não há a necessidade de compatibilizar os nós do elemento de concreto com os nós do elemento de barra, podendo-se representar a barra embutida com 3 e 4 nós.

Para cada malha mostrada na figura 6.2 adotou-se uma integração  $2 \times 2$ ,  $3 \times 3$  e  $4 \times 4$  para o concreto e 2, 3 e 4 pontos de integração para a armadura e aderência, quando esta foi considerada.

Apresentam-se a seguir, os resultados de tensão  $\sigma$  ao longo da camada de aço, normalizados como  $\sigma \cdot A_s / P \cdot L$ , para os vários modelos descritos acima.

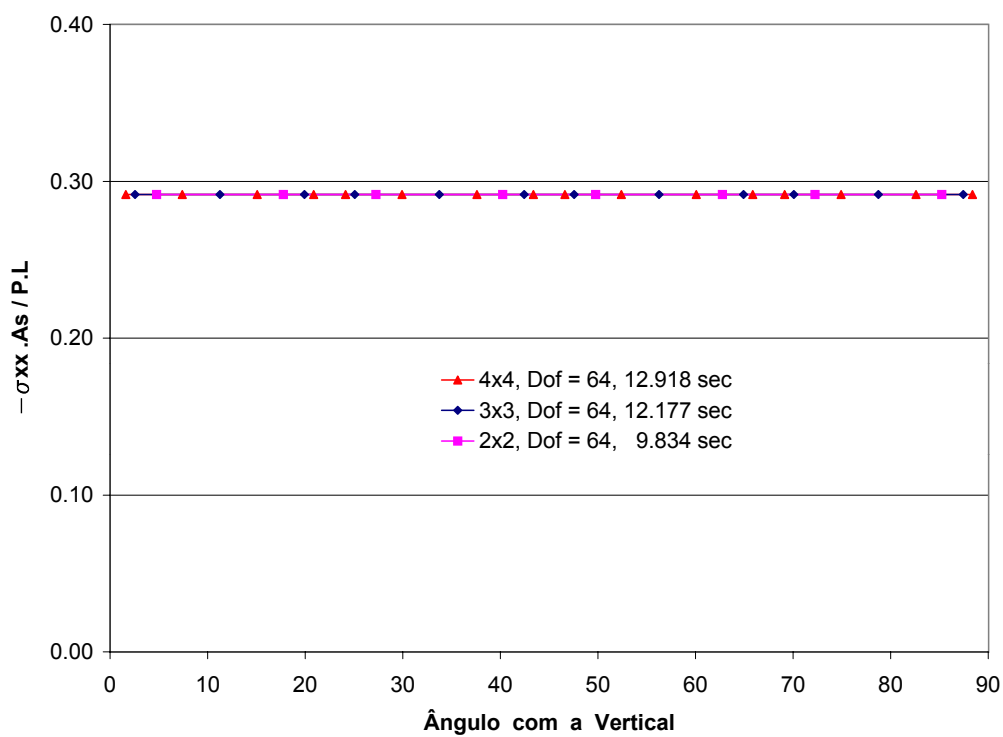
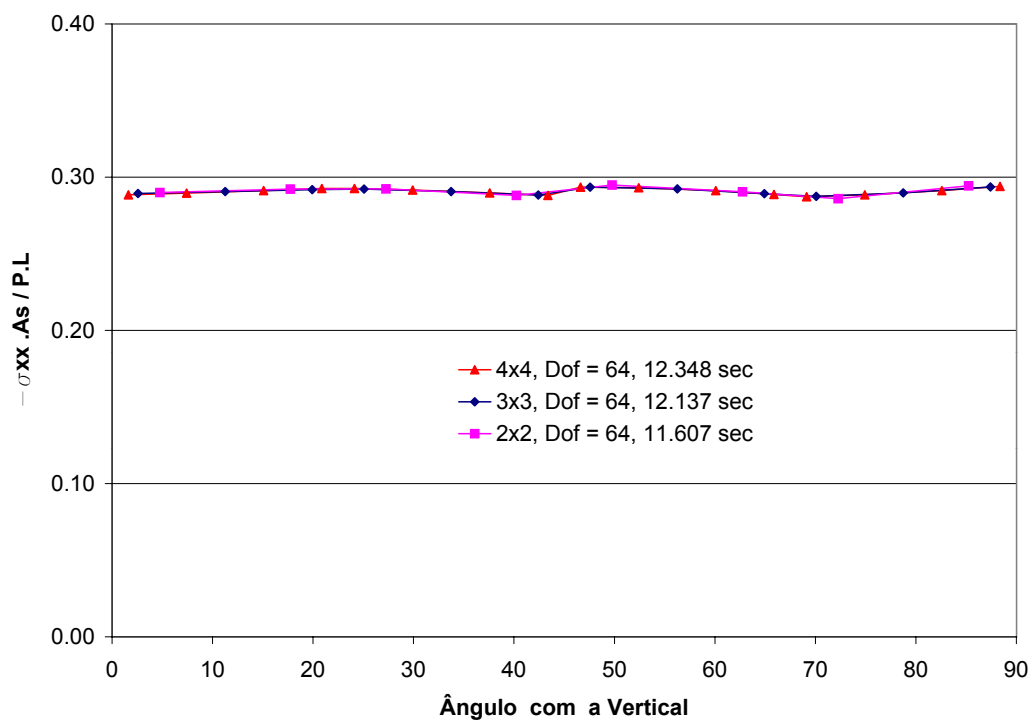
### 6.2.1 Modelo de Armadura Discreta com Aderência Perfeita

Apresentam-se aqui os resultados para os modelos de armadura discreta (malhas *MRD1*, *MID1*, *MRD2* e *MID2*), considerando-se aderência perfeita e diversas ordens de integração.

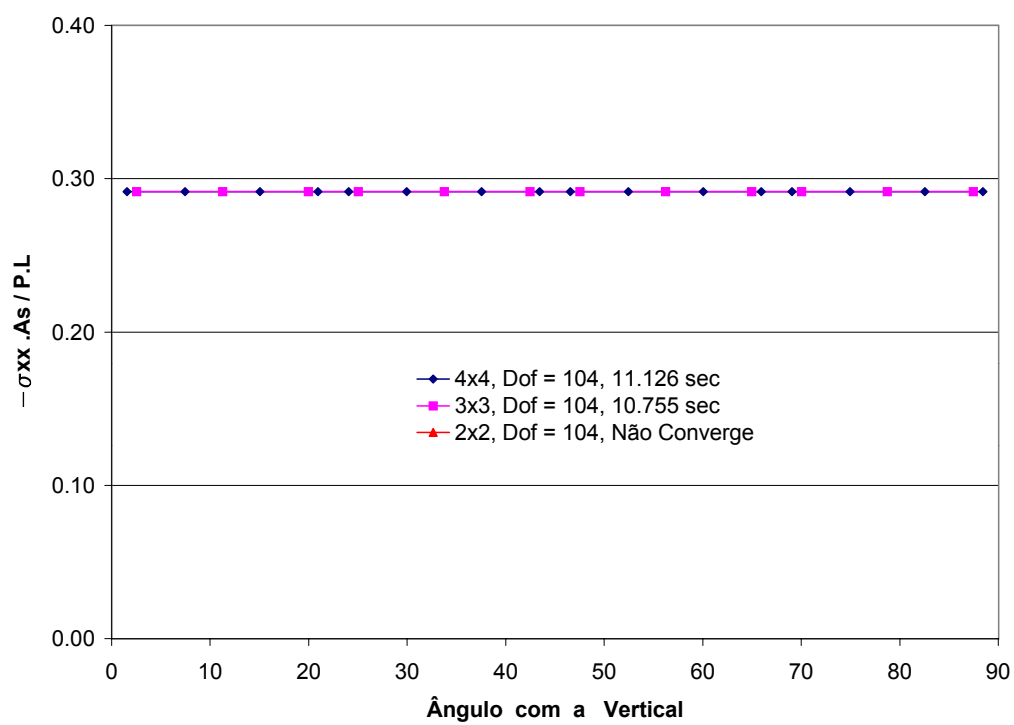
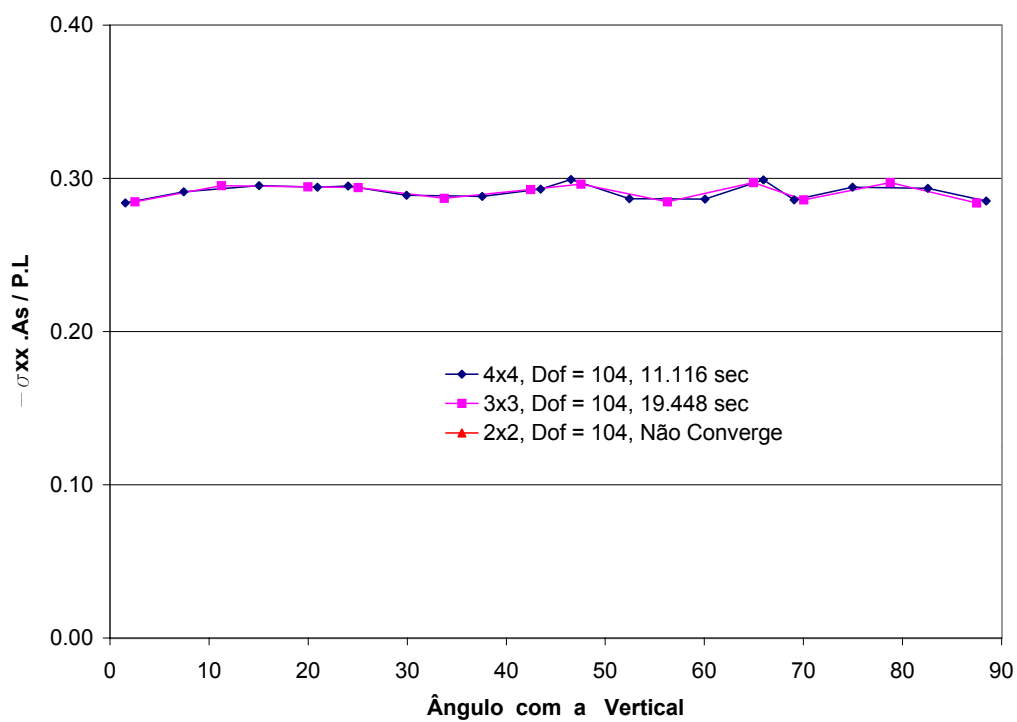
A figura 6.3 mostra as tensões ao longo da camada de aço para as malhas *MRD1* e *MID1* (figura 6.2(a) e (c)). Para as malhas *MRD2* e *MID2* (figura 6.2(b) e (d)), os resultados estão na figura 6.4. As figuras também indicam o número de graus de liberdade e o tempo de processamento para cada caso.

Observa-se que no caso das malhas irregulares ocorreu uma pequena variação nas tensões para a malha *MID1* e que essa variação acentuou-se na malha *MID2*. Tolerando-se esta variação, pode-se dizer que, excetuando-se as malhas *MRD2* e *MID2* com integração  $2 \times 2$ , todos os modelos conduzem aos mesmos resultados.

A ausência de resultados para as malhas *MRD2* e *MID2* com integração  $2 \times 2$  pode ser explicada pelo aparecimento de modos de energia nulos, devido à utilização de integração reduzida.

(a) *Malha MRD1*(b) *Malha MID1***Figura 6.3:** Tensão no aço para o modelo de armadura discreta com aderência perfeita



(a) *Malha MRD2*(b) *Malha MID2***Figura 6.4:** Tensão no aço para o modelo de armadura discreta com aderência perfeita

### 6.2.2 Modelo de Armadura Discreta com Elementos de Contato

Neste caso usaram-se elementos de contato para representar a região de interface concreto-aço. A figura 6.5 mostra as tensões ao longo da armadura para as malhas *MRD1* e *MID1* (figuras 6.2(a) e (c)). Os resultados para as malhas *MRD2* e *MID2* estão na figura 6.6.

Neste caso, constata-se a influência da ordem de integração nos resultados. Observa-se que, para uma mesma malha, a ordem de integração deve ser coerente com o grau das funções de interpolação.

Percebe-se também que, devido à geometria da camada de armadura, a discretização da mesma interfere nos resultados. Assim, quando se faz a discretização da camada de armadura com elementos de 4 nós (malhas *MRD2* e *MID2*), os resultados obtidos são melhores (figura 6.6), que os obtidos com elementos de 3 nós (malhas *MRD1* e *MID1*).

Observa-se também que a variação das tensões ao longo da camada de aço para as malhas irregulares não apresenta grandes diferenças em relação as malhas regulares.

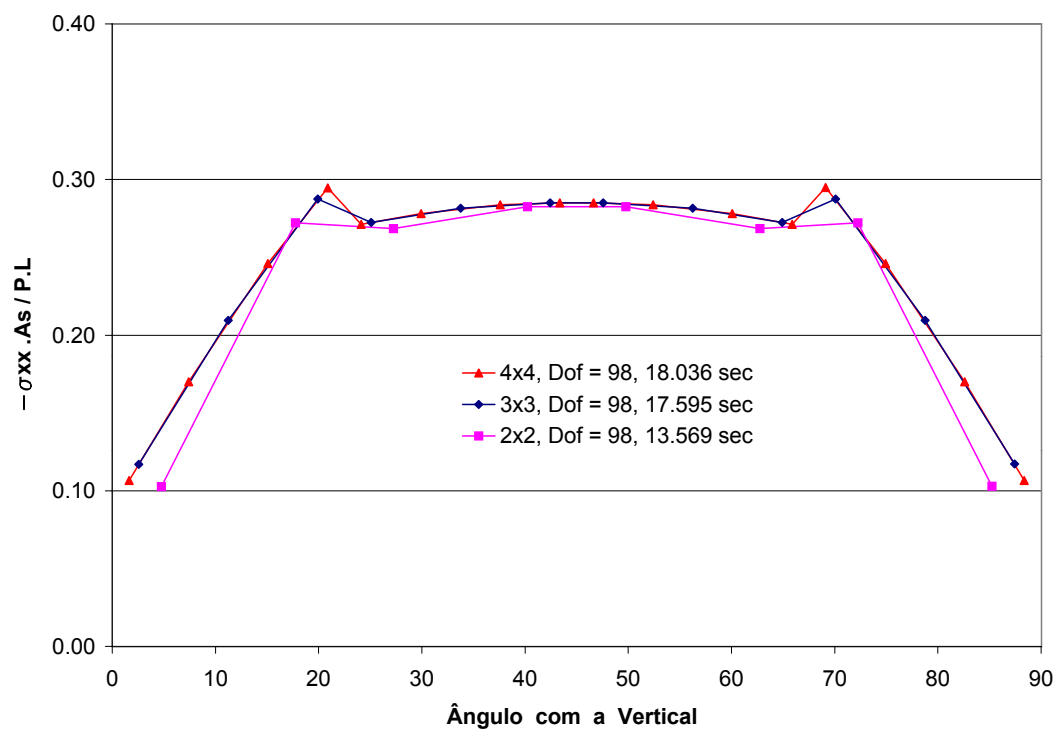
Como no caso de aderência perfeita e pelo mesmo motivo anteriormente discutido, aqui também não foi possível obter resultados ao se usar integração  $2 \times 2$  para as malhas *MRD2* e *MID2*.

### 6.2.3 Modelo de Armadura Discreta com Elementos de Molas

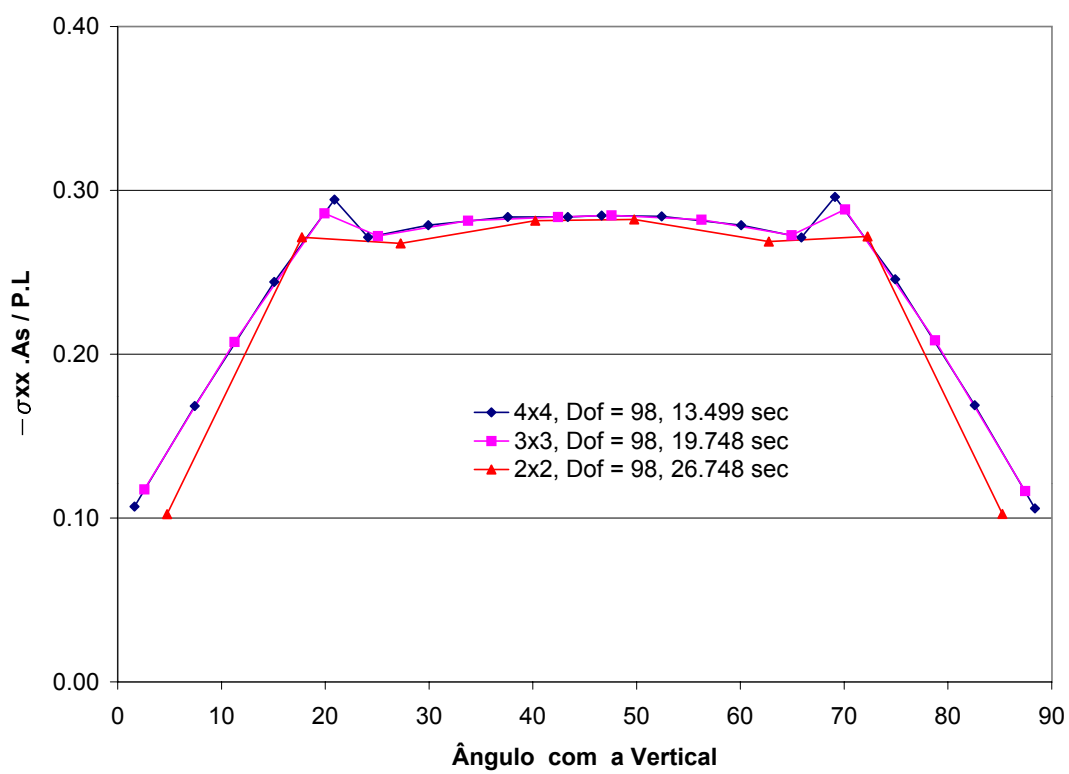
Neste caso foi empregado elementos de molas para caracterizar a região de interface concreto-aço. As tensões ao longo da armadura para as malhas *MRD1*, *MID1*, *MRD2* e *MID2* (figura 6.2(a), (b), (c) e (d)) são mostradas nas figuras 6.7 e 6.8.

Observa-se uma variação nos resultados quando do uso das malhas irregulares, tal variação é mais significativa na malha irregular *MID2*. Percebe-se pelas figuras 6.7 e 6.8 que os resultados são, praticamente, independentes da ordem de integração e do número de nós do elemento discreto de armadura. Este fato pode ser explicado pela superestimativa da rigidez quando se usa elementos de mola em lugar de elementos de contato.

Novamente, não foi possível obter resultados ao se usar integração  $2 \times 2$  para as malhas *MRD2* e *MID2*.

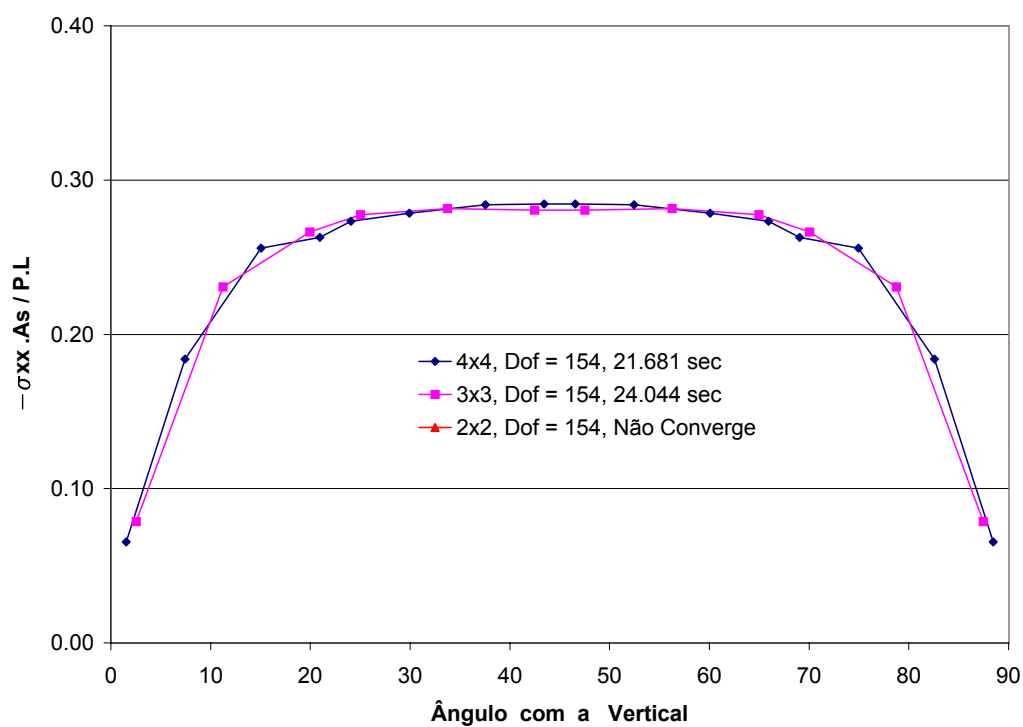


(a) Malha MRD1

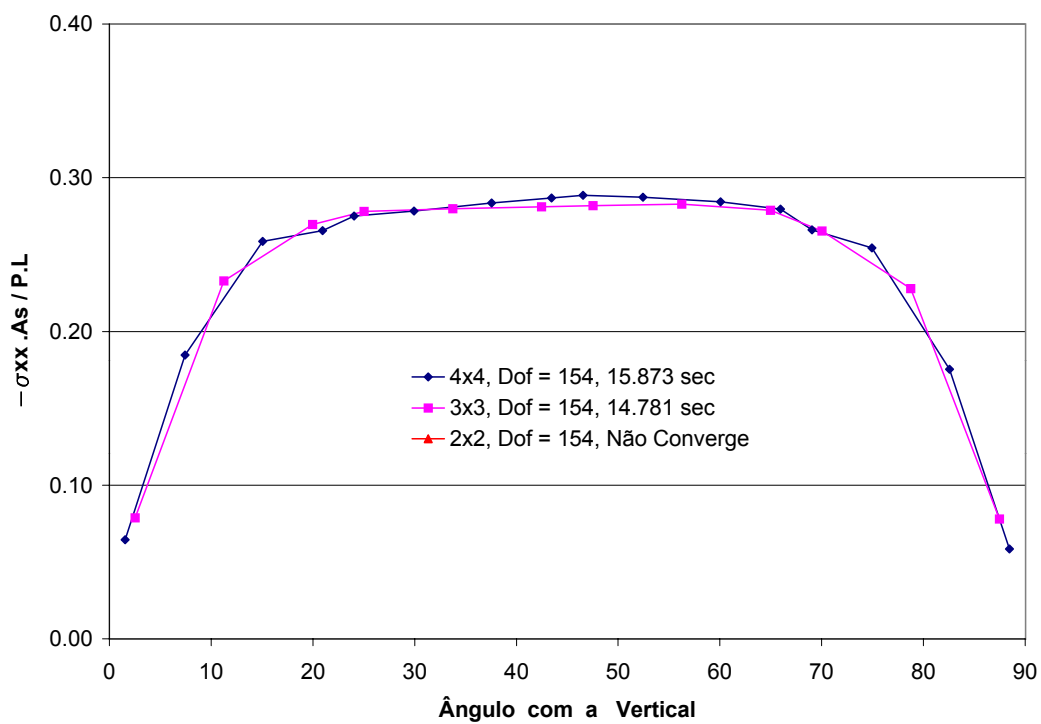


(b) Malha MID1

**Figura 6.5:** Tensão no aço para o modelo de armadura discreta com modelo de contato

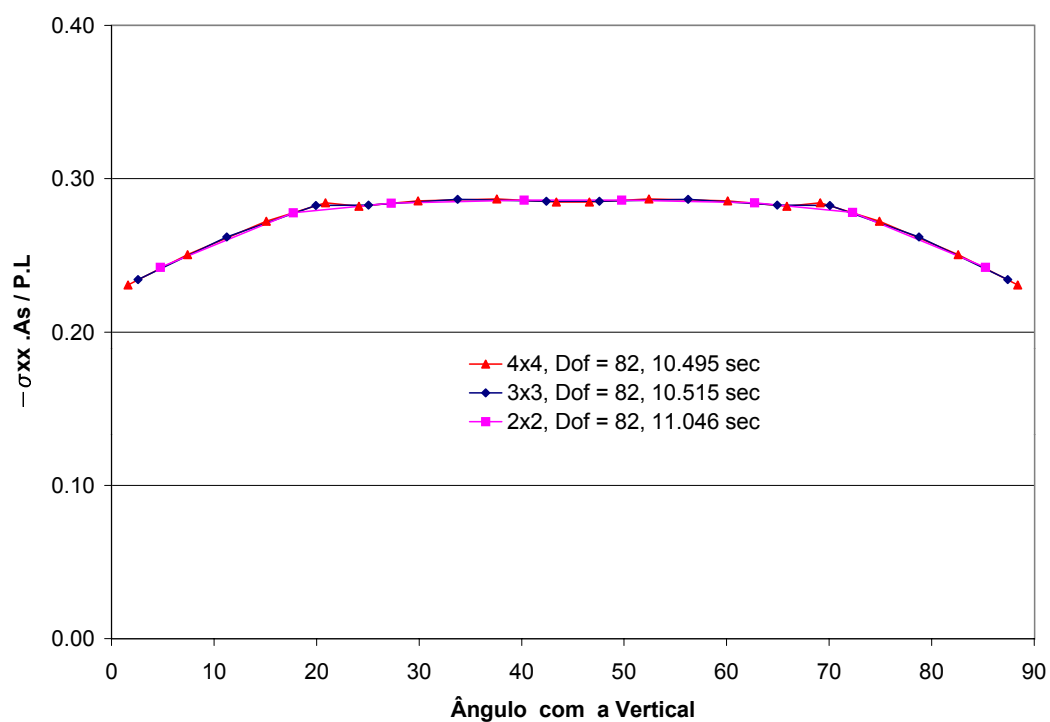


(a) Malha MRD2

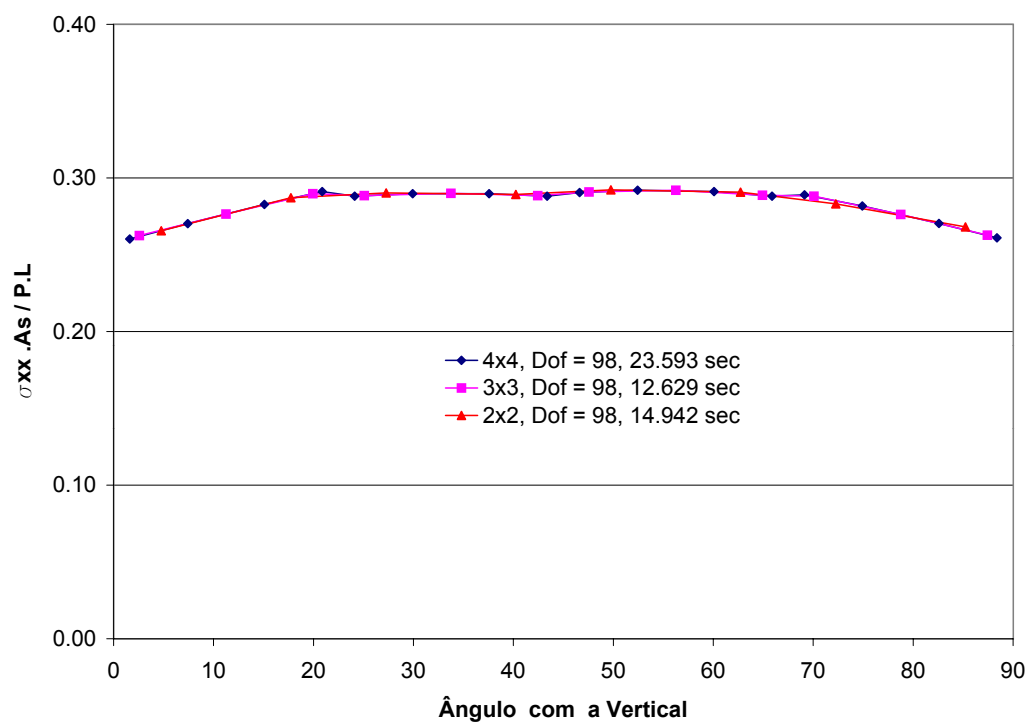


(b) Malha MID2

Figura 6.6: Tensão no aço para o modelo de armadura discreta com modelo de contato

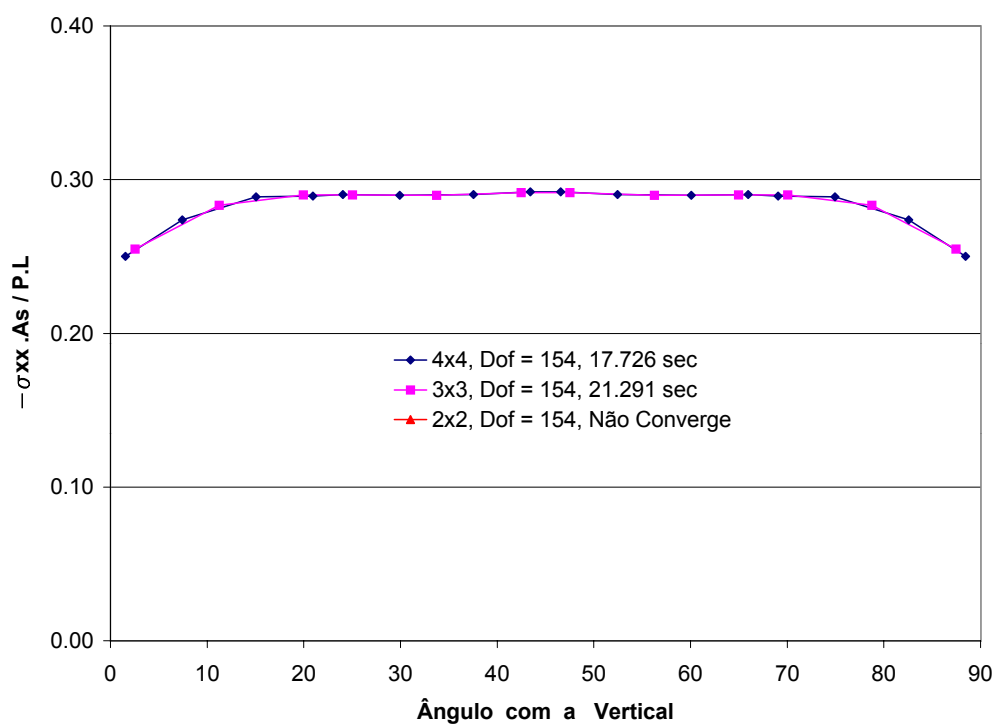
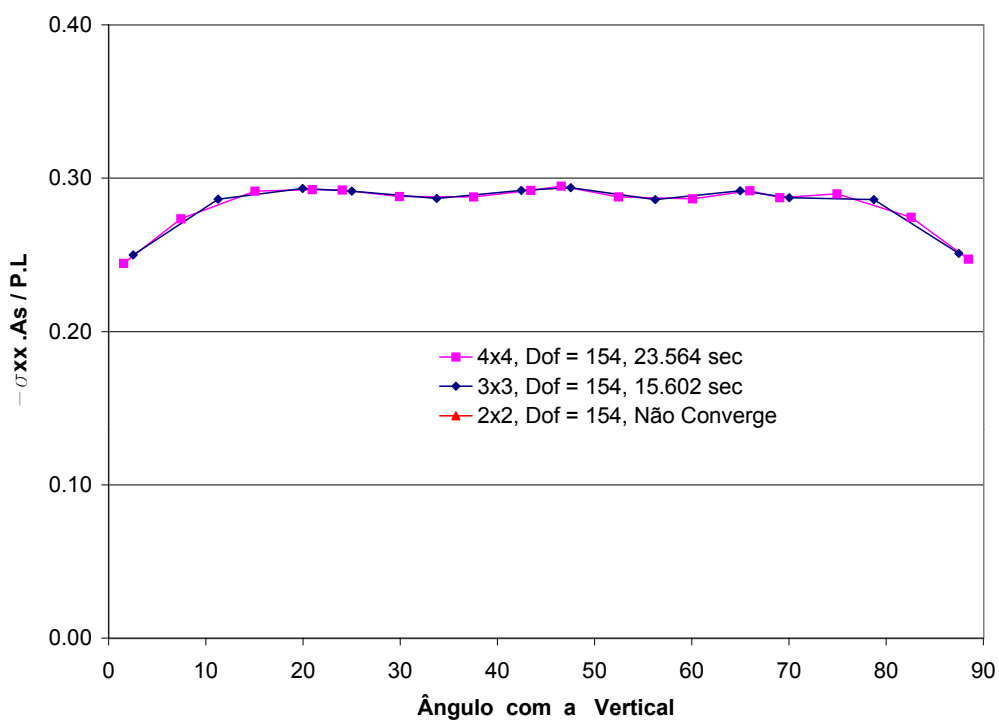


(a) Malha MRD1



(b) Malha MID1

Figura 6.7: Tensão no aço para o modelo de armadura discreta com modelo de molas

(a) *Malha MRD2*(b) *Malha MID2***Figura 6.8:** Tensão no aço para o modelo de armadura discreta com modelo de molas

### 6.2.4 Modelo de Armadura Embutida com Aderência Perfeita

Como mencionado anteriormente, o modelo de armadura embutida permite considerar ou não a perda de aderência. Nesta primeira abordagem considerou-se aderência perfeita entre concreto e aço.

As tensões ao longo da armadura são mostradas nas figuras 6.9 e 6.10 para as malhas *MRE1* e *MIE1* (figura 6.2(*e*) e (*f*)), sendo a armadura representada por elementos de 3 e 4 nós, respectivamente.

Observa-se nas figuras 6.9 e 6.10 que para a malha irregular (*MIE1*) ocorre uma pequena variação das tensões ao longo da camada de armadura. Entretanto, os valores de tensão são da mesma ordem de grandeza, quando comparados com os obtidos com os modelos de armadura discreta (figuras 6.3, 6.4). Pode-se dizer então que, para os casos de aderência perfeita, tanto os modelos de armadura discreta, quanto os modelos de armadura embutida conduzem aos mesmos resultados.

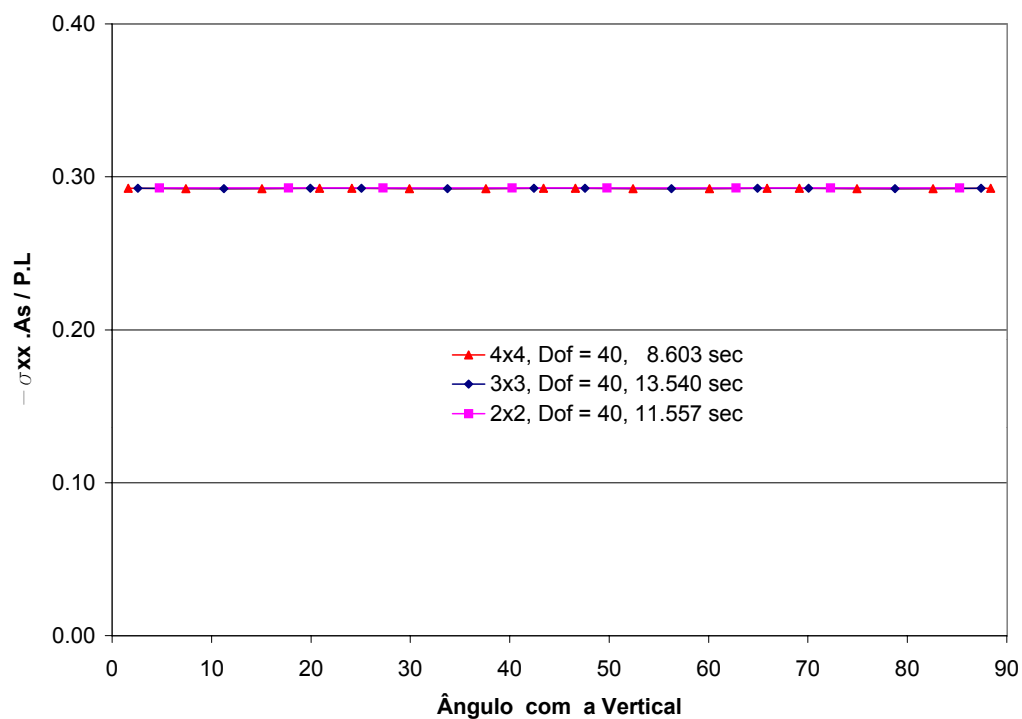
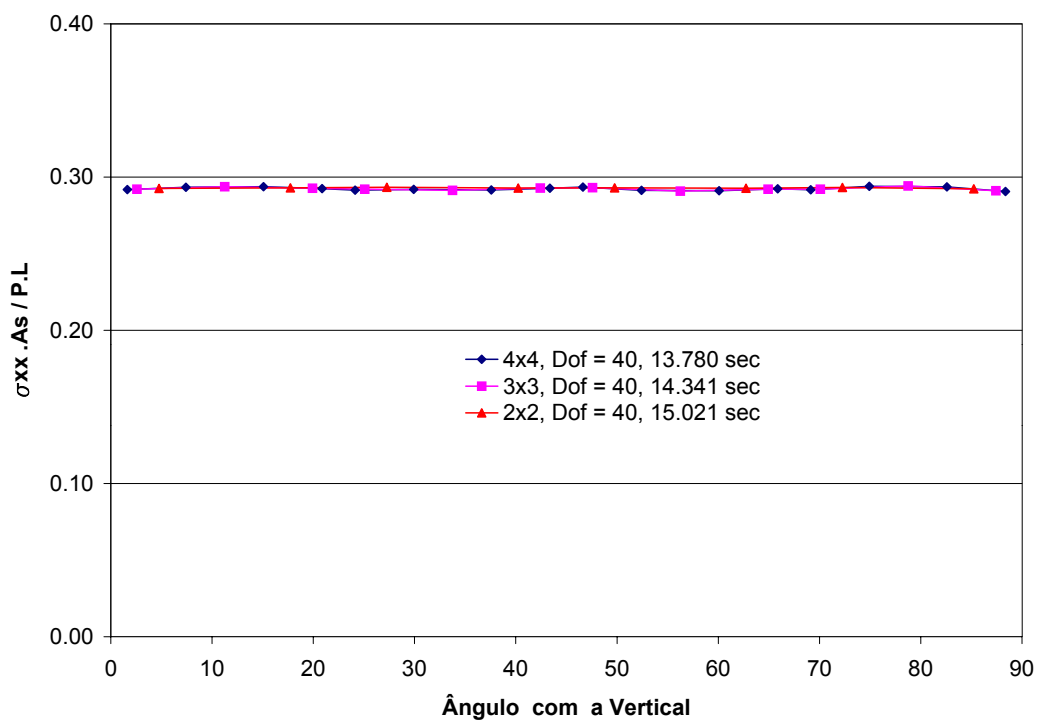
### 6.2.5 Modelo de Armadura Embutida com Perda de Aderência

Apresentam-se aqui os resultados do modelo de armadura embutida com perda de aderência.

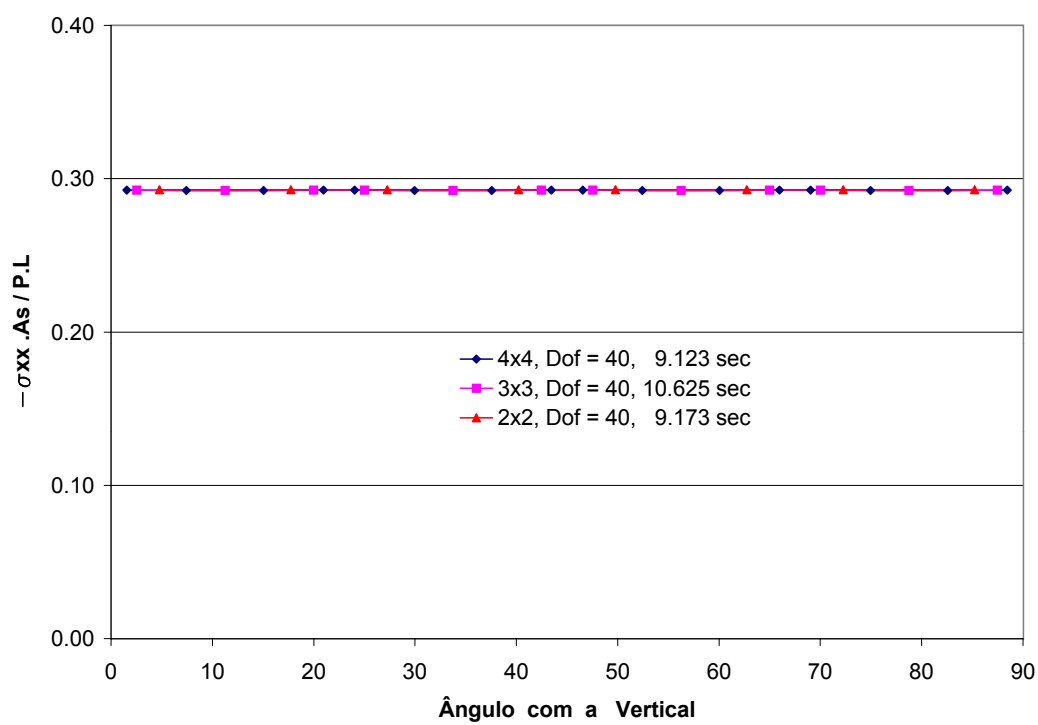
As tensões ao longo da armadura são mostradas nas figuras 6.11 e 6.12, sendo a armadura representada por elementos de 3 e 4 nós, respectivamente.

A comparação dos resultados aqui apresentados com aqueles obtidos com os modelos de armadura discreta correspondentes (figuras 6.5, 6.6, 6.7, 6.8), permite dizer que o modelo de armadura embutida oferece uma melhor representação da resposta.

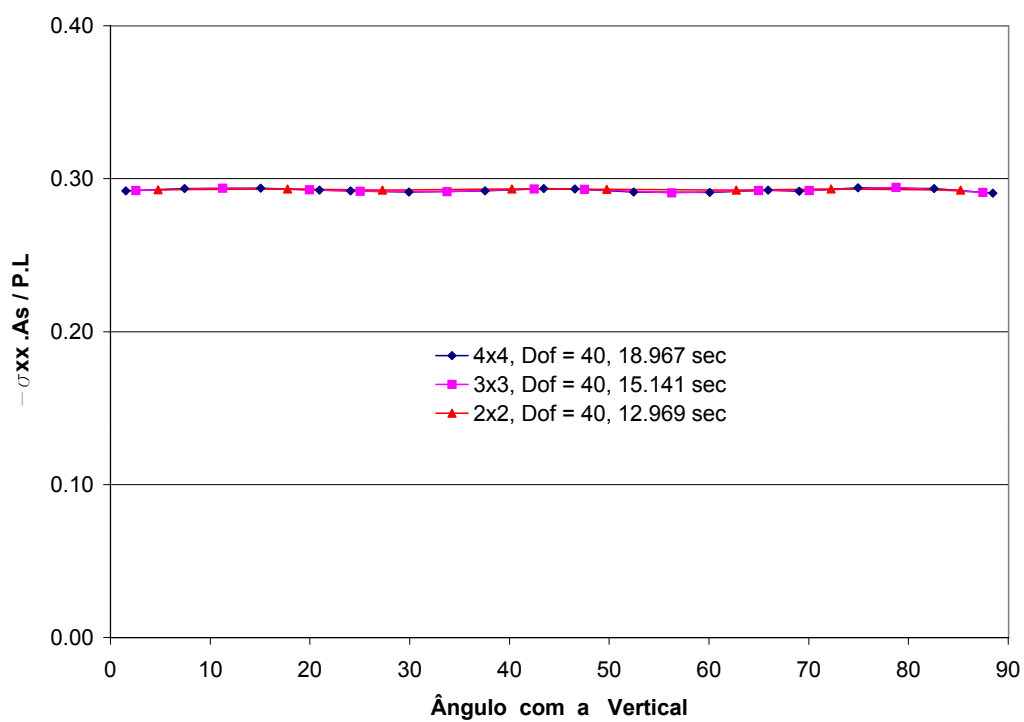
Observa-se também que, mesmo quando se usa a integração reduzida (2 pontos de Gauss), o modelo de armadura embutida consegue representar o comportamento da camada de aço, sem indução de modos de energia nula. Isso se deve ao fato da matriz de rigidez do elemento embutido ser montada com as funções de forma do elemento de concreto.

(a) *Malha MRE1* – 3 nós(b) *Malha MIE1* – 3 nós**Figura 6.9:** Tensão no aço para o modelo de armadura embutida com aderência perfeita



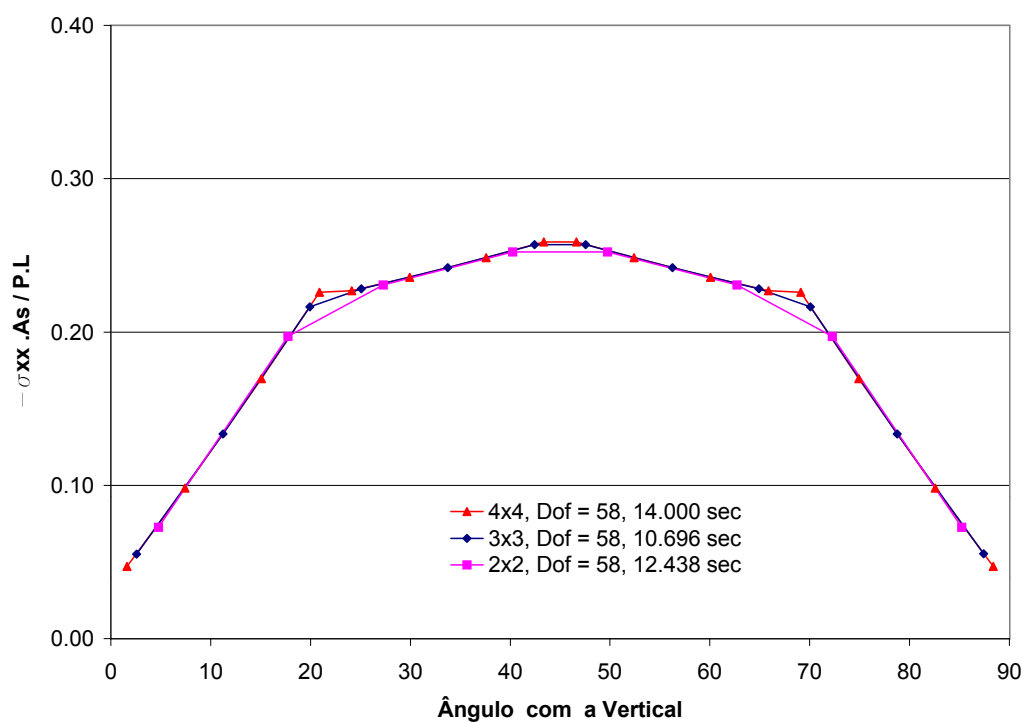


(a) Malha MRE1 - 4 nós

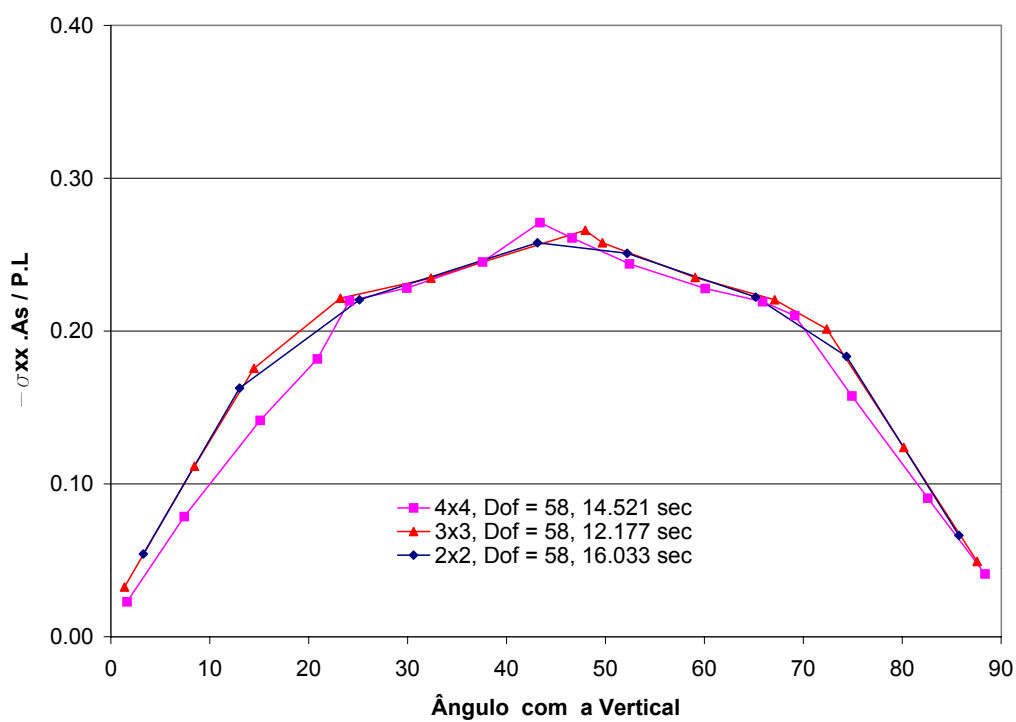


(b) Malha MIE1 - 4 nós

Figura 6.10: Tensão no aço para o modelo de armadura embutida com aderência perfeita

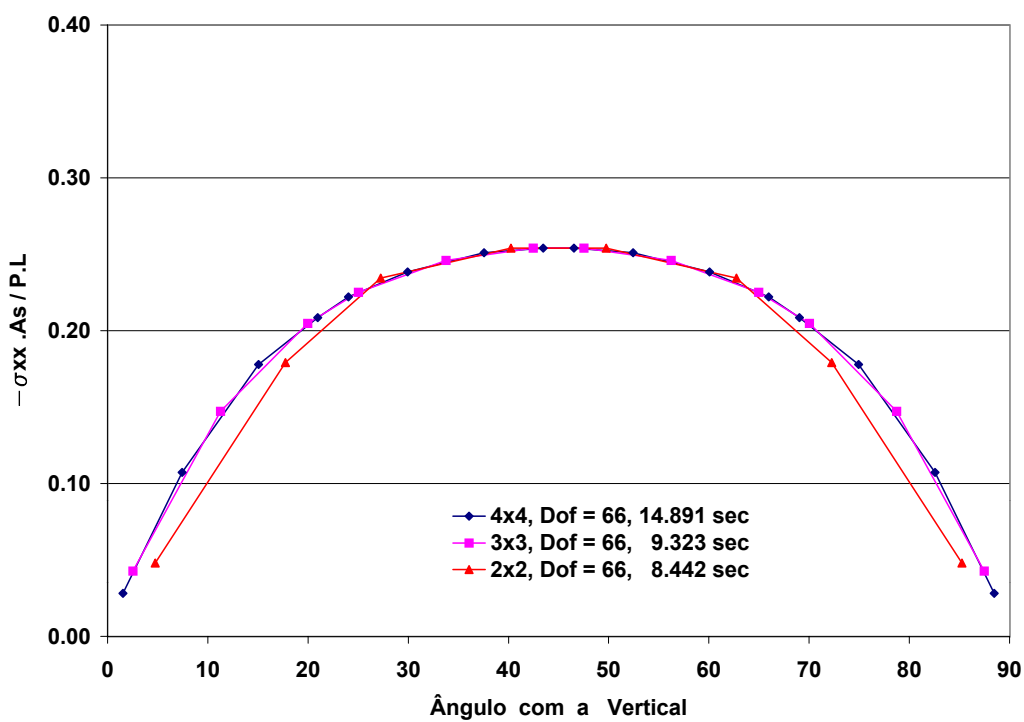


(a) Malha MRE1 – 3 nós

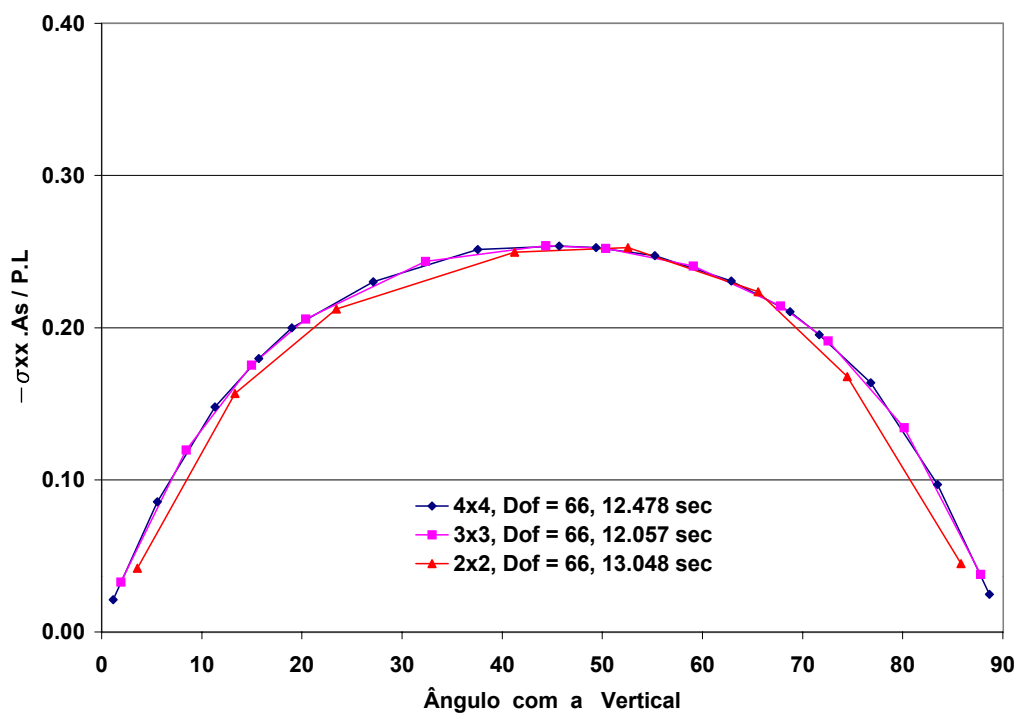


(b) Malha MIE1 – 3 nós

Figura 6.11: Tensão no aço para o modelo de armadura embutida com perda de aderência



(a) Malha MRE1 - 4 nós



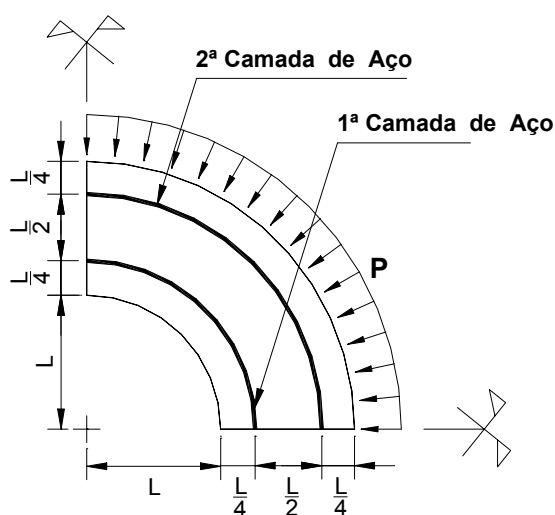
(b) Malha MIE1 - 4 nós

Figura 6.12: Tensão no aço para o modelo de armadura embutida com perda de aderência

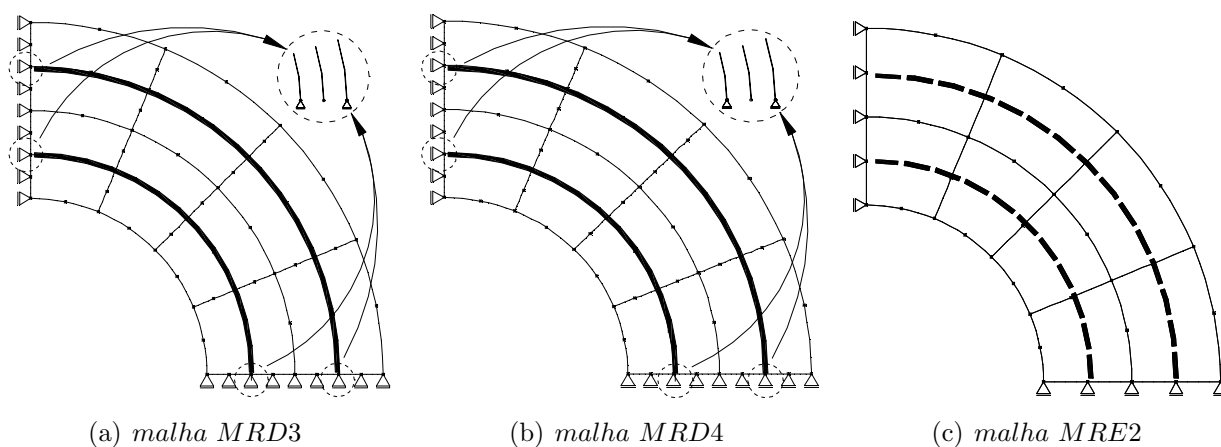
### 6.3 Anel com duas Camadas de Armadura

Nesta simulação, o mesmo anel analisado anteriormente tem agora duas camadas de armadura. A figura 6.13 mostra a disposição das camadas de armadura. A figura 6.14 mostra as malhas adotadas, conforme a seguinte denominação:

- *MRD3* e *MRD4* malhas com geometria regular e armadura discreta.
- *MRE2* malha com geometria regular e armadura embutida.



**Figura 6.13:** Anel de concreto armado com duas camadas de armadura



**Figura 6.14:** Malhas para análise do anel com duas camadas de armadura

Na malha *MRD3* emprega-se 16 elementos quadriláteros de 8 nós para considerar o concreto e 8 elementos de barra de 3 nós para a armadura. Na malha *MRD4* são usados 16

elementos quadrilaterais de 12 nós para representar o concreto e 8 elementos de barra de 4 nós para a armadura. Na malha *MRE2*, usada com o modelo de armadura embutida, adotou-se 8 elementos quadrilaterais de 8 nós com barras embutidas de 3 e 4 nós.

Novamente, quando se considera a perda de aderência, empregam-se elementos de contato quadráticos (6 nós) e cúbicos (8 nós) para representar a região de interface, respectivamente, para as malhas *MRD3* e *MRD4*. Cada nó da interface recebe um elemento de mola (2 nós), quando este elemento foi considerado.

Para cada malha mostrada na figura 6.14 adotou-se uma integração  $2 \times 2$ ,  $3 \times 3$  e  $4 \times 4$  para o concreto e 2, 3 e 4 pontos de integração para a armadura e aderência, quando esta foi considerada.

Os resultados são apresentados a seguir.

### 6.3.1 Modelo de Armadura Discreta com Aderência Perfeita

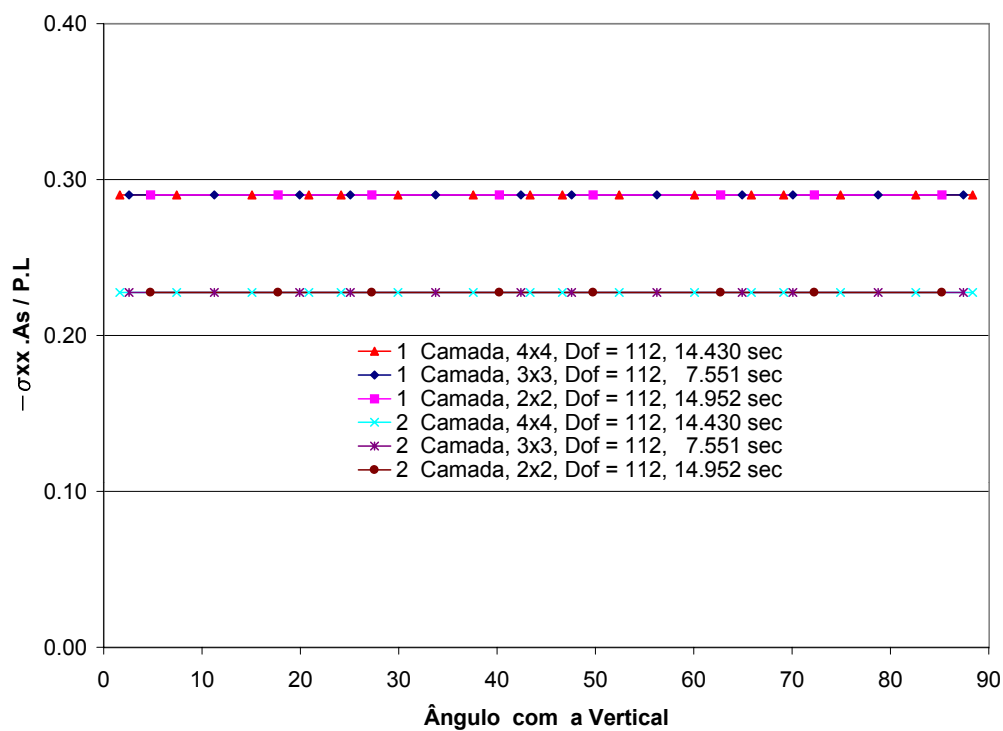
A figura 6.15 mostra as tensões ao longo das camadas de aço para as malhas *MRD3* e *MRD4* (figura 6.14(a) e (b)), considerando as três opções de integração.

### 6.3.2 Modelo de Armadura Discreta com Perda de Aderência

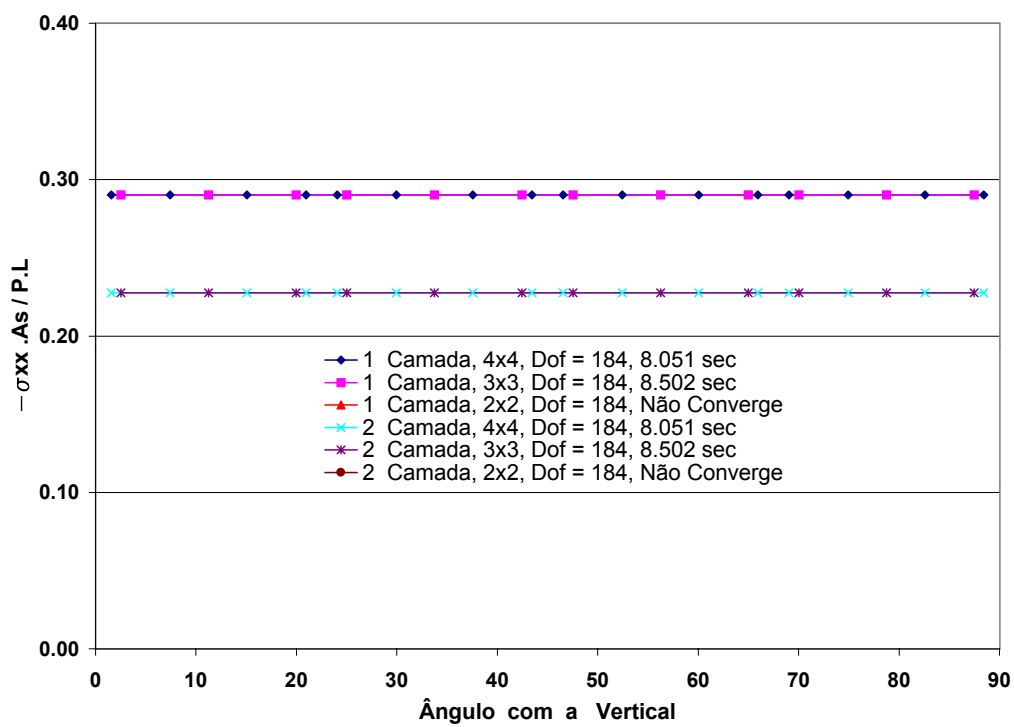
As figuras 6.16 e 6.17 mostram as tensões ao longo das camadas de aço para as malhas *MRD3* e *MRD4* (ver figura 6.14(a) e (b)), respectivamente, considerando a perda de aderência com elementos de contato (figuras 6.16(a) e 6.17(a)) e com elementos de molas (figuras 6.16(b) e 6.17(b)).

### 6.3.3 Modelo de Armadura Embutida

Para os modelos de armadura embutida, com e sem a consideração de perda de aderência (malha *MRE2* da figura 6.14(c)) as tensões ao longo das camadas de aço estão mostradas nas figuras 6.18 e 6.19. A figura 6.18 mostra os resultados para os casos em que a barra embutida foi representada com 3 nós. Para os casos em que considerou-se 4 nós, os resultados estão na figura 6.19.

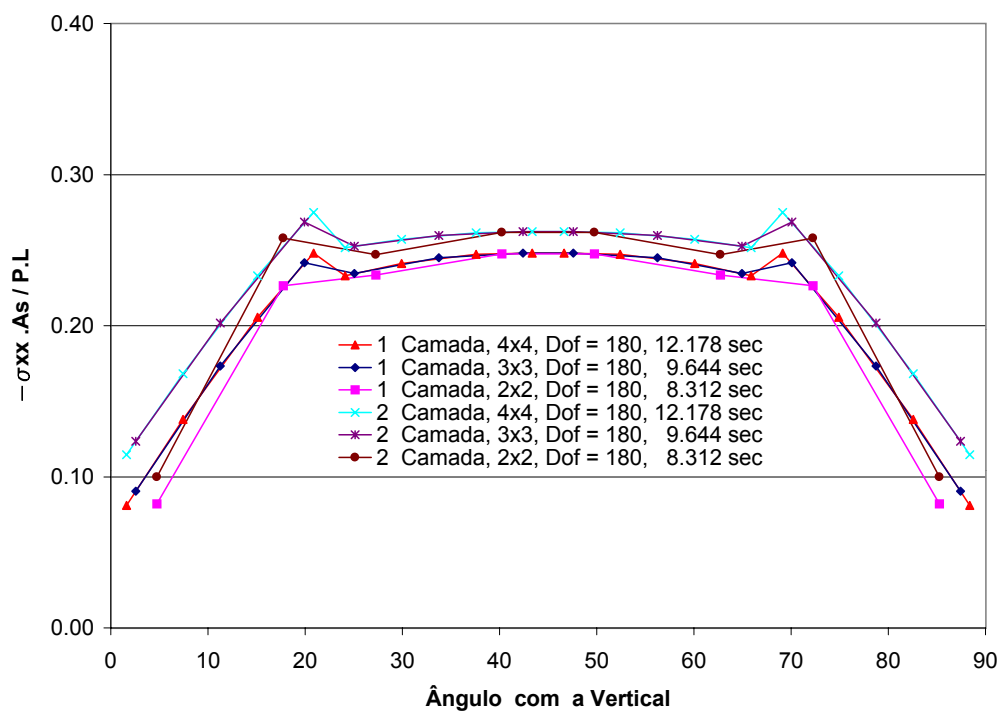


(a) Malha MRD3

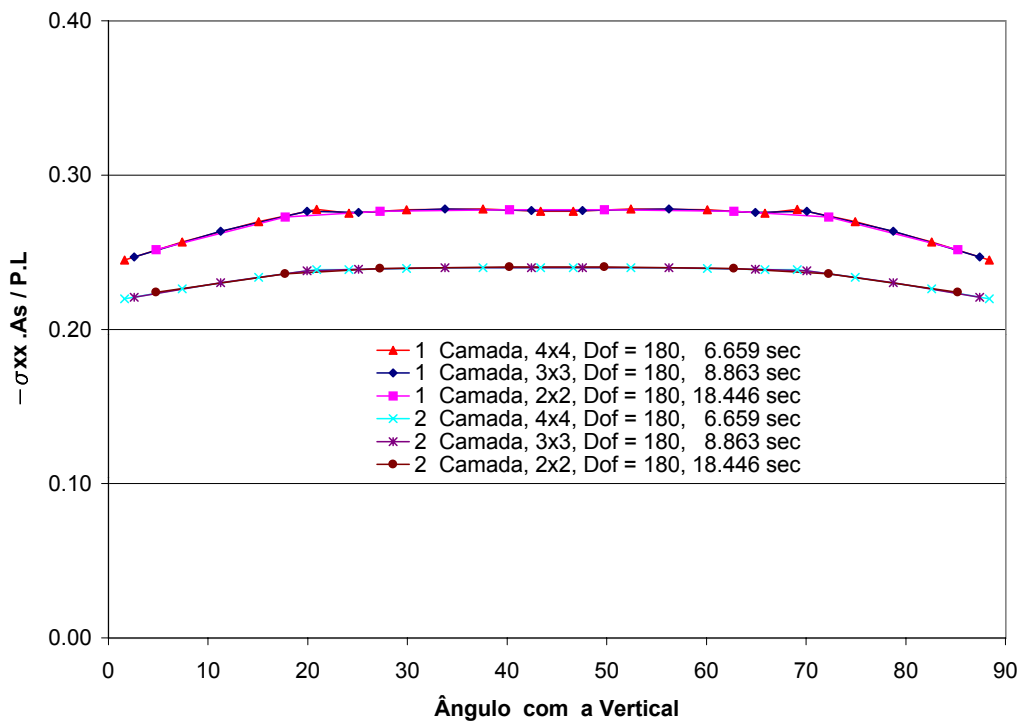


(b) Malha MRD4

Figura 6.15: Tensão no aço para o modelo de armadura discreta com aderência perfeita

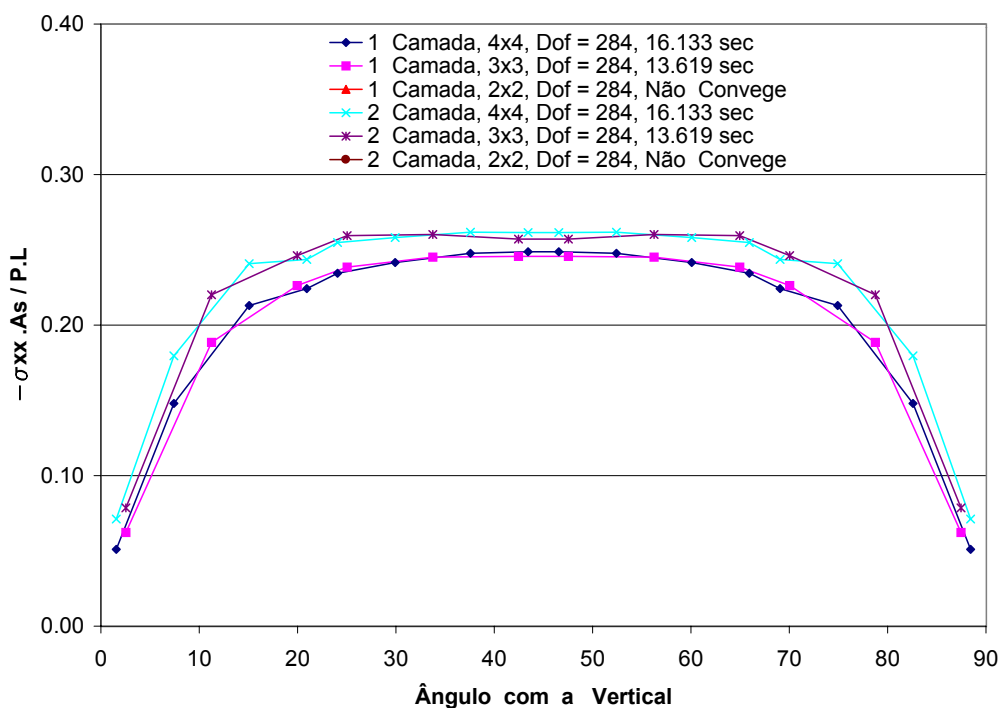


(a) Elementos de Contato

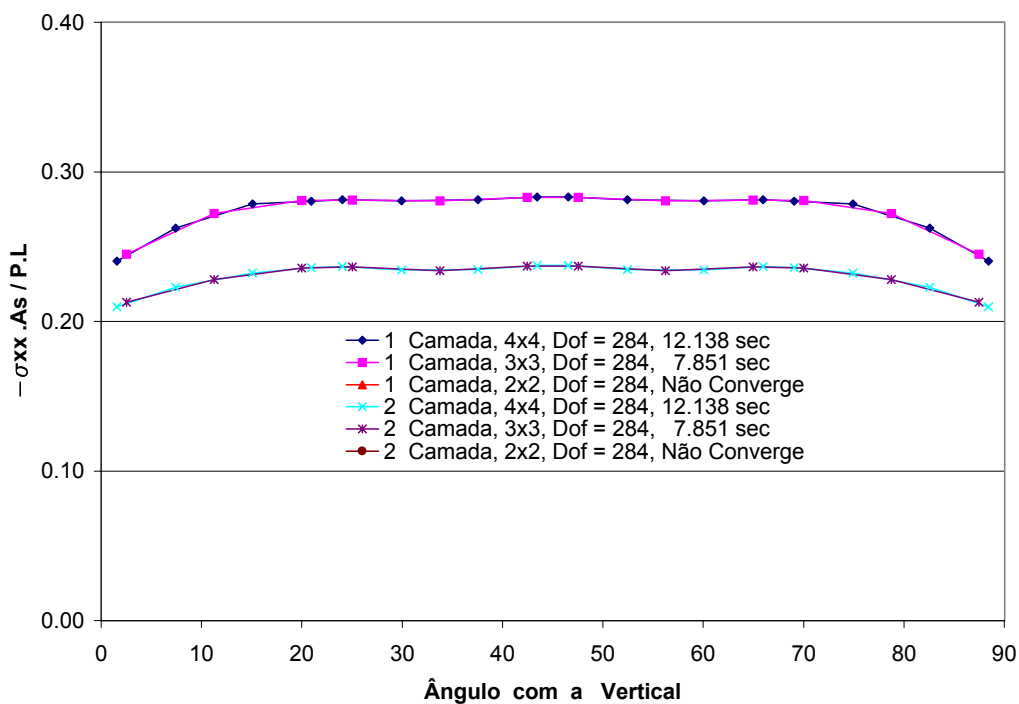


(b) Elementos de Molas

**Figura 6.16:** Tensão no aço para o modelo de armadura discreta - Malha *MRD3*



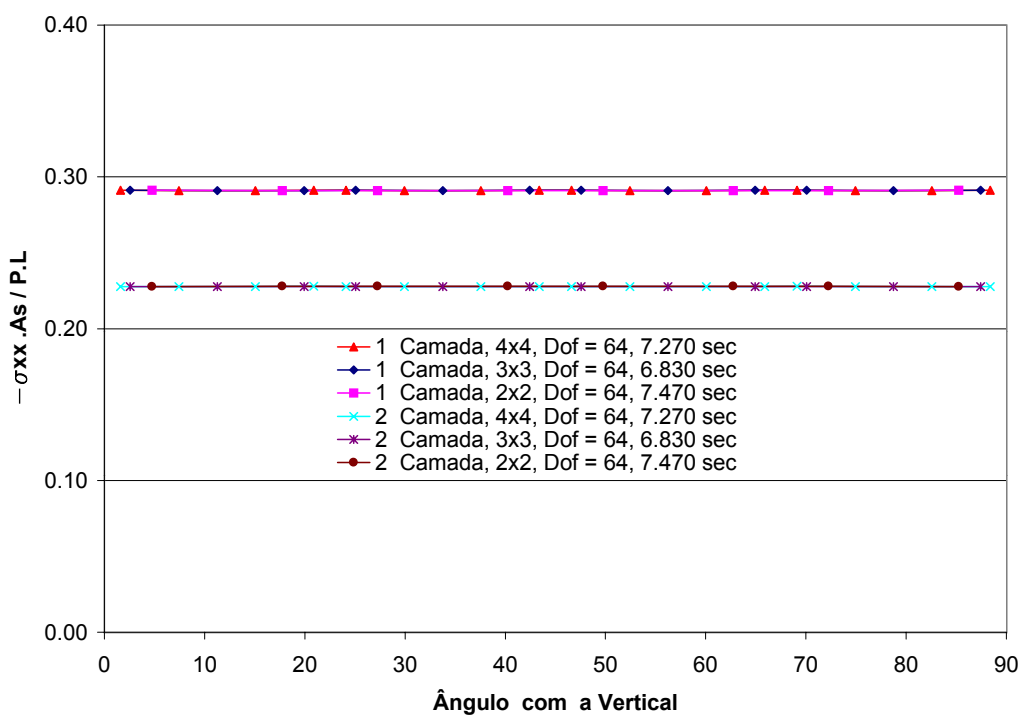
(a) Elementos de Contato



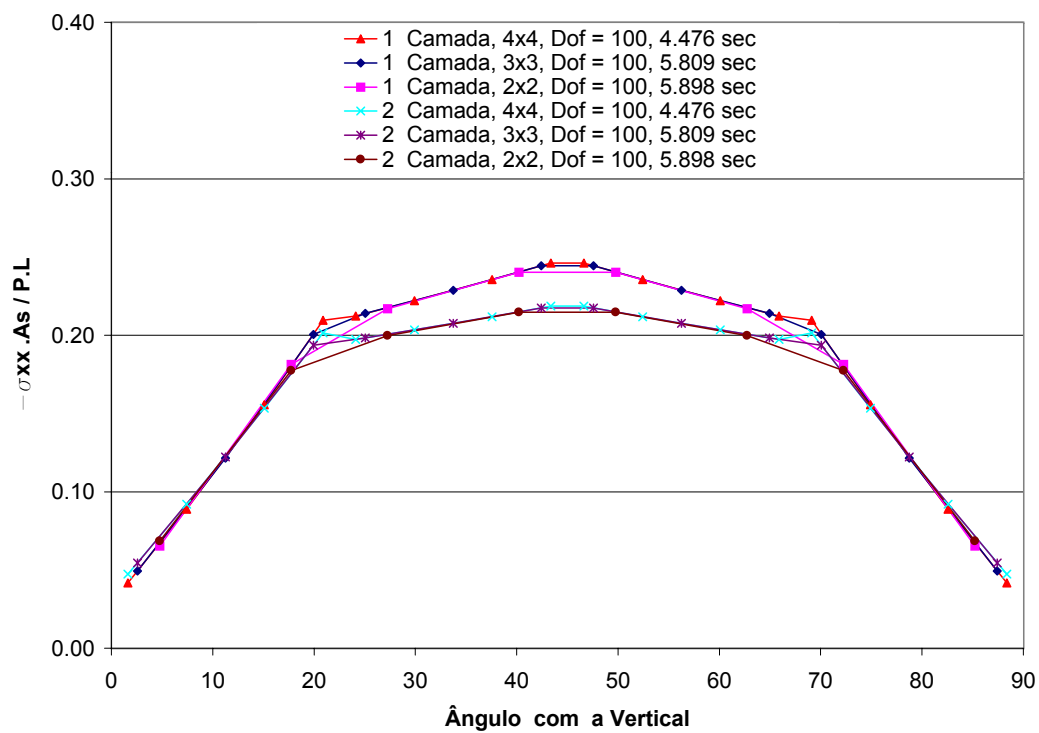
(b) Elementos de Molas

**Figura 6.17:** Tensão no aço para o modelo de armadura discreta - Malha *MRD4*



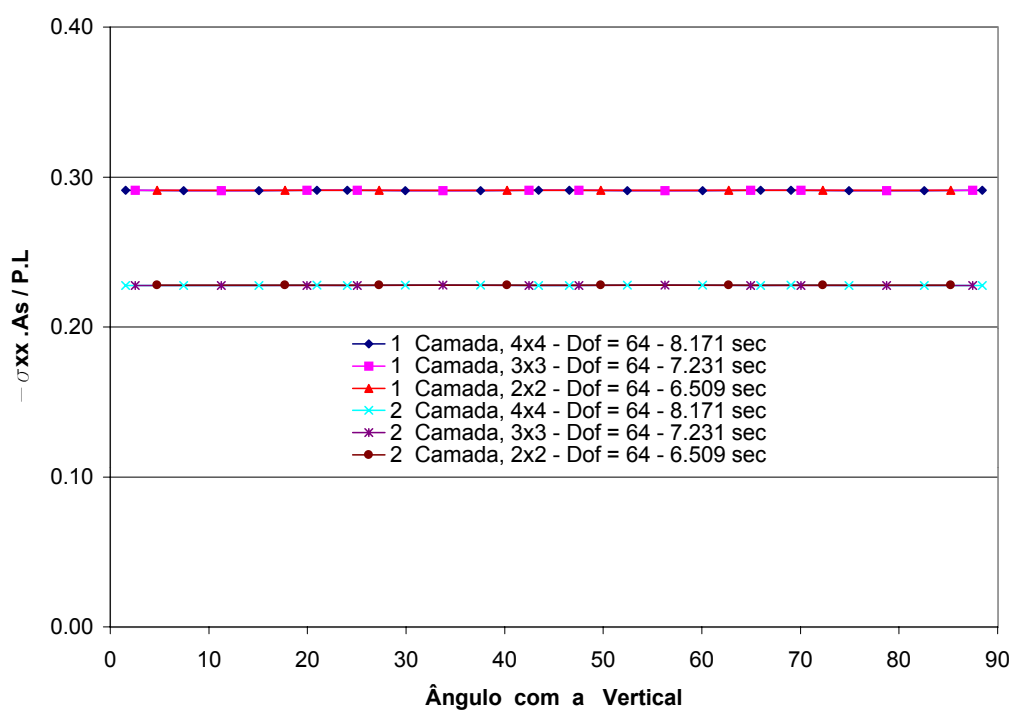


(a) Aderência Perfeita

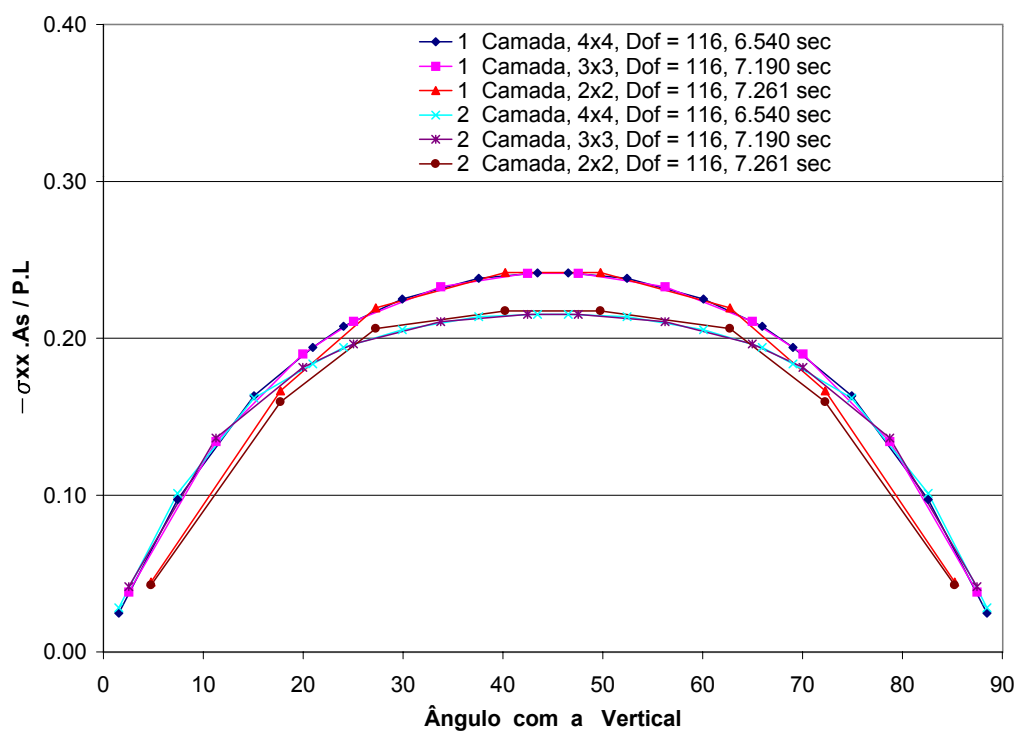


(b) Perda de Aderência

**Figura 6.18:** Tensão no aço para o modelo de armadura embutida - Malha *MRE2* (3 nós)



(a) Aderência Perfeita



(b) Perda de Aderência

**Figura 6.19:** Tensão no aço para o modelo de armadura embutido - Malha *MRE2* (4 nós)

Como mostram os resultados das seções 6.2 e 6.3, o comportamento do anel com uma e com duas camadas de armadura é idêntico, diferindo somente no ponto da menor sollicitação da camada externa, no caso do anel com duas camadas. Assim como no anel armado com apenas uma camada de armadura, não foi possível obter a resposta ao se usar integração  $2 \times 2$  para a malha *MRD3*. Todos os demais casos conduzem aos mesmos resultados, validando os modelos implementados.

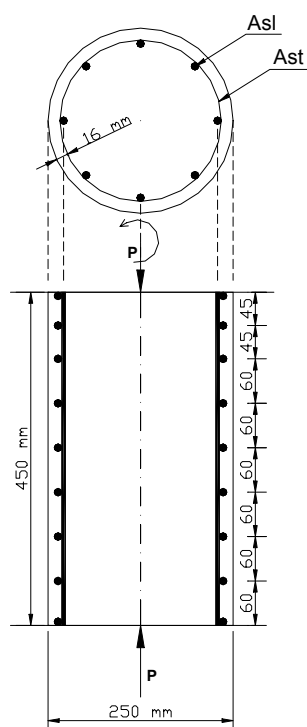
A comparação entre as figuras acima permite dizer que o modelo de armadura embutida oferece uma melhor representação da resposta tanto nos casos de aderência perfeita quanto nos casos em que se considera perda de aderência entre os materiais. A observação dos resultados também permite dizer que o modelo de armadura embutida é menos sensível à variação da malha de elementos finitos que os modelos de armadura discreta.

As figuras também mostram o número de graus de liberdade e o tempo de processamento de cada um dos modelos, revelando claramente a eficiência computacional do modelo de armadura embutida quando comparado com os modelos de armadura discreta. Embora os modelos de armadura embutida apresentem melhor desempenho que os modelos de armadura discreta, estes últimos ainda são fundamentais quando se deseja um detalhamento da cinemática da interface entre os materiais.

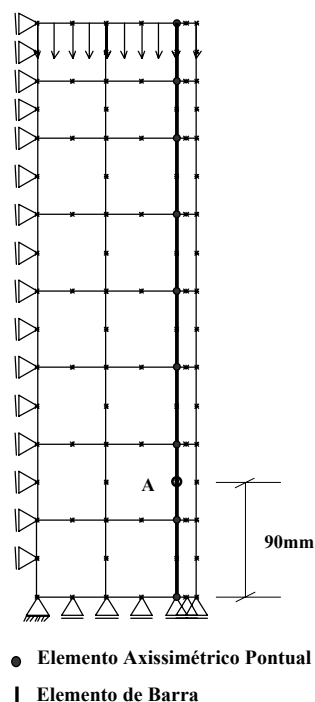
## 6.4 Pilar Axissimétrico

A figura 6.20 mostra um trecho de um pilar de concreto armado de seção circular, cujos materiais têm as seguintes características:

- Módulo de elasticidade longitudinal do concreto ( $E_c$ ) = 46060 *MPa*;
- Módulo de elasticidade longitudinal do aço ( $E_s$ ) = 200000 *MPa*;
- Coeficiente de Poisson do concreto ( $\nu$ ) = 0.25;
- Área de aço da armadura longitudinal ( $A_{sl}$ ) = 200 *mm*<sup>2</sup>;
- Área de aço da armadura transversal ( $A_{st}$ ) = 100 *mm*<sup>2</sup>;



**Figura 6.20:** Pilar de concreto de armado



**Figura 6.21:** Malha de elementos finitos

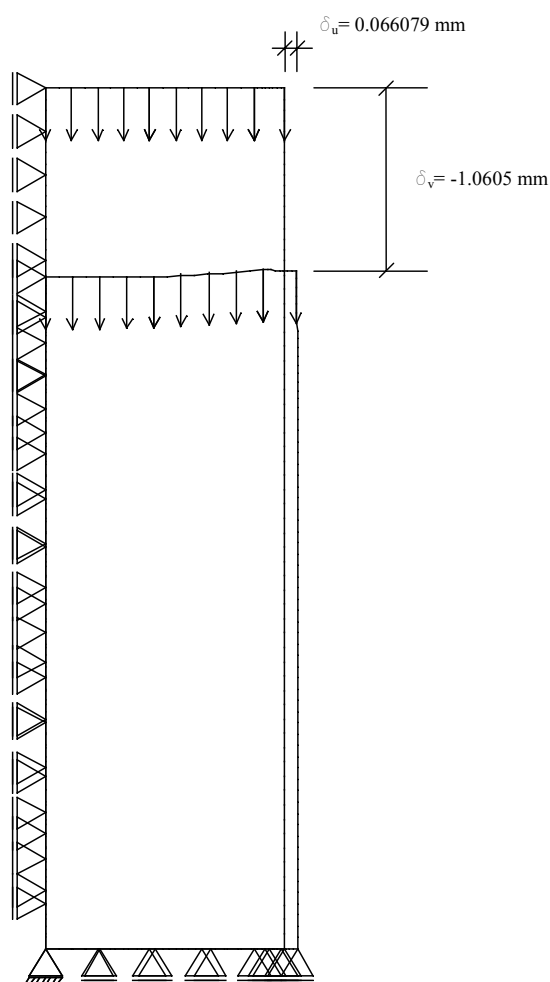
O modelo adota elementos finitos axissimétricos de 8 nós (concreto), de barra de 3 nós (barras de aço longitudinais) e axissimétricos pontuais (estribos circulares), conforme mostra a malha da figura 6.21.

A figura 6.22 mostra a deformada do modelo destacando os valores dos deslocamentos do nó correspondente à face externa no topo do pilar, para uma carga  $P = 6000 \text{ kN}$ .

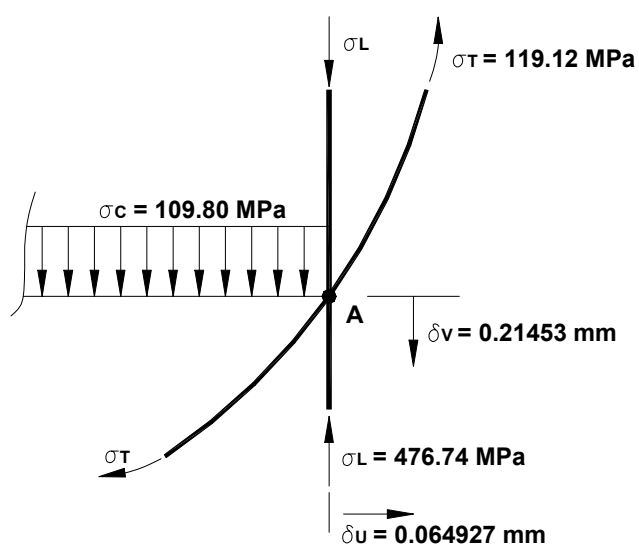
Para a mesma carga  $P = 6000 \text{ kN}$ , a figura 6.23 mostra um diagrama de corpo livre da região em torno do ponto A (figura 6.21).

Neste diagrama aparecem os valores dos deslocamentos horizontal ( $\delta_u$ ) e vertical ( $\delta_v$ ) do ponto, das tensões na armadura longitudinal ( $\sigma_l$ ), na armadura transversal ( $\sigma_t$ ) e no concreto ( $\sigma_c$ ), obtidos com o modelo.

Os resultados apresentados neste exemplo validam o elemento axissimétrico pontual implementado no programa. Este elemento, embora muito simples, é de fundamental importância para a representação de armaduras em circulares, usadas com frequência em estruturas de concreto armado.



**Figura 6.22:** Deformada do modelo de elementos finitos para o pilar circular



**Figura 6.23:** Diagrama de corpo livre do ponto A do modelo para o pilar circular

# Capítulo 7

## COMPARAÇÕES COM RESULTADOS EXPERIMENTAIS

### 7.1 Introdução

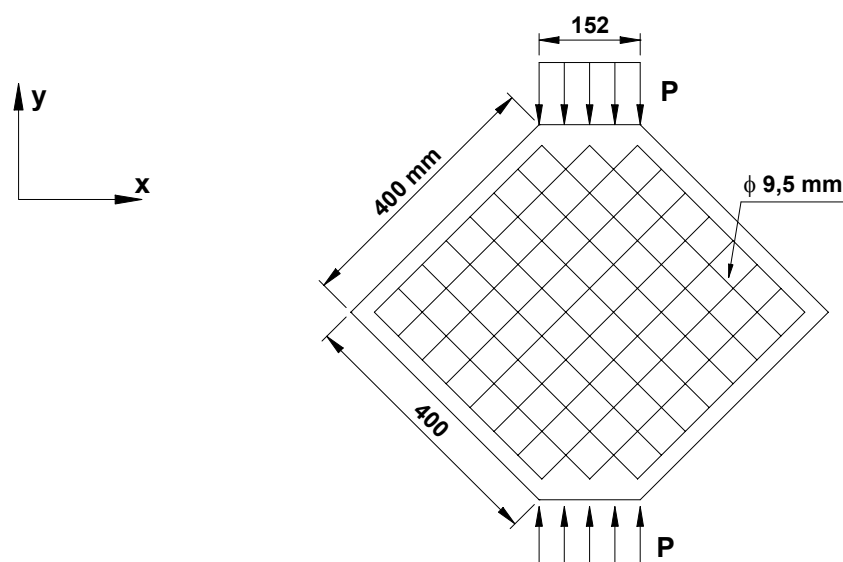
Neste capítulo apresentam-se simulações numéricas, nas quais empregaram-se os recursos existentes e os novos recursos disponibilizados no programa. Nas quatro simulações apresentadas fez-se comparações dos resultados com os obtidos experimentalmente.

### 7.2 Chapa Poligonal

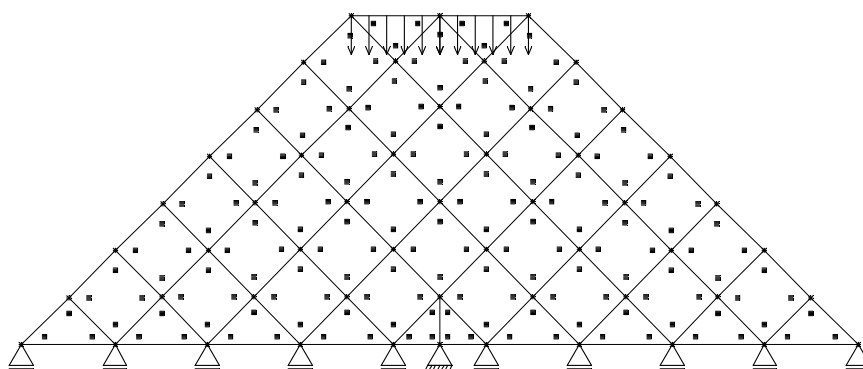
Uma chapa poligonal de 51 *mm* de espessura, armado nas duas direções, analisado experimentalmente por (Rule & Rowlands 1989) apud (Sankarasubramanian & Rajasekaran 1996) é mostrado na figura 7.1.

Devido à simetria da chapa, somente metade do mesmo foi modelado, conforme mostra a malha de elementos finitos da figura 7.2. A figura mostra os pontos nodais dos elementos planos quadrilaterais e triangulares e os pontos de integração adotados. A armadura do chapa foi representada por elementos de barra de 2 nós com 2 pontos de integração, posicionados nas interfaces entre os elementos planos. Admitiu-se aderência perfeita entre os materiais.

O modelo de dano escalar com lei de evolução não-linear foi usado para representar o concreto, adotando-se os seguintes parâmetros (ver seção 2.3.1):  $E_0 = 43850 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0.20$ ,  $f_c = 46.60 \text{ MPa}$ ,  $f_t = 5.38 \text{ MPa}$ ,  $\varepsilon_c = 0.002 \%$ ,  $G_f = 44 \text{ N/m}$ ,  $h = 0.05 \text{ m}$  e  $\beta = 0.2$ .



**Figura 7.1:** Chapa de concreto armado em duas direções

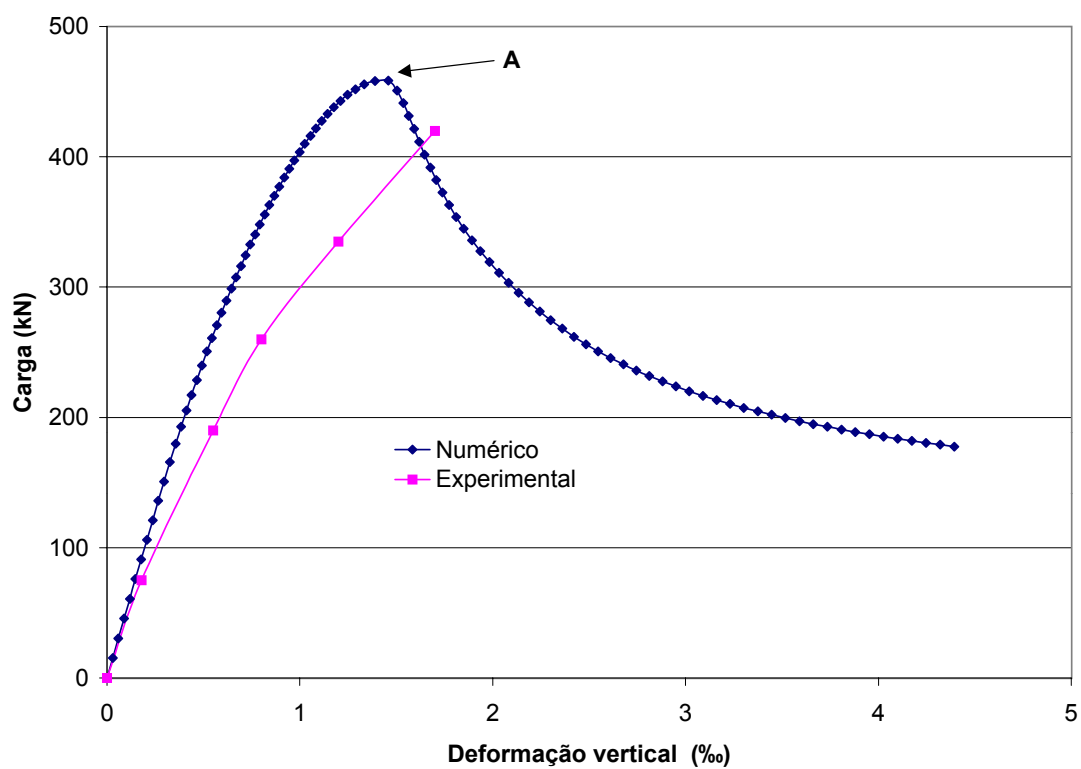


**Figura 7.2:** Malha de elementos finitos

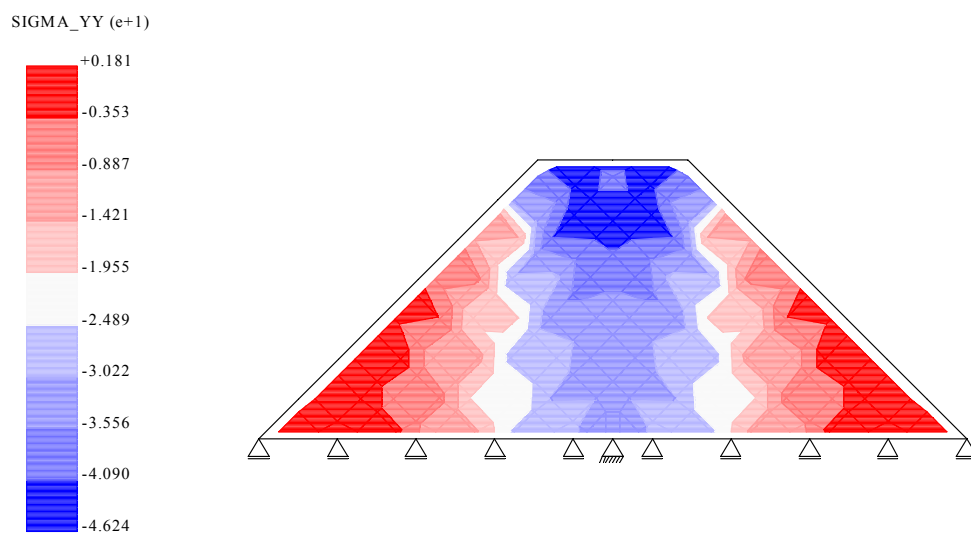
O aço foi representado com o modelo elasto-plástico e os parâmetros adotados foram:  $E_s = 200000 \text{ MPa}$  e  $f_y = 415 \text{ MPa}$ .

Realizou-se uma análise em estado plano de tensão, usando o algoritmo de controle de comprimento de arco, com um fator de carga inicial de 0.0005, um fator de tolerância de  $1.00 \times 10^{-4}$  e uma carga de referência  $P = 10.00 \text{ MN/m}$ .

A figura 7.3 mostra a relação entre carga e deformação vertical, calculada com o deslocamento da superfície de aplicação da carga. Percebe-se que os resultados numéricos apresentam uma rigidez levemente superior à observada experimentalmente. Entretanto, constata-se que o nível máximo de carga é da mesma ordem e que o modelo numérico foi capaz de descrever o ramo descendente da curva.



**Figura 7.3:** Curva carga  $\times$  deformação vertical



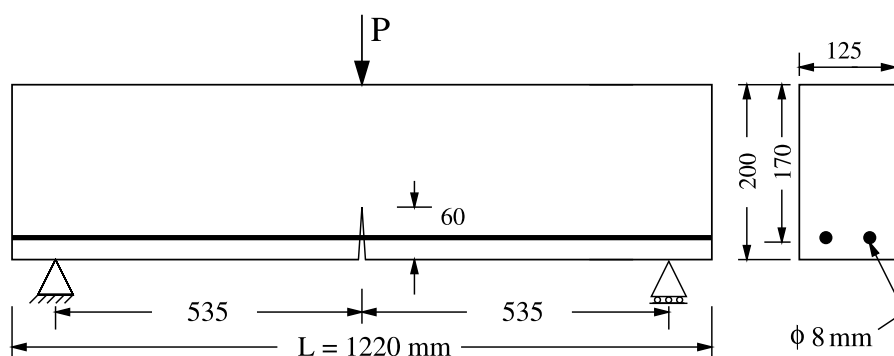
**Figura 7.4:** Estado de tensão normal vertical para o ponto A



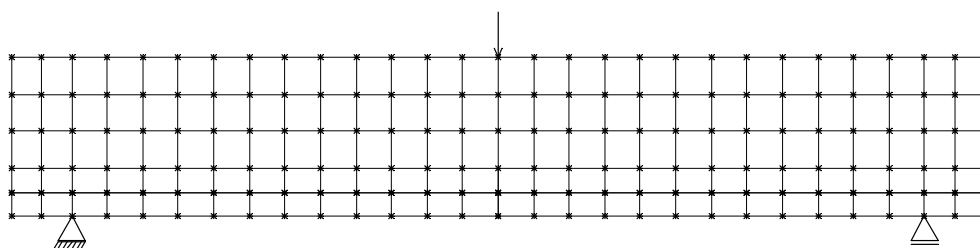
A figura 7.4 mostra o estado de tensão normal vertical correspondente ao ponto *A* da curva carga  $\times$  deslocamento da figura 7.3. Consoante com as observações experimentais ((Rule & Rowlands 1989) apud (Sankarasubramanian & Rajasekaran 1996)), a ruptura da peça ocorre por esmagamento na vizinhança da superfície de aplicação da carga.

### 7.3 Viga com Entalhe

A figura 7.5 mostra a viga de concreto armado estudada numérica e experimentalmente por (Prasad & Krishnamoorthy 2002) e modelada neste exemplo. A figura 7.6 mostra a discretização da viga em elementos quadriláteros de 4 nós, que representam o concreto, elementos de barra de 2 nós, que representam a armadura e elementos de contato de 4 nós para a perda de aderência. A ordem de integração adotada foi  $3 \times 3$  para os elementos de concreto e 3 pontos de Gauss para os elementos de barra e de contato.



**Figura 7.5:** Geometria da viga



**Figura 7.6:** Discretização da viga

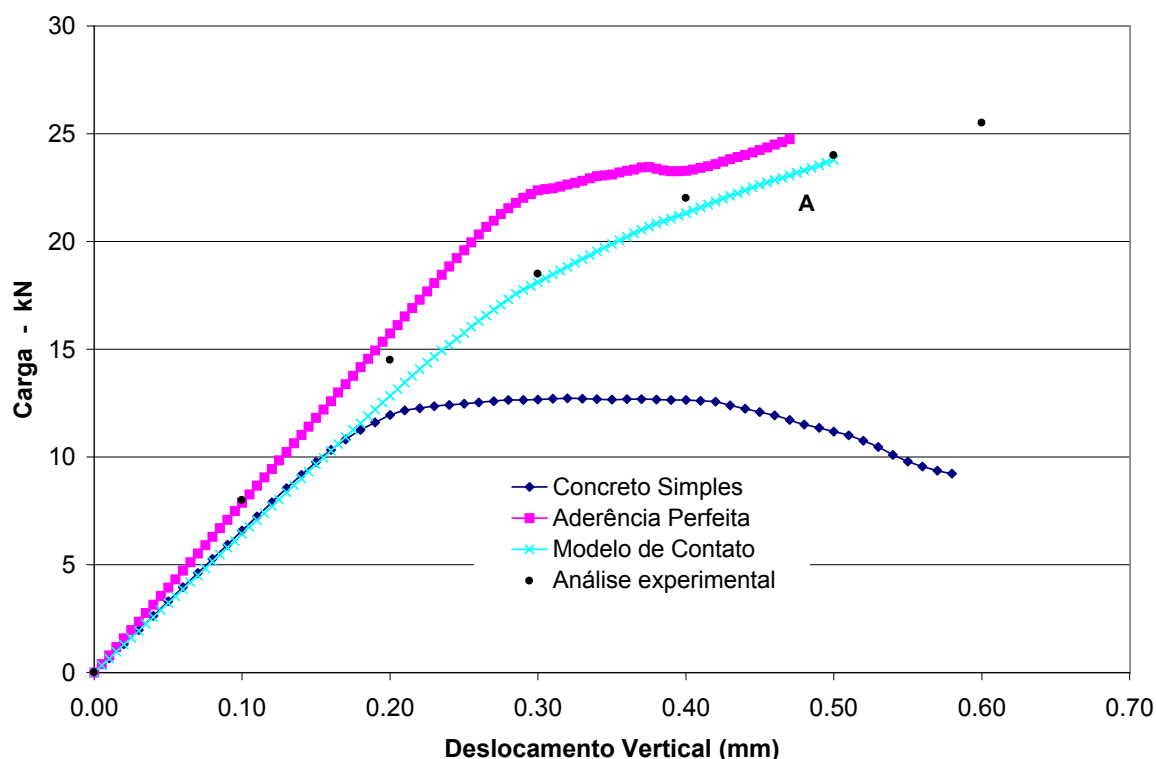
Usou-se o modelo de dano escalar com lei de evolução não-linear para representar o comportamento do concreto, adotando-se os seguintes parâmetros (ver seção 2.3.1):  $E_c = 29270 \text{ MPa}$ ,

$\nu = 0.20$ ,  $f_c = 30.10 \text{ MPa}$ ,  $f_t = 4.11 \text{ MPa}$ ,  $\varepsilon_c = 0.002$ ,  $G_f = 100 \text{ N/m}$ ,  $h = 50.00 \text{ mm}$ ,  $\beta = 0.05$ .

Considerou-se o comportamento elasto-plástico para o aço da armadura com  $E_s = 205000 \text{ MPa}$  e  $f_y = 395 \text{ MPa}$ .

Para aderência foi considerada a relação tensão-escorregamento proposta por Homayoun (ver seção 4.4), com os seguintes parâmetros:  $E_b = 36667 \text{ MN/mm}^3$ ,  $E_d = 917 \text{ MN/mm}^3$ ,  $f_b = 11.0 \text{ MPa}$ ,  $f_{br} = 4.40 \text{ MPa}$ .

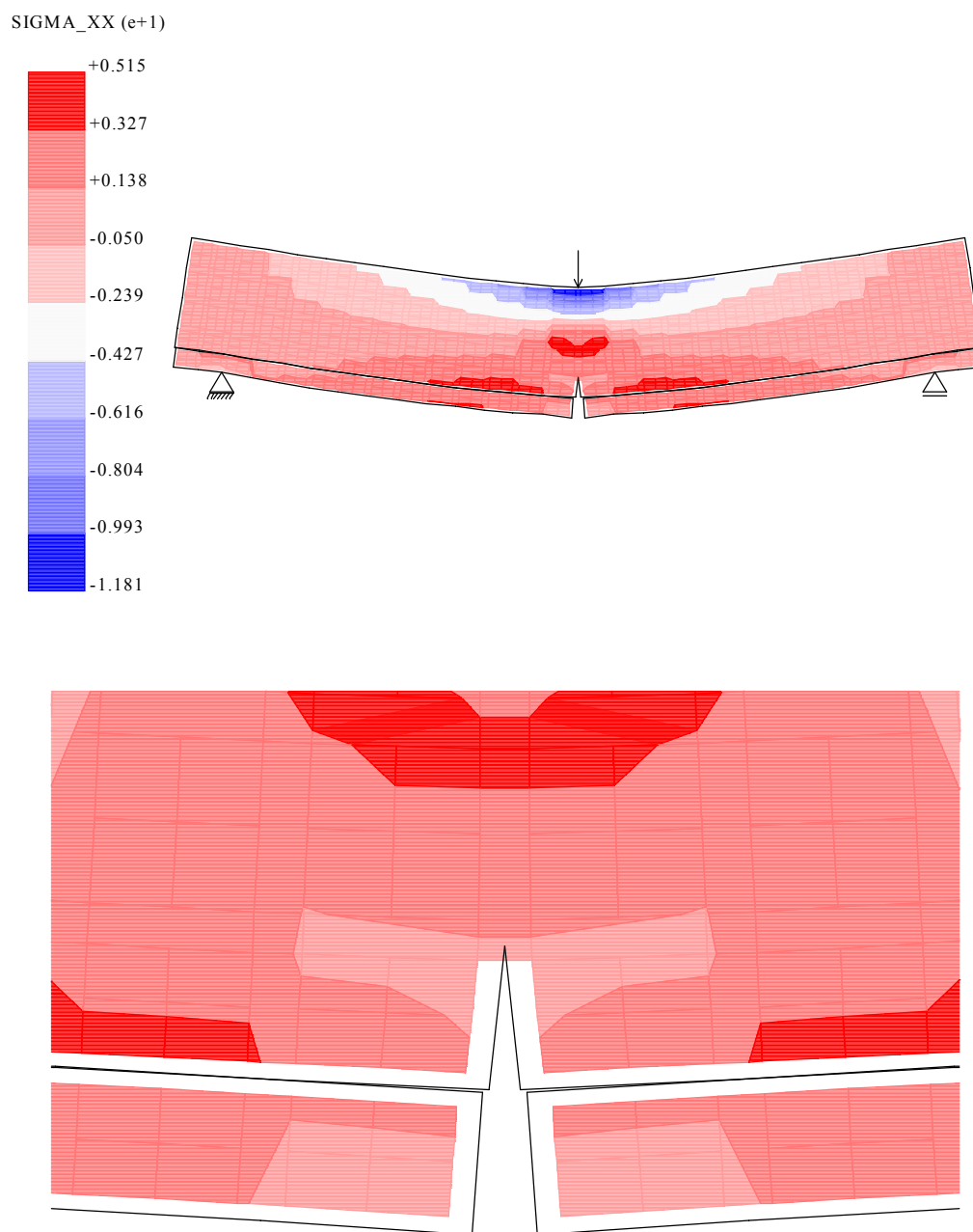
Realizou-se uma análise em estado plano de tensão, usando o algoritmo de controle direto de deslocamento, com um fator de tolerância de  $1.00 \times 10^{-4}$ . Com uma carga de referência  $P = 10 \text{ kN}$ , o deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga foi incrementado de  $-5 \times 10^{-6} \text{ m}$  em cada passo da análise.



**Figura 7.7:** Carga×deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga

A figura 7.7 mostra os gráficos carga×deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga obtidos na análise. Esta figura também mostra pontos referentes à resultados experimentais, adaptados de (Prasad & Krishnamoorthy 2002). A comparação entre os resultados numéricos e experimentais mostra, novamente, uma boa correlação entre os mesmos.

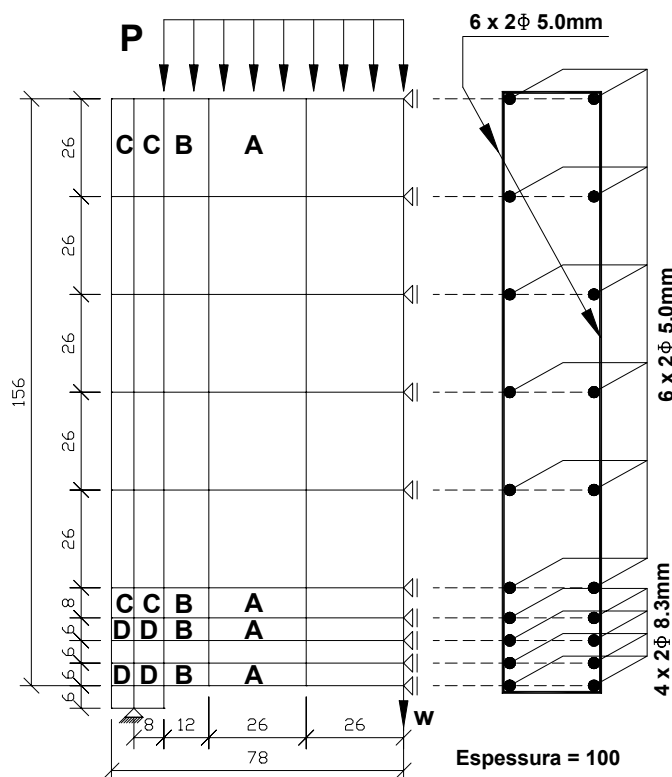
A figura 7.8 mostra a deformada da viga e a variação das tensões normais horizontais correspondentes ao ponto **A** da figura 7.7. Na mesma figura observa-se a boa representação do fenômeno de perda de aderência entre os materiais, proporcionada pelo modelo.



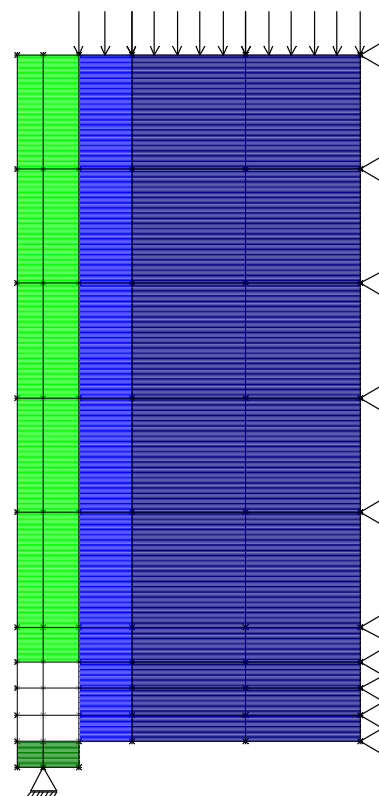
**Figura 7.8:** Deformada e variação de tensões normais horizontais

## 7.4 Viga Parede

Neste exemplo, uma viga parede analisada experimentalmente por (Leonhardt & Walther 1966) apud (Winnicki & Cichón 1998) é modelada. A geometria e o carregamento estão mostrados na figura 7.9.



**Figura 7.9:** Geometria da viga (mm)



**Figura 7.10:** Malha e divisão por Materiais

A malha foi gerada com elementos quadrilaterais de 4 nós, para o concreto e elementos de barra de 2 nós, para a armadura. Utilizou-se  $2 \times 2$  pontos de integração para os elementos quadrilaterais e 2 pontos de integração para os elementos de barra. A figura 7.10 mostra a malha.

O concreto foi representado com o modelo de dano escalar com lei de evolução não-linear, onde  $E_0 = 20000 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0.20$ ,  $\beta = 0.20$  e os demais parâmetros variam segundo as regiões A, B, C e D da figura 7.9. A figura 7.10 mostra as regiões A, B, C e D definidas em termos de material e a tabela 7.1 mostra os valores das constantes dos materiais associados a cada região.

Usou-se o modelo elasto-plástico para representar o comportamento do aço com as constantes de material dadas na tabela 7.2. Adotou-se a hipótese de aderência perfeita entre o concreto e o aço.

A análise foi realizada através do método de comprimento de arco cilíndrico, com um fator de carga inicial igual à 0.01, uma tolerância de  $1 \times 10^{-4}$  e uma carga de referência de  $P = 1500 \text{ kN/m}$ .

**Tabela 7.1:** Constantes do material concreto

Região	$f_c$ (MPa)	$f_t$ (MPa)	$\varepsilon_c$ ( $\times 10^{-3}$ )	$G_f$ (N/m)	$h$ (m)
<b>A</b>	30.20	3.020	2.600	309.5	0.13
<b>B</b>	30.20	3.020	2.600	312.5	0.06
<b>C</b>	30.20	3.020	2.600	333.3	0.04
<b>D</b>	40.27	4.027	3.467	444.5	0.04

**Tabela 7.2:** Constantes para o material aço

Armadura	$E_s$ (MPa)	$\nu$	$f_y$ (MPa)
$\phi \text{ 8.3mm}$	210000	0.30	428.0
$\phi \text{ 5.0mm}$	210000	0.30	240.0

A figura 7.11 mostra a trajetória de equilíbrio para a viga relativa ao deslocamento vertical  $w$  destacando na figura 7.9. Observa-se uma satisfatória concordância entre os resultados numéricos e experimentais. Cabe ressaltar que a simulação numérica foi capaz de descrever o regime pós-crítico da viga.

Conforme (Leonhardt & Walther 1966) apud (Winnicki & Cichón 1998), na análise experimental, o concreto perto do apoio esquerdo foi inicialmente esmagado para uma carga total de  $1000 \text{ kN}$ , em seguida o apoio foi reparado e continuou-se o carregamento. Quando a carga total atingiu  $1290 \text{ kN}$ , o concreto na vizinhança do apoio direito sofreu ruína.

A figura 7.12 mostra o estado de tensão normal vertical associado à carga máxima numericamente computada ( $1070 \text{ kN}$ ). Este valor está entre os valores experimentais correspondentes ao esmagamento dos apoios. Pode-se dizer, portanto, que o mecanismo físico de colapso foi bem representado pela análise numérica.

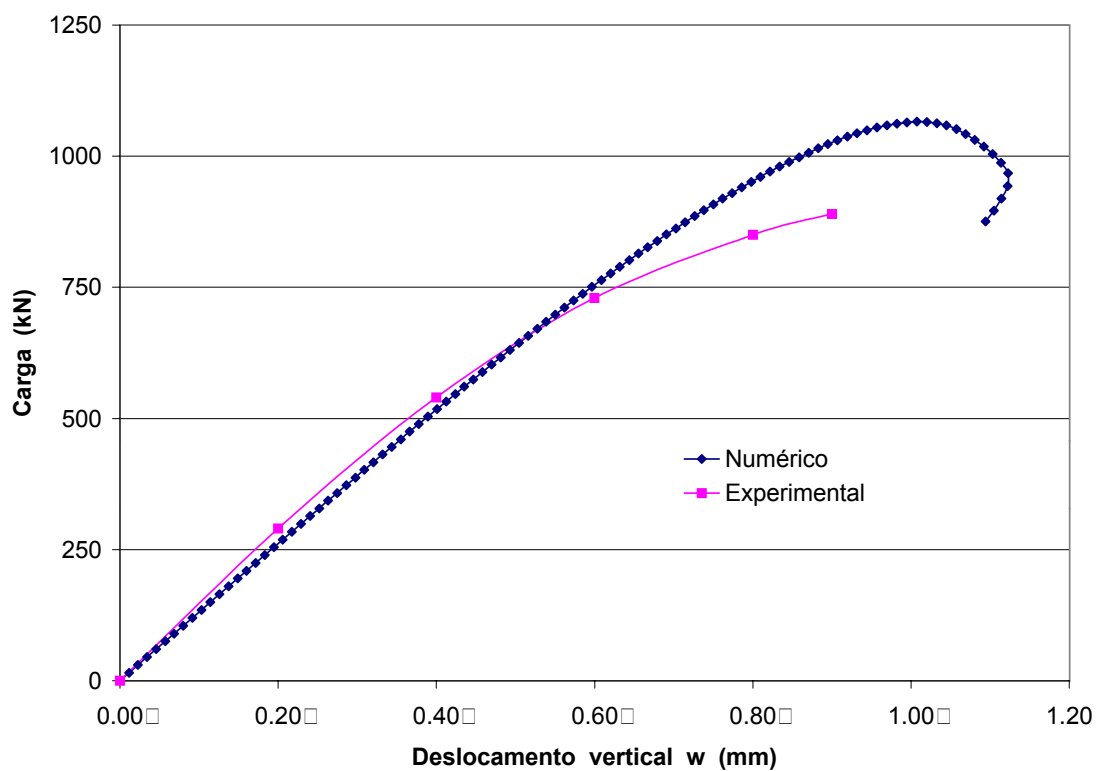


Figura 7.11: Curva  $P \times w$

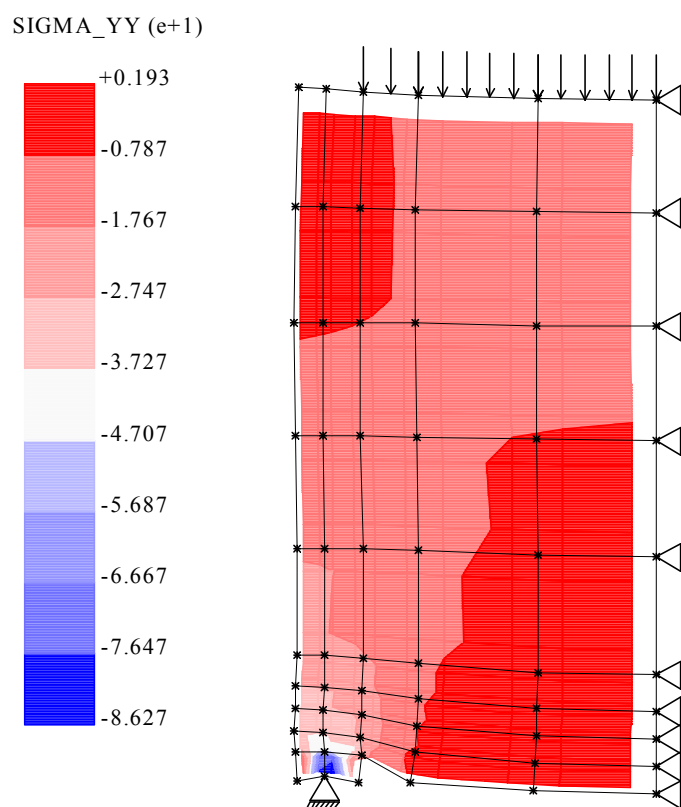
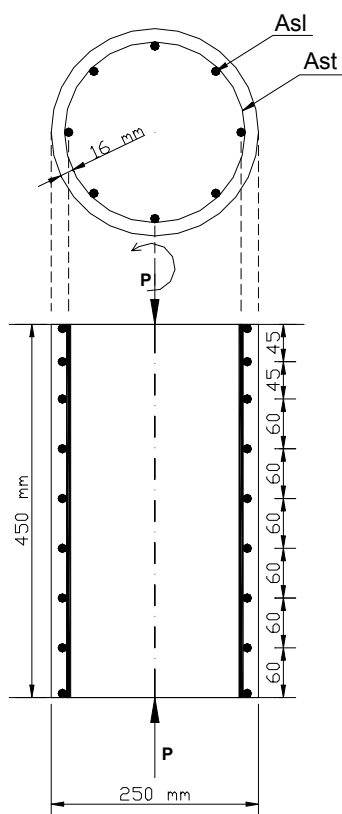


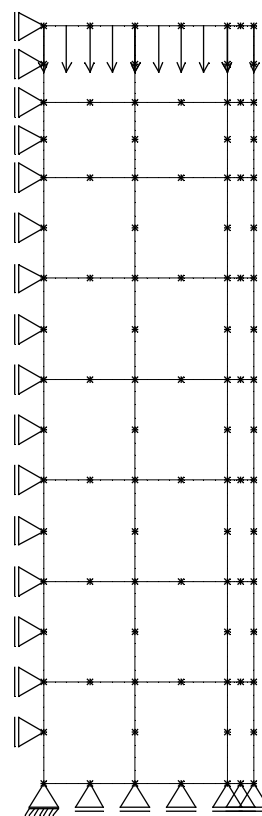
Figura 7.12: Estado de tensão normal vertical para a carga máxima

## 7.5 Pilar Circular

Neste exemplo modela-se um trecho de um pilar de concreto armado de seção circular (ver figura 7.13). Cabe lembrar que se trata da mesma peça adotada no capítulo de validação (seção 6.4), porém aqui a peça é analisada usando os modelos de contato e molas associados com representações não-lineares para os materiais. Deseja-se, assim, simular o estudo experimental realizado por (Razvi & Saatcioglu 1996) apud (Liu & Foster 1998).



**Figura 7.13:** Pilar de concreto de armado



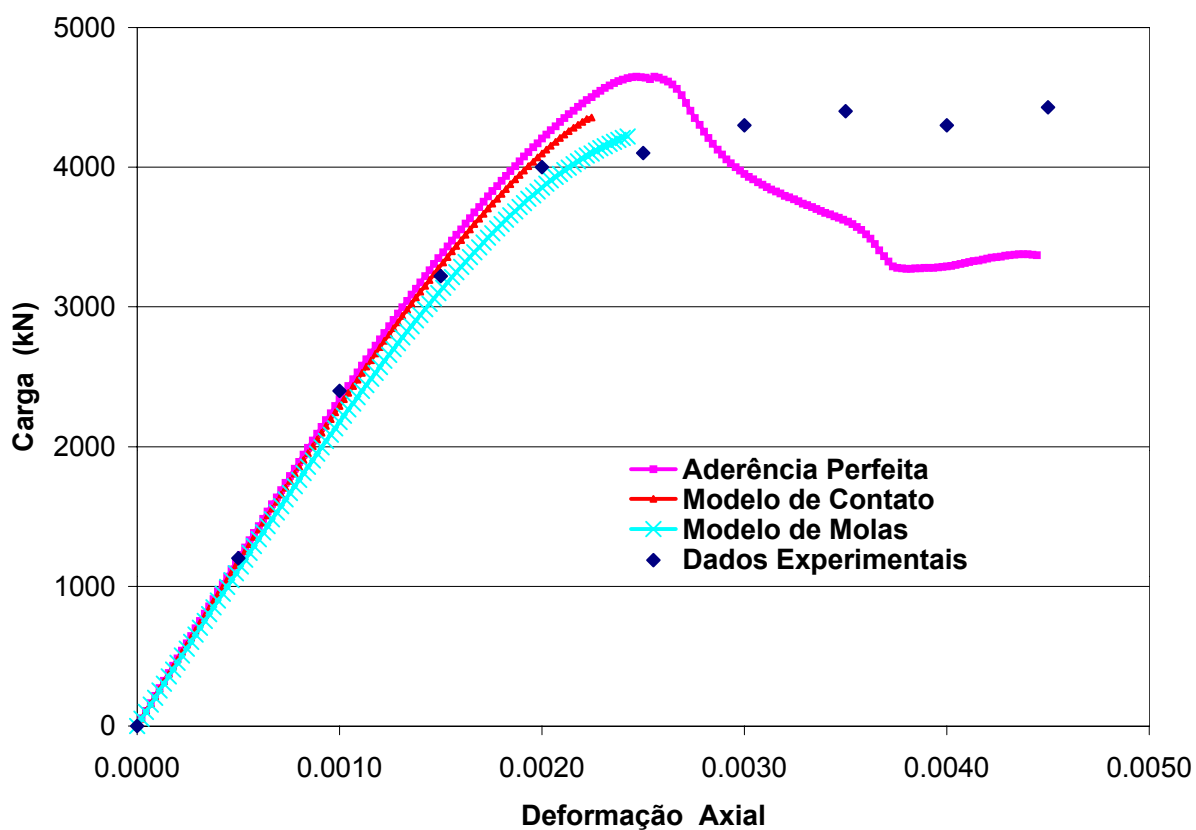
**Figura 7.14:** Malha de elementos finitos

Adotaram-se elementos finitos axissimétricos de 8 nós (concreto), de barra de 3 nós (armadura longitudinal) e axissimétricos pontuais (estribos espirais), conforme mostra a malha da figura 7.14. A ordem de integração foi de  $4 \times 4$  para o concreto e 4 pontos de Gauss para armadura e aderência. Foi usado o modelo de microplanos para representar o comportamento do concreto, com as seguintes propriedades (ver seção 2.3.2):  $f_c = 83 \text{ MPa}$ ,  $E_c = 46060 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0.18$ ,  $a_1 = 0.000418$ ,  $a_2 = 0.0034$ ,  $a_3 = 0.0020$ ,  $p_1 = 0.55$ ,  $p_2 = 1.40$ ,  $p_3 = 3.25$ ,  $a = 0.005$ ,  $b = 0.225$ ,  $p = 0.25$ ,  $q = 2.25$ .

Uma relação tensão-deformação elasto-plástica foi usada para caracterizar a armadura, considerando-se:  $f_{sy} = 450 \text{ MPa}$  para armadura longitudinal,  $f_{sy} = 400 \text{ MPa}$  para os estribos e  $E_s = 200000 \text{ MPa}$ . A área da armadura longitudinal é  $A_{st} = 200 \text{ mm}^2$  e  $A_{st} = 100 \text{ mm}^2$  é a área dos estribos circulares.

A perda de aderência foi considerada através de elementos de contato e de molas, utilizando a relação tensão-escorregamento proposta por Homayoun (ver seção 4.4), com as seguintes propriedades: módulo de aderência inicial ( $E_b$ ) =  $12000 \text{ MN/mm}^3$ , módulo de aderência descendente ( $E_d$ ) =  $6000 \text{ MN/mm}^3$ , resistência de aderência ( $f_b$ ) =  $12.0 \text{ MPa}$  e resistência de aderência residual ( $f_{br}$ ) =  $6.00 \text{ MPa}$ .

Empregou-se o método de controle direto de deslocamento para obter as trajetórias de equilíbrio. O deslocamento vertical do ponto do topo da coluna situado no eixo de simetria foi incrementado de  $-0.01 \text{ mm}$  em cada passo da análise. A tolerância admitida foi de  $1.00 \times 10^{-4}$  e a carga de referência foi tomada igual a  $122 \text{ MN/mm}^2$ .



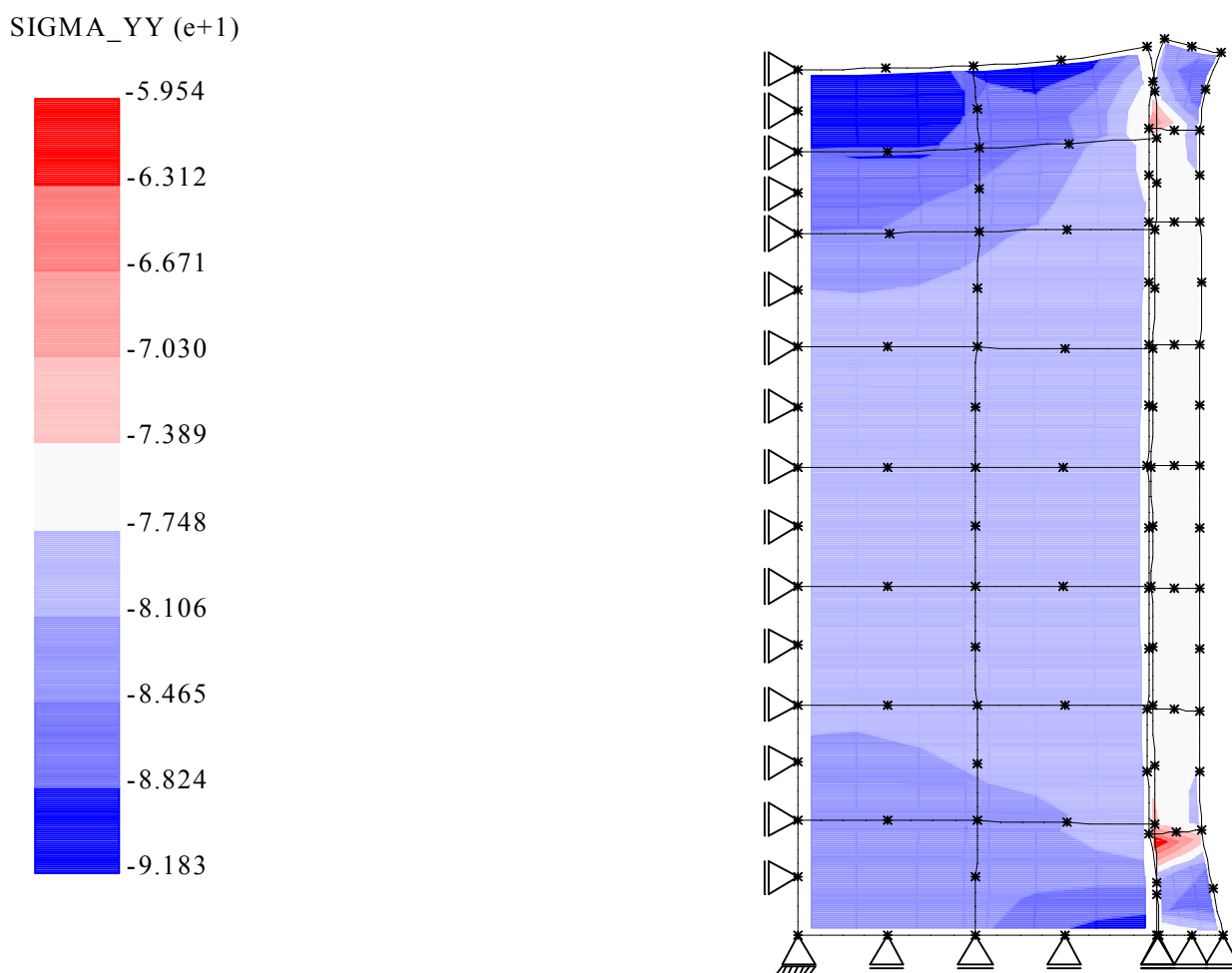
**Figura 7.15:** Carga × deformação axial

A figura 7.15 mostra a correlação entre os resultados experimentais (adaptados de (Liu



& Foster 1998)) e os resultados via elementos finitos. Como pode ser visto na figura 7.15 a correlação entre os resultados é muito boa, permitindo a estimativa da carga máxima.

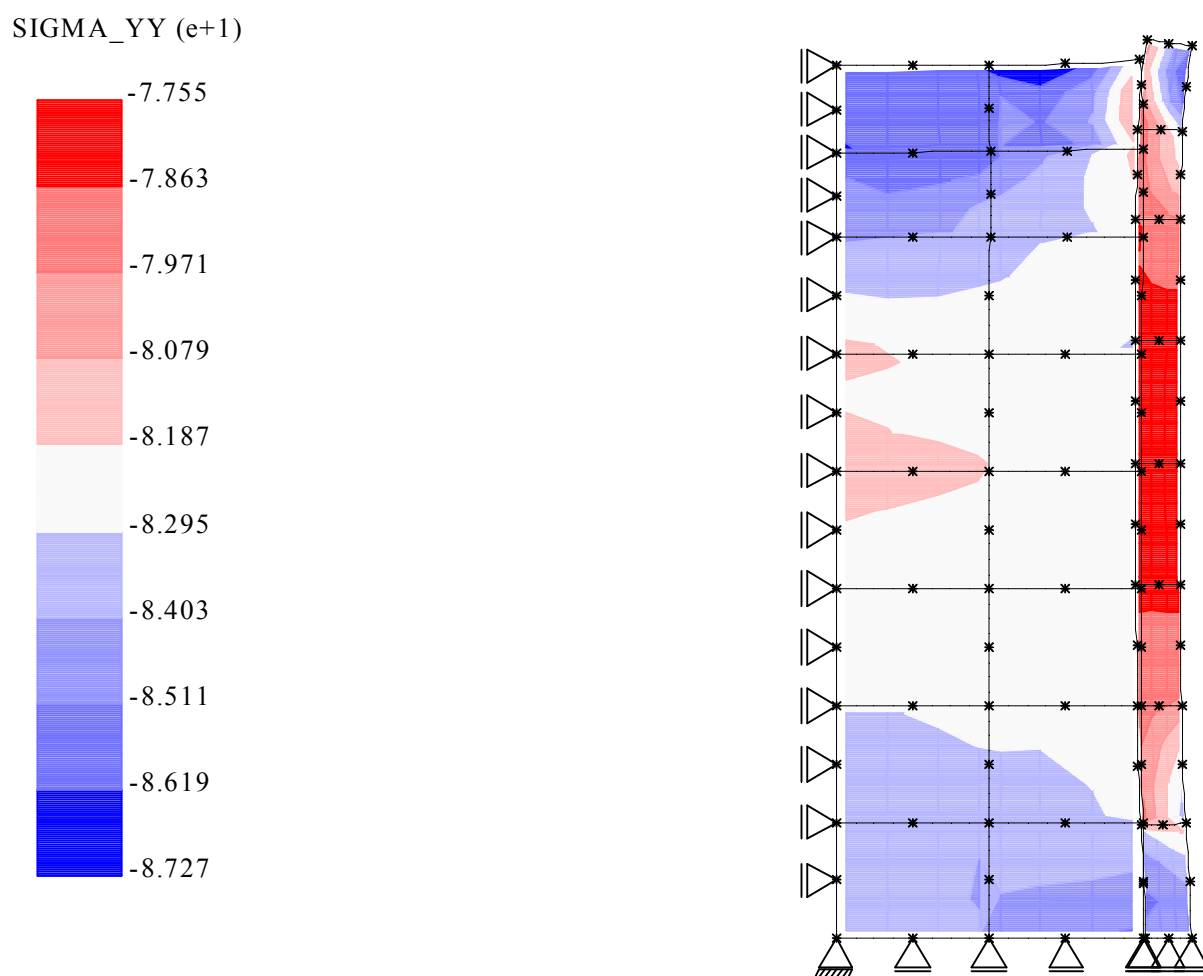
A partir da carga máxima, entretanto, os modelos de elementos finitos com perda de aderência são incapazes de descrever a trajetória de equilíbrio da coluna. A figura também mostra que a consideração de aderência perfeita induz a um comportamento mais frágil que o observado experimentalmente.



**Figura 7.16:** Estado de tensão normal vertical para modelo de contato

A figura 7.16 mostra a variação das tensões normais verticais do pilar, considerando o modelo de contato, para o último ponto da trajetória de equilíbrio da figura 7.15. Para o modelo com molas a referida ilustração está na figura 7.17.

Como pode ser observado nas figuras 7.16 e 7.17, o confinamento proporcionado pelos estribos circulares aumenta a capacidade resistente do núcleo da coluna. Entretanto, o concreto



**Figura 7.17:** Estado de tensão normal vertical para modelo de molas

do recobrimento forma uma casca que se descola do núcleo, devido ao esgotamento da aderência entre as partes. A representação deste mecanismo de colapso só foi possível devido à capacidade dos modelos de armadura discreta em descrever a cinemática da região de interface.

# Capítulo 8

## OUTRAS SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

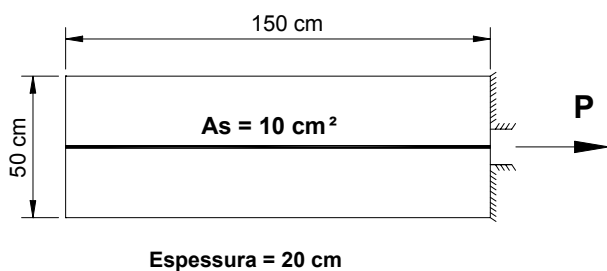
### 8.1 Introdução

Este capítulo apresenta mais algumas simulações numéricas realizadas neste trabalho de mestrado. As simulações não são comparadas com resultados experimentais. Entretanto, todas são ilustrativas do desempenho dos modelos na análise de peças submetidas a solicitações diversas.

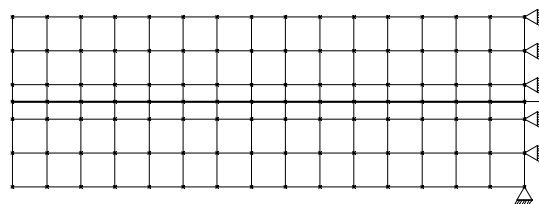
### 8.2 Arrancamento

A figura 8.1 mostra a geometria, o carregamento e as condições de contorno do ensaio de arrancamento simulado neste exemplo. A figura 8.2 mostra a malha usada, que é composta de elementos quadriláteros de 4 nós, em estado plano de tensão, representativos do material concreto e a armadura que foi representada por elementos unidimensionais de 2 nós. As integrações numéricas foram realizadas com  $2 \times 2$  pontos para os elementos de concreto e 2 pontos para os elementos de barra.

O concreto foi representado através do modelo de dano escalar com os seguintes parâmetros:  $E_0 = 37000 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0.15$ ,  $f_c = 35.00 \text{ MPa}$ ,  $f_t = 2.50 \text{ MPa}$ ,  $\varepsilon_c = 0.002$ ,  $G_f = 1.00 \text{ N/m}$ ,  $h = 0.05 \text{ m}$  e  $\beta = 0.2$ . O modelo elasto-plástico foi usado para simular o aço com  $E_s = 210000 \text{ MPa}$  e  $f_y = 500 \text{ MPa}$ .



**Figura 8.1:** Geometria



**Figura 8.2:** Discretização

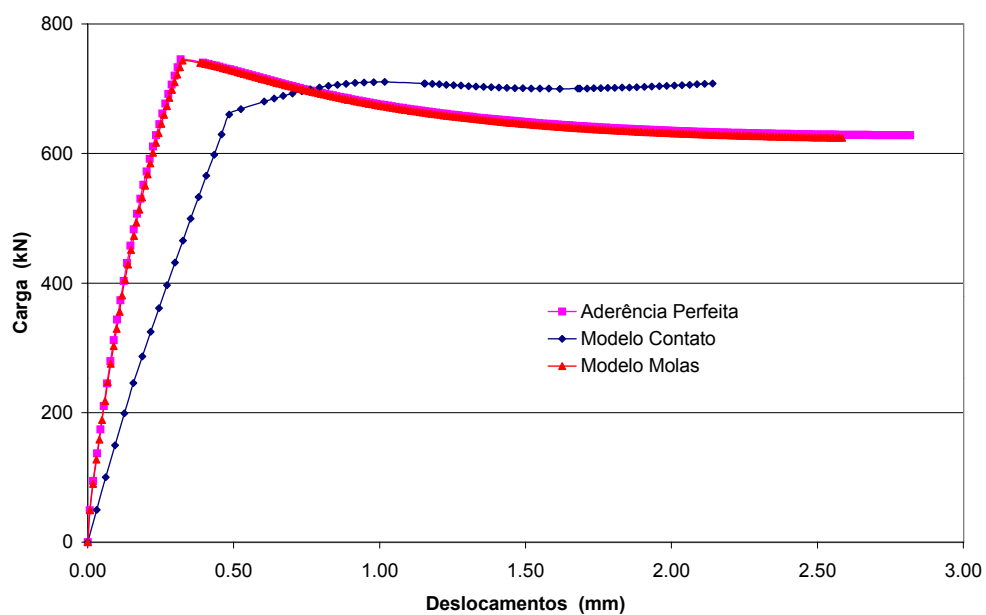
A região de aderência foi modelada segundo a relação tensão×escorregamento proposta por (Homayoun & Mitchell 1996) (seção 4.4), com os seguintes valores para as constantes do material:  $E_b = 37000 \text{ MPa}$ ,  $E_d = 836.158 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_b = 12.00 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_{bu} = 6.00 \text{ MPa}$ ,  $u_b = 0.324 \text{ mm}$  e  $u_{bu} = 7.50 \text{ mm}$ .

Nesta análise adotou-se o método de deslocamento generalizado com um fator de carga inicial igual à 0.1, uma tolerância de  $1.0 \times 10^{-3}$  e uma carga de referência de  $P = 500 \text{ kN}$ .

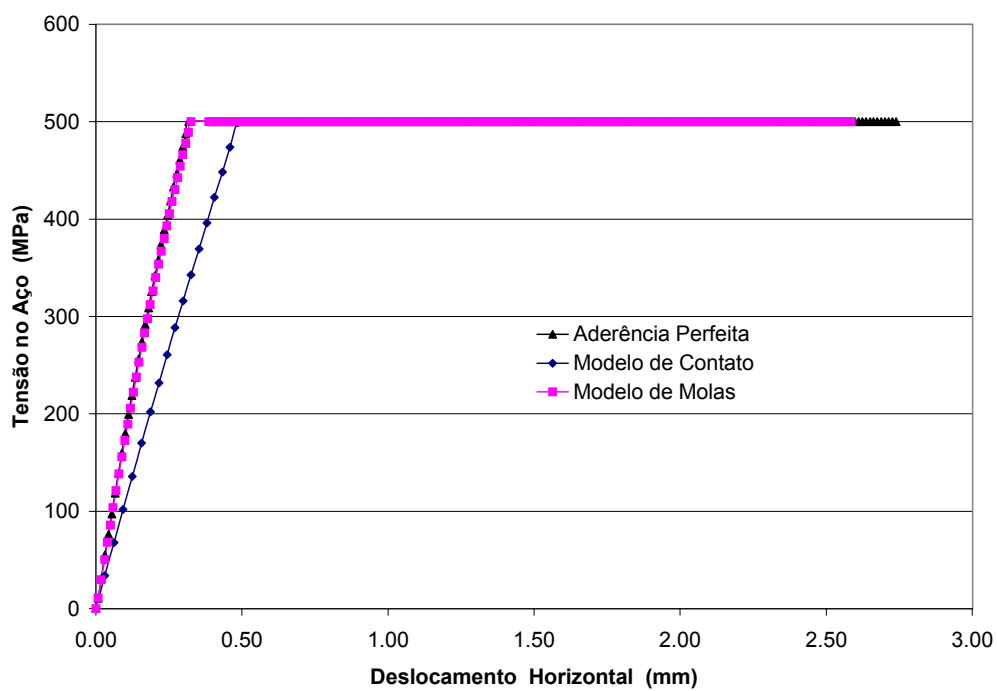
A trajetória de equilíbrio, para o ponto de aplicação da carga, pode ser vista na figura 8.3. A figura 8.4 mostra a variação da tensão na extremidade da barra de aço, durante a simulação. Observa-se que as curvas para aderência perfeita e para a perda de aderência, usando elementos de molas, são similares. Entretanto, ao empregar elementos de contato para descrever a região de interface concreto-aço observa-se a esperada diminuição da rigidez da peça.

Nas figuras 8.5, 8.6 e 8.7 apresentam-se a variação das tensões normais horizontais (a) no domínio bidimensional de análise, (b) no concreto próximo à armadura e (c) na barra de aço, correspondentes à carga de  $600 \text{ kN}$ , para os modelos de aderência perfeita, aderência com molas e aderência com contato.

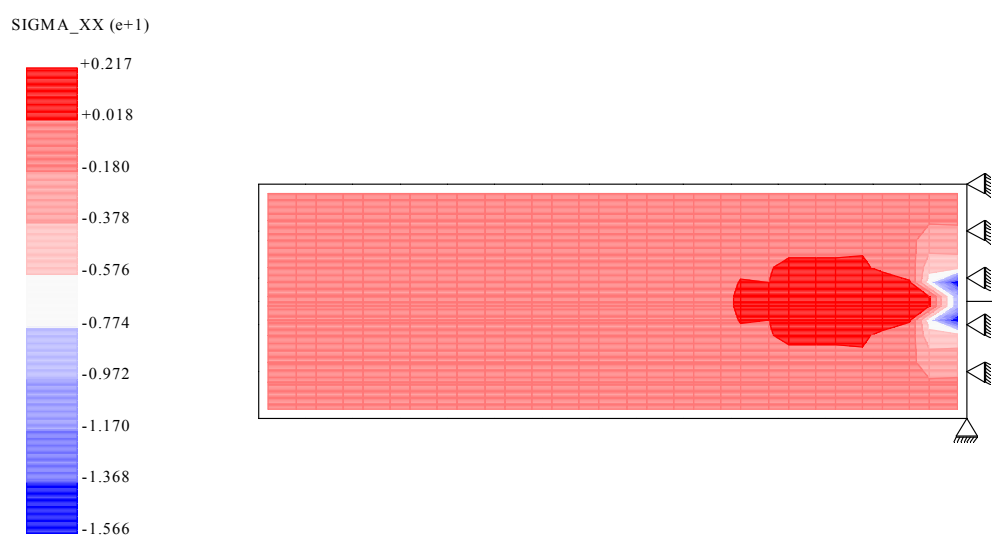
Como se pode observar nas figuras 8.5, 8.6 e 8.7, o modelo de contato representou melhor o fenômeno de perda de aderência entre os materiais, mobilizando de forma apropriada o concreto em torno da barra de aço.



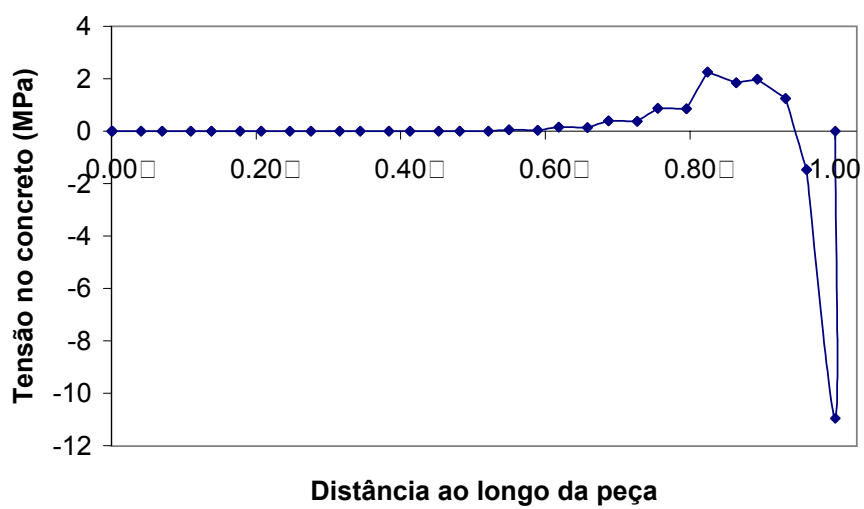
**Figura 8.3:** Trajetória de equilíbrio do ponto de aplicação da carga



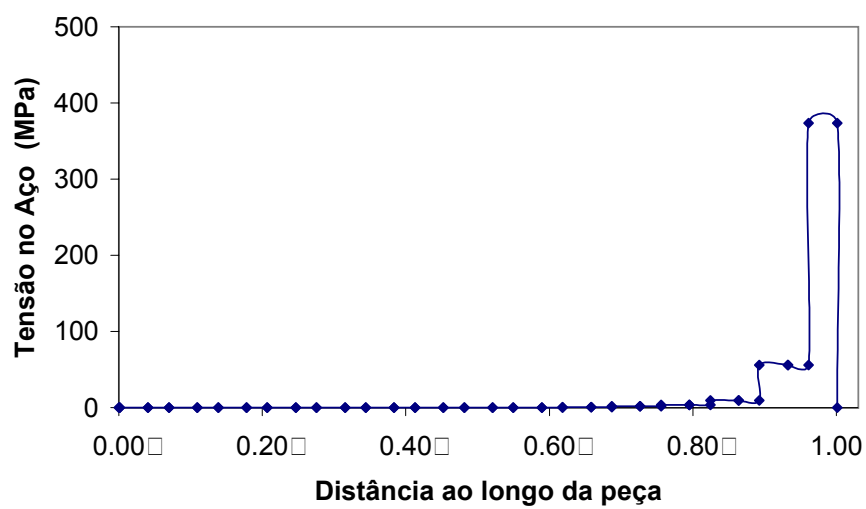
**Figura 8.4:** Variação da tensão na barra de aço



(a) Peça



(b) Concreto



(c) Armadura

Figura 8.5: Variação das tensões normais horizontais - Aderência Perfeita

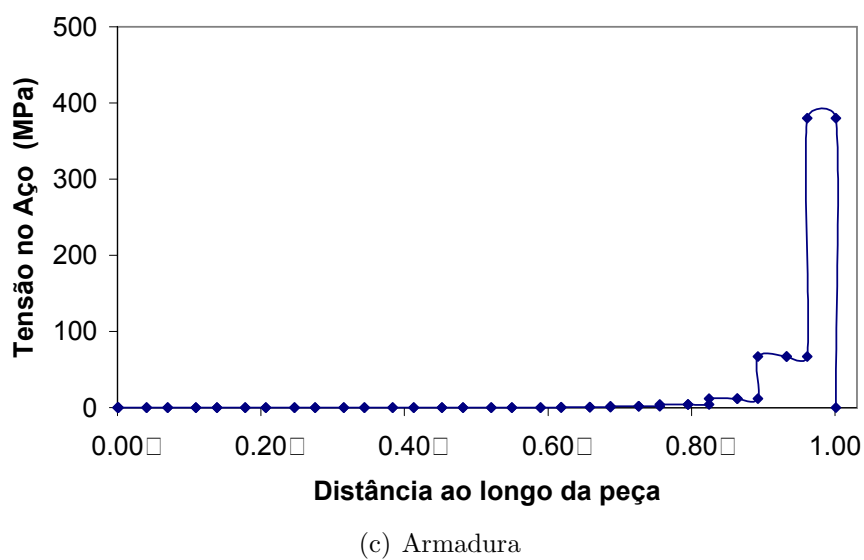
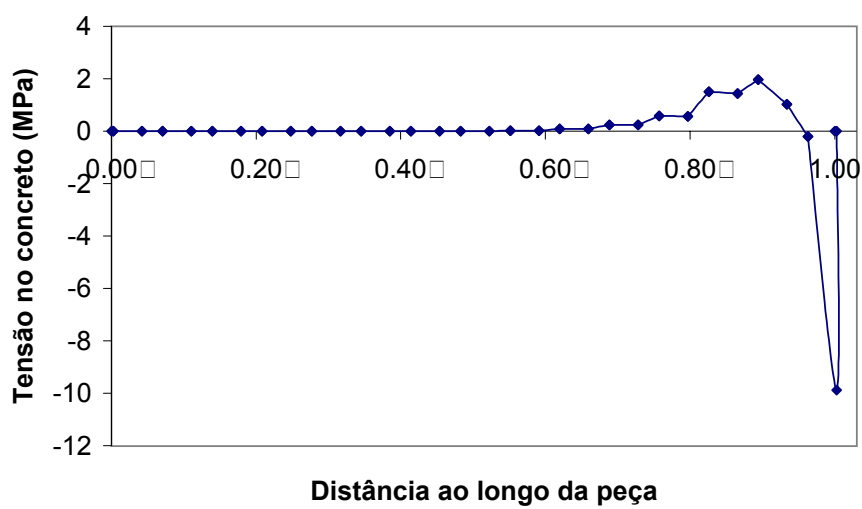
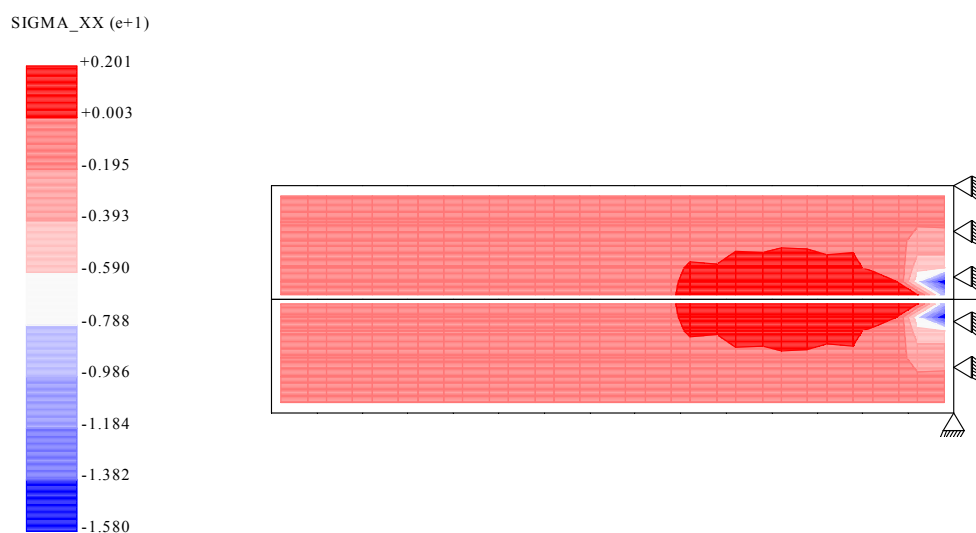
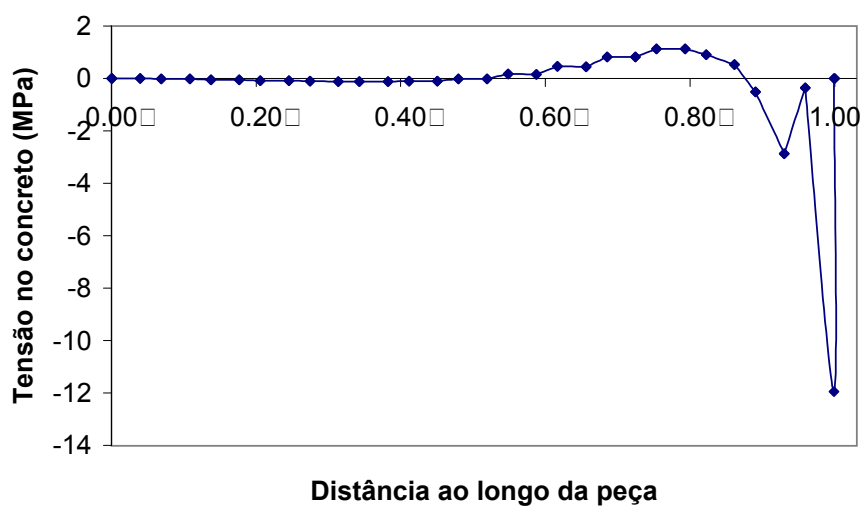


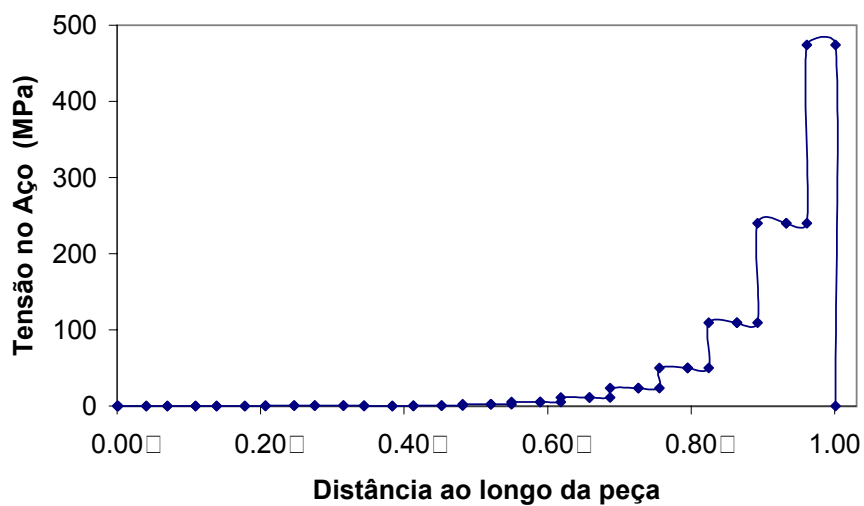
Figura 8.6: Variação das tensões normais horizontais - Modelo de Molas



(a) Peça



(b) Concreto



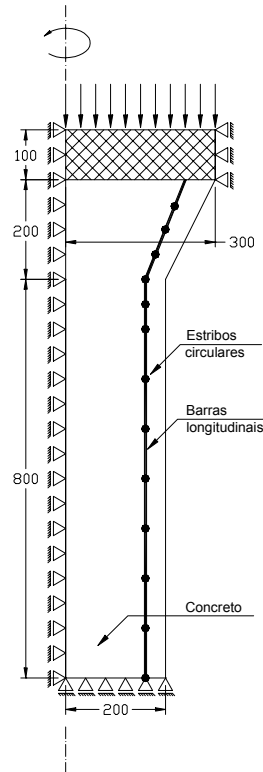
(c) Armadura

Figura 8.7: Variação das tensões normais horizontais - Modelo de Contato



### 8.3 Pilar com Capitel

Neste exemplo, uma coluna circular com capitel (adaptada de (Liu & Foster 1998)) é modelada. A geometria, carregamento e condições de contorno estão mostradas na figura 8.8.



**Figura 8.8:** Pilar com capitel (medidas em *mm*)

O comportamento do concreto foi representado com o modelo de microplanos, adotando-se os seguintes parâmetros:  $f_{ck} = 60 \text{ MPa}$ ,  $E_c = 39170 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0.18$ ,  $a_1 = 0.000418$ ,  $a_2 = 0.0034$ ,  $a_3 = 0.0020$ ,  $p_1 = 0.55$ ,  $p_2 = 1.40$ ,  $p_3 = 3.25$ ,  $a = 0.005$ ,  $b = 0.225$ ,  $p = 0.25$ ,  $q = 2.25$ .

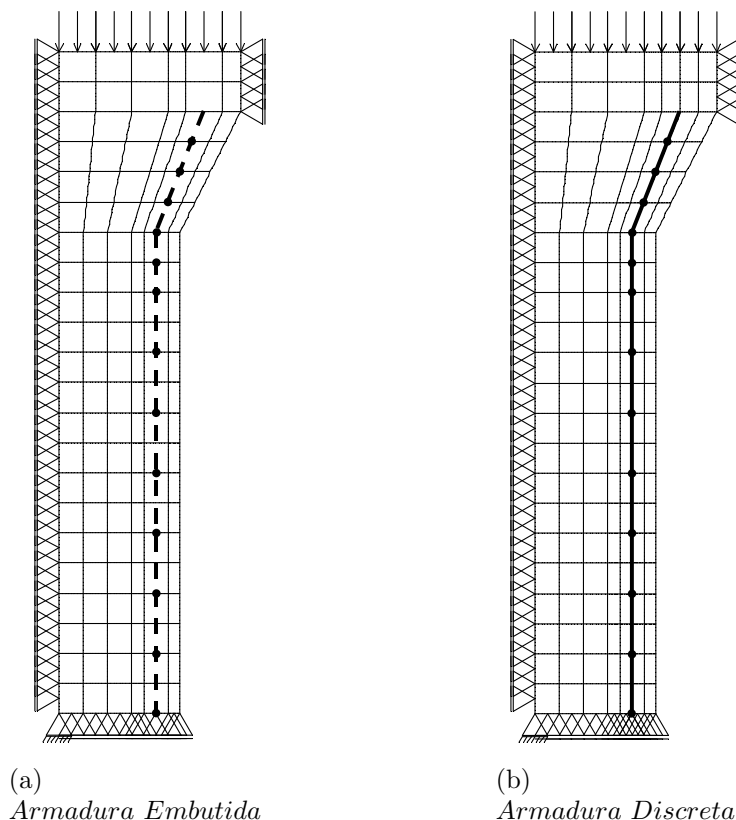
Para o modelo elasto-plástico, representativo do comportamento da armadura adotou-se:  $f_{sy} = 400 \text{ MPa}$ ,  $E_s = 200000 \text{ MPa}$ ,  $A_{sl} = 400.0 \text{ mm}^2$  e  $A_{st} = 58.667 \text{ mm}^2$ .

Para a lei de aderência de Homayoun, considerou-se:  $E_b = 5600 \text{ MPa}$ ,  $E_d = 4000 \text{ MPa}$ ,  $f_b = 30 \text{ MPa}$ ,  $f_{rb} = 3 \text{ MPa}$ .

Empregou-se o método dos deslocamentos generalizados para obter as trajetórias de equilíbrio, adotando um fator de carga inicial de 0.005, a tolerância de  $1.0 \times 10^{-3}$  e carga de referência  $P = 16500 \text{ kN/m}^2$ .

### 8.3.1 Discretização do Pilar

Foram adotadas duas malhas distintas para analisar o pilar conforme ilustra a figura 8.9.



**Figura 8.9:** Malhas adotadas

A figura 8.9(a) ilustra a discretização do pilar para o modelo de armadura embutida e a figura 8.9(b) mostra a malha obtida ao dividir-se os elementos de armadura embutida ao meio, obtendo-se a malha correspondente ao modelo de armadura discreta.

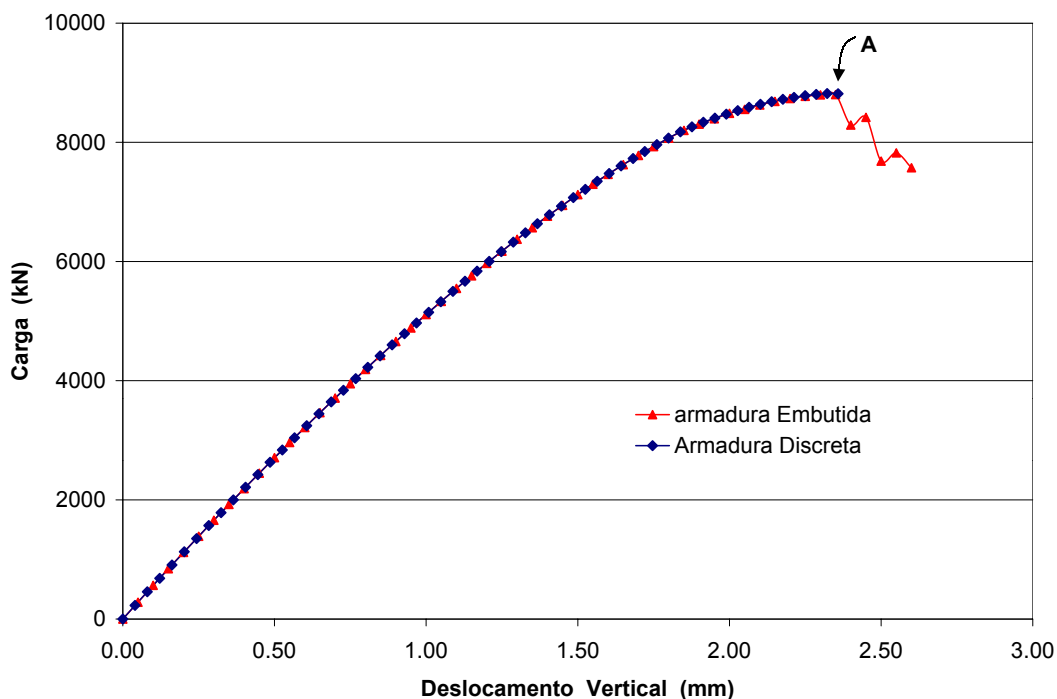
Nas duas malhas mostradas na figura 8.9 usaram-se elementos axissimétricos de 8 nós para representar o concreto. A armadura longitudinal foi representada por elementos de barra de 3 nós, embutidos nos elementos de concreto (8.9(a)), ou na interface entre elementos (8.9(b)). Os estribos foram representados por elementos axissimétricos pontuais.

A perda de aderência foi considerada tanto no modelo de armadura embutida como no modelo de armadura discreta. Neste último adotou-se elementos de mola e de contato.

Para integração numérica, adotou-se 3 pontos de Gauss para as barras de aço e para os elementos de aderência. Para os elementos de concreto, adotou-se  $3 \times 3$  pontos de Gauss.

### 8.3.2 Aderência Perfeita

Na primeira simulação realizada considerou-se a aderência perfeita entre os materiais concreto e aço.

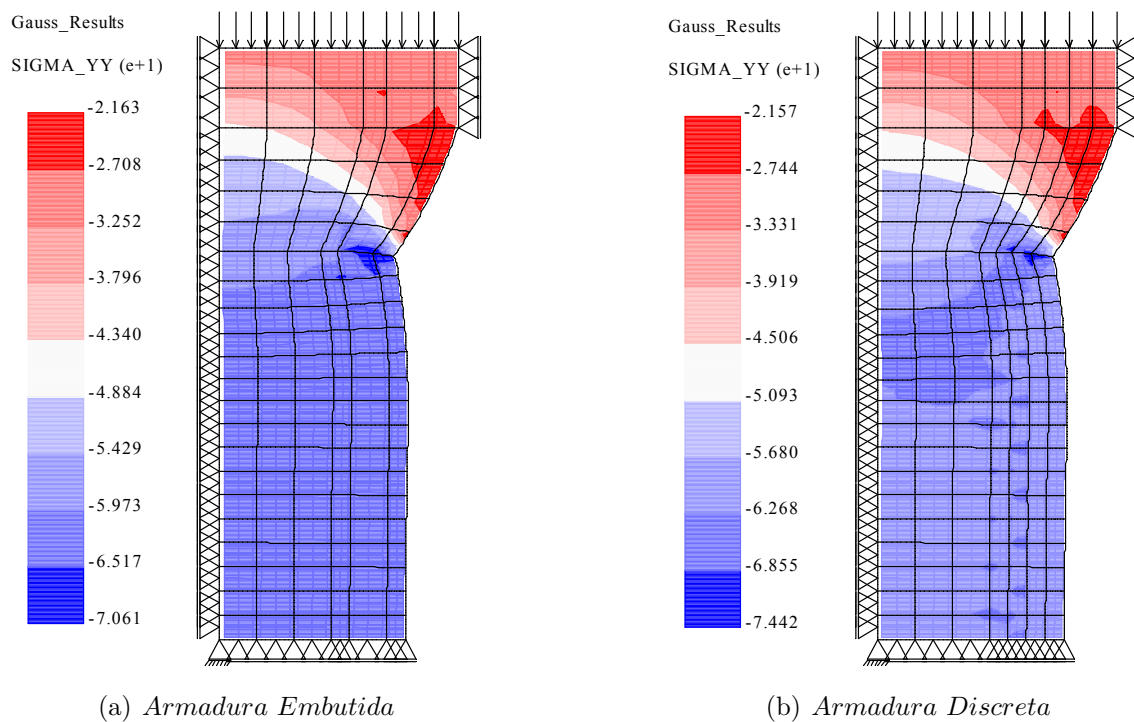


**Figura 8.10:** Trajetórias de equilíbrio - Aderência Perfeita

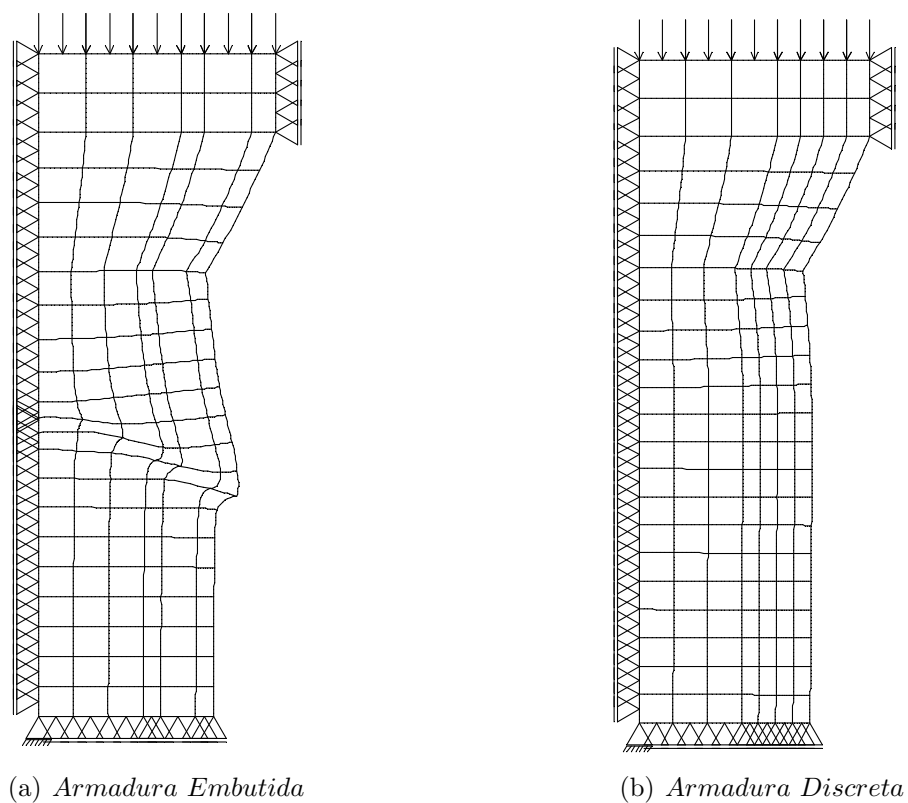
A figura 8.10 mostra as trajetórias de equilíbrio para as duas malhas descritas acima e demonstram que, em se tratando de aderência perfeita, a variação da malha não interfere no resultado. Percebe-se também que o modelo numérico de armadura discreta (figura 8.9(b)), não foi capaz de representar o comportamento pós-crítico da coluna.

A figura 8.11 mostra o estado de tensões normais verticais no pilar para o ponto A, que corresponde à carga máxima  $P = 8800 \text{ kN}$ , considerando as duas malhas. Percebe-se pela figura que a distribuição de tensões ao longo do pilar é semelhante para as duas malhas. E que o efeito de confinamento devido à armadura circular aumenta a capacidade de resistência do pilar, comprovado pela tensão máxima da ordem de  $70 \text{ MPa}$ .

A figura 8.12 ilustra as deformadas da coluna, correspondentes ao último ponto obtido na análise, para os dois modelos. A figura revela que o modo de ruptura, para o modelo de armadura embutida ocorre devido à formação de uma banda de cisalhamento (figura 8.12(a)).



**Figura 8.11:** Estado de tensão para o ponto A - Aderência Perfeita

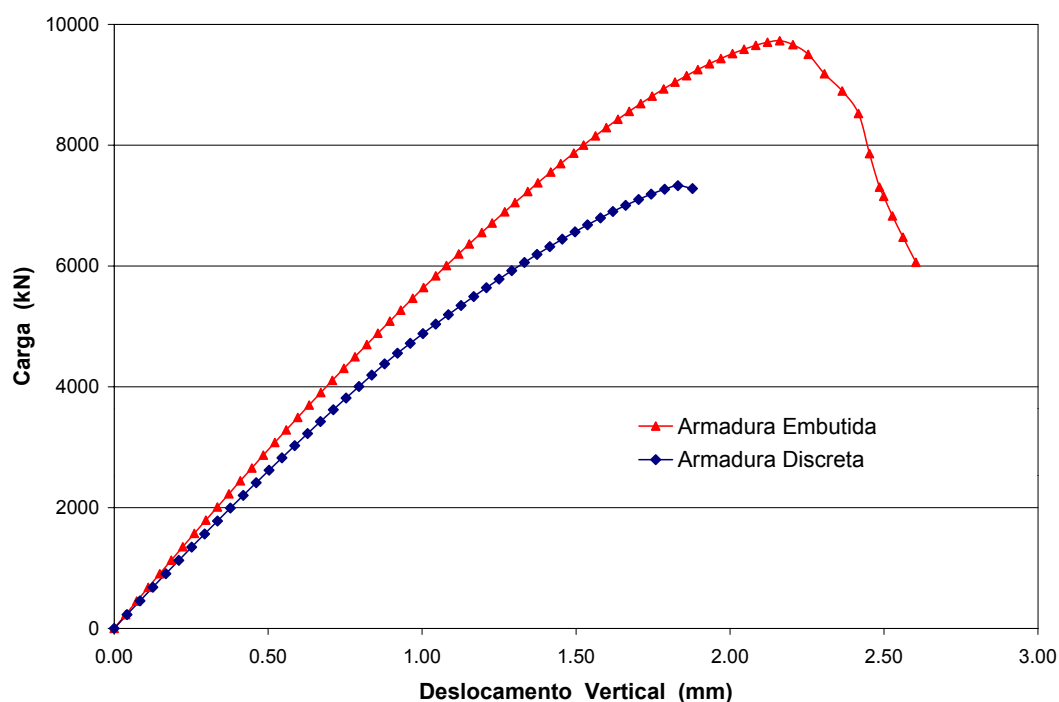


**Figura 8.12:** Deformadas e modos de ruptura - Aderência Perfeita

Em relação ao modelo de armadura discreta, o modo de ruptura não foi revelado pela análise, uma vez que a mesma foi interrompida no nível da carga máxima (ponto *A* da figura 8.10).

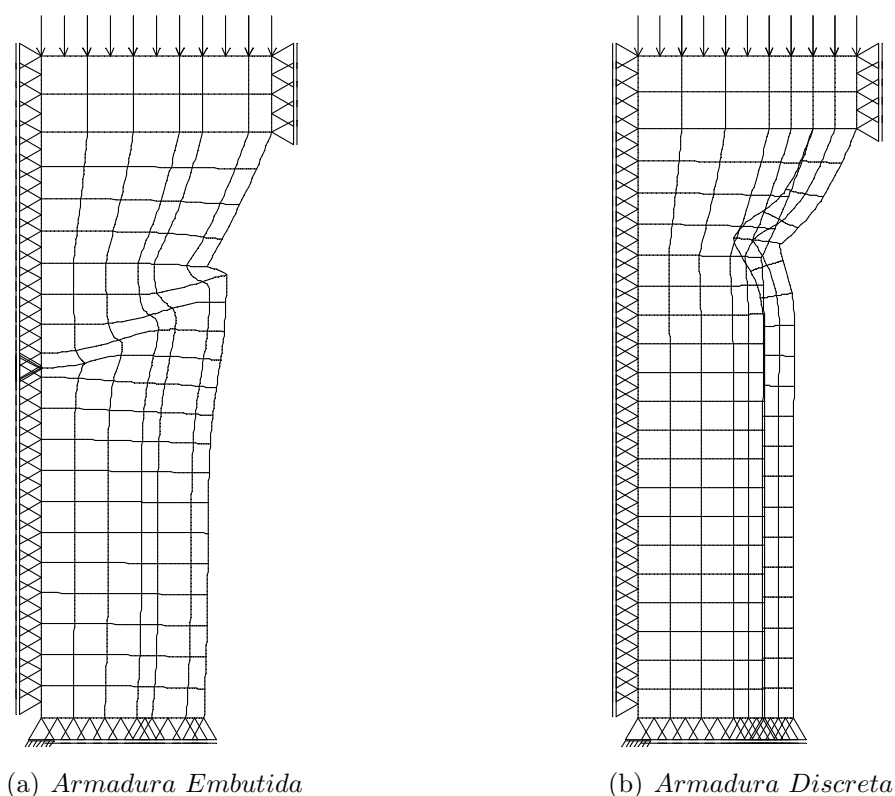
### 8.3.3 Perda de Aderência com Modelo de Contato

A figura 8.13 mostra as trajetórias de equilíbrio para as duas malhas, considerando a perda de aderência com o modelo de contato. Observa-se que o modelo de armadura embutida apresenta-se mais rígido e, talvez por este motivo, consegue descrever parte do regime pós-crítico da coluna.



**Figura 8.13:** Trajetórias de equilíbrio - Modelo de Contato

A figura 8.14 mostra as deformadas para o pilar, correspondentes ao último ponto de equilíbrio obtido em cada análise. Para o modelo de armadura discreta (8.14(b)), o último passo da análise é acompanhado do esmagamento do concreto na região inicial do capitel e da ruptura da camada de recobrimento da armadura. Para o modelo de armadura embutida, a ruína do pilar novamente ocorreu devido a formação da banda de cisalhamento. Neste caso, como não há duplicação de nós para se considerar a aderência, não ocorre o efeito localizado que leva ao rompimento do cobrimento e esmagamento do concreto na vizinhança do capitel.



**Figura 8.14:** Deformadas e modos de ruptura - Modelo de Contato

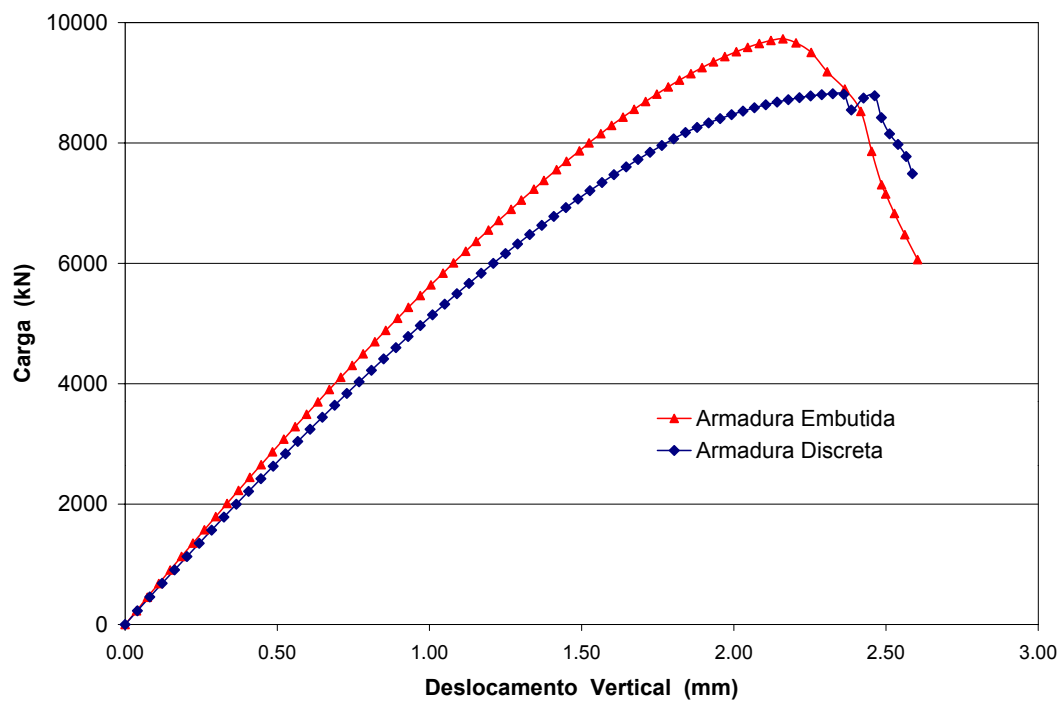
Este fato permitiu que a análise evoluísse até o regime pós-crítico, formando a banda de cisalhamento.

### 8.3.4 Perda de Aderência com Modelo de Molas

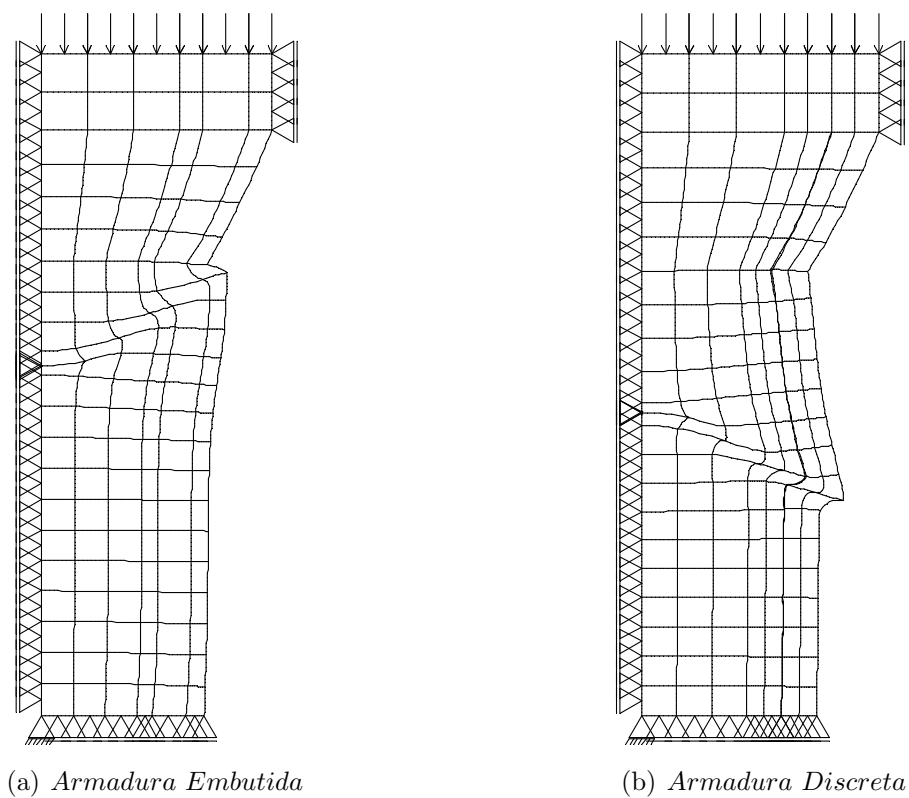
A figura 8.15 mostra as trajetórias de equilíbrio para as duas malhas, considerando a perda de aderência com o modelo de molas.

Assim, como no caso anterior (seção 8.3.3), ao se usar elementos de molas para representar a interface concreto-aço, a rigidez global fica um pouco menor do que quando se usa elementos embutidos. Neste caso, entretanto, o modelo de armadura discreta consegue descrever parte do regime pós-crítico, revelando uma coluna mais dúctil que a representada com o modelo de armadura embutida.

A figura 8.16 mostra as deformadas para o pilar revelando que, ao se usar o modelo de armadura discreta associado com elementos de molas, conseguiu-se descrever o comportamento pós-crítico e que o mesmo foi acompanhado pela formação de uma banda de cisalhamento.

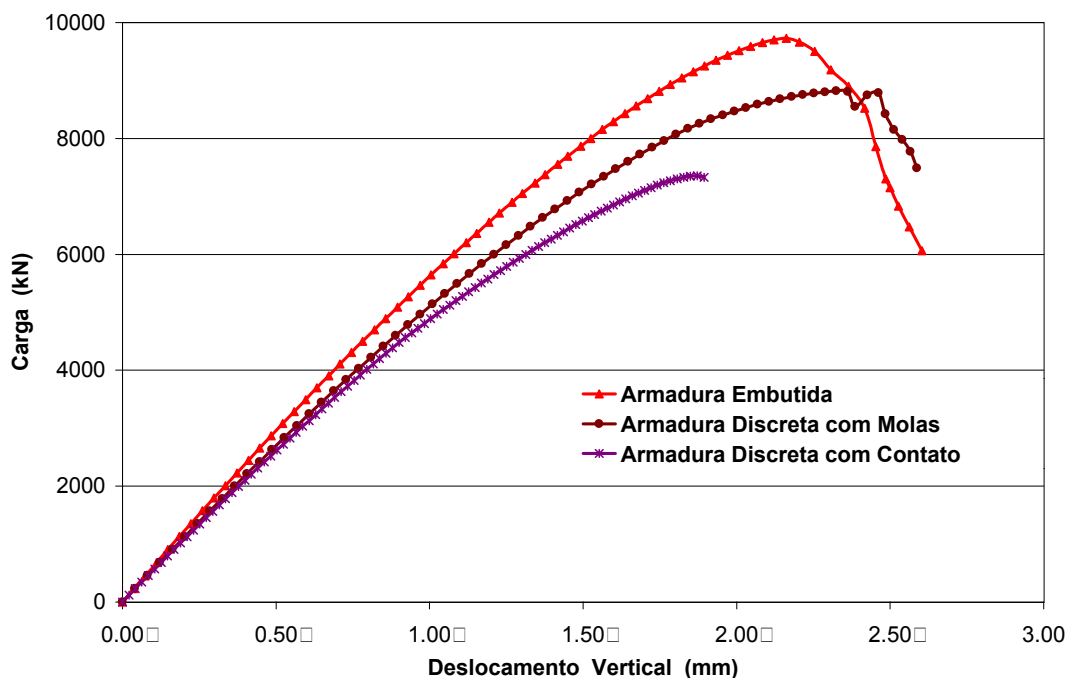


**Figura 8.15:** Trajetórias de equilíbrio - Modelo de Molas



**Figura 8.16:** Deformadas e modos de ruptura - Modelo de Molas

Para finalizar, a figura 8.17 mostra comparações das curvas carga×deslocamento obtidas com os modelos de armadura embutida e discreta, considerando a perda de aderência. Observa-se que o modelo de armadura embutida induz a um aumento na rigidez da estrutura e que o modelo de perda de aderência com elementos de contato subestima em demasia esta grandeza.



**Figura 8.17:** Trajetórias de equilíbrio - Perda de Aderência

Também, pode-se notar que o modelo com armadura embutida e o modelo de armadura discreta com molas são numericamente mais estáveis, representando o regime pós-crítico da coluna.

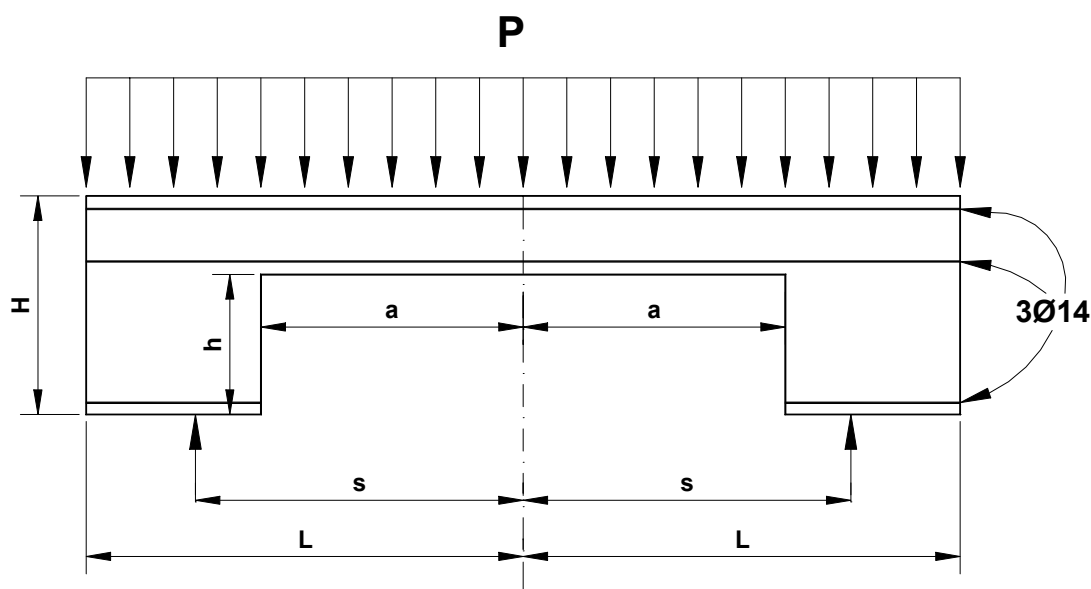
As deformadas do pilar mostram que o modelo de armadura discreta com elementos de contato tem a análise interrompida por problema de localização de deformações, enquanto os demais propagam o fenômeno através da formação de bandas de cisalhamento. Observa-se também que a referida banda ocorre junto ao capitel, no caso do modelo de armadura embutida e tem localização aleatória, no caso do modelo de molas.

Estas constatações, juntamente com a sabida redução de ductilidade dos pilares em concretos de alta resistência, permitem eleger o modelo de armadura embutida como o mais adequado para representar a coluna aqui analisada.



## 8.4 Diferentes Modos de Ruptura em Vigas

Costuma-se estudar a flexão de vigas de concreto armado, admitindo-se que o aparecimento de uma fissura vertical de flexão caracteriza o modo de ruptura, como foi o caso da viga modelada na figura 8.18. Na prática, podem aparecer não apenas uma fissura, mas várias fissuras. Assim, a resposta estrutural pode ser função de uma fissura induzida, como em vigas onde predominam as fissuras de cisalhamento, que ocorrem repentinamente e dominam o mecanismo de ruptura.



**Figura 8.18:** Geometria e carregamento da viga

Discute-se neste exemplo este assunto segundo a proposição feita por (Rots, Nauta, Kusters & Blaauwendraad 1986). A geometria e o carregamento da viga adotada estão mostrados na figura 8.18.

Variando  $a$ ,  $s$  e  $L$ , pode-se investigar vários modos de ruptura. Ruptura por *tração diagonal* e por *cisalhamento em compressão* serão consideradas aqui.

As constantes para o material concreto, representado com o modelo de dano escalar, são dadas na tabela 8.1, considerando que  $\nu = 0.20$  e  $\beta = 0.20$ .

Adotou-se o comportamento elasto-plástico para o aço da armadura com  $E_s = 210000 \text{ MPa}$ ,  $f_y = 415 \text{ MPa}$  e área  $A_s = 462 \text{ mm}^2$ . Admitiu-se aderência perfeita entre os materiais.

**Tabela 8.1:** Constantes do material concreto

Modo de Ruptura	$E_0$ (MPa)	$\varepsilon_c$	$f_c$ (MPa)	$f_t$ (MPa)	$G_f$ (N/m)	$h_f$ (mm)
Tração Diagonal	25000	0.002	20.00	2.00	35.00	33.80
Cisalhamento em compressão	18000	0.002	19.60	2.40	41.00	33.80

As malhas foram geradas com elementos quadrilaterais de 8 nós para o concreto. A armadura foi representada por barras de 2 nós, embutidas nos elementos de concreto. As análises não-lineares em estado plano de tensão foram realizadas através do método de comprimento de arco cilíndrico, com um fator de carga inicial igual à 0.01, uma tolerância de convergência de  $1 \times 10^{-4}$  e carga de referência  $P = 100 \text{ kN/m}$ .

#### 8.4.1 Ruptura por Tração Diagonal

Tomando  $L = 1650 \text{ mm}$ ,  $a = 675 \text{ mm}$ ,  $s = 928.60 \text{ mm}$ ,  $H = 500 \text{ mm}$ ,  $h = 320 \text{ mm}$  e espessura  $t = 150 \text{ mm}$ , construiu-se a malha mostrada na figura 8.19.

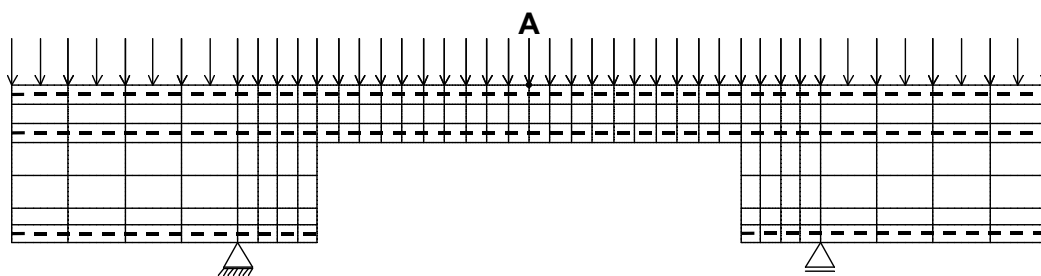
A figura 8.20 mostra a trajetória de equilíbrio para a viga. A figura 8.21 mostra a deformada e a figura 8.22 ilustra o estado de tensão para a carga de  $110 \text{ kN}$ .

#### 8.4.2 Ruptura por Cisalhamento em Compressão

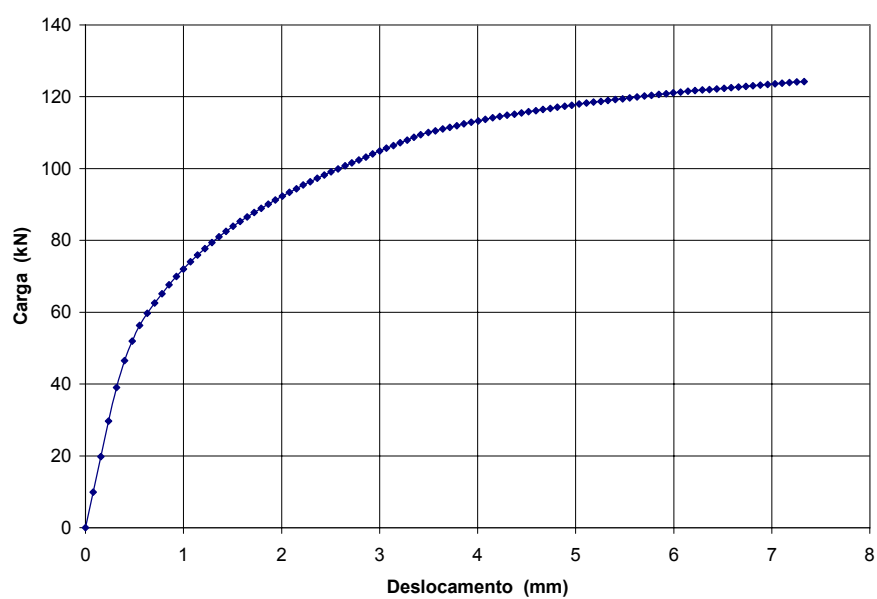
Fazendo  $L = 1650 \text{ mm}$ ,  $a = 675 \text{ mm}$ ,  $s = 859.50 \text{ mm}$ ,  $H = 500 \text{ mm}$ ,  $h = 320 \text{ mm}$  e espessura  $t = 150 \text{ mm}$ , chega-se à configuração que leva à ruptura por cisalhamento em compressão.

A figura 8.23 mostra a discretização da viga para esta hipótese. A figura 8.24 mostra a trajetória de equilíbrio correspondente ao deslocamento vertical do ponto  $A$ .

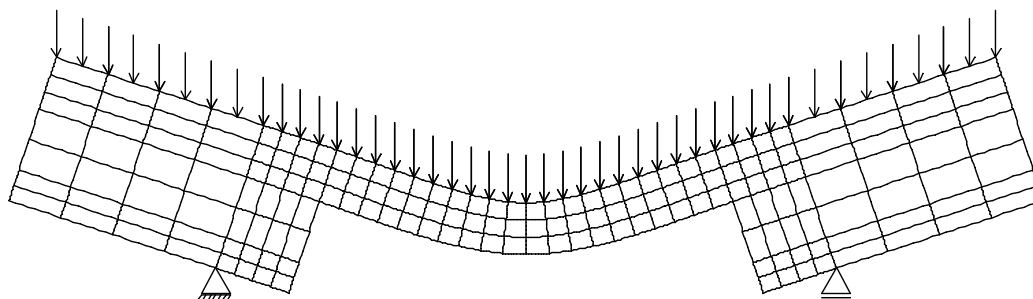
Para a mesma carga de  $100 \text{ kN/m}$ , a deformada e o estado de tensão para a viga são ilustrados nas figuras 8.25 e 8.26, respectivamente.



**Figura 8.19:** Malha para a viga com ruptura por tração diagonal

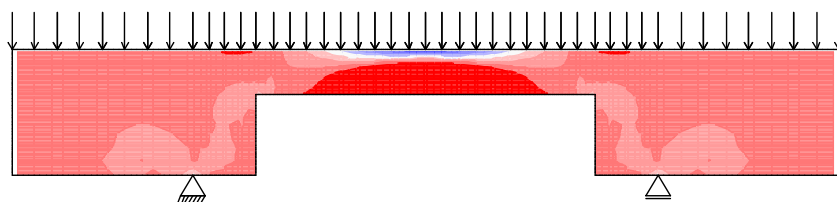
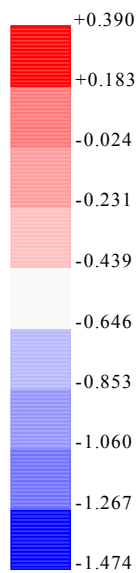


**Figura 8.20:** Curva Carga×deslocamento vertical do ponto *A* - ruptura por tração diagonal

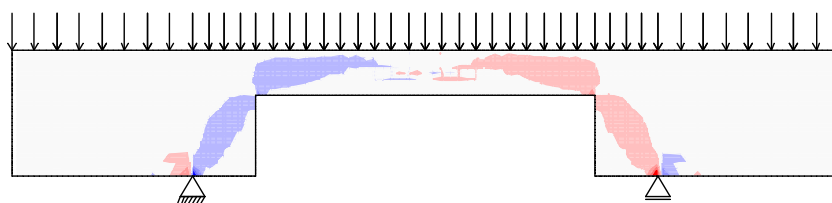
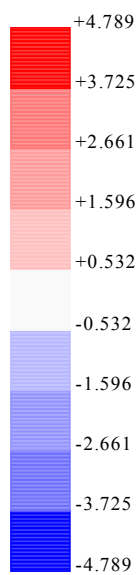


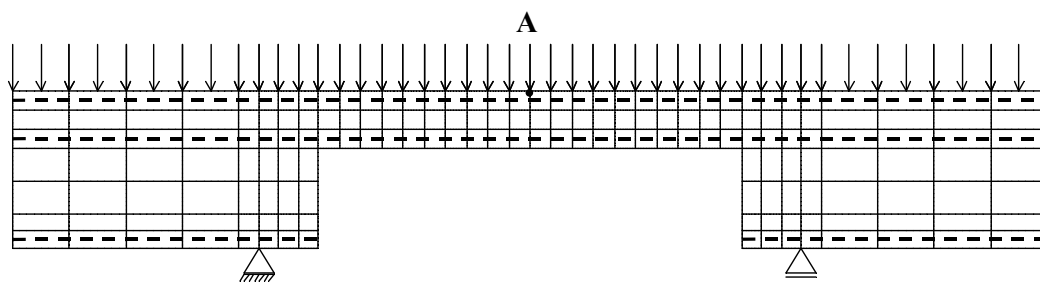
**Figura 8.21:** Deformada para ruptura por tração diagonal

SIGMA\_XX (e+1)

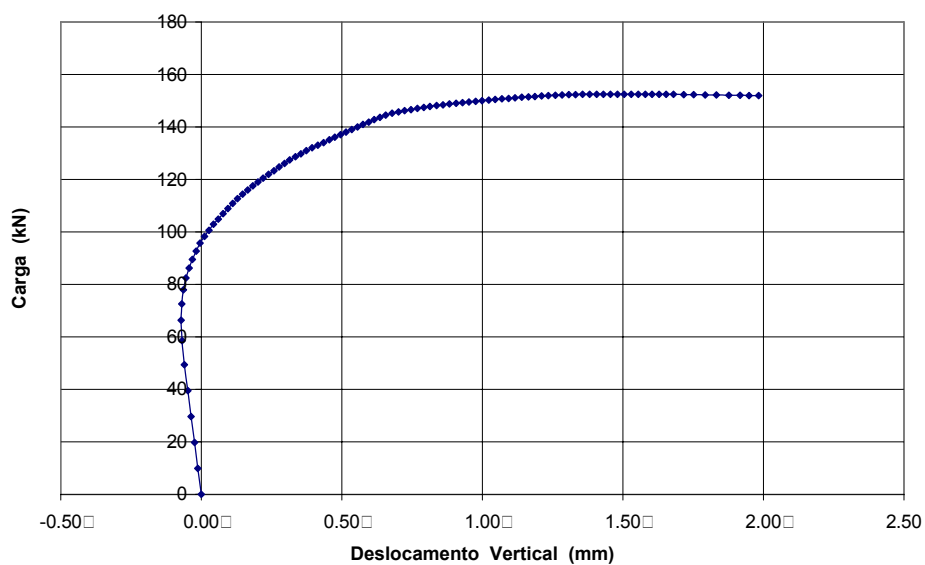
(a) *Tensões normais*

SIGMA\_XY (e+0)

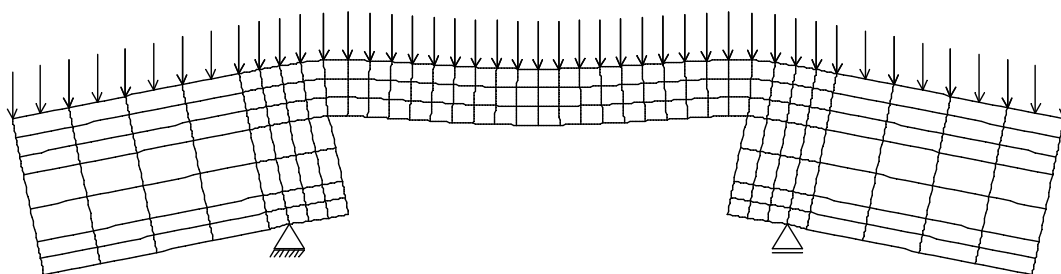
(b) *Tensões de cisalhamento***Figura 8.22:** Estado de tensão para ruptura por tração diagonal



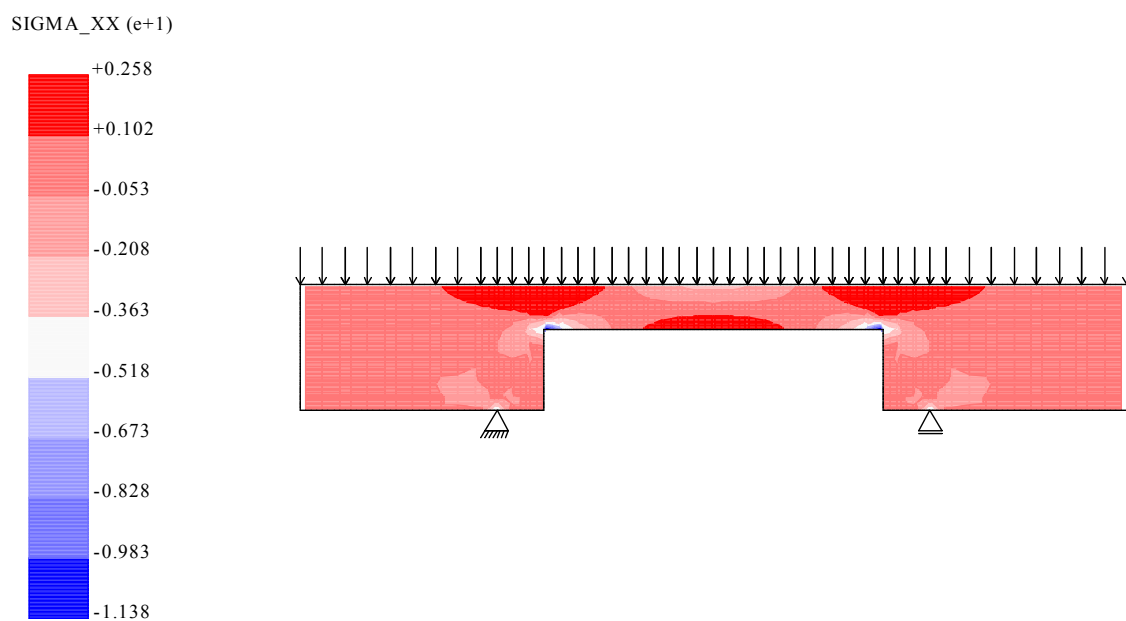
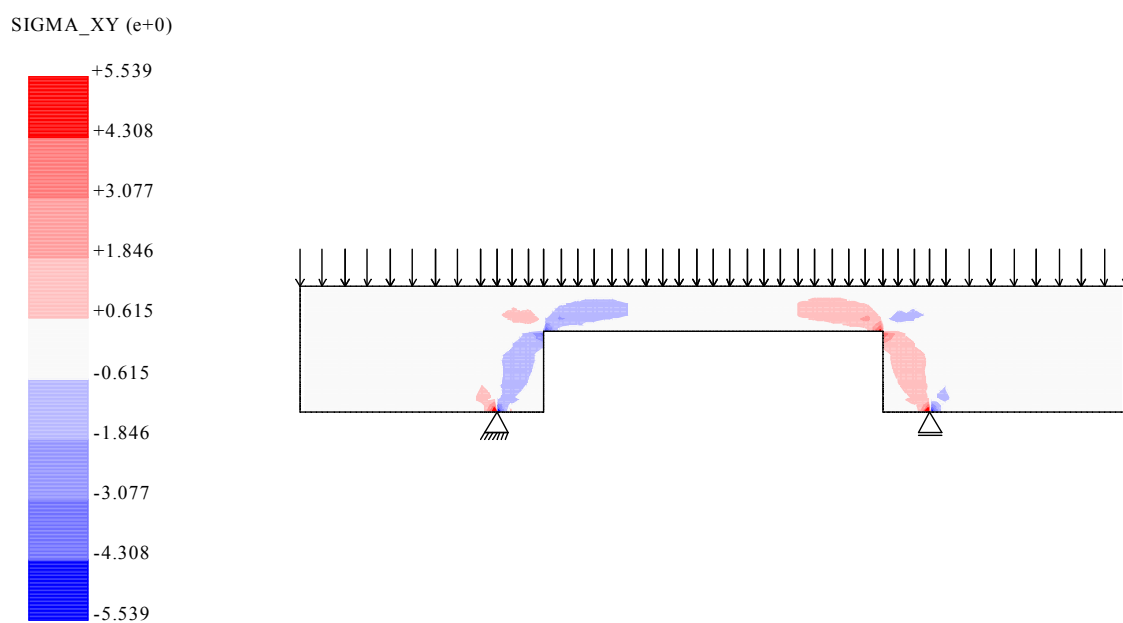
**Figura 8.23:** Malha para a viga com ruptura por cisalhamento em compressão



**Figura 8.24:** Curva Carga x deslocamento vertical - ruptura por cisalhamento em compressão



**Figura 8.25:** Deformada para ruína por cisalhamento em compressão

(a) *Tensões normais*(b) *Tensões de cisalhamento***Figura 8.26:** Estado de tensão para ruptura por cisalhamento em compressão

Os resultados apresentados revelam que a simples mudança na posição dos apoios induziu um modo diferente de ruptura. A referida mudança significou uma diminuição na rotação relativa entre a parte esbelta da viga e os blocos de extremidades, aumentando os momentos de engastamento e, conseqüentemente, diminuindo o momento no meio do vão. Esta nova configuração de esforços promoveu a troca do modo de ruptura de tração diagonal para cisalhamento em compressão, como ilustram os resultados deste exemplo.

## Capítulo 9

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

O método dos elementos finitos é um recurso de modelamento muito difundido e utilizado nos vários segmentos da engenharia. Especificamente, no caso da engenharia de estruturas, o método tem sido utilizado para estudar e melhorar a compreensão acerca dos complexos fenômenos associados às estruturas de concreto armado.

Ao empregar-se o método dos elementos finitos para analisar uma estrutura submetida a determinada solicitação, deve-se atentar para a necessidade de obtenção das trajetórias de equilíbrio da estrutura e de modelos constitutivos capazes de descrever o comportamento dos materiais.

Nos últimos anos, houve grande evolução nas áreas de modelamento constitutivo, de métodos de solução das equações não-lineares envolvidas, de modelos para inclusão das barras de armadura e no tratamento da aderência concreto-aço. Apesar do grande desenvolvimento presenciado, os diferentes modelos ainda precisam ser disponibilizados conjuntamente de modo a fomentar o avanço tecnológico nesta área do conhecimento.

Este trabalho teve por objetivo a expansão de um sistema computacional de elementos finitos que disponibiliza conjuntamente diversos modelos representativos do comportamento de estruturas de concreto simples e armado, focando a implementação de modelos de armadura e tratamento de aderência.

Partindo-se do programa **FEMOOP** (*"Finite Element Method - Object Oriented Program"*), que dispunha de vários algoritmos de obtenção de trajetórias de equilíbrio e modelos constitutivos representativos do comportamento dos materiais, cumpriu-se o proposto.



Como visto no projeto de expansão do sistema, a utilização do paradigma de programação orientada a objetos permitiu a implementação dos diversos modelos propostos sem alterações nas ferramentas básicas já existentes.

Implementou-se os modelos de armadura discreta, embutida e axissimétrica pontual e os modelos de contato e de molas para perda de aderência. Tanto para os modelos de armadura como para os modelos de aderência, elementos finitos com diversos graus de interpolação foram disponibilizados.

Os resultados das simulações numéricas apresentados e a boa correlação de alguns deles com valores experimentais, validam a implementação dos modelos.

Em relação aos modelos de armadura implementados, o modelo de armadura embutida revelou-se mais estável que os modelos de armadura discreta, de tal forma que o desempenho do mesmo, no âmbito geral, foi superior à performance do modelo discreto, tomando em conta ou não a perda de aderência.

Entretanto, é importante destacar que os modelos de armadura discreta ainda são largamente empregados, principalmente quando se deseja descrever cinematicamente os efeitos da perda de aderência entre os materiais.

Por sua vez, entre os modelos de perda de aderência, em geral, o modelo de contato sempre apresentou melhores resultados que o modelo de molas, ressaltando-se que somente a lei de aderência proposta por (Homayoun & Mitchell 1996) foi usada nas análises.

A disponibilização em um só programa computacional de diversas ferramentas para estudo de estruturas de concreto e outros materiais parcialmente frágeis permitiu compreender melhor os mecanismos de deterioração e colapso característicos destas estruturas. Por tudo isso, o sistema em desenvolvimento figura como um aglutinador de vários modelos e elementos e apresenta-se como uma poderosa ferramenta de incentivo à pesquisa.

A seguir, apresentam-se algumas sugestões para o desenvolvimento futuro do sistema.

1. Os modelos de armadura e aderência incluídos no *FEMOOP* aplicam-se a problemas bidimensionais. Sugere-se, portanto, que o sistema seja expandido para considerar estes modelos em problemas tridimensionais.

2. Sugere-se, também, a inclusão de novos modelos constitutivos para os materiais e novos métodos de controle de obtenção de trajetórias de equilíbrio, permitindo ao pesquisador analisar e escolher os modelos que melhor representam o fenômeno em estudo.
3. Neste trabalho, somente a lei de aderência proposta por (Hodayoun & Mitchell 1996) foi utilizada. Assim, sugere-se o estudo do desempenho dos diversos modelos implementados utilizando-se as diversas leis de aderência disponibilizadas.
4. Indubitavelmente, um pré e um pós-processador são de interesse para fomento da pesquisa, no sentido de que agilizam a entrada de dados e permitem uma análise gráfica dos resultados, respectivamente.

# Referências Bibliográficas

- Allwood, R. J. & Bajarwan, A. A. (1989), ‘A new method for modelling reinforcement and bond in finite element analysis of reinforced concrete’, *International Journal of Numerical Methods in Engineering* pp. 833–844.
- Balakrishna, S. & Murray, D. W. (1987), ‘Prediction of response of concrete beams and panels by nonlinear finite element analysis’, *IABSE Reports* pp. 393–404.
- Batoz, J. L. & Dhatt, G. (1979), ‘Geometrically nonlinear analysis - a correlation of finite element notations’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **14**, 1262–1267.
- Bazant, Z. P. & Gambarova (1984), ‘Crack shear in concrete: Crack band microplane model’, *Journal of Structural Engineering* **110**(9), 2015–2035.
- Bazant, Z. P. & Oh, B. H. (1983), ‘Crack band theory for fracture of concrete’, *Matériaux et Constructions* **16**(93), 155–177.
- Carol, I., Bazant, Z. P. & Prat, P. C. (1992), ‘New explicit microplane model for concrete: Theoretical aspects and numerical implementation’, *International Journal of Solids Structures* **29**(9), 1173–1191.
- Carreia, D. J. & Chu, K. (1985), ‘Stress-strain relationship for plain concrete in compression’, *ACI Journal* **82**, 797–804.
- Crisfield, M. A. (1981), ‘A fast incremental-iterative solution procedure that handles snap-through’, *Computers & Structures* **13**, 55–62.
- Crisfield, M. A. (1983), ‘An arc length method including line searches and accelerations’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **19**, 1269–1289.

- Crisfield, M. A. (1986), 'Finite elements and solution procedures for structural analysis'.
- Doerr, K. (1978), 'Bond behaviour of ribbed reinforcement under transversal pressure', *Non-linear Behaviour of Reinforced Concrete Spatial Structures* **1**, 13–29.
- Eligehausen, R., Popov, E. P. & Bertero, V. V. (1983), 'Local bond stress-slip relationship of a deformed bar under generalized excitation', *Report No. 83/23, University of California* pp. 1–169.
- Elwi, A. E. & Hrudey, T. M. (1988), 'Finite element model for curved embedded reinforcement', *Journal of Engineering Mechanics* **115**(4), 470–754.
- Gerstle, K., Ingreffea, A. R., Murray, D., Nilson, A. H. & Mirza, M. S. (1982), Subcommittee 2 on finite element analysis of reinforced concrete structures - state of art report on finite element analysis of reinforced concrete, Technical report, ASCE Structural Engineering Division.
- Hillerborg, A., Modéer, M. & Peterson, P. (1976), 'Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of finite mechanics and finite elements', *Cement and Concrete Research* **6**, 773–782.
- Homayoun, H. A. & Mitchell, D. (1996), 'Analysis of bond stress distributions in pullout specimens', *Journal of Structural Engineering* **122**(3), 255–261.
- Leonhardt, F. & Walther, R. (1966), 'Wandartige träger', *DA f StB* **178**. in German.
- Liu, J. & Foster, S. J. (1998), Microplane model for the finite element analysis of reinforced concrete tied columns, Technical Report R-368, The University of New South Wales, Sydney, 2052, Australia.
- Mehlhorn, G. & Keuser, M. (1986), 'Isoparametric contact elements for analysis of reinforced concrete', *Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures* pp. 329–347.
- Nilson, A. H. (1968), 'Nonlinear analysis of reinforced concrete by the finite element method', *ACI Journal* **65**(9), 757–766.
- Ozbolt, J. & Li, Y. K. (2001), 'Microplane model for concrete with relaxed kinematic constraint', *International Journal of Solids and Structures* **38**, 2683–2711.

- Phillips, D. V. & Wu, Z. P. (1990), 'An oriented bar formulation with bond-slip', *Proceedings of the International Conference on Numerical Methods in Engineering: Theory and Application* pp. 320–328.
- Pitangueira, R. L. S. (1998), *Mecânica de Estruturas de Concreto Com Inclusão de Efeitos de Tamanho e Heterogeneidade*, PhD thesis, PUC - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio Janeiro.
- Prasad, M. V. K. V. & Krishnamoorthy, C. S. (2002), 'Computational model for discrete crack growth in plain and reinforced concrete', *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering* **191**, 2699–2725.
- Ramm, E. (1981), 'Strategies for tracing the nonlinear response near limit points, in nonlinear finite element analysis in structural mechanics', pp. 63–83.
- Razvi, S. R. & Saatcioglu, M. (1996), Tests of high strength concrete columns under concentric loading, Technical Report Report OCEERC 96-03, University of Ottawa, Dept. of Civil Eng.
- Ricks, E. (1972), 'The application of newtons method to the problem of elastic stability', *Journal of Applied Mechanics* pp. 1060–1065.
- Ricks, E. (1979), 'An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems', *International Journal of Solids and Structures* **15**, 529–551.
- Rots, J. G., Nauta, P., Kusters, G. M. A. & Blaauwendraad, J. (1986), 'Smearred crack approach and fracture localization in concrete', *Heron* **31**, 23–47.
- Rule, W. K. & Rowlands, R. E. (1989), 'A simple orthotropic elasticity based constitutive model for concrete', *Experimental Mechanics* pp. 448–545.
- Saenz, L. P. (1964), 'Discussion of equation for the stress-strain curve of concrete', *ACI Journal* **61**, 1229–1235.
- Sankarasubramanian, G. & Rajasekaran, S. (1996), 'Constitutive modeling of concrete using a new failure criterion', *Computers & Structures* **58**(5), 1003–1014.

- Silva, P. P. & Pitangueira, R. L. S. (2001), 'Modelos de microplanos para análise não-linear de estruturas de concreto', *Proceedings of the 22nd Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering* pp. 1–20 (CD-ROM).
- Valliappan, S. & Doolan, T. F. (1972), 'Nonlinear stress analysis of reinforced concrete', *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)* **121**(1), 7–15.
- Winnicki, A. & Cichón, C. (1998), 'Plastic model for concrete in plane stress state. II: Numerical validation', *Journal of Engineering Mechanics* **124**(6), 603–613.
- Yang, Y. B. & Kuo, S. R. (1994), 'Theory & analysis of nonlinear framed structures'.
- Yang, Y. B. & Shieh, M. S. (1990), 'Solution method for NonLinear problems with multiple critical points', *AIAA Journal* **28**(12), 2110–2116.