

**FORMULAÇÕES DE MODELOS  
CONSTITUTIVOS DE MICROPLANOS PARA  
CONTÍNUOS GENERALIZADOS**

**Jamile Salim Fuina**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

**FORMULAÇÕES DE MODELOS CONSTITUTIVOS DE  
MICROPLANOS PARA CONTÍNUOS GENERALIZADOS**

Jamile Salim Fuina

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de “Doutor em Engenharia de Estruturas”.

Comissão Examinadora:

---

Prof. Roque Luiz da Silva Pitangueira  
DEES - UFMG (Orientador)

---

Prof. Estevam Barbosa de Las Casas  
DEES - UFMG

---

Prof. Felício Brüzzi Barros  
DEES - UFMG

---

Prof. Raul Rosas e Silva  
PUC - RIO

---

Prof. Sérgio Persival Baroncini Proença  
EESC - USP

Belo Horizonte, 07 de Abril de 2009

*Em pequena escala, os objetos se comportam de modo diferente daquilo de que temos uma experiência direta; eles não se comportam como ondas, nem como partículas, nem como nuvens, ou como bolas de bilhar, ou pesos sobre uma mola, ou o que quer que seja que já tenhamos visto.*

*(Richard Feynman)*

*...e a verdade é que nunca se vê com exatidão o que ocorre muito de perto.*

*(Mário Palmério)*

*Dedico este trabalho aos meus inesquecíveis pais.*

*Todo o meu amor e reconhecimento!*

# Índice

|   |                |
|---|----------------|
| <b>Índice</b>   | <b>ii</b>      |
| <b>Lista de Tabelas</b>                                 | <b>vii</b>     |
| <b>Lista de Figuras</b>                                 | <b>xiv</b>     |
| <b>Lista de Abreviaturas e Siglas</b>                   | <b>xv</b>      |
| <b>Lista de Símbolos</b>                                | <b>xvi</b>     |
| <b>Resumo</b>   | <b>xxxvi</b>   |
| <b>Abstract</b>   | <b>xxxvii</b>  |
| <b>Agradecimentos</b>                                   | <b>xxxviii</b> |
| <b>1 Introdução</b>                                     | <b>1</b>       |
| 1.1 Motivação . . . . .                                 | 4              |
| 1.2 Objetivos do Trabalho . . . . .                     | 8              |
| 1.3 Organização do Texto . . . . .                      | 9              |
| 1.4 Notação . . . . .                                   | 11             |
| <b>2 Solução de Equações Não-Lineares de Equilíbrio</b> | <b>12</b>      |
| 2.1 Introdução . . . . .                                | 12             |
| 2.2 Histórico . . . . .                                 | 13             |
| 2.3 Métodos Incrementais-Iterativos . . . . .           | 15             |
| 2.3.1 Controle de Carga . . . . .                       | 18             |
| 2.3.2 Controle Direto de Deslocamento . . . . .         | 19             |
| 2.3.3 Controle de Comprimento de Arco . . . . .         | 21             |
| 2.3.4 Controle de Deslocamento Generalizado . . . . .   | 27             |
| 2.3.5 Controle por Trabalho . . . . .                   | 28             |
| 2.3.6 Controle de Resíduo Ortogonal . . . . .           | 29             |
| 2.3.7 Resumo . . . . .                                  | 31             |



|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>3</b> | <b>Contínuo de Cosserat</b>  | <b>33</b> |
| 3.1      | Introdução . . . . .   | 33        |
| 3.2      | Histórico . . . . .  | 34        |
| 3.3      | Contínuo Micromórfico . . . . .                                    | 38        |
| 3.3.1    | Cinemática do Contínuo Micromórfico . . . . .                      | 39        |
| 3.3.2    | Medidas de Deformação do Contínuo Micromórfico . . . . .           | 41        |
| 3.4      | Elasticidade para o Contínuo de Cosserat . . . . .                 | 44        |
| 3.4.1    | Cinemática do Contínuo de Cosserat . . . . .                       | 44        |
| 3.4.2    | Relações Constitutivas . . . . .                                   | 46        |
| 3.4.3    | Redefinição dos Parâmetros Elásticos do Material . . . . .         | 49        |
| 3.4.4    | Equações Diferenciais de Equilíbrio . . . . .                      | 56        |
| 3.5      | Plasticidade Associada para o Contínuo de Cosserat . . . . .       | 58        |
| 3.5.1    | Superfície de Plastificação . . . . .                              | 60        |
| 3.5.2    | Algoritmo de Retorno . . . . .                                     | 62        |
| 3.5.3    | Módulo Tangente Elastoplástico Consistente . . . . .               | 65        |
| 3.6      | O MEF para o Contínuo de Cosserat . . . . .                        | 66        |
| 3.6.1    | Estado Plano de Tensão . . . . .                                   | 68        |
| 3.6.2    | Estado Plano de Deformação . . . . .                               | 68        |
| <b>4</b> | <b>Contínuo com Microexpansão</b>                                  | <b>70</b> |
| 4.1      | Introdução . . . . .   | 70        |
| 4.2      | Teoria da Elasticidade para o Contínuo com Microexpansão . . . . . | 71        |
| 4.2.1    | Cinemática do Contínuo com Microexpansão . . . . .                 | 71        |
| 4.2.2    | Relações Constitutivas . . . . .                                   | 73        |
| 4.2.3    | Redefinição dos Parâmetros Elásticos do Material . . . . .         | 75        |
| 4.2.4    | Equações Diferenciais de Equilíbrio . . . . .                      | 78        |
| 4.3      | O MEF para o Contínuo com Microexpansão . . . . .                  | 81        |
| 4.3.1    | Estado Plano de Tensão . . . . .                                   | 82        |
| 4.3.2    | Estado Plano de Deformação . . . . .                               | 83        |
| <b>5</b> | <b>Modelo Constitutivo de Microplanos para o Contínuo Clássico</b> | <b>85</b> |
| 5.1      | Introdução . . . . .   | 85        |
| 5.2      | Histórico . . . . .  | 87        |
| 5.3      | Modelo de Microplanos com Relaxação Cinemática . . . . .           | 92        |
| 5.3.1    | Restrição Cinemática . . . . .                                     | 93        |
| 5.3.2    | Relações Constitutivas nos Microplanos . . . . .                   | 97        |
| 5.3.3    | Aplicação do PTV para Obtenção das Grandezas Macroscópicas         | 100       |
| 5.4      | Modelo Constitutivo de Microplanos com Deformação Equivalente . .  | 102       |
| 5.4.1    | Restrição Cinemática . . . . .                                     | 102       |
| 5.4.2    | Relações Constitutivas nos Microplanos . . . . .                   | 105       |
| 5.4.3    | Aplicação das Leis da Termodinâmica . . . . .                      | 106       |
| 5.4.4    | Definição da Deformação Equivalente nos Microplanos . . . . .      | 111       |
| 5.5      | Integração Numérica . . . . .                                      | 114       |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| <b>6</b> | <b>Modelos Constitutivos de Microplanos para Contínuos Generalizados</b>              | <b>119</b> |
| 6.1      | Introdução . . . . .  | 119        |
| 6.2      | Justificativas . . . . .  | 119        |
| 6.3      | Modelo Constitutivo de Microplanos para o Contínuo de Cosserat . .                    | 125        |
| 6.3.1    | Restrição Cinemática . . . . .  | 125        |
| 6.3.2    | Integrações Analíticas . . . . .  | 128        |
| 6.3.3    | Elasticidade nos Microplanos . . . . .  | 129        |
| 6.3.4    | Dano nos Microplanos . . . . .  | 134        |
| 6.4      | Modelo Constitutivo de Microplanos para o Contínuo com Microexpansão . . . . .        | 140        |
| 6.4.1    | Restrição Cinemática . . . . .  | 141        |
| 6.4.2    | Elasticidade nos Microplanos . . . . .  | 141        |
| 6.4.3    | Dano nos Microplanos . . . . .  | 148        |
| <b>7</b> | <b>Implementações Computacionais</b>  | <b>155</b> |
| 7.1      | Introdução . . . . .  | 155        |
| 7.2      | Organização do Núcleo Numérico do <b>INSANE</b> . . . . .                             | 156        |
| 7.3      | Implementação das Soluções Lineares e Não-Lineares . . . . .                          | 159        |
| 7.4      | Implementação dos Contínuos Clássico e Generalizados . . . . .                        | 164        |
| 7.5      | Implementação de Elasticidade para os Contínuos Generalizados . . .                   | 170        |
| 7.6      | Implementação de Plasticidade Associada . . . . .                                     | 172        |
| 7.7      | Implementação de Microplanos para Contínuos Clássico e Generalizados                  | 174        |
| <b>8</b> | <b>Simulações Numéricas</b>   | <b>185</b> |
| 8.1      | Exemplos de Elasticidade para Contínuos Generalizados . . . . .                       | 186        |
| 8.1.1    | Viga Biapoiada sob Flexão Pura . . . . .  | 187        |
| 8.1.2    | Barra Tracionada Composta por Dois Materiais . . . . .                                | 192        |
| 8.2      | Exemplos de Plasticidade para o Contínuo de Cosserat . . . . .                        | 195        |
| 8.2.1    | Tração, Compressão e Cisalhamento Puros . . . . .                                     | 195        |
| 8.2.2    | Flexão em Três Pontos . . . . .   | 199        |
| 8.2.3    | Cisalhamento em Quatro Pontos . . . . .   | 200        |
| 8.2.4    | Camada Infinita sob Cisalhamento . . . . .  | 202        |
| 8.2.5    | Compressão com Banda de Cisalhamento . . . . .  | 206        |
| 8.3      | Exemplos de Microplanos com Relaxação Cinemática para o Contínuo Clássico . . . . .   | 210        |
| 8.3.1    | Tração, Compressão e Cisalhamento Puros . . . . .                                     | 210        |
| 8.3.2    | Flexão em Três Pontos . . . . .   | 214        |
| 8.3.3    | Cisalhamento em Quatro Pontos . . . . .   | 216        |
| 8.4      | Exemplos de Microplanos com Deformação Equivalente para o Contínuo Clássico . . . . . | 218        |
| 8.4.1    | Tração, Compressão e Cisalhamento Puros . . . . .                                     | 218        |
| 8.4.2    | Flexão em Três Pontos . . . . .   | 222        |
| 8.4.3    | Cisalhamento em Quatro Pontos . . . . .   | 223        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 8.5      | Exemplos de Microplanos para o Contínuo de Cosserat . . . . .                | 224        |
| 8.5.1    | Tração, Compressão e Cisalhamento Puros . . . . .                            | 225        |
| 8.5.2    | Flexão em Três Pontos . . . . .  | 229        |
| 8.6      | Exemplos de Microplanos para o Contínuo com Microexpansão . . . . .          | 230        |
| 8.6.1    | Tração, Compressão e Cisalhamento Puros . . . . .                            | 231        |
| 8.6.2    | Flexão em Três Pontos . . . . .  | 235        |
| 8.6.3    | Tração Axial com Entalhe Assimétrico . . . . .                               | 236        |
| 8.7      | Discussão dos Resultados . . . . .   | 239        |
| 8.7.1    | Elasticidade para Contínuos Generalizados . . . . .                          | 239        |
| 8.7.2    | Plasticidade para o Contínuo de Cosserat . . . . .                           | 239        |
| 8.7.3    | Microplanos com Relaxação Cinemática para o Contínuo Clás-<br>sico . . . . . | 242        |
| 8.7.4    | Microplanos com Deformação Equivalente para o Contínuo<br>Clássico . . . . . | 243        |
| 8.7.5    | Microplanos para Contínuos Generalizados . . . . .                           | 244        |
| <b>9</b> | <b>Conclusões</b>  | <b>246</b> |
| 9.1      | Sugestão para Trabalhos Futuros . . . . .                                    | 250        |
| <b>A</b> | <b>Exemplos Lineares Analíticos com Contínuos Generalizados</b>              | <b>251</b> |
| A.1      | Viga Biapoiada sob Flexão Pura . . . . .                                     | 251        |
| A.2      | Viga Engastada sob Flexão Simples . . . . .                                  | 257        |
| A.3      | Barra Tractionada Composta por Dois Materiais . . . . .                      | 266        |
| <b>B</b> | <b>Metodologia de Obtenção dos Parâmetros dos Modelos Propostos</b>          | <b>271</b> |
|          | <b>Referências Bibliográficas</b>  | <b>274</b> |

# Lista de Tabelas

|     |   |     |
|-----|---|-----|
| 5.1 | Coordenadas e pesos para integração numérica sobre uma semi-esfera com 21 pontos de integração - sem simetrias ortogonais (Bazant e Oh, 1985) . . . . . | 116 |
| 5.2 | Coordenadas e pesos para integração numérica sobre uma semi-esfera com 21 pontos de integração - com simetrias ortogonais (Bazant e Oh, 1985) . . . . . | 117 |
| 5.3 | Coordenadas e pesos para integração numérica sobre uma semi-esfera com 33 pontos de integração (Bazant e Oh, 1985) . . . . .                            | 118 |
| 6.1 | Teorias adotadas . . . . .  | 120 |
| 7.1 | Classes Implementadas no <b>INSANE</b> . . . . .  | 180 |
| 8.1 | Agrupamento das simulações de acordo com os modelos constitutivos   | 185 |
| 8.2 | Parâmetros da análise para o exemplo de flexão pura . . . . .   | 187 |
| 8.3 | Parâmetros da análise para o exemplo da barra tracionada composta por dois materiais . . . . .  | 192 |
| 8.4 | Parâmetros do material para as simulações utilizando-se o modelo de plasticidade com Cosserat . . . . .   | 195 |
| 8.5 | Parâmetros do material para o exemplo da camada infinita sob cisalhamento . . . . .   | 203 |
| 8.6 | Parâmetros do material para o exemplo de compressão com banda de cisalhamento . . . . .   | 207 |
| 8.7 | Parâmetros do material para os exemplos utilizando o modelo de microplos com relaxação cinemática . . . . .   | 210 |
| 8.8 | Parâmetros do material para os exemplos utilizando o modelo de microplos com deformação equivalente . . . . .   | 218 |

|      |  |     |
|------|--|-----|
| 8.9  | Parâmetros do material para os exemplos utilizando o modelo de microplos para o contínuo de Cosserat . . . . .       | 225 |
| 8.10 | Parâmetros do material para os exemplos utilizando o modelo de microplos para o contínuo com microexpansão . . . . . | 231 |
| A.1  | Valores adotados para $d$ e correspondentes valores de $r$ . . . . .   | 256 |
| A.2  | Parâmetros da análise para o exemplo de flexão pura . . . . .  | 256 |
| A.3  | Parâmetros da análise para o exemplo de flexão simples . . . . .   | 263 |
| A.4  | Parametrização dos dados do problema . . . . .   | 266 |
| A.5  | Parâmetros da análise para o exemplo da barra tracionada composta por dois materiais . . . . .                       | 269 |

# Lista de Figuras

|      |  |    |
|------|--|----|
| 1.1  | Microestrutura de um material parcialmente frágil (Voyiadjis et al., 2005) . . . . .   | 2  |
| 1.2  | Localização de deformações numericamente induzida . . . . .                            | 6  |
| 2.1  | Trajetoórias de equilíbrio típicas em problemas não-lineares . . . . .                 | 12 |
| 2.2  | Diagrama de atividades do algoritmo genérico para métodos de controle                  | 17 |
| 2.3  | Processo incremental-iterativo com controle de carga . . . . .                         | 18 |
| 2.4  | Processo incremental-iterativo com controle direto de deslocamento .                   | 20 |
| 2.5  | Processo incremental-iterativo com controle de comprimento de arco .                   | 21 |
| 2.6  | Direção da trajetória de equilíbrio . . . . .  | 23 |
| 2.7  | Comprimento de arco com trajetória de iteração ortogonal à tangente inicial . . . . .  | 24 |
| 2.8  | Comprimento de arco com trajetória de iteração ortogonal à tangente anterior . . . . . | 25 |
| 2.9  | Comprimento de arco com trajetória de iteração cilíndrica . . . . .                    | 26 |
| 2.10 | Processo incremental-iterativo com controle de resíduo ortogonal . . .                 | 31 |
| 2.11 | Detalhamento do diagrama de atividades da figura 2.2 . . . . .                         | 32 |
| 3.1  | Relações entre as teorias do contínuo generalizado . . . . .                           | 38 |
| 3.2  | Cinemática do contínuo micromórfico . . . . .  | 40 |
| 3.3  | Mapeamento do vetor infinitesimal $\mathbf{dx}^{(\alpha)}$ . . . . .                   | 42 |
| 3.4  | Macro e microdeslocamento . . . . .  | 43 |
| 3.5  | Cinemática do contínuo de Cosserat . . . . .   | 45 |
| 3.6  | Componentes dos tensores de tensão e de tensão-momento . . . . .                       | 47 |
| 3.7  | Introdução do parâmetro elástico $d_f$ do material . . . . .                           | 52 |
| 3.8  | Ensaio de flexão pura para a determinação de $L_f$ . . . . .                           | 52 |
| 3.9  | Introdução do parâmetro elástico $d_t$ do material . . . . .                           | 54 |

|      |  |     |
|------|--|-----|
| 3.10 | Condições de contorno para um contínuo de Cosserat . . . . .   | 56  |
| 4.1  | Cinemática do contínuo com microexpansão . . . . .   | 71  |
| 4.2  | Introdução do parâmetro elástico $d_a$ do material . . . . .   | 77  |
| 5.1  | Indicação dos microplanos sobre uma esfera de raio unitário (Ozbolt et al., 2001) . . . . .  | 86  |
| 5.2  | Esquema de funcionamento dos modelos de microplanos . . . . .  | 87  |
| 5.3  | Representação do modelo de microplanos . . . . .   | 88  |
| 5.4  | Componentes de deformação num microplano . . . . .   | 94  |
| 5.5  | Gráfico da função de descontinuidade (Ozbolt et al., 2001) . . . . .   | 96  |
| 5.6  | Gráfico da função $f(\sigma_1)$ (Ozbolt et al., 2001) . . . . .  | 96  |
| 5.7  | Lei tensão-deformação volumétrica . . . . .  | 98  |
| 5.8  | Lei tensão-deformação desviadora . . . . .   | 99  |
| 5.9  | Lei tensão-deformação tangencial . . . . .   | 100 |
| 5.10 | Componentes de deformação volumétrica e desviadora num microplano  | 104 |
| 5.11 | Modelo de dano exponencial: (a) variável de dano como uma função de $\kappa^{mic}$ , (b) comportamento homogêneo em tração uniaxial (Peerlings et al., 1998) . . . . . | 111 |
| 5.12 | Discretização espacial de uma esfera (Kuhl et al., 2001) . . . . .   | 115 |
| 6.1  | (a) Componentes de deformação nos microplanos, (b) Componentes de microcurvatura nos microplanos . . . . .   | 127 |
| 7.1  | Simbologia utilizada nos diagramas em UML deste trabalho . . . . .   | 156 |
| 7.2  | Organização do núcleo numérico do <b>INSANE</b> . . . . .  | 157 |
| 7.3  | Diagrama de classe para <b>Persistence</b> . . . . .   | 158 |
| 7.4  | Classes pertencentes à <i>LinearAlgebra</i> . . . . .  | 159 |
| 7.5  | Diagrama da classe <b>Solution</b> . . . . .   | 160 |
| 7.6  | Diagrama de herança e instância da classe <b>StandardNewtonRaphson</b> .   | 161 |
| 7.7  | Diagrama da interface <b>IterativeStrategy</b> . . . . .   | 162 |
| 7.8  | Diagrama de herança da classe <b>AnalysisModel</b> . . . . .   | 164 |
| 7.9  | Diagrama de herança das classes <b>Plane</b> e <b>Micromorphic</b> . . . . .   | 165 |
| 7.10 | Diagrama de herança da classe <b>Material</b> . . . . .  | 171 |
| 7.11 | Diagrama de herança da classe <b>ConstitutiveModel</b> . . . . .   | 173 |
| 7.12 | Diagrama de herança da classe <b>MicroplaneConstModel</b> . . . . .  | 174 |

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 7.13 | Diagrama da classe abstrata <code>Degeneration</code> . . . . .   | 175 |
| 7.14 | Diagrama de herança e instância da classe <code>MaterialPoint</code> . . . . .  | 175 |
| 7.15 | Diagrama de instância da classe <code>Representation</code> . . . . .   | 176 |
| 7.16 | Degeneração da geometria de um elemento finito unidimensional (Fonseca, 2006) . . . . .   | 177 |
| 7.17 | Diagrama da classe abstrata <code>MicroplaneDegeneration</code> . . . . .   | 178 |
| 7.18 | Diagrama de herança da classe <code>ContinuousPointModel</code> . . . . .   | 179 |
| 8.1  | Discretização por elementos finitos de uma viga biapoiada sob flexão pura . . . . .   | 187 |
| 8.2  | Tensões normais $\sigma_{xx}$ em qualquer seção da viga . . . . .   | 188 |
| 8.3  | Tensões-momento $\mu_{xz}$ em qualquer ponto . . . . .  | 188 |
| 8.4  | Deslocamentos $u_x$ na borda superior da viga . . . . .   | 189 |
| 8.5  | Deslocamentos $u_y$ na linha neutra . . . . .   | 189 |
| 8.6  | Microrrotações $\phi_z$ ao longo do comprimento da viga . . . . .   | 190 |
| 8.7  | Distribuição de tensões normais $\sigma_{xx}$ ao longo da viga sob flexão pura . . . . .  | 190 |
| 8.8  | Distribuição de $\mu_{xz}/L_f$ ao longo da viga sob flexão pura . . . . .   | 190 |
| 8.9  | Variação dos deslocamentos $u_x$ da viga sob flexão pura . . . . .  | 191 |
| 8.10 | Variação dos deslocamentos $u_y$ da viga sob flexão pura . . . . .  | 191 |
| 8.11 | Variação das microrrotações $\phi_z$ da viga sob flexão pura . . . . .  | 191 |
| 8.12 | Barra tracionada constituída por dois materiais . . . . .   | 192 |
| 8.13 | $\Delta\psi \times$ Comprimento da viga . . . . .   | 193 |
| 8.14 | $\Delta\lambda \times$ Comprimento da viga . . . . .  | 193 |
| 8.15 | Distribuição de tensões normais na barra tracionada . . . . .   | 194 |
| 8.16 | Distribuição de microtensões na barra tracionada . . . . .  | 194 |
| 8.17 | Distribuição de microforças na barra tracionada . . . . .   | 194 |
| 8.18 | Configurações geométricas, de carga e condições de vínculo para as simulações de tração, compressão e cisalhamento puros . . . . .  | 195 |
| 8.19 | Discretizações utilizadas para as simulações de tração, compressão e cisalhamento puros . . . . .   | 196 |
| 8.20 | Trajetórias de equilíbrio correspondentes ao deslocamento horizontal da face de aplicação da carga na tração axial utilizando plasticidade e contínuo de Cosserat . . . . . | 197 |



|      |   |     |
|------|---|-----|
| 8.21 | Trajетórias de equilíbrio correspondentes ao deslocamento horizontal da face de aplicação da carga no cisalhamento puro utilizando plasticidade e contínuo de Cosserat . . . . .  | 198 |
| 8.22 | Viga sob flexão em três pontos . . . . .  | 199 |
| 8.23 | Discretização em 30 elementos finitos para a flexão em três pontos . . . . .  | 199 |
| 8.24 | Trajетória de equilíbrio correspondente ao deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga na flexão em três pontos utilizando plasticidade e contínuo de Cosserat . . . . .   | 200 |
| 8.25 | Malha de elementos finitos para o exemplo de cisalhamento em quatro pontos . . . . .  | 200 |
| 8.26 | Trajетória de equilíbrio correspondente ao deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga $F_1$ no cisalhamento em quatro pontos utilizando plasticidade e contínuo de Cosserat . . . . .                                 | 201 |
| 8.27 | Trajетória de equilíbrio correspondente ao deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga $F_2$ no cisalhamento em quatro pontos utilizando plasticidade e contínuo de Cosserat . . . . .                                 | 201 |
| 8.28 | Camada infinita sob cisalhamento . . . . .  | 202 |
| 8.29 | Trajетórias de equilíbrio correspondentes ao deslocamento horizontal da borda superior da camada infinita mostrando o efeito do refinamento da malha com $L_f = 12mm$ . . . . .   | 203 |
| 8.30 | Estado deformado e distribuição de deformações cisalhantes $\gamma_{yx}$ . (a) 10 elementos; (b) 20 elementos; (c) 100 elementos; (d) 200 elementos . . . . .   | 204 |
| 8.31 | Trajетórias de equilíbrio correspondentes ao deslocamento horizontal da borda superior da camada infinita mostrando a influência do comprimento característico à flexão para a discretização com 20 elementos finitos . . . . . | 205 |
| 8.32 | Estado deformado e distribuição de deformações cisalhantes $\gamma_{yx}$ . (a) $L_f = 12$ mm; (b) $L_f = 6$ mm; (c) $L_f = 4$ mm . . . . .  | 205 |
| 8.33 | Discretizações utilizadas no exemplo de compressão com banda de cisalhamento . . . . .  | 206 |
| 8.34 | Trajетórias de equilíbrio correspondentes ao deslocamento vertical do topo da peça para as malhas de 128 e 512 elementos . . . . .  | 207 |
| 8.35 | Estado deformado e distribuição de grandezas internas para a malha de 128 elementos finitos . . . . .   | 208 |

|      |  |     |
|------|--|-----|
| 8.36 | Estado deformado e distribuição de grandezas internas para a malha de 512 elementos finitos . . . . .  | 209 |
| 8.37 | Trajетórias de equilíbrio correspondentes ao deslocamento horizontal da face de aplicação da carga na tração axial utilizando o modelo de microplanos com relaxação cinemática . . . . .                     | 211 |
| 8.38 | Trajетórias de equilíbrio correspondentes ao deslocamento horizontal da face de aplicação da carga na compressão axial utilizando o modelo de microplanos com relaxação cinemática . . . . .                 | 212 |
| 8.39 | Trajетórias de equilíbrio correspondentes ao deslocamento horizontal da face de aplicação da carga no cisalhamento puro utilizando o modelo de microplanos com relaxação cinemática . . . . .                | 213 |
| 8.40 | Geometria e discretização em 30 elementos finitos para a flexão em três pontos . . . . .   | 214 |
| 8.41 | Trajетória de equilíbrio correspondente ao deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga na flexão em três pontos utilizando o modelo de microplanos com relaxação cinemática . . . . .               | 215 |
| 8.42 | Distribuição de tensões normais $\sigma_{xx}$ para a flexão em três pontos, simulando fissura inicial . . . . .  | 215 |
| 8.43 | Estado deformado e contorno de tensões de cisalhamento para o ponto limite de carga . . . . .  | 216 |
| 8.44 | Trajетória de equilíbrio correspondente ao deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga $F_1$ no cisalhamento em quatro pontos utilizando o modelo de microplanos com relaxação cinemática . . . . . | 217 |
| 8.45 | Trajетória de equilíbrio correspondente ao deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga $F_2$ no cisalhamento em quatro pontos utilizando o modelo de microplanos com relaxação cinemática . . . . . | 217 |
| 8.46 | Trajетórias de equilíbrio correspondentes ao deslocamento horizontal da face de aplicação da carga na tração axial utilizando o modelo de microplanos com deformação equivalente . . . . .                   | 219 |
| 8.47 | Trajетórias de equilíbrio correspondentes ao deslocamento horizontal da face de aplicação da carga na compressão axial utilizando o modelo de microplanos com deformação equivalente . . . . .               | 220 |

|      |  |     |
|------|--|-----|
| 8.48 | Trajетórias de equilíbrio correspondentes ao deslocamento horizontal da face de aplicação da carga no cisalhamento puro utilizando o modelo de microplanos com deformação equivalente . . . . .            | 221 |
| 8.49 | Trajетória de equilíbrio correspondente ao deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga na flexão em três pontos utilizando o modelo de microplanos com deformação equivalente . . . . .           | 222 |
| 8.50 | Distribuição de tensões normais $\sigma_{xx}$ para a flexão em três pontos, simulando fissura inicial . . . . .  | 223 |
| 8.51 | Trajетória de equilíbrio correspondente ao deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga $F_1$ no cisalhamento em quatro pontos utilizando o modelo de microplanos com deformação equivalente . . . | 224 |
| 8.52 | Trajетória de equilíbrio correspondente ao deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga $F_2$ no cisalhamento em quatro pontos utilizando o modelo de microplanos com deformação equivalente . . . | 224 |
| 8.53 | Trajетórias de equilíbrio correspondentes ao deslocamento horizontal da face de aplicação da carga na tração axial utilizando microplanos com contínuo de Cosserat . . . . .                               | 226 |
| 8.54 | Trajетórias de equilíbrio correspondentes ao deslocamento horizontal da face de aplicação da carga na compressão axial utilizando microplanos com contínuo de Cosserat . . . . .                           | 227 |
| 8.55 | Trajетórias de equilíbrio correspondentes ao deslocamento horizontal da face de aplicação da carga no cisalhamento puro utilizando microplanos com contínuo de Cosserat . . . . .                          | 228 |
| 8.56 | Trajетória de equilíbrio correspondente ao deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga na flexão em três pontos utilizando microplanos com contínuo de Cosserat . . . . .                         | 229 |
| 8.57 | Distribuição de tensões normais $\sigma_{xx}$ para a flexão em três pontos utilizando microplanos com contínuo de Cosserat . . . . .   | 230 |
| 8.58 | Trajетórias de equilíbrio correspondentes ao deslocamento horizontal da face de aplicação da carga na tração axial utilizando microplanos para o contínuo com microexpansão . . . . .                      | 232 |
| 8.59 | Trajетórias de equilíbrio correspondentes ao deslocamento horizontal da face de aplicação da carga na compressão axial utilizando microplanos para o contínuo com microexpansão . . . . .                  | 233 |

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 8.60 | Trajatórias de equilíbrío correspondentes ao deslocamento horizontal da face de aplicação da carga no cisalhamento puro utilizando microplanos para o contínuo com microexpansão . . . . .  | 234 |
| 8.61 | Trajatória de equilíbrío correspondente ao deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga na flexão em três pontos utilizando microplanos para o contínuo com microexpansão . . . . . | 235 |
| 8.62 | Distribuição de tensões normais $\sigma_{xx}$ para a flexão em três pontos utilizando microplanos para o contínuo com microexpansão . . . . .   | 236 |
| 8.63 | Geometria e discretização em 60 elementos finitos para a tração axial com entalhe assimétrico . . . . .   | 236 |
| 8.64 | Trajatória de equilíbrío correspondente ao deslocamento horizontal da face de aplicação da carga na tração axial com entalhe assimétrico . . . . .  | 237 |
| 8.65 | Trajatória de equilíbrío correspondente ao deslocamento horizontal da abertura da fissura na tração axial com entalhe assimétrico . . . . .   | 237 |
| 8.66 | Distribuição de tensões normais $\sigma_{xx}$ para a tração axial com entalhe assimétrico . . . . .   | 238 |
| 8.67 | Distribuição de microtensões $\psi$ para a tração axial com entalhe assimétrico . . . . .   | 238 |
| 8.68 | Distribuição de $\lambda_x/L_a$ para a tração axial com entalhe assimétrico . . . . .   | 238 |
| A.1  | Viga biapoiada sob flexão pura . . . . .  | 252 |
| A.2  | Particionamento do momento fletor e as correspondentes distribuições das tensões e tensões-momento . . . . .  | 252 |
| A.3  | Tensão-momento $\bar{\mu}$ resultante da distribuição linear da tensão $\sigma_{11}$ . . . . .  | 255 |
| A.4  | Cinemática e distribuição de tensões e tensões-momento numa viga . . . . .  | 255 |
| A.5  | Campos de tensões e de deslocamentos para o exemplo de flexão pura . . . . .  | 257 |
| A.6  | Viga engastada sob flexão simples . . . . .   | 258 |
| A.7  | Campos de tensões e de deslocamentos para o exemplo de flexão simples . . . . .   | 265 |
| A.8  | Barra tracionada constituída por dois materiais . . . . .   | 266 |
| A.9  | Campos de tensões para o exemplo da barra composta por dois materiais . . . . .   | 269 |
| A.10 | Campos de deslocamento e microexpansão para o exemplo da barra composta por dois materiais . . . . .  | 270 |

# Lista de Abreviaturas e Siglas

|         |   |
|---------|---|
| AIAA    | American Institute of Aeronautics and Astronautics          |
| ASCE    | American Society of Civil Engineers                         |
| ASME    | American Society of Mechanical Engineers                    |
| CAPES   | Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior |
| EPD     | Estado Plano de Deformação                                  |
| EPT     | Estado Plano de Tensão                                      |
| FAPEMIG | Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais     |
| GSP     | Parâmetro de Rigidez Generalizado                           |
| INSANE  | Interactive Structural Analysis Environment                 |
| IUTAM   | International Union of Theoretical and Applied Mechanics    |
| MEF     | Método dos Elementos Finitos                                |
| POO     | Programação Orientada a Objetos                             |
| PTV     | Princípio dos Trabalhos Virtuais                            |
| SIMMEC  | Simpósio Mineiro de Mecânica Computacional                  |
| UFMG    | Universidade Federal de Minas Gerais                        |
| UML     | Unified Modeling Language                                   |
| XML     | Extensible Markup Language                                  |

# Lista de Símbolos

A lista de símbolos a seguir é organizada por capítulo, de forma que um símbolo com o mesmo significado em mais de um capítulo é definido somente no primeiro capítulo em que aparece.

## Capítulo 2 - Solução de Equações Não-Lineares de Equilíbrio

|                      |  |
|----------------------|--|
| $\{U\}$              | Vetor de deslocamentos   |
| $\lambda$            | Fator de carga proporcional  |
| $[K]_{j-1}^i$        | Matriz de rigidez tangente na iteração $j-1$ do passo $i$  |
| $\{\delta U\}_j^i$   | Vetor de deslocamentos incrementais da iteração $j$ do passo $i$                                 |
| $\delta \lambda_j^i$ | Incremento do fator de cargas na iteração $j$ do passo $i$                                       |
| $\{P\}$              | Vetor de cargas de referência  |
| $\{Q\}_{j-1}^i$      | Vetor de forças residuais da iteração $j-1$ do passo $i$   |
| $\{\delta U\}_j^P$   | Vetor de deslocamentos incrementais da iteração $j$ associado à carga de referência              |
| $\{\delta U\}_j^Q$   | Vetor de deslocamentos incrementais da iteração $j$ associado à carga residual                   |
| $\{F\}_j$            | Vetor de forças equivalentes às tensões internas ao final da iteração $j$                        |
| $k$                  | Componente de deslocamento como parâmetro de controle  |
| $\delta U_j^k$       | Incremento de deslocamento para a componente $k$ na iteração $j$                                 |
| $\delta U_j^{P^k}$   | Incremento de deslocamento para a componente $k$ associado à carga de referência na iteração $j$ |
| $\delta U_j^{Q^k}$   | Incremento de deslocamento para a componente $k$ associado à carga residual na iteração $j$      |

|                  |   |
|------------------|---|
| $\Delta S$       | Constante a ser controlada no método de comprimento de arco |
| $\{\Delta U\}$   | Vetor de deslocamentos incrementais                         |
| $\Delta \lambda$ | Fator de carga incremental                                  |
| $H_j$            | Deslocamento generalizado da iteração $j$                   |
| $\Delta W$       | Incremento de trabalho                                      |
| $\xi$            | Fator de escala do controle de resíduo ortogonal            |

### Capítulo 3 - Contínuo de Cosserat

|                    |  |
|--------------------|--|
| $\varphi$          | Microexpansão volumétrica  |
| $u_i$              | Vetor de deslocamentos   |
| $\chi_{ij}$        | Tensor que contém os graus de liberdade (microrrotações e microdeformações) dos microcontínuos |
| $\gamma_{ij}$      | Tensor associado a variações das dimensões e distorções  |
| $e_{ij}$           | Tensor relacionado às medidas de deformação dos microcontínuos                                 |
| $\phi_i$           | Vetor de microrrotações  |
| $\epsilon_{ijk}$   | Tensor alternante  |
| $\kappa_{ij}$      | Tensor relacionado às curvaturas e às torções da microestrutura                                |
| $\varepsilon_{ij}$ | Clássico tensor de deformações   |
| $\eta_{ijk}$       | Tensor gradiente de deformações  |
| $GL$               | Grau de liberdade  |
| $MD$               | Medida de deformação   |
| $\mathbf{X}$       | Posição inicial do centro de massa da macrorregião de um contínuo micromórfico                 |
| $X_i$              | Sistema fixo de eixos ortogonais   |
| $\Delta V$         | Volume da macrorregião de um contínuo micromórfico na configuração de referência               |
| $\Delta S$         | Superfície da macrorregião de um contínuo micromórfico na configuração de referência           |
| $P$                | Centro de massa da macrorregião de um contínuo micromórfico na configuração de referência      |

|                               |   |
|-------------------------------|---|
| $Q^{(\alpha)}$                | Centro de massa da microrregião $\alpha$ na configuração de referência              |
| $\mathbf{X}^{(\alpha)}$       | Posição inicial do centro de massa da microrregião $Q^{(\alpha)}$                   |
| $\bar{\mathbf{X}}^{(\alpha)}$ | Posição inicial de $Q^{(\alpha)}$ em relação a P                                    |
| $\Delta v$                    | Volume da macrorregião de um contínuo micromórfico na configuração deformada        |
| $\Delta s$                    | Superfície da macrorregião de um contínuo micromórfico na configuração deformada    |
| $t$                           | Tempo   |
| $\mathbf{x}$                  | Posição deformada do centro de massa P  |
| $\Delta V^{(\alpha)}$         | Volume da microrregião $\alpha$ na configuração de referência                       |
| $\Delta S^{(\alpha)}$         | Superfície da microrregião $\alpha$ na configuração de referência                   |
| $\mathbf{x}^{(\alpha)}$       | Posição final do centro de massa $Q^{(\alpha)}$                                     |
| $q^{(\alpha)}$                | Representação de $Q^{(\alpha)}$ na configuração deformada                           |
| $p$                           | Representação de P na configuração deformada  |
| $\bar{\mathbf{x}}^{(\alpha)}$ | Posição final do centro de massa $q^{(\alpha)}$ em relação a p                      |
| $\Delta v^{(\alpha)}$         | Volume da microrregião $\alpha$ na configuração deformada                           |
| $\Delta s^{(\alpha)}$         | Superfície da microrregião $\alpha$ na configuração deformada                       |
| $T_{ij}$                      | Matriz de transformação da configuração de referência para a configuração deformada |
| $F_{ij}$                      | Clássico tensor gradiente de deformação   |
| $\bar{F}_{ij}$                | Tensor gradiente de microdeformação   |
| $d\mathbf{x}, d\mathbf{X}$    | Vetores infinitesimais  |
| $dL^{(\alpha)}$               | Comprimento inicial do segmento infinitesimal                                       |
| $dl^{(\alpha)}$               | Comprimento final do segmento infinitesimal   |
| $\delta_{ij}$                 | Delta de Kronecker  |
| $E_{ij}$                      | Clássico tensor de Lagrange das deformações   |
| $\Gamma_{ij}$                 | Tensor de microdeformação relativa  |
| $K_{ijk}$                     | Tensor de microcurvatura  |



|                                |   |
|--------------------------------|---|
| $\mathbf{u}$                   | Vetor de macrodeslocamento  |
| $\bar{\mathbf{u}}^{(\alpha)}$  | Vetor de microdeslocamento  |
| $\Phi_{ij}$                    | Tensor de microdeformações  |
| $\gamma_{(ij)}$                | Tensor simétrico de deformação  |
| $\gamma_{[ij]}$                | Tensor anti-simétrico de deformação   |
| $\omega_k$                     | Macrorrotação   |
| $U_0$                          | Densidade de energia de deformação  |
| $\sigma_{ij}$                  | Componentes do tensor de tensão   |
| $\mu_{ij}$                     | Componentes do tensor de tensão-momento   |
| $D_{ijkl}$                     | Tensor constitutivo   |
| $dU$                           | Diferencial total da energia potencial de deformação                            |
| $A_{ijkl}, B_{ijkl}, C_{ijkl}$ | Tensores constitutivos do material  |
| $A_1, A_2, A_3, C_1, C_2, C_3$ | Parâmetros do material elástico, linear e isotrópico                            |
| $\lambda$                      | Constante de Lamé   |
| $E$                            | Módulo de elasticidade longitudinal   |
| $\nu$                          | Coefficiente de Poisson   |
| $G$                            | Módulo de elasticidade transversal  |
| $\alpha$                       | Módulo de cisalhamento rotacional   |
| $\sigma_{(ij)}$                | Tensor simétrico de tensão  |
| $\sigma_{[ij]}$                | Tensor anti-simétrico de tensão   |
| $d_f$                          | Metade da aresta do cubo que representa o volume de controle submetido à flexão |
| $d_t$                          | Metade da aresta do cubo que representa o volume de controle submetido à torção |
| $I$                            | Momento de inércia  |
| $M$                            | Momento fletor  |
| $L_f$                          | Comprimento característico do material à flexão                                 |
| $L_t$                          | Comprimento característico do material à torção                                 |
| $J_t$                          | Momento de inércia polar  |

|                       |   |
|-----------------------|---|
| $\eta$                | Parâmetro que relaciona os tensores anti-simétricos de microcurvatura e de tensão-momento |
| $\kappa_{[ij]}$       | Tensor anti-simétrico de microcurvatura   |
| $\mu_{[ij]}$          | Tensor anti-simétrico de tensão-momento   |
| $\bar{f}_i$           | Força de volume prescrita   |
| $\bar{l}_i$           | Momento de volume prescrito   |
| $S_t$                 | Parte da superfície S onde o vetor de tensão é prescrito                                  |
| $S_m$                 | Parte da superfície S onde o vetor de tensão-momento é prescrito                          |
| $\bar{t}_i$           | Valor prescrito do vetor de tensão  |
| $\bar{m}_i$           | Valor prescrito do vetor de tensão-momento  |
| $S_u$                 | Região da superfície S onde prescrevem-se deslocamentos                                   |
| $S_\phi$              | Região da superfície S onde prescrevem-se microrrotações                                  |
| $\bar{u}_i$           | Valor prescrito do vetor de deslocamento  |
| $\bar{\phi}_i$        | Valor prescrito do vetor de microrrotação   |
| $n_j$                 | Vetor normal unitário   |
| $\dot{\gamma}_{ij}$   | Taxa de deformação total  |
| $\dot{\gamma}_{ij}^e$ | Parcela elástica da taxa de deformação total  |
| $\dot{\gamma}_{ij}^p$ | Parcela plástica da taxa de deformação total  |
| $\dot{\sigma}_{ij}$   | Taxa de variação do tensor de tensão  |
| $D_{ijkl}^e$          | Tensor constitutivo elástico do material  |
| f                     | Superfície de plastificação   |
| $\dot{\lambda}$       | Multiplicador plástico  |
| $J_2$                 | Segundo invariante do tensor desviador das tensões  |
| $\bar{\sigma}$        | Tensão de escoamento corrente   |
| $\beta$               | Parâmetro de endurecimento (ou amolecimento)  |
| $s_{ij}$              | Tensor desviador das tensões  |
| $\{\sigma\}$          | Vetor de tensão generalizada  |
| $\{\gamma\}$          | Vetor de deformação generalizada  |

|                  |  |
|------------------|--|
| $\sigma_i^t$     | Preditor elástico para as tensões  |
| $\sigma_i^0$     | Tensão no início do passo incremental  |
| $\Delta\gamma_j$ | Vetor total dos incrementos de deformação  |
| $[D^e]$          | Matriz constitutiva elástica   |
| $\beta^0$        | Parâmetro de endurecimento (ou amolecimento) corrente                                    |
| $\sigma_y$       | Tensão de escoamento inicial   |
| $h$              | Módulo plástico  |
| $\sigma_i^n$     | Vetor de tensão corrigido  |
| $\beta^n$        | Parâmetro de endurecimento (ou amolecimento) corrigido                                   |
| $\Delta\lambda$  | Incremento do multiplicador plástico   |
| $\Delta\beta$    | Incremento do parâmetro de endurecimento (ou amolecimento)                               |
| $[I]$            | Matriz identidade  |
| $[P]$            | Matriz que ajuda a definir o segundo invariante do tensor desviador das tensões          |
| $\{\bar{u}\}$    | Vetor de deslocamentos generalizados em um ponto qualquer no interior do elemento finito |
| $\{u\}$          | Vetor de deslocamentos nodais generalizados  |
| $[N]$            | Matriz das funções de forma do elemento finito   |
| $[L]$            | Matriz de operadores diferenciais  |
| $[B]$            | Matriz que relaciona as deformações aos deslocamentos nodais                             |
| $[D]$            | Matriz constitutiva  |

## Capítulo 4 - Contínuo com Microexpansão

|  |  |
|--|--|
| $\varphi_{,i}$   | Gradiente de microexpansão volumétrica               |
| $\psi$   | Escalar de microtensão                               |
| $\lambda_i$  | Vetor de microforça                                  |
| $A_{ijkl}, B_{ijkl}, C_{ij}, L_{ijk}, E_{ijkl}, F_{ij}, G_{ijk}, H, I_i, J_{ij}$ | Tensores constitutivos do material                   |
| $A_1, A_2, A_3, E_1, E_2, E_3, J$  | Parâmetros do material elástico, linear e isotrópico |

|                 |  |
|-----------------|--|
| $C$             | Parâmetro elástico do material que combina os efeitos da macro e da microescala            |
| $H$             | Parâmetro elástico do material que relaciona a microtensão com a microexpansão             |
| $K$             | Módulo volumétrico   |
| $d_a$           | Metade do tamanho da aresta do cubo que representa o volume de controle submetido à tração |
| $L_a$           | Comprimento característico do material à tração  |
| $\bar{g}$       | Microforça de volume prescrita   |
| $S_\lambda$     | Parte da superfície S onde o escalar de microforça é prescrito                             |
| $\bar{\lambda}$ | Valor prescrito do escalar de microforça   |
| $S_\varphi$     | Região da superfície S onde prescreve-se microexpansão                                     |
| $\bar{\varphi}$ | Valor prescrito do escalar de microexpansão  |

## Capítulo 5 - Modelo Constitutivo de Microplanos para o Contínuo Clássico

|                             |  |
|-----------------------------|--|
| $\underline{\varepsilon}_N$ | Vetor de deformação normal aos microplanos               |
| $\underline{\varepsilon}_T$ | Vetor de deformação tangencial aos microplanos           |
| $\varepsilon_{ij}$          | Tensor macroscópico de deformação                        |
| $\mathbf{n}$                | Vetor normal ao microplano                               |
| $\varepsilon_V$             | Parcela volumétrica da deformação normal nos microplanos |
| $\varepsilon_D$             | Parcela desviadora da deformação normal nos microplanos  |
| $\varepsilon_M$             | Componente M da deformação tangencial nos microplanos    |
| $\varepsilon_L$             | Componente L da deformação tangencial nos microplanos    |
| $\sigma_V$                  | Parcela volumétrica da tensão normal nos microplanos     |
| $\sigma_D$                  | Parcela desviadora da tensão normal nos microplanos      |
| $\sigma_M$                  | Componente M da tensão tangencial nos microplanos        |
| $\sigma_L$                  | Componente L da tensão tangencial nos microplanos        |
| $\mathbf{m}$                | Vetor unitário que indica a direção M sobre o microplano |

|  |   |
|--|---|
| $\underline{l}$                        | Vetor unitário que indica a direção L sobre o microplano  |
| $\psi$                                 | Função de descontinuidade que provoca uma relaxação na restrição cinemática quando há predominância do estado de tração dominante |
| $\sigma_1$                             | Tensão principal máxima   |
| $\sigma_{1min}$                        | Valor limite mínimo para a tensão principal máxima  |
| $f(\sigma_1)$                          | Função que garante uma suave transição do estado descontínuo para o estado contínuo   |
| $a_1, p_1$                             | Parâmetros empíricos do material utilizados nas curvas de tração volumétrica e desviadora.  |
| $a_2, p_2$                             | Parâmetros empíricos do material utilizados na curva de compressão desviadora.  |
| $a, b, p, q$                           | Parâmetros empíricos do material utilizados na curva de compressão volumétrica.   |
| $a_3, p_3$                             | Parâmetros empíricos do material utilizados nas curvas de tração e compressão tangencial  |
| $E_V^0$                                | Módulo elástico da relação tensão-deformação volumétrica nos microplanos  |
| $E_D^0$                                | Módulo elástico da relação tensão-deformação desviadora nos microplanos   |
| $E_T^0$                                | Módulo elástico da relação tensão-deformação tangencial nos microplanos   |
| $\eta_0, a_3^0, k_a$                   | Parâmetros empíricos do material  |
| $\Delta\varepsilon$                    | Incremento (ou decremento) de deformação  |
| $\varepsilon_{max}, \varepsilon_{min}$ | Valores máximo e mínimo da deformação efetiva que ocorreu até o momento no microplano   |
| $\sigma_{ij}$                          | Tensor macroscópico de tensões  |
| $\Omega$                               | Metade superior da superfície de uma esfera unitária  |
| $d\sigma_{ij}$                         | Incremento de tensão macroscópica   |
| $d\varepsilon_{kl}$                    | Incremento de deformação macroscópica   |
| $D_{ijkl}^{tan}$                       | Tensor constitutivo tangente macroscópico   |
| $E_V^{tan}$                            | Módulo tangente da relação tensão-deformação volumétrica nos microplanos  |

|                                 |  |
|---------------------------------|--|
| $E_D^{tan}$                     | Módulo tangente da relação tensão-deformação desviadora nos microplanos      |
| $E_M^{tan}, E_L^{tan}$          | Módulos tangentes das relações tensão-deformação tangenciais nos microplanos |
| $\underline{t}_\varepsilon$     | Vetor de deformação no microplano  |
| $\underline{\xi}$               | Tensor de deformação macroscópico  |
| $\underline{\xi}_{vol}$         | Tensor de deformação volumétrica macroscópica                                |
| $\underline{\xi}_{dev}$         | Tensor de deformação desviadora macroscópica                                 |
| $\underline{\mathbf{I}}$        | Tensor identidade de segunda ordem   |
| $\underline{\xi}_D$             | Vetor de deformação desviadora nos microplanos                               |
| $\underline{\mathbf{V}}$        | Tensor de projeção volumétrica (segunda ordem)                               |
| $\underline{\mathbf{Dev}}$      | Tensor de projeção desviadora (terceira ordem)                               |
| $\underline{\mathcal{I}}^{sym}$ | Tensor identidade simétrico (quarta ordem)                                   |
| $\underline{\mathcal{I}}^{dev}$ | Parcela desviadora do tensor identidade simétrico (quarta ordem)             |
| $\underline{\mathcal{I}}^{vol}$ | Parcela volumétrica do tensor identidade simétrico (quarta ordem)            |
| $\mathcal{S}$                   | Superfície de uma esfera unitária  |
| $I_1$                           | Primeiro invariante das deformações macroscópicas                            |
| $J_2$                           | Segundo invariante das deformações macroscópicas desviadoras                 |
| $d^{mic}$                       | Parâmetro de dano nos microplanos  |
| $\underline{\mathbf{q}}$        | Vetor das variáveis internas   |
| $\Psi^{mic}$                    | Energia livre nos microplanos  |
| $\Psi_0^{mic}$                  | Energia livre elástica nos microplanos                                       |
| $\Psi_{vol}^{mic}$              | Parcela volumétrica da energia livre nos microplanos                         |
| $\Psi_{dev}^{mic}$              | Parcela desviadora da energia livre nos microplanos                          |
| $E_{V0}^{mic}$                  | Módulo elástico volumétrico nos microplanos                                  |
| $E_{D0}^{mic}$                  | Módulo elástico desviador nos microplanos                                    |
| $\underline{\sigma}_D$          | Vetor de tensão desviadora nos microplanos                                   |
| $\Psi^{mac}$                    | Energia livre macroscópica de Helmholtz                                      |

|  |  |
|--|--|
| $\mathcal{D}^{mac}$  | Dissipação macroscópica  |
| $\mathcal{D}^{mic}$  | Dissipação nos microplanos   |
| $\boldsymbol{\sigma}$  | Tensor de tensão macroscópico  |
| $\underset{\sim}{\mathbf{E}}_{sec}^d$                                      | Tensor de quarta ordem que denota o módulo secante elasto-dano macroscópico                      |
| $\underset{\sim}{\mathbf{E}}_{sec}^{el}, \underset{\sim}{\mathbf{E}}^{el}$ | Tensor de quarta ordem que denota o módulo elástico macroscópico                                 |
| $K^{mac}$  | Módulo volumétrico macroscópico  |
| $G^{mac}$  | Módulo cisalhante macroscópico   |
| $K^{mic}$  | Módulo volumétrico nos microplanos   |
| $G^{mic}$  | Módulo cisalhante nos microplanos  |
| $\underset{\sim}{\mathbf{E}}_{tan}^d$                                      | Módulo tangente elasto-dano macroscópico   |
| $Y^{mic}$  | Força termodinâmica nos microplanos  |
| $\Phi^{mic}$   | Função de carregamento de dano nos microplanos   |
| $\phi^{mic}$   | Função que relaciona a variável de dano às deformações equivalentes máximas nos microplanos      |
| $\eta^{mic}$   | Deformação equivalente nos microplanos   |
| $\kappa^{mic}$   | Deformação equivalente máxima nos microplanos  |
| $\kappa_0^{mic}$   | Valor da deformação equivalente que determina o início do processo de dano nos microplanos       |
| $\beta^{mic}$  | Parâmetro do material que representa a taxa de crescimento do dano nos microplanos               |
| $\alpha^{mic}$   | Parâmetro do material que representa sua máxima degradação nos microplanos                       |
| $\eta^{mac}$   | Deformação equivalente macroscópica  |
| $k_0, k_1, k_2$  | Parâmetros necessários para calcular as deformações equivalentes devidas a de Vree et al. (1995) |
| $r$  | Razão entre as resistências à tração e à compressão do material                                  |
| $d^{mac}$  | Parâmetro de dano macroscópico   |
| $\eta_{Simo}^{mic}$  | Deformação equivalente nos microplanos devida a Simo e Ju (1987)                                 |
| $\underset{\sim}{\mathbf{E}}_{tan}^d_{Simo}$                               | Módulo tangente elasto-dano devido a Simo e Ju (1987)  |

|  |   |
|--|---|
| $\eta_{Vree}^{mic}$                              | Deformação equivalente nos microplanos devida a de Vree et al. (1995) |
| $\underline{\underline{\mathbf{E}}}_{tanVree}^d$ | Módulo tangente elasto-dano devido a de Vree et al. (1995)            |
| $\omega_k$                                       | Peso de integração numérica para o microplano k                       |

## Capítulo 6 - Modelos Constitutivos de Microplanos para Contínuos Generalizados

|   |  |
|---|--|
| $\underline{\underline{\mathbf{t}}}_\gamma$           | Vetor de deformação (de Cosserat) nos microplanos                                      |
| $\underline{\underline{\mathbf{t}}}_\kappa$           | Vetor de microcurvatura nos microplanos  |
| $\underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}$         | Tensor de deformação (de Cosserat) macroscópico  |
| $\underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}$         | Tensor de microcurvatura macroscópico  |
| $\underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}_{vol}$   | Tensor de deformação (de Cosserat) volumétrica macroscópica                            |
| $\underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}_{dev}$   | Tensor de deformação (de Cosserat) desviadora macroscópica                             |
| $\underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^{sym}$   | Tensor de microcurvatura simétrico macroscópico  |
| $\underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^{skw}$   | Tensor de microcurvatura anti-simétrico macroscópico                                   |
| $\underline{\underline{\mathcal{I}}}^{skw}$           | Tensor identidade anti-simétrico (quarta ordem)  |
| $\underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}_V$       | Deformação (de Cosserat) volumétrica nos microplanos                                   |
| $\underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}_D$       | Vetor de deformação (de Cosserat) desviadora nos microplanos                           |
| $\underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}_N$       | Microcurvatura normal nos microplanos  |
| $\underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}_T$       | Vetor de microcurvatura tangencial nos microplanos                                     |
| $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$                  | Tensor de projeção desviadora (terceira ordem)   |
| $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$                  | Tensor de projeção tangencial (terceira ordem)   |
| $\underline{\underline{\mathcal{I}}}$                 | Tensor identidade de quarta ordem  |
| $\underline{\underline{\mathcal{I}}}_{vol}$           | Parcela volumétrica do tensor identidade de quarta ordem                               |
| $\underline{\underline{\mathcal{I}}}_{dev}$           | Parcela desviadora do tensor identidade de quarta ordem                                |
| $\underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}_D^{sym}$ | Parcela simétrica do vetor de deformação (de Cosserat) desviadora nos microplanos      |
| $\underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}_D^{skw}$ | Parcela anti-simétrica do vetor de deformação (de Cosserat) desviadora nos microplanos |



|   |  |
|---|--|
| $\underline{\mathbf{k}}_T^{sym}$                  | Parcela simétrica do vetor de microcurvatura tangencial nos microplanos                  |
| $\underline{\mathbf{k}}_T^{skw}$                  | Parcela anti-simétrica do vetor de microcurvatura tangencial nos microplanos             |
| $\underline{\mathbf{N}}$                          | Tensor de projeção normal (segunda ordem)  |
| $\underline{\underline{\mathbf{D}}}^{sym}$        | Parcela simétrica do tensor de projeção desviadora (terceira ordem)                      |
| $\underline{\underline{\mathcal{G}}}_{dev}^{sym}$ | Parcela desviadora do tensor identidade simétrico de quarta ordem                        |
| $\underline{\underline{\mathbf{T}}}^{sym}$        | Parcela simétrica do tensor de projeção tangencial (terceira ordem)                      |
| $\underline{\underline{\mathbf{D}}}^{skw}$        | Parcela anti-simétrica do tensor de projeção desviadora (terceira ordem)                 |
| $\underline{\underline{\mathbf{T}}}^{skw}$        | Parcela anti-simétrica do tensor de projeção tangencial (terceira ordem)                 |
| $\Psi_{0\gamma}^{mic}$                            | Parcela da energia livre elástica nos microplanos relacionada às deformações de Cosserat |
| $\Psi_{0\kappa}^{mic}$                            | Parcela da energia livre elástica nos microplanos relacionada às microcurvaturas         |
| $E_{V0}$  | Módulo elástico volumétrico nos microplanos  |
| $E_{D0}^{sym}$                                    | Módulo elástico desviador simétrico nos microplanos                                      |
| $E_{D0}^{skw}$                                    | Módulo elástico desviador anti-simétrico nos microplanos                                 |
| $E_{N0}$  | Módulo elástico normal nos microplanos   |
| $E_{T0}^{sym}$                                    | Módulo elástico tangencial simétrico nos microplanos                                     |
| $E_{T0}^{skw}$                                    | Módulo elástico tangencial anti-simétrico nos microplanos                                |
| $\underline{\boldsymbol{\sigma}}_D^{sym}$         | Vetor de tensão desviador simétrico nos microplanos                                      |
| $\underline{\boldsymbol{\sigma}}_D^{skw}$         | Vetor de tensão desviador anti-simétrico nos microplanos                                 |
| $\mu_N$   | Tensão-momento normal nos microplanos  |
| $\underline{\boldsymbol{\mu}}_T^{sym}$            | Vetor de tensão-momento tangencial simétrico nos microplanos                             |
| $\underline{\boldsymbol{\mu}}_T^{skw}$            | Vetor de tensão-momento tangencial anti-simétrico nos microplanos                        |
| $\underline{\boldsymbol{\mu}}$                    | Tensor de tensão-momento macroscópico  |
| $\mathcal{D}_\gamma^{mic}$                        | Parcela da dissipação nos microplanos relacionada às deformações de Cosserat             |
| $\mathcal{D}_\kappa^{mic}$                        | Parcela da dissipação nos microplanos relacionada às microcurvaturas                     |

|                                    |  |
|------------------------------------|--|
| $\mathbf{q}_\gamma$                | Parcela das variáveis internas relacionada às deformações de Cosserat  |
| $\mathbf{q}_\kappa$                | Parcela das variáveis internas relacionada às microcurvaturas  |
| $\mathbf{E}_{\approx\gamma}^{el}$  | Tensor de quarta ordem que denota o módulo elástico macroscópico relacionado às deformações de Cosserat              |
| $\mathbf{E}_{\approx\kappa}^{el}$  | Tensor de quarta ordem que denota o módulo elástico macroscópico relacionado às microcurvaturas                      |
| $d_\gamma^{mic}$                   | Parâmetro de dano nos microplanos relacionado às deformações de Cosserat   |
| $d_\kappa^{mic}$                   | Parâmetro de dano nos microplanos relacionado às microcurvaturas   |
| $\Psi_\gamma^{mic}$                | Parcela da energia livre nos microplanos relacionada às deformações de Cosserat                                      |
| $\Psi_\kappa^{mic}$                | Parcela da energia livre nos microplanos relacionada às microcurvaturas  |
| $Y_\gamma^{mic}$                   | Força termodinâmica nos microplanos relacionada às deformações de Cosserat   |
| $Y_\kappa^{mic}$                   | Força termodinâmica nos microplanos relacionada às microcurvaturas   |
| $\mathbf{E}_{\approx\gamma}^d$     | Tensor de quarta ordem que denota o módulo secante elasto-dano macroscópico devido às deformações de Cosserat        |
| $\mathbf{E}_{\approx\kappa}^d$     | Tensor de quarta ordem que denota o módulo secante elasto-dano macroscópico devido às microcurvaturas                |
| $\mathbf{E}_{\approx\tan\gamma}^d$ | Tensor de quarta ordem que denota o módulo tangente elasto-dano macroscópico devido às deformações de Cosserat       |
| $\mathbf{E}_{\approx\tan\kappa}^d$ | Tensor de quarta ordem que denota o módulo tangente elasto-dano macroscópico devido às microcurvaturas               |
| $\Phi_\gamma^{mic}$                | Função de carregamento de dano nos microplanos relacionada às deformações de Cosserat                                |
| $\Phi_\kappa^{mic}$                | Função de carregamento de dano nos microplanos relacionada às microcurvaturas  |
| $\beta_\gamma^{mic}$               | Parâmetro do material que representa a taxa de crescimento do dano devido às deformações de Cosserat nos microplanos |
| $\beta_\kappa^{mic}$               | Parâmetro do material que representa a taxa de crescimento do dano devido às microcurvaturas nos microplanos         |
| $\alpha_\gamma^{mic}$              | Parâmetro do material que representa sua máxima degradação devido às deformações de Cosserat nos microplanos         |

|                              |   |
|------------------------------|---|
| $\alpha_{\kappa}^{mic}$      | Parâmetro do material que representa sua máxima degradação devido às microcurvaturas nos microplanos  |
| $\kappa_{0\gamma}^{mic}$     | Parâmetro do material que representa o valor da deformação equivalente correspondente ao início do processo de dano devido às deformações de Cosserat nos microplanos |
| $\kappa_{0\kappa}^{mic}$     | Parâmetro do material que representa o valor da deformação equivalente correspondente ao início do processo de dano devido às microcurvaturas nos microplanos         |
| $\gamma_{dev}^{sym}$         | Tensor simétrico de deformação (de Cosserat) desviadora macroscópica  |
| $\gamma_{dev}^{skw}$         | Tensor anti-simétrico de deformação (de Cosserat) desviadora macroscópica   |
| $\underline{\kappa}_{vol}$   | Tensor de microcurvatura volumétrica macroscópica   |
| $d_{\gamma}^{mac}$           | Parâmetro de dano macroscópico relacionado às deformações de Cosserat   |
| $d_{\kappa}^{mac}$           | Parâmetro de dano macroscópico relacionado às microcurvaturas   |
| $\eta_{\gamma}^{mic}$        | Deformação equivalente nos microplanos correspondente às deformações de Cosserat  |
| $\eta_{\kappa}^{mic}$        | Deformação equivalente nos microplanos correspondente às microcurvaturas  |
| $\eta_{\gamma}^{mac}$        | Deformação equivalente macroscópica relacionada às deformações de Cosserat  |
| $\eta_{\kappa}^{mac}$        | Deformação equivalente macroscópica relacionada às microcurvaturas  |
| $\Psi_{0\gamma}^{mac}$       | Parcela da energia livre elástica macroscópica relacionada às deformações de Cosserat   |
| $\Psi_{0\kappa}^{mac}$       | Parcela da energia livre elástica macroscópica relacionada às microcurvaturas   |
| $\eta_{\gamma}^{mic}_{Simo}$ | Deformação equivalente nos microplanos devida a Simo e Ju (1987) e relacionada às deformações de Cosserat   |
| $\eta_{\kappa}^{mic}_{Simo}$ | Deformação equivalente nos microplanos devida a Simo e Ju (1987) e relacionada às microcurvaturas   |
| $J_{2\gamma}$                | Segundo invariante das deformações macroscópicas desviadoras relacionado às deformações de Cosserat   |
| $J_{2\kappa}$                | Segundo invariante das deformações macroscópicas desviadoras relacionado às microcurvaturas   |

|                                     |   |
|-------------------------------------|---|
| $\eta_{\gamma Vree}^{mic}$          | Deformação equivalente nos microplanos devida a de Vree et al. (1995) e relacionada às deformações de Cosserat        |
| $\eta_{\kappa Vree}^{mic}$          | Deformação equivalente nos microplanos devida a de Vree et al. (1995) e relacionada às microcurvaturas                |
| $\phi_{\gamma}^{mic}$               | Função que relaciona a variável de dano às deformações equivalentes máximas correspondente às deformações de Cosserat |
| $\phi_{\kappa}^{mic}$               | Função que relaciona a variável de dano às deformações equivalentes máximas correspondente às microcurvaturas         |
| $\kappa_{\gamma}^{mic}$             | Deformação equivalente máxima nos microplanos correspondente às deformações de Cosserat                               |
| $\kappa_{\kappa}^{mic}$             | Deformação equivalente máxima nos microplanos correspondente às microcurvaturas                                       |
| $\varphi^{mic}$                     | Microexpansão nos microplanos   |
| $\varphi^{mac}$                     | Microexpansão macroscópica  |
| $\underline{\varphi}_g$             | Vetor do gradiente de microexpansão no ponto material (ou macroscópico)   |
| $\varphi_g$                         | Gradiente de microexpansão nos microplanos  |
| $\Psi_{0\varphi\gamma}^{mic}$       | Parcela da energia livre elástica nos microplanos relacionada às deformações de Cosserat e à microexpansão            |
| $\Psi_{0\varphi_g}^{mic}$           | Parcela da energia livre elástica nos microplanos relacionada ao gradiente de microexpansão                           |
| $E_{\varphi\gamma 0}$               | Módulo elástico devido às deformações de Cosserat e à microexpansão   |
| $E_{\varphi 0}$                     | Módulo elástico devido à microexpansão  |
| $E_{\varphi_g 0}$                   | Módulo elástico devido ao gradiente de microexpansão  |
| $\psi_m$                            | Microtensão nos microplanos   |
| $\lambda_m$                         | Microforça nos microplanos  |
| $\psi$                              | Escalar de microtensão macroscópica   |
| $\underline{\lambda}$               | Vetor de microforça macroscópica  |
| $\mathcal{D}_{\varphi\gamma}^{mic}$ | Parcela da dissipação nos microplanos relacionada às deformações de Cosserat e à microexpansão                        |
| $\mathcal{D}_{\varphi_g}^{mic}$     | Parcela da dissipação nos microplanos relacionada ao gradiente de microexpansão                                       |

|   |   |
|---|---|
| $\mathbf{q}_{\varphi\gamma}$              | Parcela das variáveis internas relacionada às deformações de Cosserat e à microexpansão   |
| $\mathbf{q}_{\varphi g}$                  | Parcela das variáveis internas relacionada ao gradiente de microexpansão  |
| $\tilde{\mathbf{E}}_{\sigma\varphi}^{el}$ | Tensor de segunda ordem que denota o módulo elástico macroscópico, relacionando tensão com microexpansão  |
| $E_{\varphi}^{el}$                        | Módulo elástico macroscópico relacionado à microexpansão  |
| $\tilde{\mathbf{E}}_{\psi\gamma}^{el}$    | Tensor de segunda ordem que denota o módulo elástico macroscópico, relacionando microtensão com as deformações de Cosserat                              |
| $\tilde{\mathbf{E}}_{\varphi g}^{el}$     | Tensor de segunda ordem que denota o módulo elástico macroscópico relacionado ao gradiente de microexpansão   |
| $d_{\varphi\gamma}^{mic}$                 | Parâmetro de dano nos microplanos relacionado às deformações de Cosserat e à microexpansão  |
| $d_{\varphi g}^{mic}$                     | Parâmetro de dano nos microplanos relacionado ao gradiente de microexpansão   |
| $\Psi_{\varphi\gamma}^{mic}$              | Parcela da energia livre nos microplanos relacionada às deformações de Cosserat e à microexpansão   |
| $\Psi_{\varphi g}^{mic}$                  | Parcela da energia livre nos microplanos relacionada ao gradiente de microexpansão  |
| $Y_{\varphi\gamma}^{mic}$                 | Força termodinâmica nos microplanos relacionada às deformações de Cosserat e à microexpansão  |
| $Y_{\varphi g}^{mic}$                     | Força termodinâmica nos microplanos relacionada ao gradiente de microexpansão   |
| $\tilde{\mathbf{E}}_{sec\sigma\varphi}^d$ | Tensor de segunda ordem que denota o módulo secante elasto-dano macroscópico, relacionando tensão com microexpansão                                     |
| $E_{sec\varphi}^d$                        | Módulo secante elasto-dano macroscópico relacionado à microexpansão   |
| $\tilde{\mathbf{E}}_{sec\psi\gamma}^d$    | Tensor de segunda ordem que denota o módulo secante elasto-dano macroscópico, relacionando microtensão com as deformações de Cosserat                   |
| $\tilde{\mathbf{E}}_{sec\varphi g}^d$     | Tensor de segunda ordem que denota o módulo secante elasto-dano macroscópico relacionado ao gradiente de microexpansão                                  |
| $\phi_{\varphi\gamma}^{mic}$              | Função que relaciona a variável de dano às deformações equivalentes máximas nos microplanos correspondente às deformações de Cosserat e à microexpansão |

|  |   |
|--|---|
| $\phi_{\varphi_g}^{mic}$                   | Função que relaciona a variável de dano às deformações equivalentes máximas nos microplanos correspondente ao gradiente de microexpansão  |
| $\kappa_{\varphi_\gamma}^{mic}$            | Deformação equivalente máxima nos microplanos correspondente às deformações de Cosserat e à microexpansão   |
| $\kappa_{\varphi_g}^{mic}$                 | Deformação equivalente máxima nos microplanos correspondente ao gradiente de microexpansão  |
| $\eta_{\varphi_\gamma}^{mic}$              | Deformação equivalente nos microplanos correspondente às deformações de Cosserat e à microexpansão  |
| $\eta_{\varphi_g}^{mic}$                   | Deformação equivalente nos microplanos correspondente ao gradiente de microexpansão   |
| $\Phi_{\varphi_\gamma}^{mic}$              | Função de carregamento de dano nos microplanos relacionada às deformações de Cosserat e à microexpansão   |
| $\Phi_{\varphi_g}^{mic}$                   | Função de carregamento de dano nos microplanos relacionada ao gradiente de microexpansão  |
| $\beta_{\varphi_\gamma}^{mic}$             | Parâmetro do material que representa a taxa de crescimento do dano devido às deformações de Cosserat e à microexpansão nos microplanos  |
| $\beta_{\varphi_g}^{mic}$                  | Parâmetro do material que representa a taxa de crescimento do dano devido ao gradiente de microexpansão nos microplanos   |
| $\alpha_{\varphi_\gamma}^{mic}$            | Parâmetro do material que representa sua máxima degradação devido às deformações de Cosserat e à microexpansão nos microplanos  |
| $\alpha_{\varphi_g}^{mic}$                 | Parâmetro do material que representa sua máxima degradação devido ao gradiente de microexpansão nos microplanos   |
| $\kappa_0_{\varphi_\gamma}^{mic}$          | Parâmetro do material que representa o valor da deformação equivalente correspondente ao início do processo de dano devido às deformações de Cosserat e à microexpansão nos microplanos |
| $\kappa_0_{\varphi_g}^{mic}$               | Parâmetro do material que representa o valor da deformação equivalente correspondente ao início do processo de dano devido ao gradiente de microexpansão nos microplanos                |
| $d_{\varphi_\gamma}^{mac}$                 | Parâmetro de dano macroscópico relacionado às deformações de Cosserat e à microexpansão   |
| $d_{\varphi_g}^{mac}$                      | Parâmetro de dano macroscópico relacionado ao gradiente de microexpansão  |
| $\eta_{\varphi_\gamma}^{mic} \text{ Simo}$ | Deformação equivalente nos microplanos devida a Simo e Ju (1987) relacionada às deformações de Cosserat e à microexpansão   |

|  |   |
|--|---|
| $\eta_{\varphi_g}^{mic}$ <i>Simo</i>     | Deformação equivalente nos microplanos devida a Simo e Ju (1987) relacionada ao gradiente de microexpansão  |
| $J_{2\varphi_g}$                         | Segundo invariante das deformações macroscópicas desviadoras relacionado ao gradiente de microexpansão  |
| $\eta_{\varphi\gamma}^{mic}$ <i>Vree</i> | Deformação equivalente nos microplanos devida a de Vree et al. (1995) relacionada às deformações de Cosserat e à microexpansão                              |
| $\eta_{\varphi_g}^{mic}$ <i>Vree</i>     | Deformação equivalente nos microplanos devida a de Vree et al. (1995) relacionada ao gradiente de microexpansão   |
| $k'_0, k'_1$                             | Parâmetros necessários para calcular as deformações equivalentes devidas a de Vree et al. (1995) do modelo de microplanos para o contínuo com microexpansão |

## Apêndice A - Exemplos Lineares Analíticos com Contínuos Generalizados

|                |  |
|----------------|--|
| $uc$           | Unidade de comprimento   |
| $uf$           | Unidade de força   |
| $\sigma$       | Tensão   |
| $\mu$          | Tensão-momento   |
| $M_\sigma$     | Momento fletor resultante de uma distribuição linear das tensões $\sigma$        |
| $M_\mu$        | Momento fletor resultante de uma distribuição uniforme das tensões-momento $\mu$ |
| $\bar{\sigma}$ | Tensão máxima  |
| $L$            | Comprimento da peça  |
| $d$            | Altura da seção transversal da viga  |
| $t$            | Largura da seção transversal da viga   |
| $A$            | Área da seção transversal da peça  |
| $\bar{\mu}$    | Tensão-momento constante na altura da viga                                       |
| $u$            | Deslocamentos  |
| $\phi$         | Microrrotações   |
| $r$            | Fator de escala que permite transitar entre os vários níveis de observação       |
| $R$            | Força resultante   |

|                         |  |
|-------------------------|--|
| $P$                     | Força aplicada   |
| $\bar{P}$               | Símbolo matemático que mostra a redução do efeito da carga aplicada nos campos de tensão e de deslocamento |
| $Y_1(y), Y_2(y)$        | Funções resultantes de integrações que dependem da ordenada $y$  |
| $C_1, C_2, K_1, K_2, K$ | Constantes de integração   |
| $\beta$                 | Constante que surge na solução exponencial da equação diferencial  |
| $\bar{\omega}$          | Rotação média da seção transversal   |
| $\omega$                | Rotação da seção transversal   |
| $E^{(1)}$               | Módulo de elasticidade longitudinal do material 1  |
| $E^{(2)}$               | Módulo de elasticidade longitudinal do material 2  |
| $\nu^{(1)}$             | Coefficiente de Poisson do material 1  |
| $\nu^{(2)}$             | Coefficiente de Poisson do material 2  |
| $z^{(1)}$               | Fator de parametrização do material 1  |
| $z^{(2)}$               | Fator de parametrização do material 2  |
| $H^{(1)}, C^{(1)}$      | Parâmetros elásticos do contínuo com microexpansão do material 1   |
| $H^{(2)}, C^{(2)}$      | Parâmetros elásticos do contínuo com microexpansão do material 2   |
| $h, c$                  | Fatores de escala  |
| $L_a^{(1)}$             | Comprimento característico do material à tração do material 1  |
| $L_a^{(2)}$             | Comprimento característico do material à tração do material 2  |
| $A^{(1)}$               | Área da seção transversal da barra composta pelo material 1  |
| $A^{(2)}$               | Área da seção transversal da barra composta pelo material 2  |
| $\psi$                  | Microtensão  |
| $\lambda$               | Microforça   |
| $k_1, k_2, k_3, k_4$    | Constantes de integração   |
| $\rho$                  | Constante que surge na solução exponencial da equação diferencial  |
| $\xi$                   | Fator que determina quais os trechos da barra são compostos pelo material 1 ou 2                           |



## Apêndice B - Metodologia de Obtenção dos Parâmetros dos Modelos Propostos

|                 |  |
|-----------------|--|
| $J_2$           | Segundo invariante das deformações macroscópicas desviadoras                                     |
| $k_0, k_1, k_2$ | Parâmetros necessários para calcular as deformações equivalentes devidas a de Vree et al. (1995) |
| $r$             | Razão entre as resistências à tração e à compressão do material                                  |
| $f_t$           | Resistência do material à tração   |
| $f_c$           | Resistência do material à compressão   |
| $d$             | Parâmetro de dano  |
| $E_s$           | Módulo secante   |
| $E_0$           | Módulo elástico do material  |
| $\sigma$        | Tensão generalizada  |
| $\varepsilon$   | Deformação generalizada  |

# Resumo

Este trabalho refere-se à análise não-linear de meios parcialmente frágeis por meio do Método dos Elementos Finitos, procurando-se definir descrições cinemáticas e estáticas apropriadas para estes meios.

Apontam-se as limitações da teoria do contínuo clássico, bem como as de modelos constitutivos locais, na representação de problemas onde ocorrem localização de deformações. Propõe-se formulações termodinamicamente consistentes que reúnem as vantagens do modelo de Microplanos em considerar o comportamento anisotrópico do material com aquelas dos Contínuos Generalizados, que possuem comprimentos característicos intrínsecos à sua concepção, sendo capazes de descrever materiais cuja microestrutura precisa ser evidenciada para o entendimento do comportamento estrutural.

Inicialmente, o modelo constitutivo de microplanos é formulado para o contínuo de Cosserat e, numa segunda fase, apresenta-se um refinamento do modelo proposto, com a utilização do contínuo com microexpansão.

Discutem-se as implementações dos modelos constitutivos propostos, daqueles tomados como referência e de todos os recursos necessários à completa solução do problema não-linear. Estas implementações são introduzidas no núcleo numérico do sistema computacional **INSANE**, desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas da UFMG, que utiliza a metodologia de programação orientada a objetos.

Simulações numéricas são apresentadas. A análise dos resultados permite discutir a adequação das teorias clássicas e dos modelos propostos.

# Abstract

This work describes the non-linear analysis of the quasi-brittle media through the Finite Elements Method, targeting to define appropriate kinematic and static descriptions to these medias.

The limitations of the classical continuum theory, as well as those of the local constitutive models, on the representation of strain localization problems, are pointed out. In addition, are proposed thermodynamically consistent formulations that gather the advantages of the Microplanes model for considering the material's anisotropic behavior together with the Generalized Continuum, that have intrinsic characteristic lengths, being able to describe materials which need to have its microstructure highlighted for the understanding of the structural behavior.

Initially, the microplane constitutive model is formulated for the Cosserat continuum and, in one second phase, a refinement of the proposed model is presented, with the use of the microstretch continuum.

The implementations of the proposed constitutive model are discussed, as well as of those taken as reference, and also all the necessary tools to the complete solution of the nonlinear problem. These implementations are included in the numerical core of the INSANE computing system, a software developed at the Structures Engineering Department of UFMG, that uses the object-oriented programming approach.

Numerical simulations are presented. The analysis of the results is followed by a discussion of the adequacy of classic theories and proposed models.

# Agradecimentos

A *Deus* por me dar forças para continuar nos momentos mais difíceis, por me iluminar e colocar em meu caminho as oportunidades e pessoas mais especiais, no momento correto e de forma inexplicável.

Aos meus grandes e valiosos *pais*, por confiar que eu seria capaz de chegar aqui, por me oferecer meios para isto e por todo o amor e compreensão em todos os momentos.

Ao *Roque Luiz Pitangueira*, meu orientador, por TUDO, pois não conseguiria enumerar aqui todas as suas qualidades como profissional e como amigo. Obrigada por acreditar em mim, não me deixando desanimar frente aos obstáculos e se mostrando sempre aberto às minhas indagações.

Ao *Marco* pelo amor e infinita compreensão, por me ajudar nos momentos mais difíceis e pelas contribuições dadas na edição desta Tese.

Aos amigos *INSANOS*, pelos momentos de reflexão e descontração, em especial ao amigo *Samuel Silva Penna* por acompanhar a evolução deste trabalho e pela grande ajuda que me ofereceu em todos os momentos em que eu o solicitei.

Aos *professores e funcionários* do Departamento de Engenharia de Estruturas da UFMG, em especial ao Prof. Fernando Amorim de Paula, por ter conseguido auxílio financeiro, tornando possível minha permanência no primeiro ano do doutorado e ao Prof. Gabriel de Oliveira Ribeiro pela atenção em todos os momentos.

Aos *meus irmãos e amigos* que compreenderam minha ausência nos momentos de alegria e dor e a *todos aqueles* que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

À *CAPES* e *FAPEMIG* pelo apoio financeiro.

# Capítulo 1

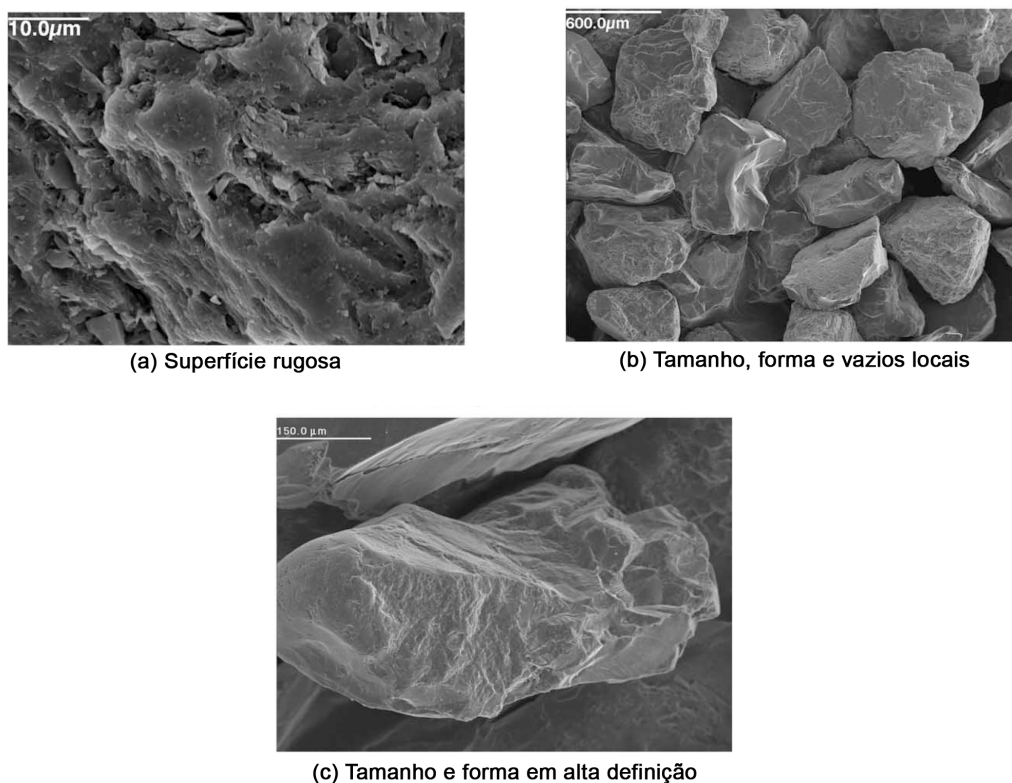
## Introdução

Materiais granulares e heterogêneos, normalmente formados a partir da combinação de diferentes constituintes, têm sido classificados como materiais parcialmente frágeis, devido à natureza de seu fraturamento. Dentre os materiais que fazem parte deste grupo, citam-se: argamassa, concreto simples, concreto armado, concreto com fibras (naturais ou artificiais) e outros geomateriais.

A complexidade do comportamento desses materiais é essencialmente causada pela composição de seus constituintes e por suas propriedades na microescala. A maneira com que a microestrutura do material afeta seu comportamento está, na maioria das vezes, relacionada a não-uniformidade no tamanho, forma e rugosidade de suas partículas, como mostra a figura 1.1, entre outras características adversas.

Em estruturas de materiais parcialmente frágeis, é comum o surgimento de problemas de fissuração, esmagamento, rigidez residual em regiões danificadas, perda de aderência, entre outros. Na análise do comportamento dessas estruturas, geralmente estes materiais são considerados como inicialmente homogêneos, elásticos e isotrópicos, admitindo-se que, com a aplicação de cargas e conseqüentes deformações, os materiais deixam de ser elásticos e isotrópicos e tornam-se heterogêneos, pela ocorrência de dano em tração e compressão nas regiões mais solicitadas. O fenômeno ocorre de tal maneira que, durante o processo de deterioração da estrutura, alguns pontos do domínio apresentam características mecânicas distintas dos demais, observando-se que esta combinação de materiais com características muito diversas

(algumas regiões danificadas junto a outras com as características do material homogêneo inicial) causa efeitos não-lineares pronunciados na resposta da estrutura.



**Figura 1.1:** Microestrutura de um material parcialmente frágil (Voyiadjis et al., 2005)

Em uma análise não-linear, via Método dos Elementos Finitos (MEF), de meios parcialmente frágeis heterogêneos, as hipóteses relativas à obtenção das deformações (descrição cinemática do meio) e aquelas necessárias à obtenção da resposta constitutiva do material (descrição estática do meio) são de importância fundamental. Neste caso, faz-se necessário a concepção de uma teoria constitutiva que permita a formulação de modelos baseados em aspectos relevantes da microestrutura do material.

O estudo de meios parcialmente frágeis, considerando-os como contínuos e homogêneos, tem sido feito pela caracterização de uma dimensão estrutural, suficientemente grande para o tratamento como contínuo e suficientemente pequena para

a ocorrência de “softening” estável — redução da capacidade resistente acompanhada de aumento de deformações —, que é função da natureza heterogênea do material. Tal dimensão é muitas vezes referida como *comprimento característico do material* (Pitangueira, 1998).

A introdução desta dimensão característica na análise com o uso do método dos elementos finitos é devida a Hillerborg et al. (1976), que utilizaram o modelo de fissuras discretas. Baseado em suas proposições, Bazant e Oh (1983) formularam o modelo de dano distribuído com inclusão de parâmetros de Mecânica da Fratura e comprimento característico.

Os modelos de plasticidade com gradientes representam uma outra proposta para inserir um comprimento característico à análise, adicionando gradientes das variáveis de estado à formulação. Nesta aproximação, a função escoamento ou multiplicador plástico depende de derivadas espaciais de segunda ordem da deformação plástica efetiva, que introduz um fator de comprimento (Aifantis, 1984).

A associação das características geométricas da discretização com o comprimento característico do material (Bazant e Oh, 1983; Bazant, 1986) reflete a preocupação em representar a natureza heterogênea do material, quando o mesmo é tratado como contínuo e homogêneo, e modelar de forma satisfatória os fenômenos associados ao tamanho estrutural. Entretanto, esta prática não é recomendada, pois o comprimento característico é uma propriedade do material e não uma grandeza associada ao tamanho dos elementos finitos.

Em lugar da associação entre comprimento característico do material e características geométricas da malha de elementos finitos, uma outra proposta (Pitangueira, 1998) introduz a heterogeneidade do material na análise numérica de estruturas, considerando a aleatoriedade da distribuição das características mecânicas do material no volume estrutural e a associação entre uma dimensão característica e o efeito de escala.

Alguns autores optam pela utilização de um comprimento característico em um

enfoque não-local (Bazant e Lin, 1988). A hipótese central deste enfoque é que a tensão em um ponto não é uma função da deformação neste mesmo ponto, mas uma função das deformações em um determinado volume centrado no referido ponto, cujas dimensões dependem do comprimento característico.

Devido às deficiências do modelo de dano distribuído, mais recentemente o enfoque não-local tem sido usado, juntamente com o *modelo constitutivo de microplanos*, que assume a decomposição do dano em parcelas volumétrica, desviadora e cisalhante (Bazant e Ozbolt, 1990; Bazant et al., 1996; Kuhl et al., 2000). Em lugar de especificar as propriedades constitutivas segundo direções ortogonais como nos modelos ortotrópicos (Valliappan e Doolan, 1972; Hillerborg et al., 1976; Bazant e Oh, 1983), vários pesquisadores (Bazant e Gambarova, 1984; Carol et al., 1992; Ozbolt et al., 2001) têm proposto especificar tais propriedades por meio de relações tensão-deformação admitidas válidas sobre planos de orientação arbitrária no material, os microplanos.

Outros pesquisadores propuseram conjugar descrições estáticas consagradas com *teorias do contínuo generalizado*, que permitem considerar, nas relações constitutivas macroscópicas, o comportamento da microestrutura do material, como por exemplo, os modelos elastoplásticos do contínuo micropolar (ou de Cosserat) (Mühlhaus e Vardoulakis, 1987; Mühlhaus, 1989; de Borst, 1991; Lages, 1997). Nestes modelos, a inclusão do comprimento característico surge naturalmente com a descrição cinemática do contínuo.

## 1.1 Motivação

Os meios parcialmente frágeis, freqüentemente, exibem o fenômeno de amolecimento ou “softening”. A aproximação clássica utilizada para descrever este comportamento consiste, simplesmente, em converter a curva carga-deslocamento, representativa da estrutura, numa curva tensão-deformação, representativa do ponto

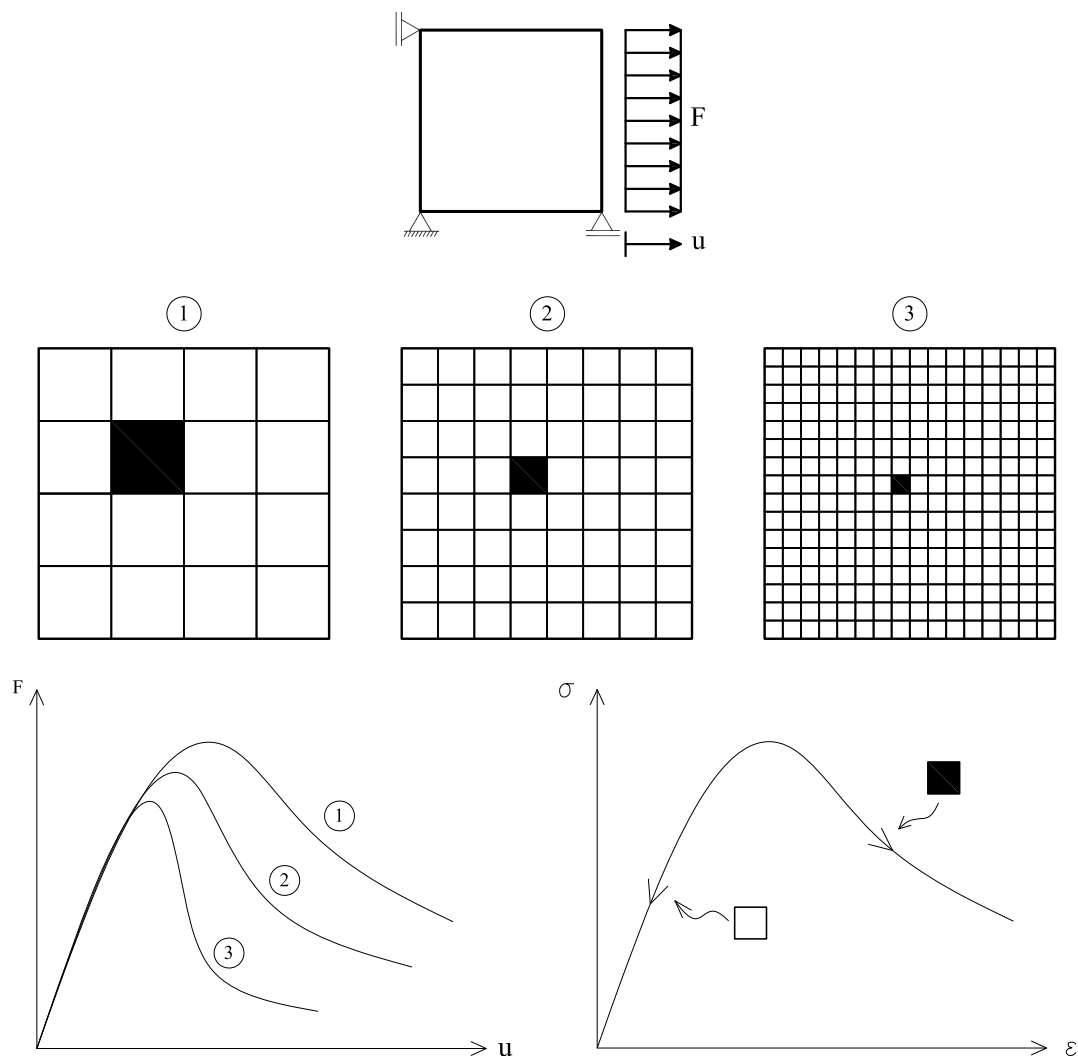


material. Numa análise numérica, constata-se que este procedimento torna o problema de valor de contorno mal formulado, resultando em soluções dependentes do refinamento da malha de elementos finitos (de Borst, 1993). Além disso, para um caso limite de discretização, as deformações tendem a se localizar numa região de volume infinitesimal e a energia dissipada é incorretamente considerada nula (Li e Tang, 2005).

Para compreender este problema denominado *localização de deformações numericamente induzida*, muito freqüente em modelagens numéricas de meios parcialmente frágeis, toma-se um exemplo de tração pura (figura 1.2), cujos resultados obtidos por meio de análise numérica são representados por curvas carga ( $F$ )  $\times$  deslocamentos ( $u$ ) diferentes para cada discretização por elementos finitos adotada, mostrando a ineficiência do modelo numérico utilizado. Isto geralmente ocorre por alguma inconsistência no modelo adotado, de forma que, quanto maior o número de elementos finitos, maior o “erro” introduzido por esta inconsistência, fazendo com que as deformações se localizem em uma determinada região da malha, quando, para este exemplo, elas deveriam ser uniformes. Se estas localizações forem representadas pelas regiões destacadas nas malhas de elementos finitos da figura 1.2, o comportamento dessas regiões é descrito pelo ramo descendente da curva tensão ( $\sigma$ )  $\times$  deformação ( $\varepsilon$ ), enquanto as demais regiões da malha descarregam, conforme mostra a figura 1.2. Isto explica a obtenção de diferentes respostas para cada malha de elementos finitos utilizada, já que, em cada uma delas, a razão entre as dimensões das regiões carregadas e descarregadas é distinta. Esta falta de objetividade da malha pode ser atribuída à utilização do contínuo clássico e/ou de modelos constitutivos locais.

Para simular de maneira correta o fenômeno de localização de deformações, caso este ocorra pela existência de alguma região menos resistente do material, e impedir a ocorrência de localização de deformações numericamente induzida é necessário introduzir algum tipo de mecanismo de regularização na teoria do contínuo clássico.

Uma vez que nestas as tensões e deformações são definidas localmente, seria preciso considerar uma região finita de envolvimento para o ponto do contínuo, definida por meio de uma dimensão característica. Neste sentido, as teorias do contínuo generalizado podem ser utilizadas, destacando-se os contínuos de Cosserat e com Microexpansão.



**Figura 1.2:** Localização de deformações numericamente induzida

A mecânica generalizada de Cosserat tem sido aplicada com êxito na modelagem contínua de problemas referentes a meios com algum tipo de microestruturação intrínseca, tais como materiais granulares de qualquer espécie (Figueiredo e Vargas, 2002). Em problemas que exibem localização de deformações, a objetividade com relação ao tamanho e orientação da malha de elementos finitos pode ser garantida

se a mecânica de Cosserat é também empregada (de Borst, 1993).

O que diferencia a cinemática de Cosserat daquela do contínuo clássico e a torna apropriada à modelagem de tais problemas é a introdução de graus de liberdade rotacionais, independentes dos translacionais clássicos, que levam à existência de tensões-momento (momento por unidade de área) e de microcurvaturas (gradientes das rotações introduzidas) que, quando conjugados energeticamente, possibilitam o aparecimento de parâmetros com dimensão de comprimento nas relações constitutivas. Através destes parâmetros, o contínuo de Cosserat permite contemplar a influência das dimensões e a forma da microestrutura na resposta macroscópica do meio. Contudo, os graus de liberdade rotacionais do contínuo de Cosserat não são ativados em quaisquer situações. Para problemas onde ocorram somente tensões e deformações normais, este contínuo comporta-se como o clássico.

Neste sentido, o contínuo com Microexpansão aparece como uma outra alternativa. Isto porque, além de possuir todas as grandezas cinemáticas e estáticas do contínuo de Cosserat, ele introduz como grau de liberdade uma microexpansão volumétrica, que faz surgir parâmetros com dimensão de comprimento correspondentes aos esforços de tração ou compressão, auxiliando na descrição de alguns fenômenos que o contínuo de Cosserat não consegue descrever.

As descrições macroscópicas podem considerar também o comportamento da resposta anisotrópica do material utilizando-se o conceito de Microplanos, que consiste em vários planos de orientação arbitrária gerados sobre uma esfera com centro no ponto material. Conhecendo-se as deformações de um ponto material, as deformações nestes microplanos podem ser obtidas pela aplicação de uma restrição cinemática ao tensor macroscópico de deformações. Através de relações tensão-deformação, válidas para os microplanos, calculam-se as tensões em cada microplano. Depois de aplicar o Princípio dos Trabalhos Virtuais ou as Leis da Termodinâmica, obtém-se o estado macroscópico de tensões e uma avaliação da degradação da rigidez.

O modelo de microplanos tem sido aplicado na modelagem via MEF, a partir

da descrição cinemática clássica. Assim, a principal motivação deste trabalho é enriquecer a cinemática microscópica da formulação de microplanos, associando-a às teorias do contínuo generalizado.

## 1.2 Objetivos do Trabalho

Esta Tese pretende viabilizar a análise não-linear, via MEF, de meios parcialmente frágeis utilizando descrições cinemática e estática que permitam a inclusão consistente de algum parâmetro dimensional caracterizador da natureza heterogênea do meio. Para tanto, são apresentadas formulações que reúnem as vantagens do modelo constitutivo de microplanos em considerar o comportamento anisotrópico do material com aquelas dos contínuos generalizados, que possuem comprimentos característicos intrínsecos à sua concepção, sendo capazes de descrever materiais cuja microestrutura precisa ser evidenciada para o entendimento do comportamento estrutural.

O objetivo principal deste trabalho é o desenvolvimento de modelos constitutivos que associem a descrição cinemática de contínuos generalizados com a descrição estática do modelo constitutivo de microplanos. Apresentando-se este objetivo de forma detalhada, esta Tese tem como objetivos específicos:

1. Implementar processos incrementais-iterativos para a solução de problemas não-lineares em um programa de elementos finitos;
2. Formular um modelo constitutivo que associe a descrição cinemática de Cosserat à descrição estática de microplanos;
3. Implementar o modelo do item 2 em um programa de elementos finitos;
4. Formular um modelo constitutivo que associe a descrição cinemática do contínuo com Microexpansão à descrição estática de microplanos;
5. Implementar o modelo do item 4 em um programa de elementos finitos;

6. Testar os modelos implementados no que diz respeito à capacidade de descrever trajetórias de equilíbrio de problemas diversos.

### 1.3 Organização do Texto

Este trabalho está organizado em 9 capítulos e 2 apêndices. Os capítulos 2, 3, 4 e 5 constituem a revisão bibliográfica deste trabalho, a qual oferece o suporte necessário para as formulações propostas nesta Tese. No capítulo 2 é detalhada a formulação usada para solução de equações incrementais de equilíbrio, segundo o algoritmo genérico proposto por Yang e Shieh (1990). Discutem-se os métodos de obtenção de trajetórias de equilíbrio com a finalidade de destacar as principais vantagens e desvantagens de cada um. O capítulo 3 trata da teoria do contínuo de Cosserat, apresentando-se as formulações para modelos elásticos, lineares e isotrópicos e para modelos de plasticidade associada, empregando-se o critério de escoamento de von Mises, e ressaltando-se as principais alterações na formulação do MEF para esta teoria. O capítulo 4 apresenta a teoria da elasticidade para o contínuo com Microexpansão, bem como suas particularidades para a formulação do MEF. O capítulo 5 trata do funcionamento do modelo constitutivo de microplanos, que consiste na aplicação da restrição cinemática ao tensor macroscópico de deformações, da obtenção das relações constitutivas nos microplanos e da definição dos tensores de tensão e constitutivo tangente macroscópicos. Como a obtenção destes tensores exige que seja efetuada uma integração sobre uma esfera, neste capítulo é também apresentada uma técnica de integração numérica que usa fórmulas de integração Gaussiana adequadas para a superfície da esfera. São apresentados neste capítulo o *Modelo de Microplanos com Relaxação Cinemática* (Ozbolt et al., 2001) e o *Modelo de Microplanos com Deformação Equivalente* (Leukart e Ramm, 2006), ambos para o contínuo clássico.

No capítulo 6, as formulações para os modelos constitutivos de *Microplanos para*

o *Contínuo de Cosserat* e de *Microplanos para o Contínuo com Microexpansão* são desenvolvidas. Estas formulações baseiam-se em: leis termodinamicamente consistentes, leis constitutivas de dano escalar nos microplanos e deformações equivalentes como grandezas controladoras do processo de degradação do meio. As teorias adotadas para a concepção destes modelos são justificadas nesse capítulo.

O capítulo 7 trata das implementações computacionais realizadas no **INSANE** (*Interactive Structural Analysis Environment*), sistema que utiliza a metodologia de programação orientada a objetos (POO) como técnica de implementação. Esse capítulo inicia-se apresentando uma visão geral do núcleo numérico do **INSANE**, onde as implementações deste trabalho foram realizadas. Em seguida, as expansões feitas no programa são detalhadas abrangendo as soluções das equações não-lineares de equilíbrio com suas estratégias de iteração, a descrição da cinemática de contínuos generalizados, a plasticidade associada para o contínuo de Cosserat, os modelos de microplanos com o contínuo clássico e os modelos de microplanos com os contínuos generalizados (Cosserat e Microexpansão).

No capítulo 8, apresentam-se simulações numéricas relacionadas aos modelos discutidos nesta Tese, tanto os aqui propostos quanto os existentes na literatura. Destacam-se as vantagens do contínuo generalizado em relação ao contínuo clássico, no que se refere à objetividade da malha de elementos finitos e à possibilidade de melhor descrever a extensão da zona de localização de deformações. Ao final desse capítulo, apresenta-se uma discussão dos resultados obtidos.

A apreciação dos resultados das análises feitas permite enumerar algumas conclusões. Estas conclusões, bem como sugestões para futuros trabalhos de pesquisa, são apresentadas no capítulo 9.

No apêndice A, exemplos elásticos lineares são desenvolvidos analiticamente para os contínuos de Cosserat e com Microexpansão. No apêndice B é proposta uma metodologia de obtenção dos parâmetros dos modelos formulados nesta Tese para trabalhos futuros.

## 1.4 Notação

Adota-se o sistema de referência Cartesiano ortogonal e a notação indicial em grande parte do desenvolvimento das equações, valendo-se das regras segundo as quais os índices livres variam de 1 a 3 e os índices repetidos representam somatório. Ao se referir à parte simétrica de um tensor, seus subíndices encontram-se entre parênteses e ao se referir à sua parte anti-simétrica seus subíndices encontram-se entre colchetes. Nas equações matriciais, as letras entre chaves representam vetores e as letras entre colchetes representam matrizes.

Nos capítulos 5 e 6, quando as Leis da Termodinâmica são aplicadas, são utilizadas letras em negrito para designar tensores, exceto os de ordem zero (grandezas escalares). Estes tensores podem ser de primeira, segunda, terceira ou quarta ordem, e são representados por letras sublinhadas, respectivamente, por:  $\underline{\cdot}$ ,  $\underline{\sim}$ ,  $\underline{\approx}$  e  $\underline{\approx}$ . Nestas formulações, as operações se baseiam nos seguintes símbolos:

“ $\times$ ” (produto vetorial entre dois vetores) -  $\underline{\mathbf{A}} \times \underline{\mathbf{B}} = \underline{\mathbf{C}}$  ou  $\epsilon_{ijk}A_jB_k = C_i$

onde  $\epsilon_{ijk}$  é o tensor alternante, dado por

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{para permutação cíclica} \\ -1, & \text{para permutação anticíclica} \\ 0, & \text{para índices repetidos} \end{cases}$$

“ $\cdot$ ” (produto escalar correspondente a uma contração) -  $\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{B}} = \lambda$  ou  $A_iB_i = \lambda$

“ $:$ ” (produto escalar correspondente a duas contrações) -  $\underline{\mathbf{A}} : \underline{\mathbf{B}} = \lambda$  ou  $A_{ij}B_{ij} = \lambda$

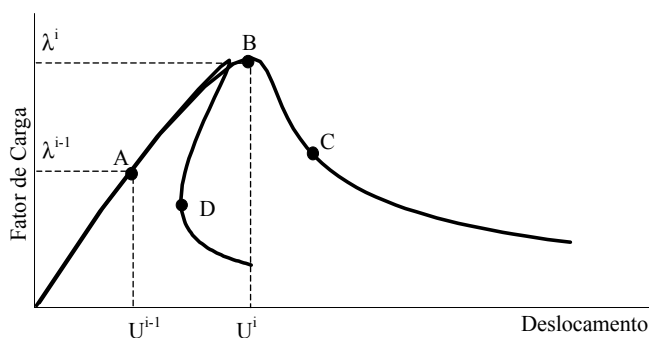
“ $\otimes$ ” (produto de Kronecker) -  $\underline{\mathbf{A}} \otimes \underline{\mathbf{B}} = \underline{\mathbf{S}}$  ou  $A_iB_j = S_{ij}$

# Capítulo 2

## Solução de Equações Não-Lineares de Equilíbrio

### 2.1 Introdução

A representação do comportamento não-linear de estruturas no espaço fator de carga  $\times$  deslocamentos envolve fenômenos de aumento de deslocamentos com decréscimo de cargas ou mesmo decréscimo de deslocamentos com decréscimo de cargas como mostram as trajetórias de equilíbrio da figura 2.1. Para a representação completa de tais trajetórias, os procedimentos numéricos empregados devem ser capazes de detectar a ocorrência de pontos limites de carga (ponto B na figura 2.1) e de pontos limites de deslocamento (ponto D na figura 2.1).



**Figura 2.1:** Trajetórias de equilíbrio típicas em problemas não-lineares

Dado um campo de deslocamentos  $\{U\}$  e um fator de carga proporcional  $\lambda$ ,



equivalentes a um ponto da trajetória de equilíbrio (ponto  $A$  na figura 2.1), deseja-se encontrar outro ponto de equilíbrio (ponto  $B$  na figura 2.1) de modo que a variação de determinadas grandezas do problema no passo incremental (do ponto  $A$  ao ponto  $B$ ) seja controlada.

A seguir, apresenta-se uma revisão histórica e a formulação usada para solução de equações não-lineares de equilíbrio, segundo o algoritmo genérico proposto por Yang e Shieh (1990), juntamente com os métodos clássicos de controle.

## 2.2 Histórico

O Método dos Elementos Finitos é uma poderosa ferramenta para análise física e/ou geometricamente não-linear de estruturas, permitindo a modelagem de diferentes fenômenos. Tal modelagem requer a solução de um conjunto de equações algébricas não-lineares. Vários procedimentos têm sido propostos para obtenção da solução que atenda aos requisitos impostos pelas relações cinemáticas, as condições de equilíbrio e o modelo do material. Estes procedimentos são normalmente denominados métodos de obtenção de trajetórias de equilíbrio.

A fim de obter as referidas trajetórias, normalmente, executa-se um processo incremental-iterativo de tal maneira que uma variável ou um conjunto de variáveis do problema seja controlado. Por este motivo, os métodos também são denominados métodos de controle da análise não-linear.

Diferentes métodos incrementais-iterativos têm sido empregados para análise não-linear de estruturas, destacando-se os métodos de controle de carga, de controle direto de deslocamento, de controle de comprimento de arco e de controle de deslocamento generalizado.

Como as iterações são processadas à carga constante, a utilização do método de controle de carga falha na passagem por pontos limites.

Mesmo utilizando o controle direto de deslocamento (Batoz e Dhat, 1979; Yang e

Shieh, 1990; Yang e Kuo, 1994) não é possível a descrição de trajetórias de equilíbrio pós-crítico, onde ocorra redução de carga acompanhada de redução de deslocamento.

Para solucionar as dificuldades destes métodos, o uso de combinações de deslocamentos e fator de carga, para controlar a trajetória de iteração, tem sido adotado nos métodos de controle de comprimento de arco (Ricks, 1972, 1979; Ramm, 1981; Crisfield, 1981, 1983).

Modificações do método de comprimento de arco consideram somente alguns graus de liberdade, ditos dominantes, na combinação dos deslocamentos incrementais. O método, assim concebido, recebe o nome de método por controle indireto de deslocamentos (de Borst, 1986a). Tal processo tem a deslegância da escolha dos graus de liberdade controladores da análise.

Além dos métodos de comprimento de arco, outros métodos, que também utilizam combinações de deslocamentos e fator de carga, têm sido adotados com êxito na solução de problemas geometricamente não-lineares. Dentre estes métodos podem ser citados o de controle de deslocamento generalizado (Yang e Shieh, 1990), o de controle por trabalho (Yang e McGuire, 1985) e o de controle de resíduo ortogonal (Krenk e Hededal, 1993; Krenk, 1995).

Os métodos de controle mencionados acima (métodos clássicos), em virtude de serem baseados nos valores dos deslocamentos nodais, são ineficientes para descrever trajetórias de equilíbrio de problemas fisicamente não-lineares, particularmente quando da ocorrência de localização de deformações (Fuina, 2004).

Na tentativa de superar essas limitações, o método de controle de deformações baseado nos trabalhos de Chen e Schreyer (1990) e Pitangueira (1998) é proposto por Fuina (2004). Este método possui um embasamento físico que contempla a mecânica do processo de deterioração do material, utilizando uma combinação das deformações em um ou mais pontos do domínio do problema como parâmetro de controle. As combinações representam medidas de deformação tais como: média, invariantes, componentes principais, desviadoras, dentre outras. Os sub-domínios

são caracterizados como agrupamentos de pontos de Gauss, uma vez que no Método dos Elementos Finitos, normalmente, as deformações são obtidas nestes pontos. Tais agrupamentos podem representar: toda a malha, um ou mais elementos ou apenas um ponto de Gauss de determinado elemento. O método apresenta ainda a possibilidade de alterar o sub-domínio de controle (um ponto de Gauss ou um elemento finito) durante a análise. Esta alteração é baseada na investigação da região que experimentou o maior aumento da combinação de controle estabelecida no último passo incremental.

A escolha de grupos de elementos como sub-domínio de controle mostra-se, em geral, mais eficiente que o uso de combinações em toda a malha. Este fato é extremamente relevante se observada a atual preocupação de pesquisadores em formular os métodos clássicos em domínios locais, como nos trabalhos de Yang e Chen (2004) e Yang e Proverbs (2004), onde se propõe o método de comprimento de arco local.

## 2.3 Métodos Incrementais-Iterativos

Numa análise não-linear, confronta-se com o problema de resolver o sistema de  $N+1$  incógnitas ( $N$  deslocamentos incrementais e um incremento no fator de carga) e  $N+1$  equações ( $N$  equações de equilíbrio e uma equação de restrição).

Um processo incremental-iterativo é adotado para solucionar o problema. Para este fim, utiliza-se aqui o método de Newton-Raphson Padrão, o qual pressupõe que a matriz de rigidez tangente é recalculada a cada iteração. Assim, a equação de equilíbrio incremental correspondente a iteração  $\mathbf{j}$  do passo  $\mathbf{i}$  pode ser escrita na forma abaixo:

$$[K]_{j-1}^i \cdot \{\delta U\}_j^i = \delta \lambda_j^i \cdot \{P\} + \{Q\}_{j-1}^i \quad (2.1)$$

onde,

$[K]_{j-1}^i$  é a matriz de rigidez tangente na iteração  $\mathbf{j-1}$  do passo  $\mathbf{i}$ , função do campo de deslocamentos  $\{U\}_{j-1}^i$  ;

$\{\delta U\}_j^i$  é o vetor deslocamentos incrementais da iteração  $j$  do passo  $i$ ;

$\delta\lambda_j^i$  é o incremento do fator de cargas na iteração  $j$  do passo  $i$ ;

$\{P\}$  é o vetor de cargas de referência;

$\{Q\}_{j-1}^i$  é o vetor de forças residuais da iteração  $j-1$  do passo  $i$ .

Inicialmente, estabelece-se, em função do parâmetro de controle, um valor para o incremento do fator de carga  $\delta\lambda_j$ , podendo-se então obter  $\{\delta U\}_j$ , o qual pode ser decomposto nas parcelas associadas à carga de referência,  $\{\delta U\}_j^P$ , e à carga residual  $\{\delta U\}_j^Q$ , na forma:

$$\{\delta U\}_j = \delta\lambda_j \cdot \{\delta U\}_j^P + \{\delta U\}_j^Q \quad (2.2)$$

com

$$[K]_{j-1} \cdot \{\delta U\}_j^P = \{P\} \quad (2.3)$$

e

$$[K]_{j-1} \cdot \{\delta U\}_j^Q = \{Q\}_{j-1} \quad (2.4)$$

Ao final de cada iteração, a convergência é verificada por meio da magnitude do vetor de forças residuais  $\{Q\}_j$  e/ou da magnitude do vetor de deslocamentos iterativos  $\{\delta U\}_j$  e o processo iterativo continua até que determinado critério de convergência seja atendido. Se uma nova iteração for necessária, após calculados  $\{\delta U\}_j^P$  e  $\{\delta U\}_j^Q$  utilizando-se as equações 2.3 e 2.4, o valor de  $\delta\lambda_j$  deve ser obtido com uma equação de restrição que envolve combinações das grandezas do problema.

A atualização das variáveis é feita da seguinte forma:

$$\lambda_j = \lambda_{j-1} + \delta\lambda_j \quad (2.5)$$

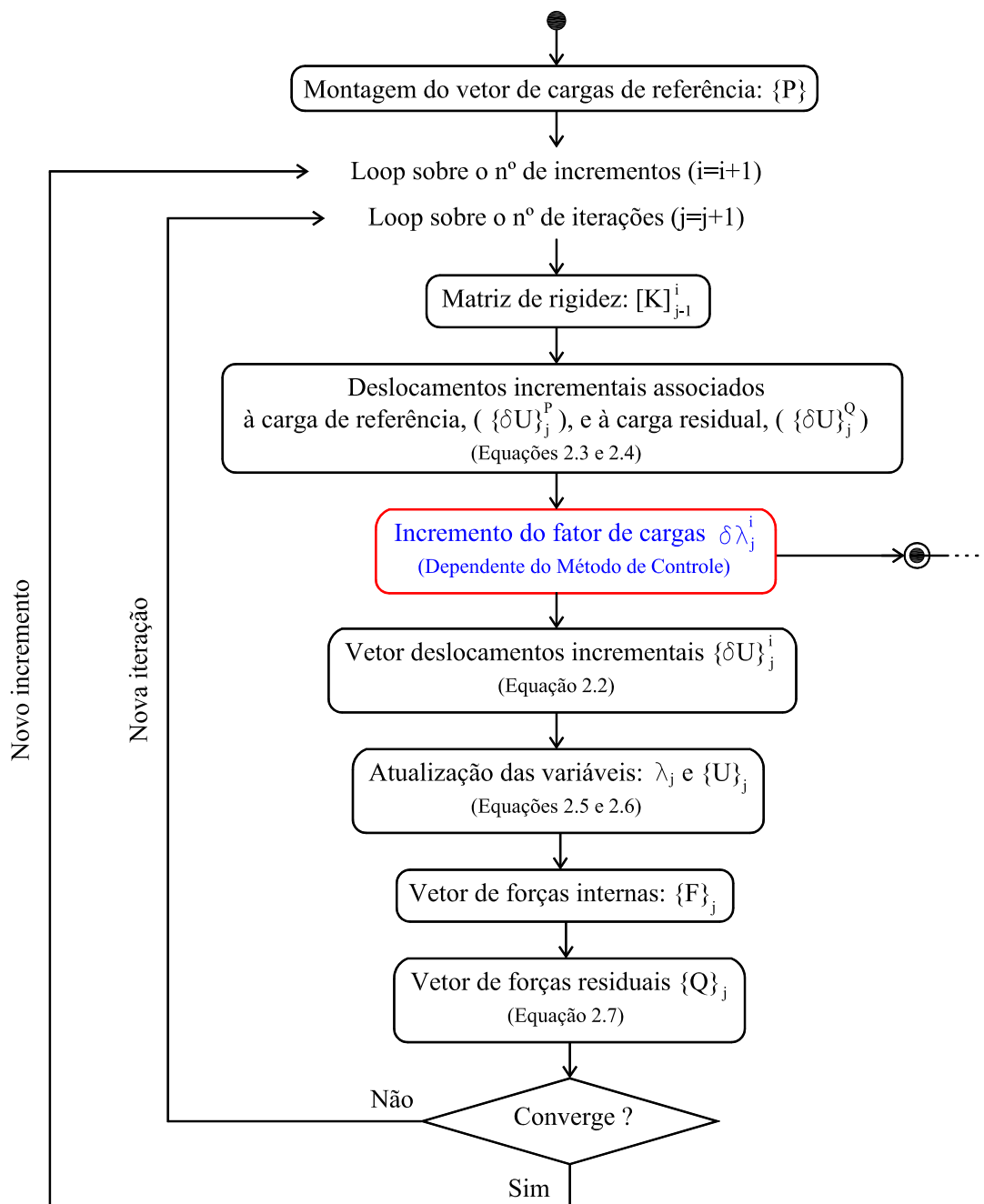
$$\{U\}_j = \{U\}_{j-1} + \{\delta U\}_j \quad (2.6)$$

O vetor de cargas residuais da iteração  $j$  é dado por:

$$\{Q\}_j = \lambda_j \cdot \{P\} - \{F\}_j \quad (2.7)$$

onde  $\{F\}_j$  é o vetor de forças equivalentes às tensões internas ao final da iteração  $j$ . Observa-se que, na primeira iteração de cada passo, o vetor de cargas residuais ( $\{Q\}_{j-1}$ ) é nulo.

O diagrama de atividades da figura 2.2 mostra os principais passos do algoritmo genérico proposto por Yang e Shieh (1990).



**Figura 2.2:** Diagrama de atividades do algoritmo genérico para métodos de controle

Pode-se observar que o diagrama de atividades da figura 2.2 possui um procedimento em destaque. Este refere-se à obtenção do parâmetro de carga  $\delta\lambda_j^i$ , que depende do método de controle adotado.

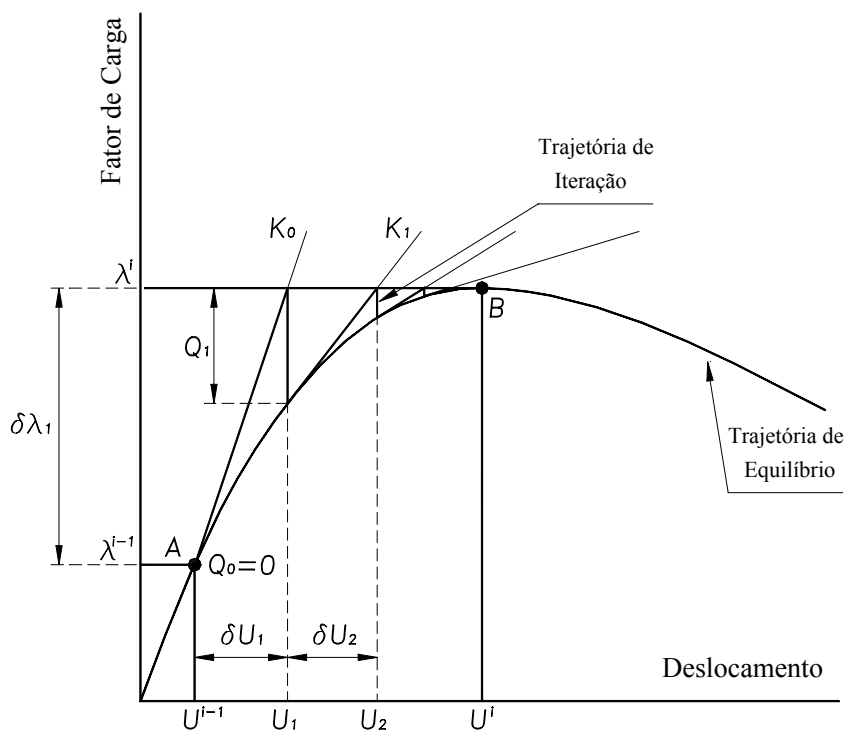
A formulação acima descrita é bastante genérica e se aplica a vários métodos de controle, bastando que se redefina a equação de restrição. Entretanto, dentre aqueles apresentados a seguir, o método de controle de resíduo ortogonal exige pequenas modificações neste algoritmo.

### 2.3.1 Controle de Carga

Neste método a carga externa é incrementada de um valor constante somente na primeira iteração ( $j = 1$ ) de cada passo. Para as demais iterações ( $j > 1$ ), o incremento de carga é feito igual a zero, implicando em um carregamento externo sempre constante. Assim a variável  $\delta\lambda_j$  pode ser obtida por

$$\delta\lambda_j = \begin{cases} \text{Constante}, & \text{para } j=1 \\ 0, & \text{para } j>1 \end{cases} \quad (2.8)$$

A figura 2.3 mostra um esquema do processo iterativo deste método.



**Figura 2.3:** Processo incremental-iterativo com controle de carga

Quando a carga externa ultrapassa o valor correspondente ao ponto limite (ponto  $B$  na figura 2.3), a linha horizontal que controla a trajetória de iteração nunca cruza a trajetória de equilíbrio e nenhum ponto de convergência pode ser obtido. Evidentemente, uma instabilidade numérica deve ocorrer próximo aos pontos limites.

### 2.3.2 Controle Direto de Deslocamento

Este método (Batoz e Dhat, 1979) supõe que as iterações são processadas a um deslocamento constante. Uma componente ( $k$ ) do vetor de deslocamentos é escolhida como o parâmetro de controle. Se  $\delta U_j^k$  é o incremento de deslocamento para a componente  $k$ , a equação de restrição para este método é

$$\delta U_j^k = \begin{cases} \text{Constante}, & \text{para } j=1 \\ 0, & \text{para } j>1 \end{cases} \quad (2.9)$$

Tomando a equação  $\{\delta U\}_j = \delta \lambda_j \cdot \{\delta U\}_j^P + \{\delta U\}_j^Q$  e substituindo o vetor de deslocamentos incrementais por sua componente  $k$ , escolhida para controlar o processo, tem-se:

$$\delta \lambda_j = \frac{\delta U_j^k - \delta U_j^{Qk}}{\delta U_j^{Pk}} \quad (2.10)$$

O vetor de cargas residuais ( $\{Q\}_{j-1}$ ) é nulo para a primeira iteração de cada passo, de modo que os deslocamentos a ele associados ( $\{\delta U\}_j^Q$ ) também são nulos, conforme a equação 2.4. Dessa forma, a equação 2.10, para a primeira iteração, torna-se

$$\delta \lambda_j = \frac{\delta U_j^k}{\delta U_j^{Pk}}, \quad \text{para } j = 1 \quad (2.11)$$

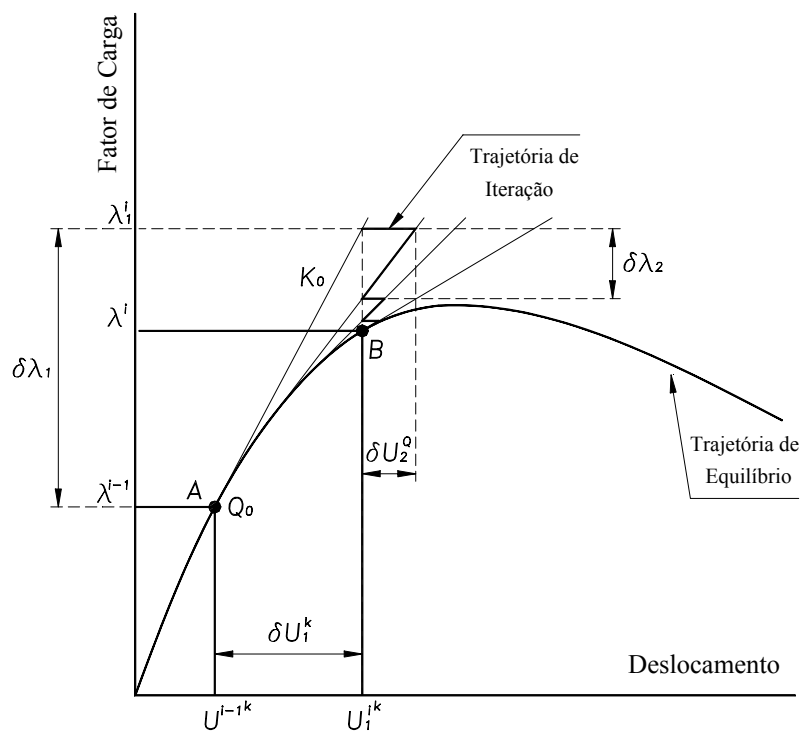
Como nas demais iterações ( $j > 1$ )  $\delta U_j^k$  é nulo, o incremento nas cargas proporcionais é

$$\delta \lambda_j = -\frac{\delta U_j^{Qk}}{\delta U_j^{Pk}}, \quad \text{para } j > 1 \quad (2.12)$$

O método de controle direto de deslocamento requer do analista o conhecimento aproximado da estrutura a ser analisada, para que possa escolher adequadamente o grau de liberdade a ser usado para o controle, o que pode não ser uma

grande desvantagem, uma vez que permite que a experiência do analista contribua para resolver o problema.

A figura 2.4 ilustra o procedimento iterativo deste método e através dela percebe-se que, da mesma forma que o método de controle de carga não permite a passagem por pontos limites de carga, o controle direto de deslocamento é ineficiente se o deslocamento de controle experimenta diminuição (“snap-back”) de um nível de carga para outro. Isto se deve ao fato da trajetória de iteração, controlada por uma linha vertical, nunca cruzar a trajetória de equilíbrio.



**Figura 2.4:** Processo incremental-iterativo com controle direto de deslocamento

Apesar das limitações dos métodos de controle de carga e de deslocamento, estes métodos passaram a constituir um padrão para o desenvolvimento de outros métodos mais gerais e eficazes, nos quais combinam-se deslocamentos e fator de carga. Apresentam-se alguns destes métodos a seguir.





O vetor de deslocamentos incrementais para a primeira iteração pode ser obtido da equação 2.2 como

$$\{\delta U\}_1 = \delta\lambda_1 \cdot \{\delta U\}_1^P. \quad (2.14)$$

O vetor de deslocamentos incrementais acumulados é dado por

$$\{\Delta U\}_j = \{\Delta U\}_{j-1} + \{\delta U\}_j. \quad (2.15)$$

Então, a equação 2.14 pode ser escrita na forma

$$\{\Delta U\}_1 = \delta\lambda_1 \cdot \{\delta U\}_1^P, \quad (2.16)$$

uma vez que  $\{\Delta U\}$  é nulo no início do passo.

Substituindo o resultado de 2.14 na equação 2.13, obtém-se o fator de carga proporcional para a primeira iteração como

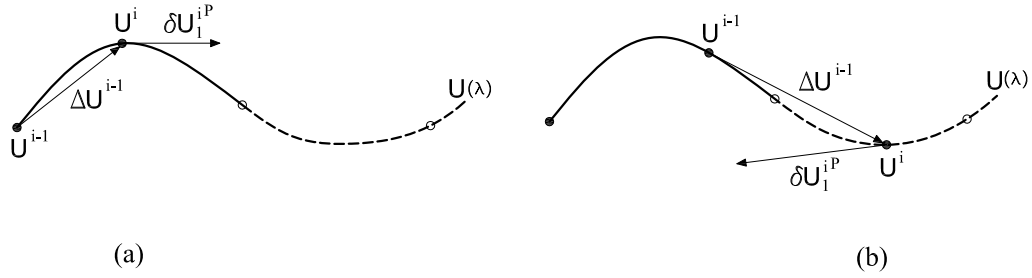
$$\delta\lambda_1 = \pm \frac{\Delta S}{\sqrt{\{\delta U\}_1^{PT} \cdot \{\delta U\}_1^P + 1.0}}, \quad \text{para } j = 1 \quad (2.17)$$

Como pode-se perceber, o sinal do fator de carga é indeterminado, portanto, outras informações precisam ser adicionadas ao processo. Dessa forma, é comum o uso dos pivots da matriz de rigidez para definir-se sobre o incremento ou decréscimo das cargas externas, uma vez que estes servem como indicadores da mudança da positividade da referida matriz.

Apesar do pivoteamento da matriz de rigidez ser uma alternativa muito utilizada para a escolha correta do sinal do fator de carga, em algumas situações, onde ocorrem mudanças acentuadas na direção da trajetória de equilíbrio, o sinal escolhido pode não resultar na correta descrição da trajetória. Então, um outro método para a escolha do sinal foi proposto por Feng et al. (1996), que estabeleceu um critério no qual o sinal do fator de carga da primeira iteração de qualquer passo incremental coincide com o sinal do produto interno entre o deslocamento incremental convergido no passo anterior,  $\{\Delta U\}^{i-1}$ , e o deslocamento da primeira iteração do passo atual devido à carga de referência,  $\{\delta U\}_1^P$ . Assim,

$$\text{sin}(\delta\lambda_1^i) = \text{sin}(\{\Delta U\}^{i-1} \cdot \{\delta U\}_1^P) \quad (2.18)$$

Neste critério, o valor de  $\{\Delta U\}^{i-1}$  traz informações do histórico da trajetória de equilíbrio atual. Dessa forma, o sinal positivo do produto  $\{\Delta U\}^{i-1} \cdot \{\delta U\}_1^{iP}$  indica que o fator de carga está crescendo e, portanto, deve assumir valor positivo (figura 2.6(a)). O sinal negativo indica que o fator de carga está decrescendo e, portanto, deve assumir valor negativo (figura 2.6(b)).



**Figura 2.6:** Direção da trajetória de equilíbrio

O método de comprimento de arco geralmente é utilizado desprezando-se a unidade em presença do produto escalar entre os vetores de deslocamentos no denominador da equação 2.17, pois este não possui unidades físicas consistentes, resultando em

$$\delta \lambda_1 = \pm \frac{\Delta S}{\sqrt{\{\delta U\}_1^{PT} \cdot \{\delta U\}_1^P}}, \quad \text{para } j = 1 \quad (2.19)$$

Através da equação acima pode-se definir o ponto inicial da trajetória de iteração, que deve ser percorrida ( $j > 1$ ) impondo-se restrições à sua forma. Assim, algumas possibilidades para o método de comprimento de arco são apresentadas a seguir.

### 2.3.3.1 Trajetória de Iteração Ortogonal à Tangente Inicial

Este método atribuído à Ricks (1972, 1979) mantém a trajetória de iteração sempre ortogonal à tangente inicial em cada passo. Portanto, o produto escalar dos vetores  $(\{\Delta U\}_1, \Delta \lambda_1)$  e  $(\{\delta U\}_j, \delta \lambda_j)$  deve se anular, ou seja (ver figura 2.7).

$$(\{\Delta U\}_1, \Delta \lambda_1) \cdot (\{\delta U\}_j, \delta \lambda_j) = 0. \quad (2.20)$$



### 2.3.3.2 Trajetória de Iteração Ortogonal à Tangente da Iteração Anterior

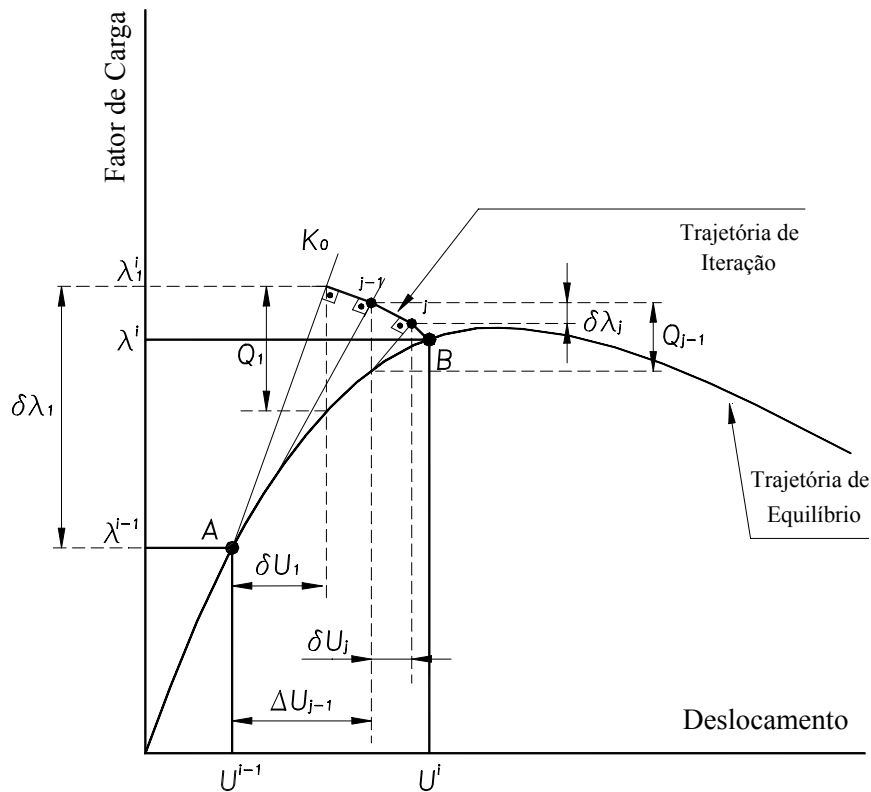
Este método proposto por Ramm (1981) mantém a trajetória de iteração ortogonal à tangente da iteração anterior. Portanto, tem-se nulo o produto escalar (ver figura 2.8).

$$(\{\Delta U\}_{j-1}, \Delta \lambda_{j-1}) \cdot (\{\delta U\}_j, \delta \lambda_j) = 0 \quad (2.25)$$

Desenvolvendo 2.25, substituindo  $\{\delta U\}_j$  pela expressão dada em 2.2 e adotando a mesma simplificação anterior, obtém-se

$$\delta \lambda_j = -\frac{\{\Delta U\}_{j-1}^T \cdot \{\delta U\}_j^Q}{\{\Delta U\}_{j-1}^T \cdot \{\delta U\}_j^P}, \quad \text{para } j > 1 \quad (2.26)$$

A figura 2.8 mostra o procedimento.

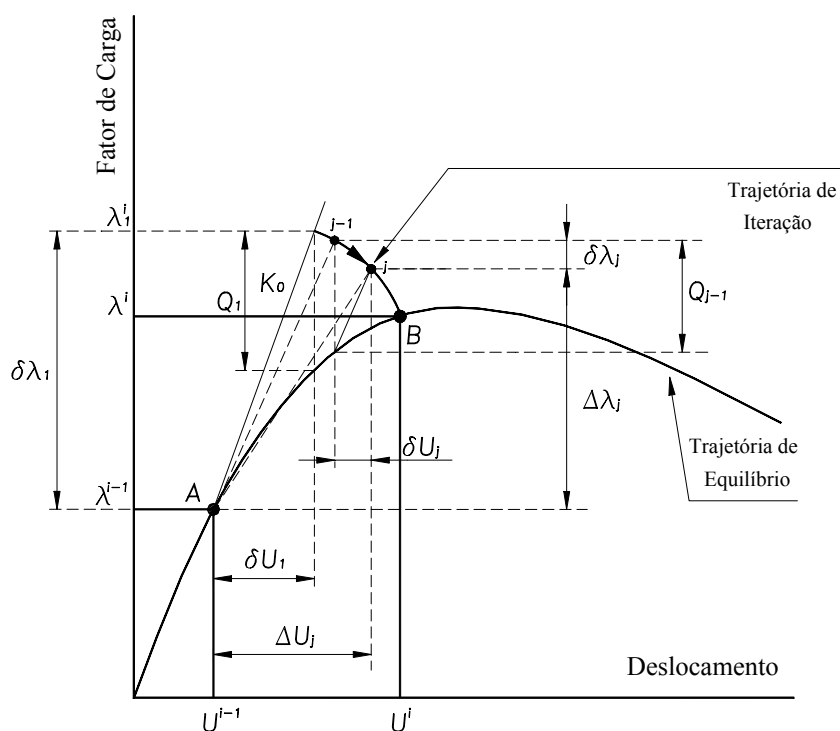


**Figura 2.8:** Comprimento de arco com trajetória de iteração ortogonal à tangente anterior

### 2.3.3.3 Trajetória Cilíndrica

Este método, proposto por Crisfield (1981, 1983), controla a norma dos deslocamentos incrementais dada por

$$\{\Delta U\}_j^T \cdot \{\Delta U\}_j = \Delta S^2 \quad (2.27)$$



**Figura 2.9:** Comprimento de arco com trajetória de iteração cilíndrica

A substituição de  $\{\delta U\}_j$  pela expressão dada em 2.2 na equação 2.15 e do resultado na equação 2.27, leva a uma equação de segundo grau que permite obter a incógnita  $\delta \lambda_j$ . A escolha da raiz da referida equação de segundo grau, a ser adotada, é feita baseando-se no ângulo formado entre os vetores de deslocamentos incrementais das últimas iterações ( $\{\Delta U\}_{j-1}$  e  $\{\Delta U\}_j$ ) e na proximidade da raiz com a solução linear da equação de segundo grau (Crisfield, 1981).

### 2.3.4 Controle de Deslocamento Generalizado

Este método, proposto por Yang e Shieh (1990), tem como objetivo automatizar o ajuste do tamanho do passo incremental, pelo acompanhamento da variação da rigidez, e a troca do sinal do incremento de carga proporcional na ocorrência de pontos limites. Assim, os autores propuseram relacionar deslocamentos incrementais em dois passos sucessivos, utilizando-se a seguinte expressão para o fator de carga proporcional.

$$\delta\lambda_j = \frac{H_j - \delta\lambda_1 \cdot \{\delta U\}_1^{P,i-1T} \cdot \{\delta U\}_j^{Q,i}}{\delta\lambda_1 \cdot \{\delta U\}_1^{P,i-1T} \cdot \{\delta U\}_j^{P,i}}, \quad (2.28)$$

onde  $\{\delta U\}_1^{P,i-1}$  é o incremento de deslocamento resultante da primeira iteração do último passo incremental e  $H_j$  pode ser interpretado como um deslocamento generalizado.

Uma vez que  $\{\delta U\}_j^Q$  é nulo para a primeira iteração ( $j = 1$ ), tem-se

$$\delta\lambda_1 = \left( \frac{H_1}{\{\delta U\}_1^{P,i-1T} \cdot \{\delta U\}_1^{P,i}} \right)^{0,5}, \quad \text{para } j = 1 \quad (2.29)$$

Para as demais iterações,  $H_j$  deve se anular para garantir o controle estabelecido na primeira iteração. Assim, da equação 2.28 tem-se

$$\delta\lambda_j = - \frac{\{\delta U\}_1^{P,i-1T} \cdot \{\delta U\}_j^{Q,i}}{\{\delta U\}_1^{P,i-1T} \cdot \{\delta U\}_j^{P,i}}, \quad \text{para } j > 1 \quad (2.30)$$

Para o primeiro passo incremental, toma-se  $\{\delta U\}_1^{P,0} = \{\delta U\}_1^{P,1}$  e substituindo em 2.29 obtém-se

$$H_1 = (\delta\lambda_1^1)^2 \{\delta U\}_1^{P,1T} \cdot \{\delta U\}_1^{P,1} \quad (2.31)$$

O incremento do fator de carga proporcional para a primeira iteração de um passo genérico é obtido substituindo-se 2.31 em 2.29

$$\delta\lambda_1 = \delta\lambda_1^1 \left( \frac{\{\delta U\}_1^{P,1T} \cdot \{\delta U\}_1^{P,1}}{\{\delta U\}_1^{P,i-1T} \cdot \{\delta U\}_1^{P,i}} \right)^{0,5}, \quad \text{para } j = 1 \quad (2.32)$$

O termo entre parênteses em 2.32 é definido pelos autores como um parâmetro de rigidez generalizado (GSP), de modo que o incremento no fator de carga, para a

primeira iteração de um passo genérico pode ser escrito como

$$\delta\lambda_1 = \pm\delta\lambda_1^1 \|GSP\|^{0,5} \quad (2.33)$$

O GSP, como definido acima, possui várias características importantes:

1. O numerador e o denominador da expressão do parâmetro de rigidez generalizado representam, respectivamente, os deslocamentos no primeiro passo e, aproximadamente, os deslocamentos no passo corrente. Assim, o GSP é representativo da variação da rigidez da estrutura e seu uso torna automático o ajuste do tamanho do passo incremental;
2. O valor do GSP é negativo somente próximo de pontos limites, pois seu sinal depende somente do produto escalar  $\{\delta U\}_1^{P,i-1T} \cdot \{\delta U\}_j^{P,i}$ . Assim, o parâmetro, por si só, fornece a indicação da mudança no sinal do incremento de carga.

### 2.3.5 Controle por Trabalho

O método de controle por trabalho proposto por Yang e McGuire (1985) se baseia na seguinte equação de restrição

$$\{\delta U\}_j^T (\delta\lambda_j \{P\}) = \Delta W \quad (2.34)$$

onde o incremento de trabalho  $\Delta W$  é definido como

$$\Delta W = \begin{cases} \text{Constante,} & \text{para } j=1 \\ 0, & \text{para } j>1 \end{cases} \quad (2.35)$$

Para a primeira iteração ( $j = 1$ ), o incremento no fator de carga  $\delta\lambda_1$  é determinado com base no incremento de trabalho constante  $\Delta W$ .

Desde que  $\{Q\}_{j-1} = \{0\}$  e  $\{\delta U\}_1^Q = \{0\}$  para  $j = 1$ , pode-se utilizar a equação 2.14 ( $\{\delta U\}_1 = \delta\lambda_1 \cdot \{\delta U\}_1^P$ ), substituindo-a na equação 2.34 para obter o incremento do fator de carga  $\delta\lambda_1$

$$\delta\lambda_1 = \pm \sqrt{\frac{\Delta W}{\{\delta U\}_1^{PT} \cdot \{P\}}}, \quad \text{para } j = 1 \quad (2.36)$$



Observa-se que, assim como no controle de comprimento de arco, a equação acima possui um sinal indeterminado e, novamente, faz-se o uso dos pivots da matriz de rigidez para definir-se sobre o incremento ou decremento das cargas externas.

Para as demais iterações ( $j > 1$ ) o incremento de trabalho é feito nulo. Portanto,

$$\{\delta U\}_j^T (\delta \lambda_j \{P\}) = 0 \quad (2.37)$$

Substituindo a equação 2.2 na equação 2.37, tem-se

$$\delta \lambda_j = -\frac{\{\delta U\}_j^{Q^T} \cdot \{P\}}{\{\delta U\}_j^{P^T} \cdot \{P\}}, \quad \text{para } j > 1 \quad (2.38)$$

### 2.3.6 Controle de Resíduo Ortogonal

No controle de resíduo ortogonal, proposto por Krenk e Hededal (1993) e Krenk (1995), o fator de carga para a primeira iteração ( $\Delta \lambda_1 = \delta \lambda_1$ ) de cada passo é incrementado de um valor constante e o vetor deslocamentos incrementais é obtido pela seguinte equação

$$[K]_0 \cdot \{\Delta U\}_1 = \delta \lambda_1 \cdot \{P\} \quad (2.39)$$

Nas demais iterações ( $j > 1$ ), o nível de carga é ajustado por um fator ( $\xi$ ). Este fator oferece um melhor ajuste das forças internas, de modo que o vetor de forças residuais é escrito na forma

$$\{Q\}_j = \{\tilde{Q}\}_j + \xi_j \cdot (\delta \lambda_1 \cdot \{P\}) \quad (2.40)$$

onde  $\{\tilde{Q}\}$  é dado por  $\{\tilde{Q}\}_j = \lambda_j \cdot \{P\} - \{F\}_j$  (ver equação 2.7).

Uma vez que o vetor de forças residuais não é nulo em problemas não-lineares, este induzirá a deslocamentos adicionais. A magnitude do deslocamento incremental será então aumentada ou diminuída de acordo com o sinal do produto  $\{Q\}_j^T \cdot \{\Delta U\}_j$ , isto é, o sinal da projeção da força residual na direção do deslocamento incremental corrente. A escolha do deslocamento incremental corrente é, então, otimizada sob a seguinte condição:

$$\{Q\}_j^T \cdot \{\Delta U\}_j = 0 \quad (2.41)$$

Substituindo a força residual da equação 2.40 na condição de ortogonalidade anterior, chega-se ao fator de escala ( $\xi$ ):

$$\xi_j = -\frac{\{\tilde{Q}\}_j^T \cdot \{\Delta U\}_j}{\delta\lambda_1 \{P\} \cdot \{\Delta U\}_j} \quad (2.42)$$

Uma vez determinado o fator ( $\xi$ ) pode-se obter o vetor das forças residuais  $\{Q\}$  pela equação 2.40. Conhecendo este vetor, avaliam-se os deslocamentos iterativos utilizando-se a seguinte expressão:

$$[K]_{j-1} \cdot \{\delta U\}_j = \{Q\}_j \quad (2.43)$$

A expressão para o cálculo do incremento de carga para as iterações  $j > 1$  é a seguinte:

$$\delta\lambda_j = \delta\lambda_1 \cdot \left( -\frac{\{\tilde{Q}\}_j^T \cdot \{\Delta U\}_j}{\delta\lambda_1 \{P\}^T \cdot \{\Delta U\}_j} \right) \quad (2.44)$$

ou

$$\delta\lambda_j = \delta\lambda_1 \cdot \xi_j \quad (2.45)$$

No final de cada iteração, atualizam-se os incrementos de deslocamento e o fator de carga, respectivamente, utilizando-se as equações

$$\{\Delta U\}_j = \{\Delta U\}_{j-1} + \{\delta U\}_j \quad (2.46)$$

$$\lambda_j = \lambda_{j-1} + \xi_j \Delta\lambda_1 \quad (2.47)$$

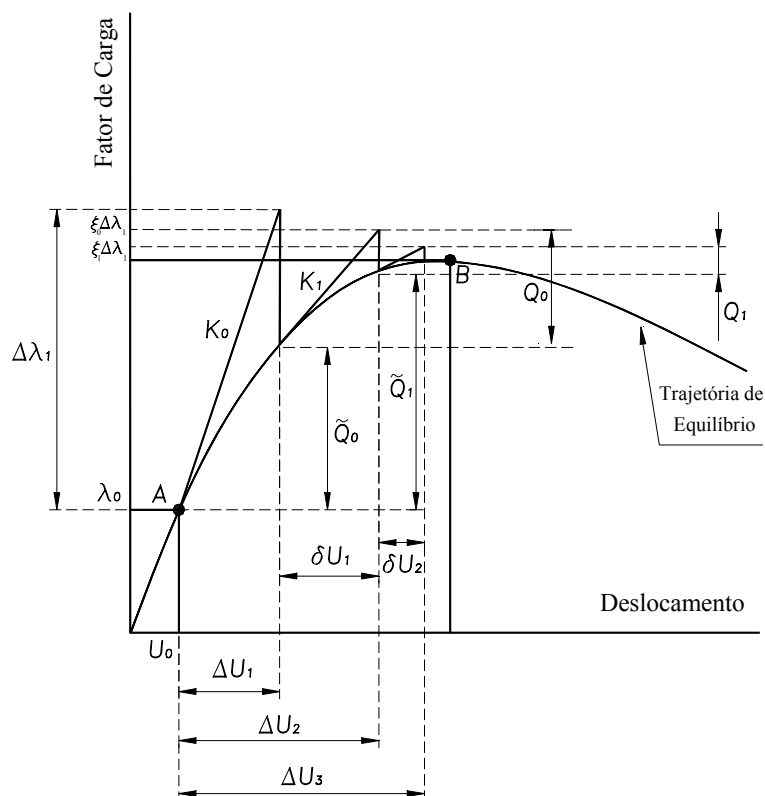
Entretanto, alguns testes devem ser realizados durante a implementação deste algoritmo. A seguir, estes testes são apresentados com suas respectivas justificativas:

1. Se  $\|\Delta U_1\| > U_{max}$  então  $\Delta U_1 = \frac{U_{max}}{\|\Delta U_1\|} \Delta U_1$ , pois próximo aos pontos limites a rigidez pode ser muito pequena e, assim, é conveniente impor um limite máximo à magnitude do incremento de deslocamento;
2. Se  $\Delta U_0^T \cdot \Delta U_1 < 0$  então  $\Delta U_1 = -\Delta U_1$  e  $\Delta\lambda_1 = -\Delta\lambda_1$ , onde  $\Delta U_0 = \Delta U_j$  no fim de cada passo. Assim, assegura-se que a trajetória de equilíbrio será percorrida corretamente mesmo se houver uma reversão do deslocamento;

3. Se  $\|\delta U_j\| > U_{max}$  então  $\delta U_j = \frac{U_{max}}{\|\delta U_j\|} \delta U_j$ , novamente evita-se que a rigidez muito pequena divirja o processo.

Os itens 1 e 3 são semelhantes ao uso dos pivots da matriz de rigidez mencionado no controle de comprimento de arco e no controle por trabalho.

A figura 2.10 mostra o procedimento.



**Figura 2.10:** Processo incremental-iterativo com controle de resíduo ortogonal

### 2.3.7 Resumo

A figura 2.11 mostra um detalhamento da parte destacada no diagrama de atividades da figura 2.2. O detalhamento refere-se aos parâmetros de carga obtidos para cada método de controle nas iterações  $j = 1$  e  $j > 1$ .

⋮  
●  
↓

| MÉTODOS DE CONTROLE                   | $\delta\lambda$ para $j=1$   | $\delta\lambda$ para $j>1$   |
|---------------------------------------|--|--|
| Controle de Carga                     | $\delta\lambda_1 = \text{constante}$   | $\delta\lambda_j = 0$  |
| Controle Direto de Deslocamento       | $\delta\lambda_1 = \frac{\delta U_1^k}{\delta U_1^{p^k}}$  | $\delta\lambda_j = -\frac{\delta U_j^{Q^k}}{\delta U_j^{p^k}}$   |
| Controle de Comprimento de Arco       | $\delta\lambda_1 = \pm \frac{\Delta S}{\sqrt{\{\delta U\}_1^{p^T} \cdot \{\delta U\}_1^p}}$  | Trajectoria de iteração ortogonal à tangente inicial:<br>$\delta\lambda_j = -\frac{\{\Delta U\}_1^T \cdot \{\delta U\}_j^Q}{\{\Delta U\}_1^T \cdot \{\delta U\}_j^P}$                      |
|                                       |  | Trajectoria de iteração ortogonal à tangente da iteração anterior:<br>$\delta\lambda_j = -\frac{\{\Delta U\}_{j-1}^T \cdot \{\delta U\}_j^Q}{\{\Delta U\}_{j-1}^T \cdot \{\delta U\}_j^P}$ |
|                                       |  | Trajectoria cilíndrica: equação do 2º grau que permite obter $\delta\lambda_j$ ( ver item 2.3.3.3 ).   |
| Controle de Deslocamento Generalizado | $\delta\lambda_1 = \delta\lambda_1^i \left( \frac{\{\delta U\}_1^{p,i^T} \cdot \{\delta U\}_1^{p,i}}{\{\delta U\}_1^{p,i-1^T} \cdot \{\delta U\}_1^{p,i}} \right)^{0,5}$ | $\delta\lambda_j = -\frac{\{\delta U\}_1^{p,i-1^T} \cdot \{\delta U\}_j^{Q,i}}{\{\delta U\}_1^{p,i-1^T} \cdot \{\delta U\}_j^{p,i}}$   |
| Controle por Trabalho                 | $\delta\lambda_1 = \pm \sqrt{\frac{\Delta W}{\{\delta U\}_1^{p^T} \{P\}}}$   | $\delta\lambda_j = -\frac{\{\delta U\}_j^{Q^T} \{P\}}{\{\delta U\}_j^{p^T} \{P\}}$   |
| Método do Resíduo Ortogonal           | $\delta\lambda_1 = \pm \text{constante}$   | $\delta\lambda_j = \delta\lambda_1 \left( -\frac{\{\tilde{Q}\}_j^T \cdot \{\Delta U\}_j}{\delta\lambda_1 \{P\}^T \cdot \{\Delta U\}_j} \right)$  |

Figura 2.11: Detalhamento do diagrama de atividades da figura 2.2

# Capítulo 3

## Contínuo de Cosserat

### 3.1 Introdução

Segundo a teoria de Cosserat, não somente forças, mas também momentos podem ser transmitidos por uma superfície elementar. Similar ao tensor de deformação convencional (definido como o gradiente do vetor deslocamento), que é conjugado ao tensor de tensão, o gradiente do vetor das microrrotações é definido como o tensor de microcurvatura, que está relacionado por uma relação constitutiva ao tensor de tensão-momento. As relações tensão-deformação para os termos das tensões normais permanecem essencialmente as mesmas como no caso de um meio elástico convencional, mas para as tensões cisalhantes são diferentes, incluindo as microrrotações, que por sua vez, são diferentes das macrorrotações do contínuo clássico. Em geral, ambos os tensores de tensão e tensão-momento são não-simétricos. Neste capítulo, após um breve histórico, o contínuo de Cosserat é descrito para um meio elástico, linear e isotrópico. Em seguida, uma formulação de plasticidade associada para descrever o comportamento não-linear do contínuo de Cosserat é apresentada, permitindo-se compreender o tratamento da não-linearidade para este contínuo. Ao final, são apresentadas matrizes e vetores resultantes da discretização deste contínuo utilizando-se o Método dos Elementos Finitos (MEF).

Os conceitos apresentados neste capítulo tiveram como fonte principal o trabalho de Lages (1997).

## 3.2 Histórico

Os primeiros estudos visando incorporar efeitos da microestrutura do material na elasticidade refere-se ao trabalho de Voigt (1887). Neles, sugeria-se que a interação entre as partes materiais poderia se dar por meio de vetores de tensão-momento, além do clássico vetor de tensão.

Em 1909, os irmãos Eugène e François Cosserat apresentaram uma teoria da elasticidade assimétrica não-linear (Cosserat, 1909). Porém, os conceitos discutidos não receberam a devida atenção, dada a complexidade da exposição.

Após um silêncio de aproximadamente meio século, os conceitos do “contínuo de Cosserat” foram retomados no notável trabalho do professor Günther (1958), que marcou o início de novas interpretações para os efeitos da microestrutura nos anos de 1960. No trabalho de Truesdell e Toupin (1960) foi apresentada uma teoria incompleta, revisada por Mindlin e Tiersten (1962), denominada, posteriormente, *teoria do contínuo das tensões-momento (couple-stress theory)*. Nesta teoria, as microrrotações foram consideradas iguais às macrorrotações. Uma teoria linear mais geral é abordada no trabalho de Mindlin (1964), existindo um desacoplamento entre macrodeformações e microdeformações e dando origem à *teoria do gradiente de deformação*, na qual todos os componentes do primeiro gradiente de deformação são introduzidos na função de energia de deformação. Green e Rivlin (1964) estabeleceram as bases de uma teoria mais abrangente incluindo todos os gradientes de deformação de ordem superior na função de energia de deformação e a denominou *teoria multipolar*. Mindlin (1965) desenvolveu uma teoria em que somente o primeiro e o segundo gradientes de deformação são considerados, chamada *teoria do segundo gradiente de deformação*, como um caso especial da teoria multipolar.

No trabalho de Eringen (1966), apresentou-se a teoria micropolar linear, caracterizada pela consideração de microrrotações independentes das macrorrotações. Uma coleção de trabalhos relacionados ao assunto foram apresentados no histórico

simpósio IUTAM - *International Union of Theoretical and Applied Mechanics* (Kröner, 1968) sobre a *Mecânica do Contínuo Generalizado*, em 1967. Neste simpósio, Eringen (1968a) apresentou a *teoria do contínuo micromórfico*.

Ao contrário da mecânica do contínuo clássico, onde o movimento (macromovimento) de uma partícula material é totalmente descrito por uma função de argumento vetorial chamada *deformação*, as partículas materiais micromórficas sofrem um micromovimento adicional, correspondente à rotação e deformação da partícula material na microescala (os microcontínuos). De acordo com Eringen (1968a), este micromovimento pode ser descrito por três “diretores” deformáveis ( $\chi_{ij}$ ) que introduzem nove graus de liberdade adicionais: três microrrotações e seis microdeformações, que provocam mudança de volume e de forma dos microcontínuos.  $\chi_{ij}$  é uma grandeza adimensional.

A teoria micromórfica possui dois casos especiais que são obtidos ao se aplicar restrições aos diretores  $\chi_{ij}$ , o primeiro é o *contínuo com microexpansão* (Eringen, 1990), que possui quatro graus de liberdade adicionais em relação ao clássico, três microrrotações ( $\phi_i$ ) e uma microexpansão ( $\varphi$ ), isto é, seus microcontínuos podem sofrer expansão ou contração isotrópica, mas não podem sofrer mudança de forma. O segundo é o *contínuo de Cosserat* (ou *contínuo micropolar*) (Cosserat, 1909; Toupin, 1962; Eringen, 1968b), que é um caso especial de contínuo com microexpansão, e conseqüentemente, de contínuo micromórfico, apresentando somente mais três microrrotações ( $\phi_i$ ) em relação ao clássico. Para o contínuo micropolar, os diretores  $\chi_{ij}$  são considerados rígidos e até a mudança de volume dos microcontínuos é impedida.

A primeira aplicação computacional não-linear do contínuo micropolar em mecânica dos sólidos ocorreu nos trabalhos desenvolvidos por Mühlhaus (1989) e de Borst (1991), que analisaram os potenciais da teoria constitutiva micropolar elastoplástica. A partir daí, começaram a surgir vários trabalhos utilizando a teoria micropolar não-linear para tratamento dos fenômenos de localização de deformações e/ou efeitos de tamanho (Lages, 1997; Adhikary e Dyskin, 1998; Jog, 2004; Li e

Tang, 2005; Liu e Hu, 2005; Voyiadjis et al., 2005; Hu et al., 2005).

Atualmente a teoria micropolar é usada em descrições macroscópicas de materiais com microestrutura rígida, incluindo cristais líquidos, meios granulares e materiais porosos (Eringen, 1997; Walsh e Tordesillas, 2004a; Liu et al., 2007). Além disso, formulações do contínuo micropolar têm sido, nas últimas décadas, intensamente estudadas dentro do contexto de localização de deformações, constatando-se que, na modelagem numérica do comportamento de materiais que apresentam o fenômeno de amolecimento, a introdução da microrrotação como grau de liberdade tem provocado um efeito de regularização do problema de dependência da malha de elementos finitos durante o processo de amolecimento (Mühlhaus e Vardoulakis, 1987; de Borst, 1991). Entretanto, ressalta-se que a microrrotação somente é ativada sob carregamento cisalhante e o referido efeito de regularização não é esperado na solução de problemas de estado de tração dominante, uma vez que, neste caso, a microrrotação não é ativada (Kirchner e Steinmann, 2007).

Como mencionado anteriormente, a teoria do contínuo micromórfico, bem como seus casos especiais, se destaca por inserir novos graus de liberdade ao contínuo clássico, enquanto as demais se destacam por associar a função de energia aos gradientes de deformação. Contudo, existem relações entre estes dois conjuntos de teorias do contínuo generalizado. A figura 3.1 mostra estas relações. Nela pode-se perceber que a teoria micropolar se reduz à teoria das tensões-momento quando se admite a igualdade entre a micro e a macrorrotação,  $\phi_k = \epsilon_{ijk} u_{j,i}/2$ . Esta, por sua vez, é um caso especial de teoria do gradiente de deformação, pois somente o gradiente do vetor rotação entra na função de energia de deformação, isto é, apenas alguns componentes do primeiro gradiente de deformação. A teoria micromórfica também se reduz à teoria do gradiente de deformação se  $\chi_{ij}$  forem definidos iguais ao gradiente de deslocamento  $u_{i,j}$ , neste caso, ocorre a fusão do meio micro com o meio macro.



Na figura 3.1, os seguintes símbolos foram adotados:

$u_i$  - vetor de deslocamentos;

$\chi_{ij}$  - tensor que contém os graus de liberdade (microrrotações e microdeformações) dos microcontínuos;

$\gamma_{ij}$  - tensor associado a variações das dimensões e distorções;

$\kappa_{ijk}$  - tensor gradiente de microdeformações;

$e_{ij}$  - tensor relacionado às medidas de deformação dos microcontínuos;

$\phi_i$  - vetor de microrrotação;

$\varphi$  - expansão (ou contração) volumétrica;

$\epsilon_{ijk}$  - tensor alternante;

$\kappa_{ij}$  - tensor relacionado às curvaturas e às torções da microestrutura;

$\epsilon_{ij}$  - clássico tensor de deformações;

$\eta_{ijk}$  - tensor gradiente de deformações;

GL - grau de liberdade;

MD - medida de deformação;

Tanto o contínuo com microexpansão quanto o micropolar, que são utilizados nesta Tese, podem ser obtidos ao se aplicar restrições à cinemática dos microcontínuos que compõem o contínuo micromórfico. Então, este é apresentado, a seguir, com o objetivo de facilitar a correta compreensão dos primeiros.

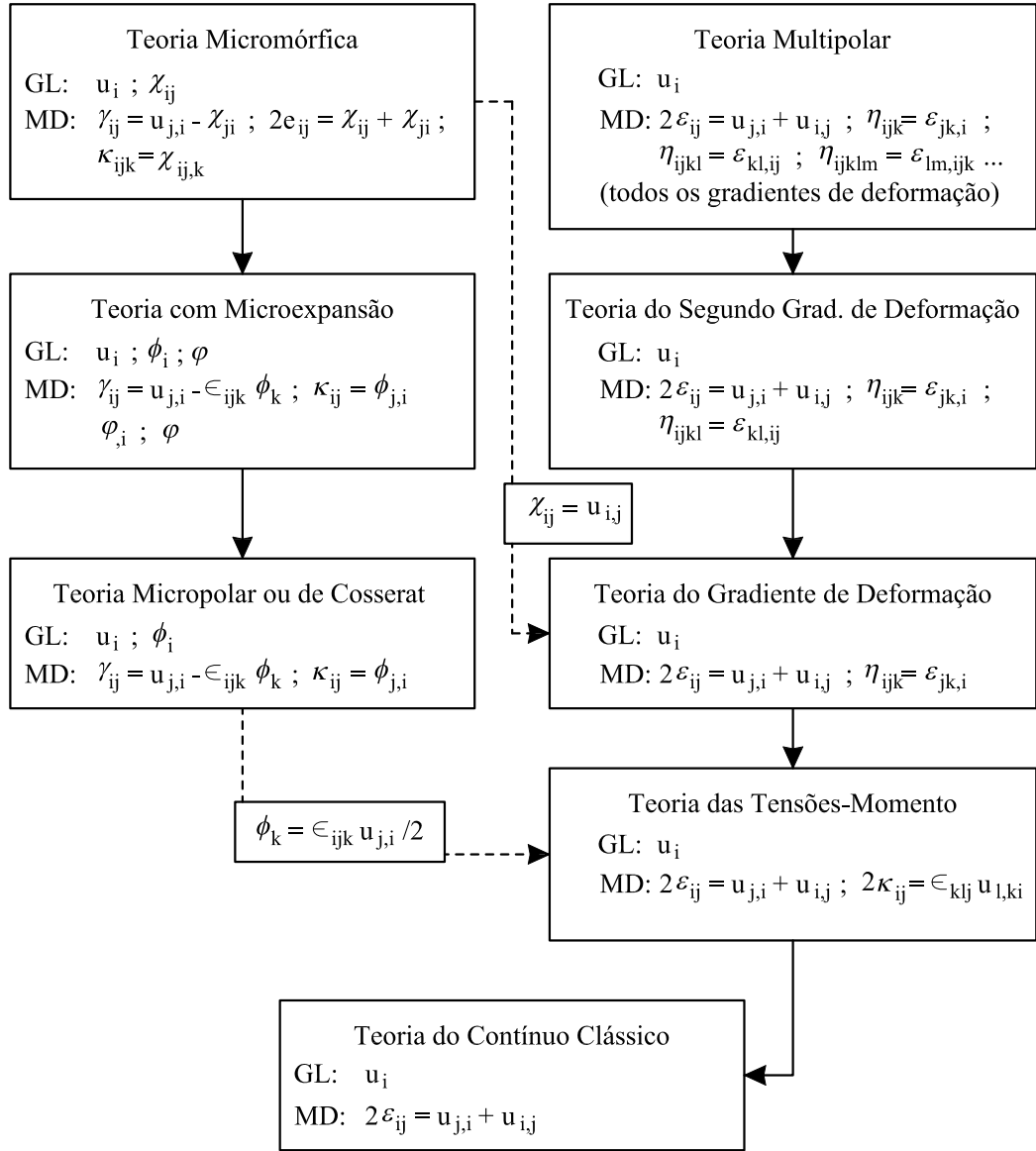


Figura 3.1: Relações entre as teorias do contínuo generalizado

### 3.3 Contínuo Micromórfico

Em um contínuo clássico, o meio é uma distribuição contínua de partículas, cada uma representada geometricamente por um ponto material  $\mathbf{X}$  de coordenadas cartesianas, com referência a um sistema fixo de eixos ortogonais  $X_i (i = 1, 2, 3)$ . Além disso, tais partículas são caracterizadas cinematicamente por um vetor de deslocamentos  $u_i$ . Já no contínuo generalizado, tal como o micromórfico, cada ponto

é visto como uma partícula de dimensão reduzida, a qual constitui, por si própria, um pequeno contínuo em torno do ponto  $\mathbf{X}$ . Por conseguinte, a caracterização cinemática dessa partícula requer um refinamento com relação àquela do contínuo clássico. A diferença entre os contínuos clássicos e os contínuos generalizados se estende à descrição constitutiva do material, que considera a presença de um comprimento intrínseco representando a dimensão da partícula. Caso o comprimento intrínseco seja desprezível, o contínuo generalizado degenerar-se-á para um contínuo clássico. No caso contrário, se for significativo, não será possível descrever a cinemática das partículas dentro de um contínuo convencional.

A seguir, apresentam-se a cinemática do contínuo micromórfico e suas medidas de deformação finita, empregando-se os conceitos da mecânica do contínuo. Linearizando-se estas medidas, chega-se aos tensores de deformação correspondentes à teoria linear.

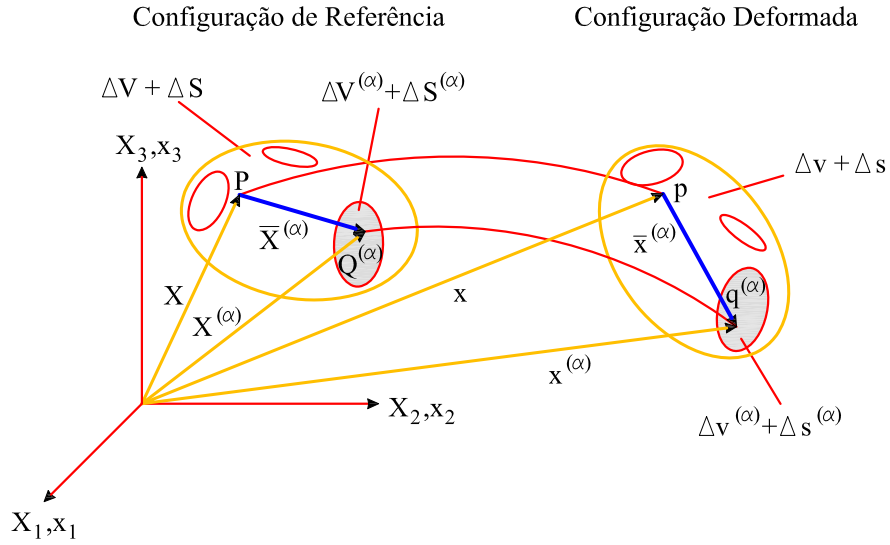
### 3.3.1 Cinemática do Contínuo Micromórfico

Um corpo micromórfico é composto por uma coleção de microcontínuos chamados microrregiões. Como mostra a figura 3.2 em sua configuração de referência, a macrorregião considerada apresenta volume  $\Delta V$  e superfície  $\Delta S$ , supondo-se que seja constituída por  $N$  microrregiões  $\Delta V^{(\alpha)} + \Delta S^{(\alpha)}$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, N$ ). Nesta configuração,  $\mathbf{X}$  corresponde à posição de referência do centro de massa  $P$  da macrorregião e  $\mathbf{X}^{(\alpha)}$  à posição de referência do centro de massa  $Q^{(\alpha)}$  da microrregião, então

$$X_i^{(\alpha)} = X_i + \bar{X}_i^{(\alpha)} \quad (3.1)$$

onde  $\bar{\mathbf{X}}^{(\alpha)}$  corresponde à posição de referência de  $Q^{(\alpha)}$  com relação a  $P$ .

Sob a influência de cargas externas, o corpo se deforma e a macrorregião ocupa um novo volume  $\Delta v$  de superfície  $\Delta s$  (figura 3.2). Por simplicidade, admite-se que a configuração deformada é definida a partir do mesmo sistema de coordenadas da configuração de referência.



**Figura 3.2:** Cinemática do contínuo micromórfico

A posição deformada do centro de massa  $P$  de  $\Delta V$  pode ser expressa como uma função da posição original  $\mathbf{X}$  e do tempo  $t$ , ou seja,

$$x_i = x_i(\mathbf{X}, t) \quad (3.2)$$

Assume-se um mapeamento unívoco, cujas funções apresentam continuidades de ordens quaisquer, exceto possivelmente em alguns pontos, curvas e/ou superfícies ditas singulares (Eringen, 1968a). Assim, cada ponto na configuração de referência de posição  $\mathbf{X}$  é mapeado para a posição  $x$  da configuração deformada no tempo  $t$ .

Dessa forma, a posição deformada do centro de massa  $Q^{(\alpha)}$  de  $\Delta V^{(\alpha)}$  pode ser escrita como

$$x_i^{(\alpha)} = x_i(\mathbf{X}, t) + \bar{x}_i^{(\alpha)}(\mathbf{X}, \bar{\mathbf{X}}^{(\alpha)}, t) \quad (3.3)$$

No trabalho de Eringen (1968a), foi desenvolvida toda uma formulação para o que se denomina teoria do contínuo micromórfico. Nesta teoria, adota-se que a segunda parcela na equação 3.3 seja dada por uma transformação linear da posição  $\bar{\mathbf{X}}^{(\alpha)}$ , ou seja,

$$\bar{x}_i^{(\alpha)} = T_{ij}(\mathbf{X}, t) \bar{X}_j^{(\alpha)} \quad (3.4)$$

onde  $T_{ij}$  é a matriz de transformação.

Substituindo-se 3.4 na equação 3.3, tem-se

$$\mathbf{x}_i^{(\alpha)} = \mathbf{x}_i(\mathbf{X}, t) + T_{ij}(\mathbf{X}, t) \bar{X}_j^{(\alpha)} \quad (3.5)$$

### 3.3.2 Medidas de Deformação do Contínuo Micromórfico

As medidas de deformação são definidas estudando-se um segmento diferencial em uma microrregião  $\alpha$  na configuração deformada (figura 3.3).

Conforme a equação 3.3, tem-se

$$dx_i^{(\alpha)} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j + \frac{\partial \bar{x}_i^{(\alpha)}}{\partial X_j} dX_j + \frac{\partial \bar{x}_i^{(\alpha)}}{\partial \bar{X}_j^{(\alpha)}} d\bar{X}_j^{(\alpha)} \quad (3.6)$$

Utilizando-se 3.4, a equação 3.6 pode ser reescrita como

$$dx_i^{(\alpha)} = F_{ij}(\mathbf{X}, t) dX_j + \bar{F}_{ij}(\mathbf{X}, t) dX_j + T_{ij}(\mathbf{X}, t) d\bar{X}_j^{(\alpha)} \quad (3.7)$$

onde

$$F_{ij}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = x_{i,j} \quad (3.8)$$

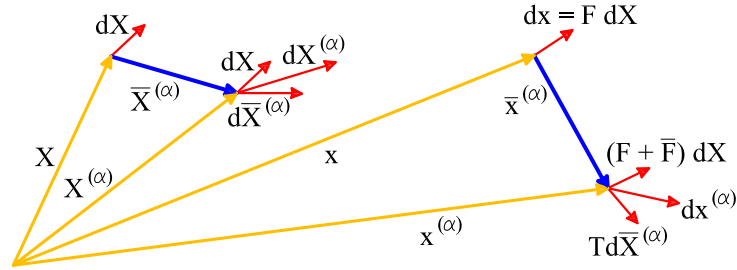
é o clássico tensor gradiente de deformação e

$$\bar{F}_{ij}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \bar{x}_i^{(\alpha)}}{\partial X_j} = \frac{\partial T_{ik}(\mathbf{X}, t)}{\partial X_j} \bar{X}_k^{(\alpha)} = T_{ik,j} \bar{X}_k^{(\alpha)} \quad (3.9)$$

é o tensor gradiente de microdeformação.

A figura 3.3 é utilizada para compreensão das contribuições  $F_{ij}$  e  $\bar{F}_{ij}$ . O vetor infinitesimal  $d\mathbf{x}^{(\alpha)}$  em  $\mathbf{x}^{(\alpha)}$  corresponde ao mapeamento de  $d\mathbf{X}^{(\alpha)}$  em  $\mathbf{X}^{(\alpha)}$ . Da equação 3.1, percebe-se que  $d\mathbf{X}^{(\alpha)}$  relaciona-se com os vetores  $d\mathbf{X}$  e  $d\bar{\mathbf{X}}^{(\alpha)}$ . Utilizando-se o tensor gradiente de deformação, mapea-se  $d\mathbf{X}$  em  $\mathbf{X}$ , para o vetor infinitesimal  $d\mathbf{x}$

na posição  $\mathbf{x}$  da configuração deformada. O tensor gradiente de microdeformação corrige este mapeamento, uma vez que na composição de referência  $d\mathbf{X}$  se posiciona em  $\mathbf{X}^{(\alpha)}$ . O mapeamento de  $d\bar{\mathbf{X}}^{(\alpha)}$  é equivalente ao último termo na equação 3.7.



**Figura 3.3:** Mapeamento do vetor infinitesimal  $d\mathbf{x}^{(\alpha)}$

A diferença entre os quadrados dos comprimentos final e inicial do segmento infinitesimal é dado por

$$dl^{(\alpha)2} - dL^{(\alpha)2} = dx_i^{(\alpha)} dx_i^{(\alpha)} - dX_i^{(\alpha)} dX_i^{(\alpha)} \quad (3.10)$$

onde substituindo-se a equação 3.7, tem-se

$$\begin{aligned} dl^{(\alpha)2} - dL^{(\alpha)2} &= [(F_{ij} + \bar{F}_{ij})(F_{ik} + \bar{F}_{ik}) - \delta_{jk}] dX_j dX_k + \\ &+ 2[T_{ij}(F_{ik} + \bar{F}_{ik}) - \delta_{jk}] d\bar{X}_j^{(\alpha)} dX_k + \\ &+ [T_{ij}T_{ik} - \delta_{jk}] d\bar{X}_j^{(\alpha)} d\bar{X}_k^{(\alpha)} \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker.

Esta equação pode ser reescrita em função de três tensores de medida de deformação como

$$\begin{aligned} dl^{(\alpha)2} - dL^{(\alpha)2} &= [2E_{ij} + 2K_{ikj}\bar{X}_k^{(\alpha)} + K_{kmi}K_{lnj}(2E_{kl} + \delta_{kl})^{-1}\bar{X}_m^{(\alpha)}\bar{X}_n^{(\alpha)}] dX_i dX_j + \\ &+ 2[\Gamma_{ij} + (\Gamma_{sj} + \delta_{sj})K_{rmi}(2E_{rs} + \delta_{rs})^{-1}\bar{X}_m^{(\alpha)}] dX_i d\bar{X}_j^{(\alpha)} + \\ &+ [(\Gamma_{mi} + \delta_{mi})(\Gamma_{nj} + \delta_{nj})(2E_{mn} + \delta_{mn})^{-1} - \delta_{ij}] d\bar{X}_i^{(\alpha)} d\bar{X}_j^{(\alpha)} \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde

$$E_{ij}(\mathbf{X}, t) = \frac{1}{2}(x_{r,i}x_{r,j} - \delta_{ij}) \quad (3.13)$$

é o clássico tensor de Lagrange das deformações e

$$\Gamma_{ij}(\mathbf{X}, t) = x_{r,i}T_{rj} - \delta_{ij} \quad (3.14)$$

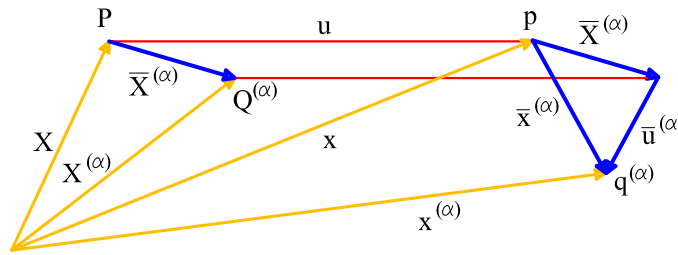
$$K_{ijk}(\mathbf{X}, t) = x_{r,i}T_{rj,k} \quad (3.15)$$

são tensores referentes às microdeformações. Ao contrário do clássico tensor de Lagrange das deformações, os novos tensores  $\Gamma_{ij}$  e  $K_{ijk}$  dependem da cinemática da microestrutura, representada pelas parcelas  $T_{rj}$  e  $T_{rj,k}$ .

Os vetores de macrodeslocamento  $\mathbf{u}$  e de microdeslocamento  $\bar{\mathbf{u}}^{(\alpha)}$  podem ser introduzidos para descrever, respectivamente, os deslocamentos de P (macrorregião) e de  $Q^{(\alpha)}$  (microrregião), como mostra a figura 3.4.

$$u_i = x_i - X_i \quad (3.16)$$

$$\bar{u}_i^{(\alpha)} = \bar{x}_i^{(\alpha)} - \bar{X}_i^{(\alpha)} \quad (3.17)$$



**Figura 3.4:** Macro e microdeslocamento

De acordo com a equação 3.4, pode-se reescrever 3.17 como

$$\bar{u}_i^{(\alpha)} = (T_{ij} - \delta_{ij})\bar{X}_j^{(\alpha)} = \Phi_{ij}\bar{X}_j^{(\alpha)} \quad (3.18)$$

onde

$$\Phi_{ij} = T_{ij} - \delta_{ij} \quad (3.19)$$

Retornando-se às equações 3.13, 3.14 e 3.15, chega-se a

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}) \quad (3.20)$$

$$\Gamma_{ij} = u_{j,i} + \Phi_{ij} + u_{k,i}\Phi_{kj} \quad (3.21)$$

$$K_{ijk} = \Phi_{ij,k} + u_{l,i}\Phi_{lj,k} \quad (3.22)$$

Desprezando-se os termos de ordem superior (em produtório), chega-se aos tensores de deformação e de microdeformação em uma teoria linear

$$E_{ij} \approx \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.23)$$

$$\Gamma_{ij} \approx \gamma_{ij} = u_{j,i} + \Phi_{ij} \quad (3.24)$$

$$K_{ijk} \approx \kappa_{ijk} = \Phi_{ij,k} \quad (3.25)$$

## 3.4 Elasticidade para o Contínuo de Cosserat

Nesta seção, apresenta-se a cinemática do contínuo de Cosserat com suas relações constitutivas elásticas e lineares. Após uma redefinição dos parâmetros elásticos do material, são obtidas as equações diferenciais de equilíbrio. No apêndice A são apresentados dois exemplos analíticos lineares que utilizam esta teoria.

### 3.4.1 Cinemática do Contínuo de Cosserat

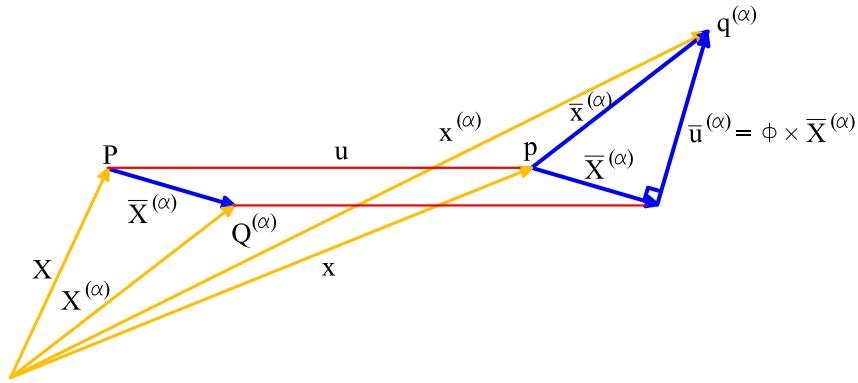
Uma vez que o contínuo de Cosserat (ou contínuo micropolar) é uma particularidade do contínuo micromórfico, sua cinemática é descrita aplicando-se uma restrição à cinemática da microestrutura do contínuo micromórfico. Esta restrição é feita de forma a descrever um movimento de corpo rígido correspondente a uma rotação em torno do centro de massa do macrovolume na configuração deformada (ponto  $\mathbf{p}$  na figura 3.5).

Nas equações 3.24 e 3.25, a grandeza que define as microdeformações é o tensor  $\Phi_{ij}$ . Como a teoria de Cosserat considera a partícula rígida, a parcela simétrica deste



tensor se anula e a sua parcela anti-simétrica coincide com o tensor de microrrotações de Cosserat, que é a única parcela não nula do gradiente de microdeslocamentos, e é definido aqui como a contração, sobre o terceiro subíndice, do produto do tensor alternante  $\epsilon_{ijk}$  pelo vetor das microrrotações  $\phi_k$ .

$$\Phi_{ij} = -\Phi_{ji} = -\epsilon_{ijk}\phi_k \quad (3.26)$$



**Figura 3.5:** Cinemática do contínuo de Cosserat

Substituindo-se a equação 3.26 nas equações 3.24 e 3.25 obtém-se, juntamente com a equação 3.23, os novos tensores linearizados de deformação e de microdeformação

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.27)$$

$$\gamma_{ij} = u_{j,i} - \epsilon_{ijk}\phi_k \quad (3.28)$$

$$\kappa_{ijk} = -\epsilon_{ijl}\phi_{l,k} \quad (3.29)$$

Pode-se perceber que a parcela simétrica de  $\gamma_{ij}$  coincide com o tensor de deformações clássico,  $\epsilon_{ij}$

$$\gamma_{(ij)} = \frac{1}{2}(\gamma_{ij} + \gamma_{ji}) = \epsilon_{ij} \quad (3.30)$$

e que no desenvolvimento do tensor  $\kappa_{ijk}$  apenas nove componentes são independentes. Assim, as informações tensoriais necessárias para definir as deformações do contínuo

de Cosserat são

$$\gamma_{ij} = u_{j,i} - \epsilon_{ijk}\phi_k \quad (3.31)$$

$$\kappa_{ij} = \phi_{j,i} \quad (3.32)$$

O tensor  $\gamma_{ij}$  está associado a variações das dimensões e distorções, enquanto o tensor  $\kappa_{ij}$  está relacionado às curvaturas e às torções da microestrutura.

Percebe-se também que a parte anti-simétrica de  $\gamma_{ij}$ , vem a ser a diferença entre as macrorrotações,  $\omega_k$ , e as microrrotações de Cosserat,  $\phi_k$ .

$$\gamma_{[ij]} = \frac{1}{2}(\gamma_{ij} - \gamma_{ji}) = \omega_k - \epsilon_{ijk}\phi_k \quad (3.33)$$

onde

$$\omega_k = \frac{1}{2}(u_{j,i} - u_{i,j}) \quad (3.34)$$

Pela equação 3.31, nota-se que as deformações normais no contínuo de Cosserat são iguais àsquelas do contínuo clássico. Por outro lado, as deformações cisalhantes são diferentes e não simétricas.

### 3.4.2 Relações Constitutivas

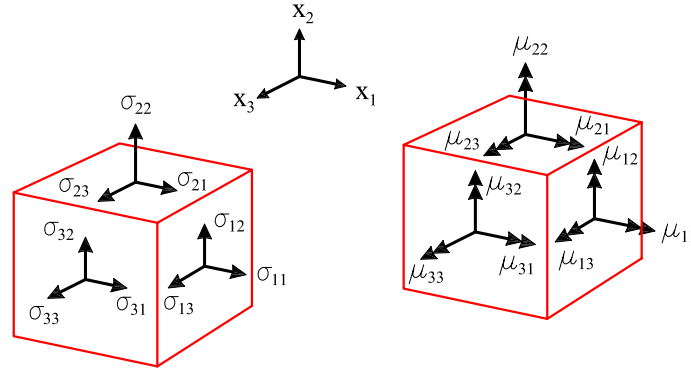
As leis constitutivas descrevem a relação tensão-deformação num contínuo. Nesta seção, definem-se estas relações para o contínuo micropolar quando seu material apresenta um comportamento elástico, linear e isotrópico, negligenciando-se os acoplamentos com processos térmicos no decorrer da deformação.

A partir de uma generalização da elasticidade clássica, sob o regime das deformações infinitesimais, os tensores de tensão e de tensão-momento podem ser derivados de uma função potencial, denominada densidade de energia de deformação  $U_0$ , como

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{ij}} \quad (3.35)$$

$$\mu_{ij} = \frac{\partial U_0}{\partial \kappa_{ij}} \quad (3.36)$$

A figura 3.6 mostra as componentes dos tensores  $\sigma_{ij}$  (força por unidade de área) e  $\mu_{ij}$  (momento por unidade de área). Devido à diferença dimensional entre essas componentes, deve ser introduzido um parâmetro de comprimento, permitindo que todas as componentes num vetor tensão tenham a mesma dimensão. Este parâmetro pode ser visto como uma dimensão de comprimento interna, por exemplo, para representar o tamanho da microestrutura.



**Figura 3.6:** Componentes dos tensores de tensão e de tensão-momento

Utilizando-se a Lei de Hooke Generalizada, da Teoria da Elasticidade, para uma relação constitutiva linear, na ausência de “tensões” e “deformações” iniciais, tem-se

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (3.37)$$

onde  $D_{ijkl}$  é o tensor constitutivo.

Sabe-se que o diferencial total da energia potencial de deformação ( $dU$ ) é dado por

$$dU = \sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} \quad (3.38)$$

que utilizando-se a equação 3.37 pode ser escrita como

$$dU = D_{ijkl}\varepsilon_{kl}d\varepsilon_{ij} \quad (3.39)$$

Integrando-se esta equação, tem-se

$$U = \int_0^\varepsilon D_{ijkl}\varepsilon_{kl} d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}D_{ijkl}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij} \quad (3.40)$$

Retornando-se ao contínuo micropolar e procedendo-se de forma análoga à elasticidade clássica,  $U_0$  adquire o seguinte formato

$$U_0 = \frac{1}{2}A_{ijkl}\gamma_{ij}\gamma_{kl} + B_{ijkl}\gamma_{ij}\kappa_{kl} + \frac{1}{2}C_{ijkl}\kappa_{ij}\kappa_{kl} \quad (3.41)$$

onde  $A_{ijkl}$ ,  $B_{ijkl}$  e  $C_{ijkl}$  são os tensores constitutivos do material.

Note que  $\kappa_{ij}$  é um pseudo-tensor, isto é, um tensor cujas componentes invertem de sinal sob uma inversão do sistema de coordenadas. Para poder ter uma densidade de energia de deformação objetiva, o tensor  $B_{ijkl}$  deve ser um pseudo-tensor também. A independência dos coeficientes de rigidez de um meio com respeito a uma inversão do sistema de coordenadas é chamada centro-simétrica. Se o meio for assim tratado,  $B_{ijkl}$  se anula.

Para o material isotrópico, cujas componentes dos tensores constitutivos não se alteram com as transformações próprias e impróprias (Malvern, 1969) no sistema de coordenadas, reduz-se o número de parâmetros do material. Assim sendo, tem-se

$$A_{ijkl} = A_1\delta_{ij}\delta_{kl} + A_2\delta_{ik}\delta_{jl} + A_3\delta_{il}\delta_{jk} \quad (3.42)$$

$$B_{ijkl} = 0 \quad (3.43)$$

$$C_{ijkl} = C_1\delta_{ij}\delta_{kl} + C_2\delta_{ik}\delta_{jl} + C_3\delta_{il}\delta_{jk} \quad (3.44)$$

Retornando-se às equações 3.35 e 3.36, obtém-se

$$\sigma_{ij} = A_1\delta_{ij}\gamma_{kk} + A_2\gamma_{ij} + A_3\gamma_{ji} \quad (3.45)$$

$$\mu_{ij} = C_1\delta_{ij}\kappa_{kk} + C_2\kappa_{ij} + C_3\kappa_{ji} \quad (3.46)$$

onde  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  são os seis parâmetros necessários para caracterização do material elástico, linear e isotrópico no contínuo de Cosserat. Na elasticidade clássica, apenas dois parâmetros são necessários ( $G$  e  $\lambda$ ), denominados constantes de Lamé (Malvern, 1969).

Os parâmetros  $A_i$  e  $C_i$  possuem dimensões de força por unidade de área e de força, respectivamente.

Impõe-se que a matriz constitutiva seja positiva definida a fim de garantir a positividade da densidade de energia de deformação, obtendo-se, assim, as seguintes restrições para os parâmetros elásticos do material:

$$\begin{aligned}
3A_1 + A_2 + A_3 &> 0 \\
A_2 + A_3 &> 0 \\
A_2 - A_3 &> 0 \\
3C_1 + C_2 + C_3 &> 0 \\
C_2 + C_3 &> 0 \\
C_2 - C_3 &> 0
\end{aligned} \tag{3.47}$$

### 3.4.3 Redefinição dos Parâmetros Elásticos do Material

Para definir os parâmetros elásticos do material no contínuo micropolar, uma barra, cujo eixo longitudinal é definido ao longo do eixo  $x_1$ , é considerada estar submetida a três estados de tensão diferentes, como mostrado a seguir.

#### 3.4.3.1 Barra submetida ao estado uniaxial de tensão $\sigma_{11} = \bar{\sigma}_{11}$

Utilizando a relação constitutiva em 3.45 e considerando  $\sigma_{22} = 0$  e  $\sigma_{33} = 0$ , obtém-se

$$\bar{\sigma}_{11} = (A_1 + A_2 + A_3)\gamma_{11} + A_1\gamma_{22} + A_1\gamma_{33} \tag{3.48}$$

$$0 = A_1\gamma_{11} + (A_1 + A_2 + A_3)\gamma_{22} + A_1\gamma_{33} \tag{3.49}$$

$$0 = A_1\gamma_{11} + A_1\gamma_{22} + (A_1 + A_2 + A_3)\gamma_{33} \tag{3.50}$$

Definindo-se, como na elasticidade clássica, o módulo de elasticidade longitudinal

$$E = \frac{\bar{\sigma}_{11}}{\gamma_{11}}, \tag{3.51}$$

o coeficiente de Poisson

$$\nu = -\frac{\gamma_{22}}{\gamma_{11}} = -\frac{\gamma_{33}}{\gamma_{11}}, \quad (3.52)$$

o módulo de elasticidade transversal

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad (3.53)$$

a constante de Lamé

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} \quad (3.54)$$

e uma nova constante  $\alpha$ , tal que  $A_2 - A_3 = 2\alpha$ , tem-se

$$A_1 = \frac{E\nu}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} = \lambda \quad (3.55)$$

$$A_2 = \frac{E}{2(1 + \nu)} + \alpha = G + \alpha \quad (3.56)$$

$$A_3 = \frac{E}{2(1 + \nu)} - \alpha = G - \alpha \quad (3.57)$$

Para um melhor entendimento dos resultados acima, tomam-se as parcelas simétrica e anti-simétrica do tensor  $\sigma_{ij}$  na equação 3.45. Na equação de  $\sigma_{(ij)}$  (tensor simétrico de tensão), introduz-se  $\gamma_{(ij)}$  (tensor simétrico de deformação)

$$\sigma_{(ij)} = \frac{\sigma_{ij} + \sigma_{ji}}{2} = A_1 \delta_{ij} \gamma_{kk} + (A_2 + A_3) \gamma_{(ij)} \quad (3.58)$$

Como  $\gamma_{(ij)} = \varepsilon_{ij}$  (tensor simétrico de deformação no contínuo clássico), iguala-se a equação anterior com a equação das tensões do contínuo clássico

$$\sigma_{(ij)} = A_1 \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + (A_2 + A_3) \varepsilon_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2G \varepsilon_{ij} \quad (3.59)$$

Daqui percebe-se que  $A_1 = \lambda$  e  $A_2 + A_3 = 2G$ , como consta nas equações de 3.55 a 3.57.

Da mesma forma, por meio de  $\sigma_{[ij]}$  (tensor anti-simétrico de tensão), pode-se compreender o significado do parâmetro  $\alpha$ , desenvolvendo-se a equação 3.45 para  $\sigma_{[ij]}$  e introduzindo-se  $\gamma_{[ij]}$  (tensor anti-simétrico de deformação) no resultado obtido, obtendo-se

$$\sigma_{[ij]} = \frac{\sigma_{ij} - \sigma_{ji}}{2} = (A_2 - A_3) \gamma_{[ij]} = (A_2 - A_3) (\omega_k - \epsilon_{ijk} \phi_k) \quad (3.60)$$

Percebe-se, então, que a equação acima relaciona as tensões anti-simétricas com a parte anti-simétrica das deformações cisalhantes, ou melhor, com a diferença entre a macro e a microrrotação. Necessita-se definir um novo parâmetro do material que descreva esta relação. Assim, fez-se  $A_2 - A_3 = 2\alpha$  e  $\alpha$  recebeu o nome de módulo de cisalhamento rotacional (ou anti-simétrico, ou de Cosserat), este parâmetro controla a influência da microestrutura na distribuição de tensões macroscópicas, agindo como uma medida de rigidez entre a macro e a microrrotação. Introduzindo  $\alpha$  na relação acima tem-se

$$\sigma_{[ij]} = 2\alpha\gamma_{[ij]} = 2\alpha(\omega_k - \epsilon_{ijk}\phi_k) \quad (3.61)$$

O que se observa, na literatura, é que determinações de valores típicos para  $\alpha$  ficam aquém da preocupação com a caracterização das dimensões da microestrutura, e não são ainda bastante estudadas. Na maioria das situações físicas em que vale o comportamento elástico, o valor de  $\alpha$  poderá ser tal que  $0 \leq \alpha \leq G$ , ou um pouco superior (Mendoza, 2003).

### 3.4.3.2 Barra submetida ao estado de tensão $\mu_{13} = \bar{\mu}_{13}$

Utilizando a relação constitutiva em 3.46 e considerando  $\mu_{31} = 0$ , obtém-se

$$\bar{\mu}_{13} = C_2\kappa_{13} + C_3\kappa_{31} \quad (3.62)$$

$$0 = C_2\kappa_{31} + C_3\kappa_{13} \quad (3.63)$$

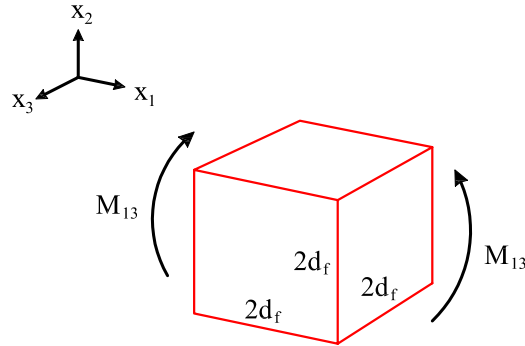
Resolvendo-se o sistema de equações anterior, resulta

$$\bar{\mu}_{13} = \frac{(C_2 + C_3)(C_2 - C_3)}{C_2}\kappa_{13} \quad (3.64)$$

Supõe-se que, na figura 3.7, esteja representado um volume de controle com o formato de um cubo, cujo comprimento da aresta é igual a  $2d_f$  (Lages, 1997). Assim sendo, é possível a seguinte relação:

$$M_{13} = EI\kappa_{13} \quad (3.65)$$

onde  $I$  é o momento de inércia e  $M_{13}$  é o momento mostrado na figura 3.7.



**Figura 3.7:** Introdução do parâmetro elástico  $d_f$  do material

Dividindo-se ambos os membros da equação 3.65 pela área da seção do cubo, tem-se a tensão-momento  $\bar{\mu}_{13}$

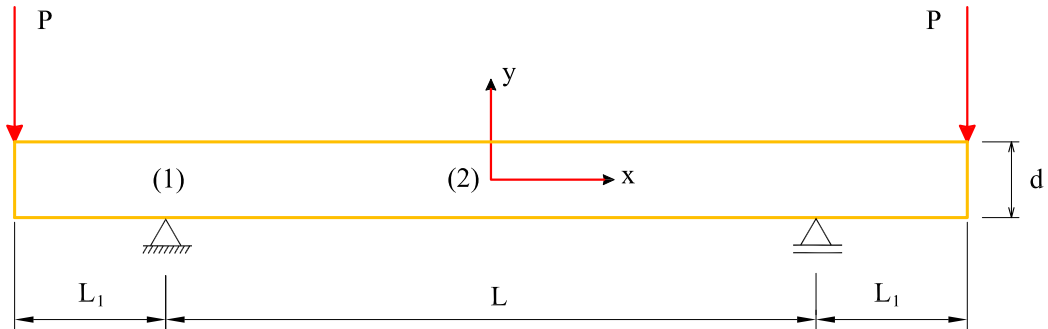
$$\bar{\mu}_{13} = \frac{M_{13}}{(2d_f)^2} = \frac{EI}{(2d_f)^2} \kappa_{13} = \frac{E(2d_f)^4}{12(2d_f)^2} \kappa_{13} = \frac{Ed_f^2}{3} \kappa_{13} = 2GL_f^2 \kappa_{13} \quad (3.66)$$

onde

$$L_f^2 = \frac{(1 + \nu)}{3} d_f^2 \quad (3.67)$$

O parâmetro  $L_f$ , definido pela equação 3.67, é denominado *comprimento característico do material à flexão*.

Uma viga biapoiada submetida ao ensaio de flexão pura, mostrada na figura 3.8, apresenta todas as tensões-momento e curvaturas nulos, exceto  $\mu_{13}$  e  $\kappa_{13}$ . Através deste ensaio e com o exposto acima, é possível imaginar uma maneira de se determinar o comprimento característico do material à flexão (Lages, 1997).



**Figura 3.8:** Ensaio de flexão pura para a determinação de  $L_f$



O exemplo de flexão pura é estudado com detalhes no apêndice A, onde as equações do campo de deslocamentos são obtidas, entre elas a equação dos deslocamentos verticais apresentada abaixo:

$$u_2(x, y) = \frac{M}{8EI(1+r^2)}(4\nu y^2 + 4x^2 - L^2) \quad (3.68)$$

onde

$$r = \frac{2d_f}{d} \quad (3.69)$$

representa um fator de escala entre a dimensão do volume de controle e a altura da viga.  $M$  é o momento fletor causado pela força  $P$ .  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal,  $\nu$  é o coeficiente de Poisson e  $I$  é o momento de inércia.

Chamando de  $\Delta v$  o deslocamento vertical relativo entre os pontos (1) e (2) da viga, localizados na linha neutra ( $y=0$ ), tem-se que  $v^{(1)} = 0$  e  $v^{(2)} = \frac{-ML^2}{8EI(1+r^2)}$ , então

$$\Delta v = v^{(2)} - v^{(1)} = \frac{-ML^2}{8EI(1+r^2)} \quad (3.70)$$

Substituindo-se, na equação acima, o valor de  $r$  dado pela equação 3.69 e isolando-se  $d_f$  no resultado obtido, tem-se

$$d_f = \frac{d}{2} \sqrt{\frac{-ML^2}{8EI\Delta v} - 1} \quad (3.71)$$

Substituindo-se este valor de  $d_f$  e  $M = -PL_1$  na equação 3.67, obtém-se

$$L_f = \frac{d}{2} \sqrt{\frac{(1+\nu) PL_1 L^2}{3 \cdot 8EI\Delta v} - 1} \quad (3.72)$$

Logo, o valor de  $L_f$  pode ser obtido por um ensaio experimental de uma viga sob flexão pura, desde que se conheça todas as grandezas na equação acima e se faça a medição do deslocamento vertical relativo entre os pontos (1) e (2), ou seja, da flecha da viga no meio do vão.

### 3.4.3.3 Barra submetida ao estado de tensão $\mu_{11} = \bar{\mu}_{11}$

Utilizando a relação constitutiva em 3.46 e considerando  $\mu_{22} = 0$  e  $\mu_{33} = 0$ , obtém-se

$$\bar{\mu}_{11} = (C_1 + C_2 + C_3)\kappa_{11} + C_1\kappa_{22} + C_1\kappa_{33} \quad (3.73)$$

$$0 = C_1\kappa_{11} + (C_1 + C_2 + C_3)\kappa_{22} + C_1\kappa_{33} \quad (3.74)$$

$$0 = C_1\kappa_{11} + C_1\kappa_{22} + (C_1 + C_2 + C_3)\kappa_{33} \quad (3.75)$$

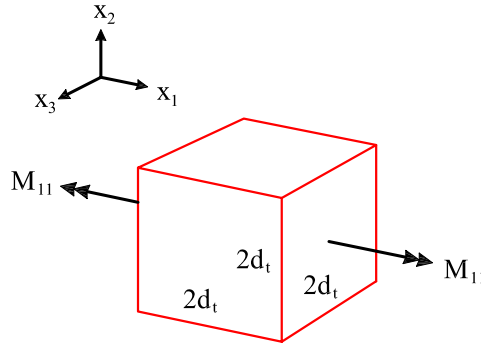
Resolvendo-se o sistema de equações anterior, resulta

$$\bar{\mu}_{11} = \frac{(C_2 + C_3)(3C_1 + C_2 + C_3)}{2C_1 + C_2 + C_3}\kappa_{11} \quad (3.76)$$

Análogo ao caso da flexão, supõe-se que a figura 3.9 esteja representando o volume de controle no formato de um cubo, com arestas de comprimento  $2d_t$ . Dessa forma, tem-se

$$M_{11} = GJ_t\kappa_{11} \quad (3.77)$$

onde  $J_t$  é o momento de inércia polar e  $M_{11}$  é o momento mostrado na figura 3.9.



**Figura 3.9:** Introdução do parâmetro elástico  $d_t$  do material

Novamente, dividindo-se esta equação pela área da seção do cubo agora considerado, chega-se a  $\bar{\mu}_{11}$

$$\bar{\mu}_{11} = \frac{M_{11}}{(2d_t)^2} = \frac{kG(2d_t)^4}{(2d_t)^2}\kappa_{11} = 4kGd_t^2\kappa_{11} = 2GL_t^2\kappa_{11} \quad (3.78)$$

onde

$$L_t^2 = 2kd_t^2 \quad (3.79)$$

e  $L_t$  é denominado *comprimento característico do material à torção*. Para uma seção transversal quadrangular, a constante  $k$  vale aproximadamente 0,140577 (Timoshenko e Goodier, 1970).

Utilizando-se as equações 3.64, 3.66, 3.76 e 3.78, e admitindo-se ainda que  $C_2 - C_3 = 2\eta$ , tem-se

$$C_1 = \frac{2GL_f^2\eta[\eta(L_f^2 - 2L_t^2) + GL_f^2L_t^2]}{(GL_f^2 - 2\eta)[\eta(3L_f^2 - 4L_t^2) + 2GL_f^2L_t^2]} \quad (3.80)$$

$$C_2 = \frac{2\eta^2}{2\eta - GL_f^2} \quad (3.81)$$

$$C_3 = \frac{2\eta(GL_f^2 - \eta)}{2\eta - GL_f^2} \quad (3.82)$$

Semelhante ao parâmetro  $\alpha$ , que relaciona tensões e deformações anti-simétricas, o parâmetro  $\eta$  foi escolhido para descrever a relação entre os tensores anti-simétricos de curvatura  $\kappa_{[ij]}$  e de tensão-momento  $\mu_{[ij]}$ . A parcela anti-simétrica das tensões-momento pode ser obtida pela equação 3.46, resultando em

$$\mu_{[ij]} = \frac{\mu_{ij} - \mu_{ji}}{2} = (C_2 - C_3) \left( \frac{\kappa_{ij} - \kappa_{ji}}{2} \right) \quad (3.83)$$

Se  $C_2 - C_3 = 2\eta$ , obtém-se  $\mu_{[ij]} = 2\eta\kappa_{[ij]}$ .

Nesta seção, os parâmetros  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  foram definidos em função das grandezas  $E$ ,  $\nu$ ,  $L_f$ ,  $\alpha$ ,  $L_t$  e  $\eta$ . Estas grandezas são, agora, definidas como os parâmetros elásticos do material micropolar isotrópico.

Pesquisas sobre os parâmetros  $L_t$  e  $\eta$  são raras na literatura, pois eles só influenciam em aplicações tridimensionais. No plano, somente  $E$ ,  $\nu$ ,  $L_f$  e  $\alpha$  são necessários. Uma vez que nesta Tese serão apresentadas somente aplicações bidimensionais, não serão discutidas aqui formas de obtenção de valores para  $L_t$  e  $\eta$ . Entretanto, é possível que um ensaio de torção pura, assim como foi feito para o parâmetro  $L_f$  utilizando-se o ensaio de flexão pura, possa contribuir para a determinação de  $L_t$ .

As equações 3.47 podem ser escritas como

$$\frac{E}{1-2\nu} > 0 \quad (3.84a)$$

$$\frac{E}{1+\nu} > 0 \quad (3.84b)$$

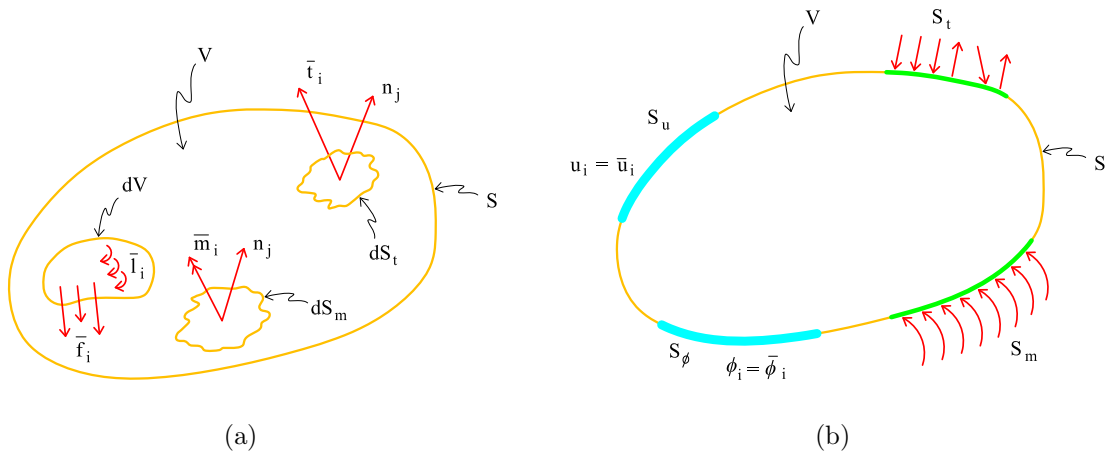
$$\alpha > 0 \quad (3.84c)$$

$$4L_t^2 - 3L_f^2 < \frac{2GL_f^2 L_t^2}{\eta} \quad (3.84d)$$

$$\eta > \frac{GL_f^2}{2} \quad (3.84e)$$

### 3.4.4 Equações Diferenciais de Equilíbrio

Para determinar as equações diferenciais de equilíbrio, considera-se um problema de valor de contorno para um contínuo de Cosserat de volume  $V$  e superfície  $S$ , sujeito à ação dos vetores prescritos de força de volume  $\bar{f}_i$  e de momento de volume  $\bar{l}_i$ .



**Figura 3.10:** Condições de contorno para um contínuo de Cosserat

Conforme mostra a figura 3.10, as condições de contorno do problema são

$$\sigma_{ji}n_j = \bar{t}_i \text{ em } S_t \quad \text{ou} \quad u_i = \bar{u}_i \text{ em } S_u \quad (3.85)$$

$$\mu_{ji}n_j = \bar{m}_i \text{ em } S_m \quad \text{ou} \quad \phi_i = \bar{\phi}_i \text{ em } S_\phi \quad (3.86)$$

onde  $S_t$  e  $S_m$  são as partes da superfície S onde, respectivamente, os vetores de tensão  $\bar{t}_i$  e de tensão-momento  $\bar{m}_i$  são prescritos e agem num elemento de superfície de normal unitária  $n_j$ . Por outro lado,  $S_u$  e  $S_\phi$  são as regiões da superfície S onde prescrevem-se, respectivamente, os deslocamentos  $\bar{u}_i$  e as microrrotações  $\bar{\phi}_i$ . Estas equações mostram que onde as tensões são prescritas, os deslocamentos são incógnitas e vice-versa, o mesmo ocorre para as tensões-momento e microrrotações.

Aplicando-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais

$$\delta W_{int} = \delta W_{ext} \quad (3.87)$$

e incluindo-se as contribuições das novas parcelas do contínuo de Cosserat nos trabalhos virtuais das ações internas  $\delta W_{int}$  e externas  $\delta W_{ext}$ , obtém-se

$$\delta W_{int} = \int_V \sigma_{ij} \delta \gamma_{ij} dV + \int_V \mu_{ij} \delta \kappa_{ij} dV \quad (3.88)$$

$$\delta W_{ext} = \int_V \bar{f}_i \delta u_i dV + \int_V \bar{l}_i \delta \phi_i dV + \int_{S_t} \bar{t}_i \delta u_i dS + \int_{S_m} \bar{m}_i \delta \phi_i dS \quad (3.89)$$

Utilizando-se as equações 3.31, 3.32 e desenvolvendo-se a parcela de trabalho interno em função dos campos de deslocamentos e de microrrotações virtuais, tem-se

$$\delta W_{int} = \int_V \sigma_{ij} (\delta u_{j,i} - \epsilon_{ijk} \delta \phi_k) dV + \int_V \mu_{ij} \delta \phi_{j,i} dV \quad (3.90)$$

Empregando-se o teorema de Green-Gauss, obtém-se

$$\begin{aligned} \delta W_{int} &= \int_S \sigma_{ij} n_i \delta u_j dS - \int_V \sigma_{ij,i} \delta u_j dV - \int_V \epsilon_{ijk} \sigma_{ij} \delta \phi_k dV + \\ &+ \int_S \mu_{ij} n_i \delta \phi_j dS - \int_V \mu_{ij,i} \delta \phi_j dV \end{aligned} \quad (3.91)$$

Igualando-se as equações 3.89 e 3.91, e agrupando-se os termos em comum, tem-se

$$\begin{aligned} &\int_V (\sigma_{ji,j} + \bar{f}_i) \delta u_i dV + \int_V (\mu_{ji,j} + \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} + \bar{l}_i) \delta \phi_i dV + \\ &+ \int_S (\bar{t}_i - \sigma_{ji} n_j) \delta u_i dS + \int_S (\bar{m}_i - \mu_{ji} n_j) \delta \phi_i dS = 0 \end{aligned} \quad (3.92)$$

Uma vez que a equação 3.92 deve ser satisfeita para quaisquer funções cinematicamente admissíveis, considerando-se deslocamentos e microrrotações, conclui-se que

$$\sigma_{ji,j} + \bar{f}_i = 0 \quad (3.93)$$

$$\mu_{ji,j} + \epsilon_{ijk}\sigma_{jk} + \bar{l}_i = 0 \quad (3.94)$$

correspondem às equações diferenciais de equilíbrio.

Para reescrever as equações diferenciais de equilíbrio em função dos campos de deslocamentos e de microrrotações utilizam-se as medidas de deformação (equações 3.31 e 3.32), as relações constitutivas (equações 3.45 e 3.46) e as equações diferenciais de equilíbrio (equações 3.93 e 3.94), obtendo-se

$$(A_1 + A_3)u_{j,ji} + A_2u_{i,jj} + (A_2 - A_3)\epsilon_{ijk}\phi_{k,j} + \bar{f}_i = 0 \quad (3.95)$$

$$(C_1 + C_3)\phi_{j,ji} + C_2\phi_{i,jj} + (A_2 - A_3)\epsilon_{ijk}u_{k,j} - 2(A_2 - A_3)\phi_i + \bar{l}_i = 0 \quad (3.96)$$

Admitindo-se o valor nulo para  $\alpha$ , que corresponde à igualdade de  $A_2$  e  $A_3$ , viola-se a condição  $\alpha > 0$  imposta em 3.84, isto acarretaria um desacoplamento das equações 3.95 e 3.96. Para certos problemas, este fato possibilitaria múltiplas soluções (Lakes, 1985). Se  $\alpha$  é tomado como um valor infinito, as equações 3.95 e 3.96 recairiam na condição de igualdade entre a micro e a macrorrotação, isto é

$$\phi_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}u_{k,j}, \quad (3.97)$$

que representa a condição imposta na teoria das tensões-momento (*couple-stress theory*). Isto é ainda mais facilmente observado na equação 3.61, pois se  $\alpha \rightarrow \infty$ , tem-se  $(\omega_k - \epsilon_{ijk}\phi_k) \rightarrow 0$  para qualquer valor de  $\sigma_{[ij]}$ .

## 3.5 Plasticidade Associada para o Contínuo de Cosserat

Apresenta-se, nesta seção, uma formulação de plasticidade associada para descrever o comportamento não-linear do contínuo de Cosserat. Para este fim, o vetor

de deformações  $\{\gamma\}$ , o vetor de tensões  $\{\sigma\}$ , a definição do segundo invariante das tensões desviadoras e a lei de encruamento são generalizados para considerar as microcurvaturas e as tensões-momento. Uma extensão do algoritmo de retorno radial (Simo e Taylor, 1985) é apresentada para determinação do incremento de tensão e atualização das variáveis internas. Consistente com este algoritmo, é definido um módulo tangente elastoplástico, que garante uma taxa de convergência quadrática quando o método de Newton-Raphson é usado.

Como na plasticidade convencional, a taxa de deformação total  $\dot{\gamma}_{ij}$  é decomposta numa parcela elástica  $\dot{\gamma}_{ij}^e$  e numa parcela plástica  $\dot{\gamma}_{ij}^p$ , isto é,

$$\dot{\gamma}_{ij} = \dot{\gamma}_{ij}^e + \dot{\gamma}_{ij}^p, \quad (3.98)$$

enquanto que a taxa de variação do tensor de tensão é determinada exclusivamente pela parcela elástica do tensor de deformação

$$\dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl}^e \dot{\gamma}_{kl}^e = D_{ijkl}^e (\dot{\gamma}_{ij} - \dot{\gamma}_{ij}^p) \quad (3.99)$$

onde  $D_{ijkl}^e$  é o tensor constitutivo elástico do material.

A taxa de variação das deformações plásticas é determinada pela lei de fluxo. No caso da plasticidade associada, o fluxo se desenvolve ao longo da normal à superfície de plastificação  $f$ , a qual define sob que condições um ponto material apresenta deformações inelásticas para um estado geral de tensão. Assim, tem-se

$$\dot{\gamma}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.100)$$

onde  $\dot{\lambda}$  é o multiplicador plástico que define a magnitude de  $\dot{\gamma}_{ij}^p$  e  $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$  define sua direção.

### 3.5.1 Superfície de Plastificação

Utilizando-se o critério de plastificação de von Mises, introduzem-se as novas parcelas referentes ao contínuo de Cosserat. Neste critério, a superfície de plastificação é definida por

$$f = \sqrt{3J_2} - \bar{\sigma}(\beta) \quad (3.101)$$

onde  $\bar{\sigma}(\beta)$  corresponde à tensão de escoamento corrente, cujo valor é função do parâmetro de endurecimento (ou amolecimento)  $\beta$ , e  $J_2$  ao segundo invariante do tensor desviador das tensões, que pode ser generalizado (Mühlhaus e Vardoulakis, 1987) como

$$J_2(\sigma_{ij}, \mu_{ij}) = J_2(s_{ij}, \mu_{ij}) = a_1 s_{ij} s_{ij} + a_2 s_{ij} s_{ji} + a_3 \mu_{ij} \mu_{ij} / L_f^2 \quad (3.102)$$

onde  $s_{ij}$  é o tensor desviador das tensões ( $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{kk} \delta_{ij} / 3$ ),  $L_f$  é o comprimento característico do material à flexão e  $a_i$  ( $i=1, 2$  e  $3$ ) são parâmetros do modelo. A expressão 3.102 teve origem na modelagem de problemas bidimensionais, onde não foram incorporados os possíveis efeitos tridimensionais gerados pelo comprimento característico do material à torção ( $L_t$ ). Este tratamento pode ser encontrado em Groen et al. (1994).

Considerando-se estado plano de deformações, as componentes de tensão e deformação podem ser, convenientemente, reunidas nos seguintes vetores

$$\{\sigma\}^T = \left[ \sigma_{11} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{21} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \mu_{13}/L_f \quad \mu_{23}/L_f \right] \quad (3.103)$$

$$\{\gamma\}^T = \left[ \gamma_{11} \quad \gamma_{12} \quad \gamma_{21} \quad \gamma_{22} \quad \gamma_{33} \quad \kappa_{13} L_f \quad \kappa_{23} L_f \right] \quad (3.104)$$

Nota-se que a deformação normal  $\gamma_{33}$  também foi incluída no vetor de deformação  $\{\gamma\}^T$ . Isto foi feito porque, embora esta componente de deformação seja nula sob condições de deformação plana durante todo o processo de carregamento, este não é necessariamente o caso para as contribuições elástica e plástica desta componente de deformação (de Borst, 1993). Percebe-se também a presença do comprimento



característico  $L_f$  nos vetores acima, isto ocorre para que todas as suas componentes tenham a mesma dimensão.

Dessa forma, pode-se reescrever a equação 3.102 na forma

$$J_2 = \frac{1}{2} \sigma_i P_{ij} \sigma_j \quad (3.105)$$

onde  $P_{ij}$  é dado por

$$[P] = \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & 0 & -1/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2a_1 & 2a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2a_2 & 2a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a_3 \end{bmatrix} \quad (3.106)$$

Na ausência de tensões-momento,  $\mu_{ij} = 0$  e  $s_{ij} = s_{ji}$ , a equação 3.102 reduz a

$$J_2 = (a_1 + a_2) s_{ij} s_{ij} \quad (3.107)$$

que implica na restrição

$$a_1 + a_2 = \frac{1}{2}, \quad (3.108)$$

a qual deve ser imposta tal que a expressão de  $J_2$  para o contínuo clássico possa ser recuperada.

Na literatura, encontram-se estudos sobre a escolha dos parâmetros  $a_i$  (de Borst, 1991, 1993; Mühlhaus e Vardoulakis, 1987). Aqui, adotam-se os valores sugeridos por de Borst (1991), sendo eles:  $a_1 = 1/4$ ,  $a_2 = 1/4$  e  $a_3 = 1/2$ . Para este conjunto de valores, observa-se a existência de dois estados de tensão não nulos, onde  $J_2$  se anula. São eles:

$$\{\sigma\}_1^T = \tau \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.109)$$

$$\{\sigma\}_2^T = \tau \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.110)$$

que correspondem, respectivamente, ao estado hidrostático de tensão e a um estado de tensão cuja componente de cisalhamento do tensor simétrico é nula (Lages, 1997).

Durante o fluxo plástico, a condição de consistência  $\dot{\lambda}f = 0$  (ou  $\dot{f} = 0$ ) deve ser atendida, isto significa que durante o carregamento plástico o estado de tensão corrente deve permanecer na superfície de carregamento corrente ( $f = 0$ ).

Substituindo-se a equação 3.105 em 3.101, notando-se que durante o fluxo plástico  $f = 0$  e adotando-se a regra de fluxo associativa (equação 3.100), tem-se para a deformação plástica infinitesimal

$$\dot{\gamma}_i^p = \frac{3\dot{\lambda}}{2\bar{\sigma}(\beta)} P_{ij} \sigma_j \quad (3.111)$$

A taxa de variação do parâmetro  $\beta$ , energeticamente conjugada à definição de  $J_2$  (de Borst, 1991), é dada por

$$\dot{\beta} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\gamma}_i^p P_{ij} \dot{\gamma}_j^p} \quad (3.112)$$

Substituindo-se a expressão 3.111 em 3.112 e observando-se algumas igualdades matriciais envolvendo a matriz P (ver de Borst (1991) e de Borst (1993)), tem-se

$$\dot{\beta} = \dot{\lambda} \quad (3.113)$$

O critério de carregamento-descarregamento é baseado nas condições de Kuhn-Tucker (Simo e Hughes, 1988)

$$(i) f \leq 0, \quad (ii) \dot{\lambda} \geq 0, \quad (iii) f \dot{\lambda} = 0 \quad (3.114)$$

onde a condição (iii) é conhecida como *condição de complementaridade* e é entendida da seguinte maneira: quando a função de plastificação é negativa ( $f < 0$ ), a taxa de variação do multiplicador plástico é zero ( $\dot{\lambda} = 0$ ), ocorrendo comportamento elástico, por outro lado, quando  $f = 0$ , ocorre fluxo plástico e  $\dot{\lambda} > 0$ . Uma condição de complementaridade adicional pode ser estabelecida:  $\dot{\lambda}f = 0$ , que é a *condição de consistência* citada anteriormente.

### 3.5.2 Algoritmo de Retorno

Um dos passos mais importantes na análise não-linear da teoria de plasticidade é a determinação do incremento de tensão e a atualização das variáveis internas,

para um dado incremento de deformação. Sendo assim, no processo de solução incremental, são utilizados algoritmos de retorno (Ortiz e Simo, 1986; Simo e Hughes, 1988), onde o procedimento padrão preditor-corretor é geralmente aplicado. Na primeira fase deste procedimento, utiliza-se um preditor elástico, onde admite-se que o incremento de deformações se dá totalmente no regime elástico e a forma incremental da relação constitutiva pode ser escrita como

$$\sigma_i^t = \sigma_i^0 + D_{ij}^e \Delta \gamma_j \quad (3.115)$$

onde  $\sigma_i^t$  é o preditor elástico para as tensões,  $\sigma_i^0$  é a tensão no início do passo,  $\Delta \gamma_j$  é o vetor total dos incrementos de deformação e  $D_{ij}^e$  é o tensor constitutivo elástico, o qual em formato matricial é dado por

$$[D^e] = \begin{bmatrix} \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} & 0 & 0 & \frac{2G\nu}{1-2\nu} & \frac{2G\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 \\ 0 & G + \alpha & G - \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G - \alpha & G + \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2G\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} & \frac{2G\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 \\ \frac{2G\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & \frac{2G\nu}{1-2\nu} & \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} \quad (3.116)$$

A tensão resultante, todavia, pode sair da superfície de plastificação corrente, isto é,  $f(\sigma_i^t, \beta^0) > 0$ , onde  $\beta^0$  é o parâmetro de endurecimento (ou amolecimento) corrente. Tal estado de tensão é inaceitável e deve ser retornado à superfície, verifica-se, então, a necessidade de uma correção plástica, que é a segunda fase deste procedimento.

Adota-se uma lei de encruamento linear, onde a tensão de escoamento corrente é uma função linear do parâmetro  $\beta$ , obtendo-se

$$\bar{\sigma}(\beta) = \sigma_y + h\beta \quad (3.117)$$

sendo  $\sigma_y$  a tensão de escoamento inicial, definida em um ensaio uniaxial de tensão, e  $h$  o módulo plástico.

Retornando-se à superfície de plastificação pela condição  $f(\sigma_i^n, \beta^n) = 0$ , onde o sobrescrito  $n$  denota um valor após a correção do fluxo plástico, expande-se a função de plastificação em série de Taylor na vizinhança do ponto  $(\sigma_i^t, \beta^0)$ :

$$f(\sigma_i, \beta) = f(\sigma_i^t, \beta^0) + \frac{\partial f}{\partial \sigma_j} \Big|_{(\sigma^t, \beta^0)} (\sigma_j - \sigma_j^t) + \frac{\partial f}{\partial \beta} \Big|_{(\sigma^t, \beta^0)} (\beta - \beta^0) + R(\sigma_i, \beta) = 0 \quad (3.118)$$

Demonstra-se (de Borst, 1991) que a função resíduo,  $R(\sigma_i, \beta)$ , anula-se para a superfície de plastificação de von Mises.

Desenvolvendo-se a equação 3.118 tem-se

$$\begin{aligned} f(\sigma_i, \beta) &= f(\sigma_i^t, \beta^0) + \frac{\partial f}{\partial \sigma_j} \Big|_{(\sigma^t, \beta^0)} (\sigma_j - \sigma_j^0 - D_{jk}^e \Delta \gamma_k) - h \Delta \beta = \\ &= f(\sigma_i^t, \beta^0) + \frac{\partial f}{\partial \sigma_j} \Big|_{(\sigma^t, \beta^0)} (\Delta \sigma_j - D_{jk}^e \Delta \gamma_k) - h \Delta \lambda = \\ &= f(\sigma_i^t, \beta^0) + \frac{\partial f}{\partial \sigma_j} \Big|_{(\sigma^t, \beta^0)} D_{jk}^e (\Delta \gamma_k^e - \Delta \gamma_k) - h \Delta \lambda = \\ &= f(\sigma_i^t, \beta^0) - \frac{\partial f}{\partial \sigma_j} \Big|_{(\sigma^t, \beta^0)} D_{jk}^e \Delta \gamma_k^p - h \Delta \lambda = \\ &= f(\sigma_i^t, \beta^0) - \Delta \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_j} \Big|_{(\sigma^t, \beta^0)} D_{jk}^e \frac{\partial f}{\partial \sigma_k} \Big|_{(\sigma^t, \beta^0)} - h \Delta \lambda = 0 \quad (3.119) \end{aligned}$$

O incremento do multiplicador plástico pode agora ser definido por meio da equação acima

$$\Delta \lambda = \frac{f(\sigma_i^t, \beta^0)}{h + \frac{\partial f}{\partial \sigma_j} \Big|_{(\sigma^t, \beta^0)} D_{jk}^e \frac{\partial f}{\partial \sigma_k} \Big|_{(\sigma^t, \beta^0)}} \quad (3.120)$$

Dessa forma, atualiza-se o parâmetro de endurecimento (ou amolecimento) através das seguintes expressões

$$\Delta \beta = \Delta \lambda \quad (3.121)$$

$$\beta^n = \beta^0 + \Delta \beta \quad (3.122)$$

A correção do estado de tensão é feita a partir da seguinte equação

$$\sigma_i^n = \sigma_i^0 + D_{ij}^e \Delta \gamma_j^e = \sigma_i^0 + D_{ij}^e (\Delta \gamma_j - \Delta \gamma_j^p) = \sigma_i^t - D_{ij}^e \Delta \gamma_j^p \quad (3.123)$$

Empregando-se o algoritmo regressivo de Euler (Simo e Hughes, 1988), define-se o incremento de deformações plásticas.

No desenvolvimento da equação 3.123, utilizam-se as equações 3.100 e 3.111, obtendo-se

$$\sigma_i^n = \sigma_i^t - \Delta\lambda D_{ij}^e \frac{\partial f}{\partial \sigma_j} \Big|_{(\sigma^n, \beta^n)} = \sigma_i^t - \frac{3\Delta\lambda}{2\bar{\sigma}(\beta^n)} D_{ij}^e P_{jk} \sigma_k^n \quad (3.124)$$

Reescrevendo-se o novo estado de tensão, em notação matricial, tem-se

$$\{\sigma^n\} = \left( [I] + \frac{3\Delta\lambda}{2\bar{\sigma}(\beta^n)} [D^e][P] \right)^{-1} \{\sigma^t\} \quad (3.125)$$

onde  $[I]$  simboliza a matriz identidade.

### 3.5.3 Módulo Tangente Elastoplástico Consistente

A solução das equações de equilíbrio não-lineares é freqüentemente baseada em métodos iterativos do tipo Newton-Raphson. Simo e Taylor (1985) apontaram que a perda de convergência quadrática para estes métodos ocorre principalmente devido à utilização do módulo tangente “contínuo”, que é contínuo no tempo e definido a partir do modelo constitutivo elastoplástico por meio da diferenciação da relação explícita incremental entre tensão e deformação, e mostraram a necessidade da dedução do módulo tangente elastoplástico consistente com o algoritmo numérico empregado para a atualização das tensões, onde uma seqüência discreta de intervalos de tempo (pseudo-tempo) são utilizados.

Para a definição deste módulo, diferencia-se a equação 3.124 com relação ao tempo. Adotando-se a notação matricial, obtém-se

$$\begin{aligned} \{\dot{\sigma}^n\} &= \{\dot{\sigma}^t\} + \frac{3\Delta\lambda}{2\bar{\sigma}^2} \frac{d\bar{\sigma}}{d\beta} \dot{\beta} [D^e][P]\{\sigma^n\} - \frac{3\Delta\lambda}{2\bar{\sigma}} [D^e][P]\{\dot{\sigma}^n\} = \\ &= [D^e](\{\dot{\gamma}\} - \{\dot{\gamma}^p\}) + \frac{3\Delta\lambda}{2\bar{\sigma}^2} h \dot{\beta} [D^e][P]\{\sigma^n\} - \frac{3\Delta\lambda}{2\bar{\sigma}} [D^e][P]\{\dot{\sigma}^n\} = \\ &= [D^e]\{\dot{\gamma}\} - \left( \frac{3\dot{\beta}}{2\bar{\sigma}} - \frac{3\Delta\lambda}{2\bar{\sigma}^2} h \dot{\beta} \right) [D^e][P]\{\sigma^n\} - \frac{3\Delta\lambda}{2\bar{\sigma}} [D^e][P]\{\dot{\sigma}^n\} \quad (3.126) \end{aligned}$$

Explicitando-se  $\{\dot{\gamma}\}$  e omitindo-se os sobrescritos  $n$ , por simplificação, tem-se

$$\{\dot{\gamma}\} = \left( [D^e]^{-1} + \frac{3\Delta\lambda}{2\bar{\sigma}} [P] \right) \{\dot{\sigma}\} + \frac{3\dot{\beta}}{2\bar{\sigma}^2} (\bar{\sigma} - h\Delta\beta) [P]\{\sigma\} \quad (3.127)$$

Aplica-se a condição de consistência  $\dot{f} = 0$  (Simo e Hughes, 1988) e chega-se a

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T \{\dot{\sigma}\} + \frac{\partial f}{\partial \beta} \dot{\beta} = 0 \quad (3.128)$$

$$\frac{3}{2\bar{\sigma}} \{\sigma\}^T [P] \{\dot{\sigma}\} - h\dot{\beta} = 0 \quad (3.129)$$

$$\dot{\beta} = \frac{3}{2h\bar{\sigma}} \{\sigma\}^T [P] \{\dot{\sigma}\} \quad (3.130)$$

Substituindo-se 3.130 na equação 3.127, chega-se a

$$\{\dot{\gamma}\} = [H]^{-1} \{\dot{\sigma}\} + \left( \frac{1}{h} - \frac{\Delta\beta}{\bar{\sigma}} \right) \left( \frac{3}{2\bar{\sigma}} \right)^2 ([P]\{\sigma\})([P]\{\sigma\})^T \{\dot{\sigma}\} \quad (3.131)$$

onde

$$[H]^{-1} = [D^e]^{-1} + \frac{3\Delta\beta}{2\bar{\sigma}} [P] \quad (3.132)$$

Para explicitar  $\{\dot{\sigma}\}$ , aplica-se a fórmula de Sherman-Morrison (Schweizerhof e Wriggers, 1986), obtendo-se

$$\{\dot{\sigma}\} = \left\{ [H] - \left( \frac{3}{2\bar{\sigma}} \right)^2 \frac{[H]([P]\{\sigma\})([P]\{\sigma\})^T [H]}{\left( \frac{1}{h} - \frac{\Delta\beta}{\bar{\sigma}} \right)^{-1} + \left( \frac{3}{2\bar{\sigma}} \right)^2 ([P]\{\sigma\})^T [H] ([P]\{\sigma\})} \right\} \{\dot{\gamma}\} \quad (3.133)$$

onde o termo entre chaves corresponde ao módulo tangente elastoplástico consistente.

### 3.6 O MEF para o Contínuo de Cosserat

A formulação do Método dos Elementos Finitos (MEF) para um contínuo de Cosserat é, em grande parte, idêntica àquela para um contínuo clássico. Portanto, aqui não são apresentados os detalhes do método, mas apenas mostradas as diferenças existentes para o caso bidimensional.

No MEF, o domínio do problema é dividido em sub-domínios de dimensões finitas, denominados elementos finitos. Escrevendo-se o campo de deslocamentos de cada elemento em função dos deslocamentos nodais, tem-se

$$\{\bar{u}\} = [N]\{u\} \quad (3.134)$$

onde  $[N]$  é a matriz das funções de forma do elemento,  $\{\bar{u}\}$  é o vetor de deslocamentos generalizados em um ponto qualquer no interior do elemento e  $\{u\}$  é o vetor de deslocamentos nodais generalizados. Para o contínuo de Cosserat, cada nó do elemento finito plano apresenta três graus de liberdade: deslocamento horizontal, deslocamento vertical e microrrotação em relação ao eixo perpendicular ao plano do elemento. Assim, o vetor de deslocamentos nodais e a matriz das funções de forma são dados por

$$\{u\}^T = \left[ u_1^1 \quad u_2^1 \quad \phi_3^1 \quad u_1^2 \quad u_2^2 \quad \phi_3^2 \quad \dots \quad u_1^{NN} \quad u_2^{NN} \quad \phi_3^{NN} \right] \quad (3.135)$$

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & & N_{NN} & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_{NN} & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & & 0 & 0 & N_{NN} \end{bmatrix} \quad (3.136)$$

onde NN representa o número de nós do elemento e cada  $N_i$  representa uma função das coordenadas naturais, unitária no nó  $i$  e nula nos demais nós, na forma convencional de elementos finitos.

As deformações são calculadas a partir dos deslocamentos como:

$$\{\gamma\} = [L]\{\bar{u}\} = [L][N]\{u\} = [B]\{u\} \quad (3.137)$$

onde  $\{\gamma\}$  é o vetor das componentes de deformação,  $[L]$  é a matriz de operadores diferenciais, distinta daquela do contínuo convencional, e  $[B]$  é a matriz que relaciona as deformações aos deslocamentos nodais.

O estado de tensão,  $\{\sigma\}$ , no elemento pode ser avaliado através das deformações e da matriz constitutiva  $[D]$ , definindo-se a relação

$$\{\sigma\} = [D]\{\gamma\} \quad (3.138)$$

As matrizes  $[B]$  e  $[D]$  são dependentes do tipo de análise do problema. A seguir, essas matrizes são apresentadas para os estados planos de tensão e de deformação.

### 3.6.1 Estado Plano de Tensão

$$\{\sigma\}^T = \left[ \sigma_{11} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{21} \quad \sigma_{22} \quad \mu_{13}/L_f \quad \mu_{23}/L_f \right] \quad (3.139)$$

$$\{\gamma\}^T = \left[ \gamma_{11} \quad \gamma_{12} \quad \gamma_{21} \quad \gamma_{22} \quad \kappa_{13}L_f \quad \kappa_{23}L_f \right] \quad (3.140)$$

com

$$\gamma_{33} = \frac{\nu}{\nu - 1}(\gamma_{11} + \gamma_{22}) \quad (3.141)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & 0 & N_{2,x} & 0 & 0 & N_{NN,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,x} & -N_1 & 0 & N_{2,x} & -N_2 & 0 & N_{NN,x} & -N_{NN} \\ N_{1,y} & 0 & N_1 & N_{2,y} & 0 & N_2 & \dots & N_{NN,y} & 0 & N_{NN} \\ 0 & N_{1,y} & 0 & 0 & N_{2,y} & 0 & 0 & N_{NN,y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_f N_{1,x} & 0 & 0 & L_f N_{2,x} & 0 & 0 & L_f N_{NN,x} & 0 \\ 0 & 0 & L_f N_{1,y} & 0 & 0 & L_f N_{2,y} & 0 & 0 & L_f N_{NN,y} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.142)$$

$$[D^e] = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & 0 & 0 & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 & 0 \\ 0 & G + \alpha & G - \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G - \alpha & G + \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 & 0 & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} \quad (3.143)$$

para o caso linear, elástico e isotrópico.

### 3.6.2 Estado Plano de Deformação

$$\{\sigma\}^T = \left[ \sigma_{11} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{21} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \mu_{13}/L_f \quad \mu_{23}/L_f \right] \quad (3.144)$$

$$\{\gamma\}^T = \left[ \gamma_{11} \quad \gamma_{12} \quad \gamma_{21} \quad \gamma_{22} \quad \gamma_{33} \quad \kappa_{13}L_f \quad \kappa_{23}L_f \right] \quad (3.145)$$



com

$$\sigma_{33} = \frac{2G\nu}{1-2\nu}(\gamma_{11} + \gamma_{22}) \quad (3.146)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & 0 & N_{2,x} & 0 & 0 & N_{NN,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,x} & -N_1 & 0 & N_{2,x} & -N_2 & 0 & N_{NN,x} & -N_{NN} \\ N_{1,y} & 0 & N_1 & N_{2,y} & 0 & N_2 & \dots & N_{NN,y} & 0 & N_{NN} \\ 0 & N_{1,y} & 0 & 0 & N_{2,y} & 0 & 0 & N_{NN,y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_f N_{1,x} & 0 & 0 & L_f N_{2,x} & 0 & 0 & 0 & L_f N_{NN,x} \\ 0 & 0 & L_f N_{1,y} & 0 & 0 & L_f N_{2,y} & 0 & 0 & 0 & L_f N_{NN,y} \end{bmatrix} \quad (3.147)$$

$$[D^e] = \begin{bmatrix} \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} & 0 & 0 & \frac{2G\nu}{1-2\nu} & \frac{2G\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 \\ 0 & G + \alpha & G - \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G - \alpha & G + \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2G\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} & \frac{2G\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 \\ \frac{2G\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & \frac{2G\nu}{1-2\nu} & \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} \quad (3.148)$$

para o caso linear, elástico e isotrópico.

# Capítulo 4

## Contínuo com Microexpansão

### 4.1 Introdução

Alguns autores (de Borst e Mühlhaus, 1992; Sluys, 1992) destacam que a utilização do contínuo de Cosserat não é adequada quando predomina o modo de abertura (modo I na linguagem de Mecânica da Fratura) nas localizações de deformações e sugerem o contínuo com microexpansão como solução para este problema.

O contínuo com microexpansão pertence à classe de contínuos micromórficos, apresentados anteriormente. Sua microestrutura não é tratada como rígida, como no caso do contínuo de Cosserat, mas pode apresentar, além de microrrotações, expansões (ou contrações) isotrópicas. Sua utilização é recomendada porque, além de aproveitar os benefícios trazidos pelo contínuo de Cosserat, o qual tem apresentado resultados satisfatórios para a modelagem de localização de deformações com predominância do modo de cisalhamento (de Borst, 1991, 1993; de Borst e Sluys, 1991; Ristinmaa e Vecchi, 1996; Lages, 1997), o contínuo com microexpansão permite considerar também a ocorrência de descontinuidades nos campos das deformações normais.

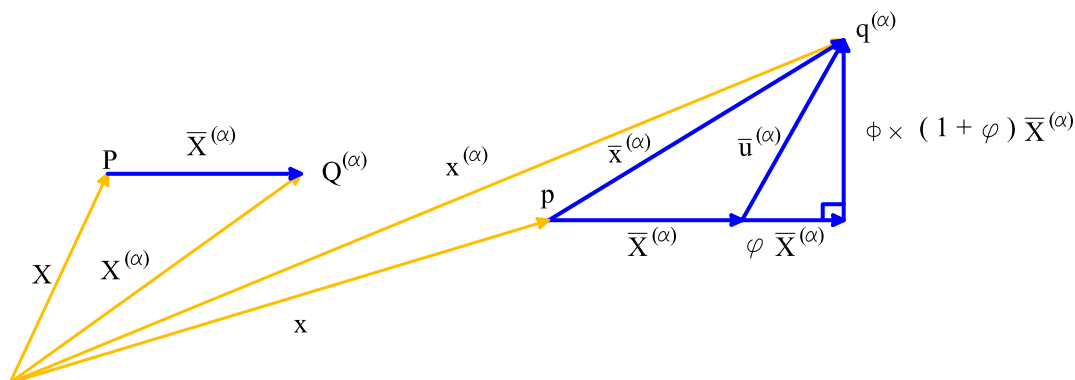
Neste capítulo, o contínuo com microexpansão é descrito para um meio elástico, linear e isotrópico. São ressaltadas as diferenças na formulação do Método dos Elementos Finitos deste contínuo em relação aos contínuos clássico e de Cosserat.

## 4.2 Teoria da Elasticidade para o Contínuo com Microexpansão

Nesta seção, apresenta-se a cinemática do contínuo com microexpansão com suas relações constitutivas elásticas e lineares. Após uma redefinição dos parâmetros elásticos do material, são obtidas as equações diferenciais de equilíbrio. Um exemplo analítico que utiliza esta teoria é apresentado no apêndice A.

### 4.2.1 Cinemática do Contínuo com Microexpansão

Uma vez que o contínuo com microexpansão é uma particularidade do contínuo micromórfico, sua cinemática é descrita aplicando-se uma restrição à cinemática da microestrutura do contínuo micromórfico. Esta restrição é feita de forma a descrever uma expansão (ou contração) isotrópica combinada com um movimento de corpo rígido correspondente à uma rotação em torno do centro de massa do macrovolume na configuração deformada (ponto  $\mathbf{p}$  na figura 4.1)



**Figura 4.1:** Cinemática do contínuo com microexpansão

De acordo com as equações 3.24 e 3.25, o tensor  $\Phi_{ij}$  deve ser definido de forma que represente a cinemática do contínuo com microexpansão, atendendo a restrição imposta acima. Neste contínuo, a partícula não é considerada como rígida, ela pode expandir (ou contrair) igualmente em todas as direções. Então, o tensor  $\Phi_{ij}$

possui uma parcela simétrica que corresponde ao escalar de expansão (ou contração) volumétrica  $\varphi$  e uma parcela anti-simétrica que corresponde às microrrotações  $\phi_k$ , equivalendo a

$$\Phi_{ij} = \varphi\delta_{ij} - (1 + \varphi)\epsilon_{ijk}\phi_k \quad (4.1)$$

onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker e  $\epsilon_{ijk}$  é o tensor alternante.

Desprezando-se o produto entre a microexpansão e a microrrotação na equação 4.1, chega-se a

$$\Phi_{ij} = \varphi\delta_{ij} - \epsilon_{ijk}\phi_k \quad (4.2)$$

Substituindo-se a equação 4.2 nas equações 3.24 e 3.25 obtém-se, juntamente com a equação 3.23, os novos tensores linearizados de deformação e de microdeformação

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (4.3)$$

$$\gamma_{ij} = u_{j,i} - \epsilon_{ijk}\phi_k + \varphi\delta_{ij} \quad (4.4)$$

$$\kappa_{ijk} = -\epsilon_{ijl}\phi_{l,k} + \varphi_{,k}\delta_{ij} \quad (4.5)$$

A parcela simétrica de  $\gamma_{ij}$  é dada por

$$\gamma_{(ij)} = \frac{1}{2}(\gamma_{ij} + \gamma_{ji}) = \varepsilon_{ij} + \varphi\delta_{ij} \quad (4.6)$$

Como  $\varepsilon_{ij}$  faz parte da parcela simétrica de  $\gamma_{ij}$ , a expressão 4.3 não será considerada entre as informações tensoriais de deformação. A microexpansão volumétrica  $\varphi$  e seu gradiente  $\varphi_{,i}$  são consideradas medidas de deformações independentes, resultando em

$$\gamma_{ij} = u_{j,i} - \epsilon_{ijk}\phi_k \quad (4.7)$$

$$\kappa_{ij} = \phi_{j,i} \quad (4.8)$$

$$\varphi \quad (4.9)$$

$$\varphi_{,i} \quad (4.10)$$

onde somente as nove componentes independentes do tensor  $\kappa_{ijk}$  (equação 4.5) foram consideradas. As equações de 4.7 a 4.10 representam as medidas tensoriais de deformação para o contínuo com microexpansão. Percebe-se que os dois primeiros tensores já são conhecidos da teoria do contínuo micropolar e tudo o que se sabe sobre eles continua válido para o contínuo com microexpansão.

## 4.2.2 Relações Constitutivas

Assim como foi feito para o contínuo micropolar, as medidas de tensão são associadas às de deformação por meio da densidade de energia de deformação  $U_0$ , como

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{ij}}, \quad \mu_{ij} = \frac{\partial U_0}{\partial \kappa_{ij}}, \quad \psi = \frac{\partial U_0}{\partial \varphi}, \quad \lambda_i = \frac{\partial U_0}{\partial \varphi_{,i}}, \quad (4.11)$$

onde as componentes do tensor de tensão  $\sigma_{ij}$  e o escalar de microtensão  $\psi$  possuem dimensão de força por unidade de área. As componentes do tensor de tensão-momento  $\mu_{ij}$  possuem dimensão de momento por unidade de área e as do vetor de microforça  $\lambda_i$  possuem dimensão de força por unidade de comprimento.

Em analogia à elasticidade clássica, para uma relação constitutiva linear, na ausência de “tensões” e “deformações” iniciais,  $U_0$  adquire o seguinte formato

$$\begin{aligned} U_0 = & \frac{1}{2} A_{ijkl} \gamma_{ij} \gamma_{kl} + B_{ijkl} \gamma_{ij} \kappa_{kl} + C_{ij} \gamma_{ij} \varphi + L_{ijk} \gamma_{ij} \varphi_{,k} + \frac{1}{2} E_{ijkl} \kappa_{ij} \kappa_{kl} \\ & + F_{ij} \kappa_{ij} \varphi + G_{ijk} \kappa_{ij} \varphi_{,k} + \frac{1}{2} H \varphi^2 + I_i \varphi \varphi_{,i} + \frac{1}{2} J_{ij} \varphi_{,i} \varphi_{,j} \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde  $A_{ijkl}$ ,  $B_{ijkl}$ ,  $C_{ij}$ ,  $L_{ijk}$ ,  $E_{ijkl}$ ,  $F_{ij}$ ,  $G_{ijk}$ ,  $H$ ,  $I_i$  e  $J_{ij}$  são os tensores constitutivos do material.

Considerando a isotropia do material com relação às transformações próprias e impróprias no sistema de coordenadas, reduz-se o número de parâmetros do material. Com isto, verifica-se que os tensores constitutivos  $B_{ijkl}$ ,  $L_{ijk}$ ,  $F_{ij}$ ,  $G_{ijk}$  e  $I_i$  se anulam

e os demais são dados por

$$A_{ijkl} = A_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + A_2 \delta_{ik} \delta_{jl} + A_3 \delta_{il} \delta_{jk} \quad (4.13)$$

$$C_{ij} = C \delta_{ij} \quad (4.14)$$

$$E_{ijkl} = E_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + E_2 \delta_{ik} \delta_{jl} + E_3 \delta_{il} \delta_{jk} \quad (4.15)$$

$$J_{ij} = J \delta_{ij} \quad (4.16)$$

Retornando-se às equações 4.11 e substituindo-se o formato resultante de  $U_0$ , obtém-se

$$\sigma_{ij} = A_1 \delta_{ij} \gamma_{kk} + A_2 \gamma_{ij} + A_3 \gamma_{ji} + C \delta_{ij} \varphi \quad (4.17)$$

$$\mu_{ij} = E_1 \delta_{ij} \kappa_{kk} + E_2 \kappa_{ij} + E_3 \kappa_{ji} \quad (4.18)$$

$$\psi = C \gamma_{ii} + H \varphi \quad (4.19)$$

$$\lambda_i = J \varphi_{,i} \quad (4.20)$$

onde  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $C$ ,  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$ ,  $H$  e  $J$  são os nove parâmetros necessários para caracterização do material elástico, linear e isotrópico no contínuo com microexpansão.

Os parâmetros  $A_i$ ,  $C$  e  $H$  possuem dimensões de força por unidade de área e os parâmetros  $E_i$  e  $J$  possuem dimensões de força.

Impõe-se que a matriz constitutiva seja positiva definida a fim de garantir a positividade da densidade de energia de deformação, obtendo-se, assim, as seguintes restrições para os parâmetros elásticos do material:

$$(3A_1 + A_2 + A_3)H > 3C^2$$

$$H > 0 \quad e \quad J > 0$$

$$A_2 + A_3 > 0$$

$$A_2 - A_3 > 0 \quad (4.21)$$

$$3E_1 + E_2 + E_3 > 0$$

$$E_2 + E_3 > 0$$

$$E_2 - E_3 > 0$$

### 4.2.3 Redefinição dos Parâmetros Elásticos do Material

Para definir alguns parâmetros elásticos do material no contínuo com micro-expansão, uma barra, cujo eixo longitudinal é definido ao longo do eixo  $x_1$ , é considerada estar submetida ao estado de tensão  $\sigma_{11} = \bar{\sigma}_{11}$  e demais componentes nulas. Utilizando as relações constitutivas em 4.17 e 4.19 e considerando  $\sigma_{22} = 0$ ,  $\sigma_{33} = 0$  e  $\psi = 0$  obtém-se

$$\bar{\sigma}_{11} = (A_1 + A_2 + A_3)\gamma_{11} + A_1\gamma_{22} + A_1\gamma_{33} + C\varphi \quad (4.22)$$

$$0 = A_1\gamma_{11} + (A_1 + A_2 + A_3)\gamma_{22} + A_1\gamma_{33} + C\varphi \quad (4.23)$$

$$0 = A_1\gamma_{11} + A_1\gamma_{22} + (A_1 + A_2 + A_3)\gamma_{33} + C\varphi \quad (4.24)$$

$$0 = C(\gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33}) + H\varphi \quad (4.25)$$

Definindo o módulo de elasticidade longitudinal  $E$ , o coeficiente de Poisson  $\nu$ , as constantes de Lamé ( $G$  e  $\lambda$ ) e o módulo de cisalhamento rotacional  $\alpha$ , tal como foi feito para o contínuo de Cosserat, chega-se a

$$A_1 = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} + \frac{C^2}{H} = \lambda + \frac{C^2}{H} \quad (4.26)$$

$$A_2 = \frac{E}{2(1+\nu)} + \alpha = G + \alpha \quad (4.27)$$

$$A_3 = \frac{E}{2(1+\nu)} - \alpha = G - \alpha \quad (4.28)$$

Percebe-se que as expressões para  $A_2$  e  $A_3$  são as mesmas obtidas para o contínuo micropolar.

Para um melhor entendimento dos resultados acima, tomam-se as parcelas simétrica e anti-simétrica do tensor  $\sigma_{ij}$  na equação 4.17. Na equação de  $\sigma_{(ij)}$  (tensor simétrico de tensão), introduz-se  $\gamma_{(ij)}$  (tensor simétrico de deformação)

$$\sigma_{(ij)} = \frac{\sigma_{ij} + \sigma_{ji}}{2} = A_1\delta_{ij}\gamma_{kk} + (A_2 + A_3)\gamma_{(ij)} + C\delta_{ij}\varphi \quad (4.29)$$

Como  $\gamma_{(ij)} = \varepsilon_{ij}$  (tensor simétrico de deformação no contínuo clássico), de acordo com a definição de  $\gamma_{ij}$  na equação 4.7, iguala-se a equação anterior com a equação

das tensões do contínuo clássico

$$\sigma_{(ij)} = A_1 \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + (A_2 + A_3) \varepsilon_{ij} + C \delta_{ij} \varphi = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2G \varepsilon_{ij} \quad (4.30)$$

Daqui percebe-se que

$$A_1 \varepsilon_{kk} + C \varphi = \lambda \varepsilon_{kk} \quad (4.31)$$

e  $A_2 + A_3 = 2G$  como consta nas equações 4.27 e 4.28.

Tomando-se a equação 4.25 e substituindo  $\gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33} = \gamma_{kk} = \varepsilon_{kk}$ , tem-se

$$0 = C \varepsilon_{kk} + H \varphi \quad (4.32)$$

ou

$$\varepsilon_{kk} = \frac{-H \varphi}{C} \quad (4.33)$$

Substituindo este resultado na equação 4.31, tem-se

$$A_1 = \lambda + \frac{C^2}{H} \quad (4.34)$$

como consta em 4.26.

Desenvolvendo-se a equação 4.17 para  $\sigma_{[ij]}$  (tensor anti-simétrico de tensão) e introduzindo-se  $\gamma_{[ij]}$  (tensor anti-simétrico de deformação) no resultado obtido, fica

$$\sigma_{[ij]} = \frac{\sigma_{ij} - \sigma_{ji}}{2} = (A_2 - A_3) \gamma_{[ij]} = (A_2 - A_3) (\omega_k - \epsilon_{ijk} \phi_k) \quad (4.35)$$

sendo  $(A_2 - A_3) = 2\alpha$ , assim como no contínuo micropolar.

Por meio das equações 4.17 e 4.19, pode-se notar que o parâmetro  $H$  relaciona o escalar de microtensão  $\psi$  com a microexpansão  $\varphi$ , enquanto o parâmetro  $C$  combina os efeitos da macro e da microescala, fornecendo informações sobre como os efeitos microscópicos, que têm origem na microexpansão, afetam o comportamento macroscópico e também sobre como as microtensões são influenciadas pelas deformações macroscópicas. A influência destes parâmetros em problemas lineares e não-lineares ainda são fontes de estudo na literatura (Lages, 1997; Kirchner e Steinmann, 2007) e geralmente seus valores são baseados no módulo volumétrico



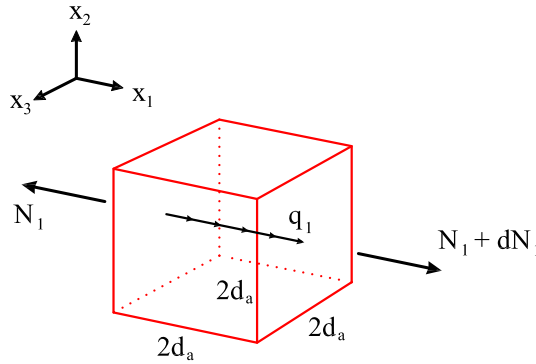
$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$  macroscópico, pois esses parâmetros estão relacionados com a expansão volumétrica, microtensão e com as componentes normais do tensor de tensão.

Os parâmetros  $E_1$ ,  $E_2$  e  $E_3$  são obtidos seguindo-se o mesmo raciocínio desenvolvido no capítulo 3 para a obtenção dos parâmetros  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$ , chegando-se aos mesmos resultados expressos pelas equações 3.80, 3.81 e 3.82. Mantém-se também os significados e expressões para os parâmetros  $L_f$ ,  $L_t$  e  $\eta$ .

Para a determinação do parâmetro  $J$ , supõe-se que, na figura 4.2, esteja representado um volume de controle com o formato de um cubo, cujo comprimento da aresta é igual a  $2d_a$ , submetido a um carregamento distribuído por unidade de comprimento  $q_1$  na direção  $x_1$  (Lages, 1997). Assim sendo, é possível a seguinte relação:

$$\gamma_v = \frac{\gamma_{ii}}{3} = \frac{1-2\nu}{12Ed_a^2}(-q_1x_1 + k) \quad (4.36)$$

onde  $\gamma_v$  é a deformação volumétrica e  $k$  é uma constante de integração.



**Figura 4.2:** Introdução do parâmetro elástico  $d_a$  do material

Derivando-se a equação 4.36 com relação a  $x_1$  e explicitando-se o carregamento distribuído, tem-se

$$-q_1 = \frac{12Ed_a^2}{1-2\nu} \frac{\partial \gamma_v}{\partial x_1} \quad (4.37)$$

Tomando-se a equação constitutiva 4.20 na direção  $x_1$ , tem-se

$$\lambda_1 = J\varphi_{,1} \quad (4.38)$$

e comparando-se com 4.37, percebe-se que

$$J = \frac{12Ed_a^2}{1-2\nu} = 2GL_a^2 \quad (4.39)$$

onde

$$L_a^2 = 12 \frac{1+\nu}{1-2\nu} d_a^2 \quad (4.40)$$

e  $L_a$  é denominado *comprimento característico do material à tração*.

Os parâmetros  $A_1, A_2, A_3, E_1, E_2, E_3$  e  $J$  foram definidos em função das grandezas  $E, \nu, L_f, \alpha, L_t, \eta$  e  $L_a$ . Agora, estas grandezas são, juntamente com  $H$  e  $C$ , definidas como os parâmetros elásticos do material com microexpansão isotrópico.

As equações 4.21 podem ser escritas como

$$-1 < \nu < \frac{1}{2} \quad (4.41a)$$

$$H > 0 \quad (4.41b)$$

$$\frac{E}{1+\nu} > 0 \quad (4.41c)$$

$$\alpha > 0 \quad (4.41d)$$

$$4L_t^2 - 3L_f^2 < \frac{2GL_f^2L_t^2}{\eta} \quad (4.41e)$$

$$\eta > \frac{GL_f^2}{2} \quad (4.41f)$$

#### 4.2.4 Equações Diferenciais de Equilíbrio

Para determinar as equações diferenciais de equilíbrio, considera-se um problema de valor de contorno para um contínuo com microexpansão, de volume  $V$  e superfície  $S$ , sujeito à ação dos vetores prescritos de força de volume  $\bar{f}_i$ , de momento de volume  $\bar{l}_i$  e de microforça de volume  $\bar{g}_i$ .

As condições de contorno do problema são:

$$\sigma_{ji}n_j = \bar{t}_i \text{ em } S_t \quad \text{ou} \quad u_i = \bar{u}_i \text{ em } S_u \quad (4.42)$$

$$\mu_{ji}n_j = \bar{m}_i \text{ em } S_m \quad \text{ou} \quad \phi_i = \bar{\phi}_i \text{ em } S_\phi \quad (4.43)$$

$$\lambda_j n_j = \bar{\lambda} \text{ em } S_\lambda \quad \text{ou} \quad \varphi = \bar{\varphi} \text{ em } S_\varphi \quad (4.44)$$

onde  $S_t$ ,  $S_m$  e  $S_\lambda$  são as partes da superfície S onde, respectivamente, os vetores de tensão  $\bar{t}_i$ , de tensão-momento  $\bar{m}_i$  e do escalar de microforça de superfície  $\bar{\lambda}$  são prescritos e agem num elemento de superfície de normal unitária  $n_j$ . Por outro lado,  $S_u$ ,  $S_\phi$  e  $S_\varphi$  são as regiões da superfície S onde prescrevem-se, respectivamente, os deslocamentos  $\bar{u}_i$ , as microrrotações  $\bar{\phi}_i$  e a microexpansão  $\bar{\varphi}$ .

Aplicando-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais

$$\delta W_{int} = \delta W_{ext} \quad (4.45)$$

e incluindo-se as contribuições das novas parcelas do contínuo com microexpansão nos trabalhos virtuais das ações internas  $\delta W_{int}$  e externas  $\delta W_{ext}$ , obtém-se

$$\delta W_{int} = \int_V \sigma_{ij} \delta \gamma_{ij} dV + \int_V \mu_{ij} \delta \kappa_{ij} dV + \int_V \psi \delta \varphi dV + \int_V \lambda_i \delta \varphi_{,i} dV \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} \delta W_{ext} &= \int_V \bar{f}_i \delta u_i dV + \int_V \bar{l}_i \delta \phi_i dV + \int_V \bar{g} \delta \varphi dV + \int_{S_t} \bar{t}_i \delta u_i dS + \\ &+ \int_{S_m} \bar{m}_i \delta \phi_i dS + \int_{S_\lambda} \bar{\lambda} \delta \varphi dS \end{aligned} \quad (4.47)$$

Utilizando-se as equações 4.7, 4.8 e desenvolvendo-se a parcela de trabalho interno em função dos campos virtuais de deslocamentos, de microrrotações e de microexpansão, tem-se

$$\delta W_{int} = \int_V \sigma_{ij} (\delta u_{j,i} - \epsilon_{ijk} \delta \phi_k) dV + \int_V \mu_{ij} \delta \phi_{j,i} dV + \int_V \psi \delta \varphi dV + \int_V \lambda_i \delta \varphi_{,i} dV \quad (4.48)$$

Empregando-se o teorema de Green-Gauss, obtém-se

$$\begin{aligned} \delta W_{int} &= \int_S \sigma_{ij} n_i \delta u_j dS - \int_V \sigma_{ij,i} \delta u_j dV - \int_V \epsilon_{ijk} \sigma_{ij} \delta \phi_k dV + \int_S \mu_{ij} n_i \delta \phi_j dS + \\ &- \int_V \mu_{ij,i} \delta \phi_j dV + \int_V \psi \delta \varphi dV + \int_S \lambda_i n_i \delta \varphi dS - \int_V \lambda_{i,i} \delta \varphi dV \end{aligned} \quad (4.49)$$

Igualando-se as equações 4.47 e 4.49, e agrupando-se os termos em comum, tem-se

$$\begin{aligned} & \int_V (\sigma_{ji,j} + \bar{f}_i) \delta u_i dV + \int_V (\mu_{ji,j} + \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} + \bar{l}_i) \delta \phi_i dV + \int_V (\lambda_{i,i} - \psi + \bar{g}) \delta \varphi dV + \\ & + \int_S (\bar{t}_i - \sigma_{ji} n_j) \delta u_i dS + \int_S (\bar{m}_i - \mu_{ji} n_j) \delta \phi_i dS + \int_S (\bar{\lambda} - \lambda_i n_i) \delta \varphi dS = 0 \end{aligned} \quad (4.50)$$

Uma vez que a equação 4.50 deve ser satisfeita para quaisquer funções cinematicamente admissíveis, considerando-se deslocamentos, microrrotações e microexpansões, conclui-se que

$$\sigma_{ji,j} + \bar{f}_i = 0 \quad (4.51)$$

$$\mu_{ji,j} + \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} + \bar{l}_i = 0 \quad (4.52)$$

$$\lambda_{i,i} - \psi + \bar{g} = 0 \quad (4.53)$$

correspondem às equações diferenciais de equilíbrio.

Para reescrever as equações diferenciais de equilíbrio em função dos campos de deslocamentos, de microrrotações e de microexpansões utilizam-se as medidas de deformação (equações 4.7 e 4.8), as relações constitutivas (equações 4.17, 4.18, 4.19 e 4.20) e as equações diferenciais de equilíbrio (equações 4.51, 4.52 e 4.53), obtendo-se

$$(A_1 + A_3) u_{j,ji} + A_2 u_{i,jj} + (A_2 - A_3) \epsilon_{ijk} \phi_{k,j} + C \varphi_{,i} + \bar{f}_i = 0 \quad (4.54)$$

$$(E_1 + E_3) \phi_{j,ji} + E_2 \phi_{i,jj} + (A_2 - A_3) \epsilon_{ijk} u_{k,j} - 2(A_2 - A_3) \phi_i + \bar{l}_i = 0 \quad (4.55)$$

$$J \varphi_{,ii} - C u_{i,i} - H \varphi + \bar{g} = 0 \quad (4.56)$$

À medida que o parâmetro  $J$  se aproxima de zero (ou  $L_a \rightarrow 0$ ), observa-se, pela equação 4.56, que a microexpansão tende ao valor

$$\varphi = \frac{-C}{H} u_{i,i} + \frac{\bar{g}}{H} \quad (4.57)$$

e substituindo-se em 4.54, faz com que o parâmetro  $A_1$  recupere seu valor do contínuo de Cosserat (ou micropolar). Assim, juntamente com a equação 4.55 recairiam nas equações deste contínuo.

Outra forma de fazer o contínuo com microexpansão se comportar como o micropolar é deixar o valor do parâmetro  $H$  tender ao infinito, o que torna a microexpansão nula, utilizando-se a equação 4.56, e novamente  $A_1$  recairia ao seu valor da teoria micropolar.

Mais ainda, anulando-se o valor do parâmetro  $C$ , as equações 4.54 e 4.55 corresponderiam àquelas do contínuo micropolar e estariam desacopladas de 4.56 (Lages, 1997).

### 4.3 O MEF para o Contínuo com Microexpansão

A formulação do Método dos Elementos Finitos (MEF) para um contínuo com microexpansão é, em grande parte, idêntica àquela para um contínuo micropolar (ver seção 3.6) e, aqui, apenas são mostradas as diferenças existentes para o caso bidimensional.

Para o contínuo com microexpansão, cada nó do elemento finito plano apresenta quatro graus de liberdade: deslocamento horizontal, deslocamento vertical, microrrotação em relação ao eixo perpendicular ao plano do elemento e microexpansão. Assim, o vetor de deslocamentos nodais e a matriz das funções de forma são dados por

$$\{u\}^T = \left[ u_1^1 \quad u_2^1 \quad \phi_3^1 \quad \varphi^1 \quad u_1^2 \quad u_2^2 \quad \phi_3^2 \quad \varphi^2 \quad \dots \quad u_1^{NN} \quad u_2^{NN} \quad \phi_3^{NN} \quad \varphi^{NN} \right] \quad (4.58)$$

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & & N_{NN} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & N_{NN} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & & 0 & 0 & N_{NN} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 & & 0 & 0 & 0 & N_{NN} \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

onde  $NN$  representa o número de nós do elemento e cada  $N_i$  representa uma função das coordenadas naturais, unitária no nó  $i$  e nula nos demais nós, na forma convencional de elementos finitos.

A seguir, são apresentados os vetores generalizados de tensão e deformação e as matrizes de incidência cinemática [B] e constitutiva [D] para os estados planos de tensão e de deformação.

### 4.3.1 Estado Plano de Tensão

$$\{\sigma\}^T = \left[ \sigma_{11} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{21} \quad \sigma_{22} \quad \psi \quad \lambda_1/L_a \quad \lambda_2/L_a \quad \mu_{13}/L_f \quad \mu_{23}/L_f \right] \quad (4.60)$$

$$\{\gamma\}^T = \left[ \gamma_{11} \quad \gamma_{12} \quad \gamma_{21} \quad \gamma_{22} \quad \varphi \quad \varphi_{,1}L_a \quad \varphi_{,2}L_a \quad \kappa_{13}L_f \quad \kappa_{23}L_f \right] \quad (4.61)$$

com

$$\gamma_{33} = - \frac{\left( \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} + \frac{C^2}{H} \right) (\gamma_{11} + \gamma_{22}) + C\varphi}{\left( \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} + \frac{C^2}{H} \right)} \quad (4.62)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & 0 & 0 & N_{NN,x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,x} & -N_1 & 0 & 0 & N_{NN,x} & -N_{NN} & 0 \\ N_{1,y} & 0 & N_1 & 0 & \dots & N_{NN,y} & 0 & N_{NN} \\ 0 & N_{1,y} & 0 & 0 & 0 & N_{NN,y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & N_{NN} \\ 0 & 0 & 0 & L_a N_{1,x} & 0 & 0 & 0 & L_a N_{NN,x} \\ 0 & 0 & 0 & L_a N_{1,y} & 0 & 0 & 0 & L_a N_{NN,y} \\ 0 & 0 & L_f N_{1,x} & 0 & 0 & 0 & L_f N_{NN,x} & 0 \\ 0 & 0 & L_f N_{1,y} & 0 & 0 & 0 & L_f N_{NN,y} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

$$[D^e] = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & d_2 & d_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G + \alpha & G - \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G - \alpha & G + \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_2 & 0 & 0 & d_1 & d_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_3 & 0 & 0 & d_3 & d_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

onde  $[D^e]$  refere-se ao caso elástico, linear e isotrópico e as constantes  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_3$  e  $d_4$ , valem

$$d_1 = \frac{2EC^2(1+\nu)(1-2\nu) + E^2H}{C^2(1+\nu)^2(1-2\nu) + EH(1-\nu^2)} \quad (4.65)$$

$$d_2 = \frac{EC^2(1+\nu)(1-2\nu) + E^2H\nu}{C^2(1+\nu)^2(1-2\nu) + EH(1-\nu^2)} \quad (4.66)$$

$$d_3 = \frac{CEH(1-2\nu)}{C^2(1+\nu)(1-2\nu) + EH(1-\nu)} \quad (4.67)$$

$$d_4 = \frac{EH^2(1-\nu)}{C^2(1+\nu)(1-2\nu) + EH(1-\nu)} \quad (4.68)$$

### 4.3.2 Estado Plano de Deformação

$$\{\sigma\}^T = \left[ \sigma_{11} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{21} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \psi \quad \lambda_1/L_a \quad \lambda_2/L_a \quad \mu_{13}/L_f \quad \mu_{23}/L_f \right] \quad (4.69)$$

$$\{\gamma\}^T = \left[ \gamma_{11} \quad \gamma_{12} \quad \gamma_{21} \quad \gamma_{22} \quad \gamma_{33} \quad \varphi \quad \varphi_{,1}L_a \quad \varphi_{,2}L_a \quad \kappa_{13}L_f \quad \kappa_{23}L_f \right] \quad (4.70)$$

com

$$\sigma_{33} = \left( \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} + \frac{C^2}{H} \right) (\gamma_{11} + \gamma_{22}) + C\varphi \quad (4.71)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & 0 & 0 & N_{NN,x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,x} & -N_1 & 0 & 0 & N_{NN,x} & -N_{NN} & 0 \\ N_{1,y} & 0 & N_1 & 0 & \dots & N_{NN,y} & 0 & N_{NN} \\ 0 & N_{1,y} & 0 & 0 & 0 & N_{NN,y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & N_{NN} \\ 0 & 0 & 0 & L_a N_{1,x} & 0 & 0 & 0 & L_a N_{NN,x} \\ 0 & 0 & 0 & L_a N_{1,y} & 0 & 0 & 0 & L_a N_{NN,y} \\ 0 & 0 & L_f N_{1,x} & 0 & 0 & 0 & L_f N_{NN,x} & 0 \\ 0 & 0 & L_f N_{1,y} & 0 & 0 & 0 & L_f N_{NN,y} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

$$[D^e] = \begin{bmatrix} d_5 & 0 & 0 & d_6 & d_6 & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G + \alpha & G - \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G - \alpha & G + \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_6 & 0 & 0 & d_5 & d_6 & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_6 & 0 & 0 & d_6 & d_5 & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C & 0 & 0 & C & C & H & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

onde  $[D^e]$  refere-se ao caso elástico, linear e isotrópico e as constantes  $d_5$  e  $d_6$ , valem

$$d_5 = \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} + \frac{C^2}{H} \quad (4.74)$$

$$d_6 = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} + \frac{C^2}{H} \quad (4.75)$$



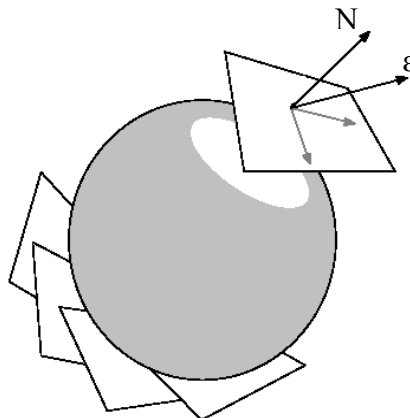
# Capítulo 5

## Modelo Constitutivo de Microplanos para o Contínuo Clássico

### 5.1 Introdução

Tradicionalmente, os modelos constitutivos macroscópicos são formulados com base em relações totais ou incrementais entre as componentes dos tensores de tensão e deformação, usando a teoria de invariantes tensoriais. Esses modelos apresentam dificuldades de prever de forma realista o comportamento de materiais, tais como o concreto, que possuem microestrutura extremamente heterogênea e que desenvolvem dano anisotrópico durante o processo de carregamento, pois torna-se inviável identificar as componentes dos tensores capazes de representar tal comportamento. Na tentativa de superar essas dificuldades, o modelo constitutivo de microplanos tem se apresentado como uma alternativa para a modelagem de meios parcialmente frágeis heterogêneos, uma vez que neste as propriedades dos materiais são descritas por relações tensão-deformação em planos de várias orientações, imaginados representativos da microestrutura do material. As restrições de invariância tensorial não necessitam ser diretamente impostas nas relações constitutivas, elas são automaticamente satisfeitas pela superposição adequada das respostas dos microplanos de todas as orientações.

Sobre uma esfera com centro no ponto material, são gerados vários planos (microplanos) de orientação arbitrária, conforme mostra a figura 5.1. Conhecendo-se as deformações de um ponto material, através dos modelos de microplanos, é possível obter as tensões, bem como o estado de degradação do material neste ponto, avaliado pelo tensor constitutivo tangente.

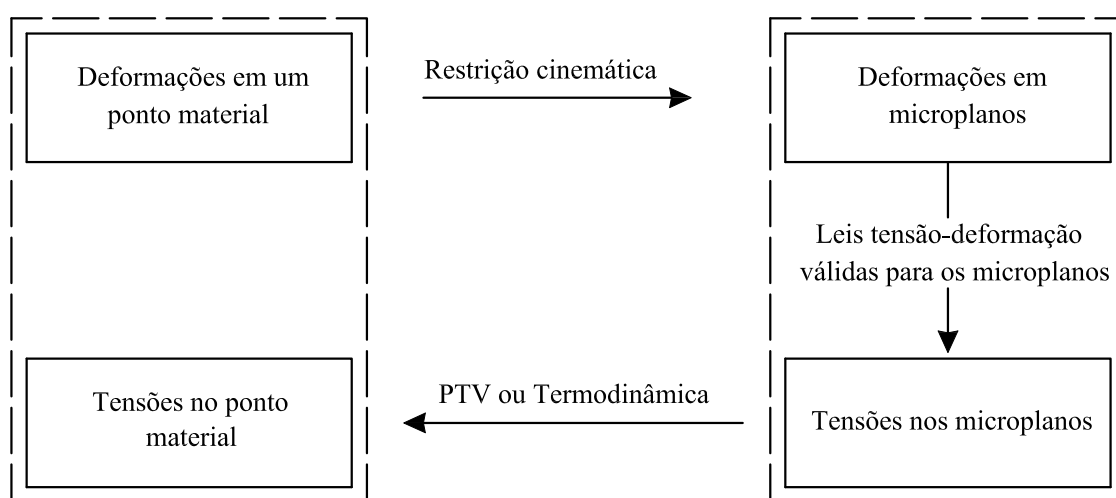


**Figura 5.1:** Indicação dos microplanos sobre uma esfera de raio unitário (Ozbolt et al., 2001)

O esquema de funcionamento dos modelos de microplanos está representado na figura 5.2. Neste esquema, as deformações nos microplanos correspondem à aplicação de uma restrição cinemática ao tensor macroscópico de deformações. Através de relações tensão-deformação, válidas para os microplanos, calculam-se as tensões em cada microplano. Depois de aplicar o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) ou as Leis da Termodinâmica, obtém-se o estado macroscópico de tensões e uma avaliação da degradação da rigidez (Silva, 2002).

Neste capítulo, são apresentados dois modelos de microplanos com o contínuo clássico e a integração numérica para a obtenção das grandezas macroscópicas. O primeiro é o *Modelo de Microplanos com Relaxação Cinemática* (Ozbolt et al., 2001), que utiliza restrição cinemática com componentes de deformação volumétrica, desviadora e tangencial nos microplanos (decomposição V-D-T), leis constitutivas nos

microplanos obtidas experimentalmente e o PTV para o processo de homogeneização. O segundo é o *Modelo de Microplanos com Deformação Equivalente* (Leukart e Ramm, 2006), que utiliza restrição cinemática com componentes de deformação volumétrica e desviadora nos microplanos (decomposição V-D), leis constitutivas nos microplanos obtidas por leis de dano em função de deformações equivalentes e um processo termodinamicamente consistente para a homogeneização. Estes termos são esclarecidos na revisão histórica feita a seguir.



**Figura 5.2:** Esquema de funcionamento dos modelos de microplanos

## 5.2 Histórico

A idéia de definir um comportamento inelástico independente para diversos planos com diferentes orientações dentro do material, e então, de alguma forma, superpor a contribuição de todos estes planos, tem uma longa história.

A idéia inicial de Taylor (1938) baseava-se na caracterização do comportamento constitutivo de metais policristalinos por meio de relações entre os vetores de tensão e deformação agindo em planos de todas as orientações possíveis dentro do material e na determinação dos tensores macroscópicos de tensão e deformação como um somatório (ou resultante) de todos estes vetores sob a consideração de uma restrição.

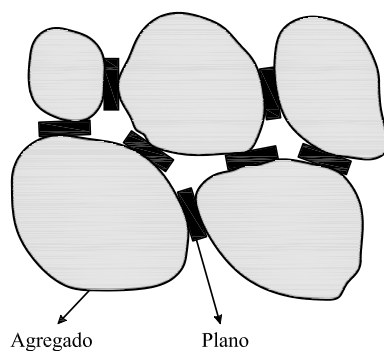
A idéia de Taylor foi logo reconhecida como o modo mais realista para descrever

a plasticidade de metais, porém a falta de recursos da época impediu sua aplicação prática. Batdorf e Budianski (1949) foram os primeiros a adotar a idéia de Taylor e desenvolver um modelo para plasticidade de metais policristalinos, onde o fenômeno plástico foi assumido ocorrer em vários planos definidos pela geometria da estrutura cristalina. Ao longo dos anos, muitos outros pesquisadores refinaram ou modificaram esta aproximação para metais, enquanto outros estenderam a idéia para a obtenção de respostas inelásticas de solos e rochas.

Em todos os modelos anteriores foi considerado que o vetor de tensão, que age em vários planos no material, fosse obtido pela projeção do tensor de tensão macroscópico, tal consideração é conhecida como *Restrição Estática*.

Há duas décadas atrás, esta aproximação foi estendida por Bazant e Oh (1983), (1985) e Bazant e Gambarova (1984) para representar o comportamento de materiais parcialmente frágeis. Nestes trabalhos, o nome *Modelo de Microplanos* foi adotado para demonstrar que leis constitutivas definidas em determinadas orientações do material não se restringem somente à plasticidade de metais, mas podem ser aplicadas a qualquer tipo de comportamento do material.

Pode-se compreender o sentido físico desta proposta observando-se o comportamento do concreto. Este é formado por uma matriz e agregados. Assim, a interface entre a matriz e o agregado é quem mais contribui para as deformações inelásticas. A fim de descrever este comportamento, pode-se gerar planos na interface agregado - matriz e simular o comportamento do material nestes planos (figura 5.3).



**Figura 5.3:** Representação do modelo de microplanos

As principais diferenças entre o *Modelo de Microplanos* e os modelos similares anteriores são a aplicação da *Restrição Cinemática* e a aplicação do *Princípio dos Trabalhos Virtuais* para obter a relação entre as tensões macroscópicas e as componentes de tensões nos microplanos.

A *Restrição Cinemática* consiste na obtenção das componentes de deformações nos microplanos por meio da projeção do tensor de deformação macroscópico. Essa restrição representa melhor o comportamento de materiais parcialmente frágeis por duas razões (Bazant e Oh, 1985). Primeiro, porque os modelos determinados estaticamente tornam-se instáveis após o início do fenômeno de amolecimento. Segundo, porque a restrição cinemática parece descrever melhor o que ocorre na microestrutura desses materiais, onde as tensões registradas estão longe de serem consideradas uniformes.

Nos primeiros modelos de microplanos propostos, apenas a componente normal de deformação foi considerada na restrição cinemática, desprezando-se a rigidez ao cisalhamento nos microplanos. Esta simplificação mostrou-se ineficiente para modelar a resposta em compressão, por várias razões (Bazant e Prat, 1988). Por exemplo, simulações do teste de compressão uniaxial com ocorrência de “strain-softening” resultaram em localização de deformação exibindo uma resposta na forma de “snap-back”, que pode não corresponder à realidade. Além deste problema, este modelo causa uma restrição sobre o valor do coeficiente de Poisson,  $\nu$ , do sistema de microplanos. Encontra-se sempre  $\nu=0,25$ , que é inaplicável para alguns materiais. Além disto, esta formulação deveria, a princípio, servir para qualquer material, assim um valor constante do coeficiente de Poisson não faz sentido.

Depois de explorar um grande número de alternativas, Bazant e Prat (1988) chegaram à conclusão de que deveria ser incluída a parcela de deformação cisalhante em cada microplano (decomposição N-T). Ao introduzir esta parcela, o coeficiente de Poisson passou a ficar limitado na faixa de  $-1 < \nu < 0,25$ . Esta faixa pode descrever o coeficiente de Poisson observado para vários materiais, mas o fato do

valor não poder exceder 0,25 é fisicamente suspeito. Isto porque o modelo deveria a princípio também funcionar para qualquer outro material, mesmo que este possua coeficiente de Poisson maior que 0,25. Os autores descobriram que um coeficiente de Poisson arbitrário, situado entre  $-1 < \nu < 0,5$ , pode ser obtido se, além de considerar a componente cisalhante de deformação, a deformação normal for decomposta nas parcelas volumétrica e desviadora (decomposição V-D-T). Assim, surge um modelo incluindo, além da decomposição acima referida, uma dependência entre a tensão cisalhante e valores principais de tensão. Ou seja, o modelo deixa de ser puramente cinemático na determinação das tensões nos microplanos e passa a usar uma determinação mista, mostrando-se capaz de descrever testes de compressão incluindo a ocorrência de “strain-softening”.

A partir daquele proposto por Bazant e Prat (1988), o modelo de microplanos foi combinado ao conceito de dano não-local por Bazant e Ozbolt (1990) e estendido para suportar carregamento cíclico por Ozbolt e Bazant (1992). Isto permitiu representar o comportamento triaxial não-linear e a fratura do material. Estes modelos foram implementados num programa de elementos finitos e sua capacidade de prever realisticamente a resposta estrutural foi demonstrada por meio de exemplos numéricos.

Nas propostas anteriores teve-se grande cuidado com a consistência em relação aos dados experimentais já conhecidos. Entretanto, não se atentou muito para os aspectos teóricos e/ou numéricos. Assim, a formulação de Carol et al. (1992) procurou definir o *Modelo de Microplanos* de forma que os conceitos teóricos fossem apresentados de um modo mais compreensível, sugerindo uma nova e mais clara interpretação de algumas das equações e variáveis envolvidas na formulação. Também algumas mudanças nas hipóteses anteriores foram feitas, visando-se uma formulação final mais adequada a aplicações práticas. Desta forma, as duas principais contribuições do trabalho de Carol et al. (1992) são: a) o código de sua implementação necessita

ser escrito apenas uma vez, de modo a representar tanto o comportamento do material em um único ponto, quanto o comportamento do material em um contexto estrutural e *b)* conseguiu-se eliminar a determinação mista da formulação anterior, tornando-a puramente cinemática e recebendo a denominação *Modelo Explícito de Microplanos*.

Ozbolt et al. (2001) observaram que, apesar das qualidades apresentadas pelos modelos de microplanos até então existentes, estes exibiam uma expansão lateral em estado de tração dominante (amolecimento em tração), o que é inaceitável num ensaio de tração uniaxial. Este problema foi confirmado por Silva (2002) ao simular o ensaio de tração uniaxial e de tração com cisalhamento para o *Modelo Explícito de Microplanos* proposto por Carol et al. (1992).

Desta forma, Ozbolt et al. (2001) propuseram uma nova formulação incluindo uma relaxação na restrição cinemática adotada por Carol et al. (1992), concebendo assim o *Modelo de Microplanos com Relaxação Cinemática*.

Os modelos acima, que utilizam o *Princípio dos Trabalhos Virtuais*, não satisfazem a segunda lei da termodinâmica em todas as situações de carregamento. Então, esta teoria foi questionada por Carol et al. (2001), que propuseram substituí-la por uma *formulação termodinamicamente consistente* para obtenção das relações constitutivas nos microplanos, incorporando um potencial de energia livre em cada microplano, tal que a energia livre macroscópica fosse obtida pela integral sobre os microplanos de todas as orientações.

Essa formulação termodinamicamente consistente pode ser aplicada a todos os tipos de comportamento do material nos microplanos, incluindo elasticidade, dano e plasticidade (Kuhl et al., 2001) ou uma combinação destes. Assim, as leis constitutivas nos microplanos são escolhidas de forma mais racional, dependendo do comportamento do material que se deseja utilizar, e deixam de ser definidas empiricamente, sem uma interpretação física do comportamento constitutivo em cada microplano.

O crescente interesse na utilização da modelagem constitutiva via microplanos tem gerado várias classes de modelos, cada um com suas próprias vantagens e desvantagens. Alguns aspectos dessa teoria continuam sendo alvos de muitos estudos e discussões, como a escolha das componentes de deformação nos microplanos e os parâmetros que melhor descrevem suas relações constitutivas. Tais discussões podem ser encontradas, por exemplo, em Kuhl e Ramm (2000). Nesse sentido, uma outra restrição cinemática tem sido adotada, na qual as componentes de deformação nos microplanos são divididas, somente, em parcelas volumétrica e desviadora (decomposição V-D) (Leukart e Ramm, 2002, 2003, 2006), onde a componente volumétrica é somente uma componente normal e a desviadora é caracterizada por ambas as direções, normal e tangencial. Ela combina as vantagens das duas decomposições tradicionais (N-T e V-D-T).

No que se refere às relações constitutivas nos microplanos, outras questões são discutidas, como por exemplo, se são descritas por leis de dano, é comum a discussão de quantas variáveis de dano utilizar e também de qual grandeza adotar para representar a degradação do material. Neste caso, Leukart e Ramm (2006) adotaram uma única variável de dano que acopla os danos volumétrico e desviador nos microplanos, bem como uma deformação equivalente escrita em função das componentes de deformação no microplano e que é a responsável por descrever a evolução do dano naquela direção.

### **5.3 Modelo de Microplanos com Relaxação Cinemática**

O modelo proposto por Ozbolt et al. (2001) apresenta duas modificações principais em relação ao de Carol et al. (1992). São elas: *a*) introdução de uma função de descontinuidade que provoca uma relaxação na restrição cinemática quando



há predominância do estado de tração dominante e *b*) decomposição da deformação tangencial no microplano em duas componentes ortogonais entre si. A seguir, encontra-se uma descrição do funcionamento deste modelo segundo as etapas que constam na figura 5.2.

### 5.3.1 Restrição Cinemática

A restrição cinemática assume que as deformações normal e tangencial ( $\varepsilon_N$  e  $\varepsilon_T$ ) nos microplanos são iguais à decomposição do tensor macroscópico de deformação  $\varepsilon_{ij}$  naquela direção.

$$\varepsilon_N = \varepsilon_{ij}n_in_j \quad (5.1)$$

$$\varepsilon_{T_i} = \varepsilon_{ij}n_j - \varepsilon_N n_i = (\delta_{ij} - n_in_j)n_k\varepsilon_{jk} \quad (5.2)$$

onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker e  $n_i$  representa as componentes do vetor normal ao microplano. Além disso, a deformação normal é decomposta nas parcelas volumétrica ( $\varepsilon_V$ ) e desviadora ( $\varepsilon_D$ ), enquanto a deformação tangencial é dividida em duas parcelas ortogonais entre si,  $\varepsilon_M$  e  $\varepsilon_L$ , cujas direções M e L estão situadas sobre o microplano e são dadas pelos vetores unitários  $\mathbf{m}$  e  $\mathbf{l}$ , de componentes  $m_i$  e  $l_i$ . Estas deformações estão indicadas sobre um microplano na figura 5.4.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_N = (\varepsilon_V + \varepsilon_D)\mathbf{n} \quad (5.3)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_T = \varepsilon_M\mathbf{m} + \varepsilon_L\mathbf{l} \quad (5.4)$$

onde

$$\varepsilon_V = \frac{\varepsilon_{kk}}{3} \quad (5.5)$$

$$\varepsilon_D = (n_in_j\varepsilon_{ij} - \varepsilon_V)\psi \quad \varepsilon_M = (m_in_j\varepsilon_{ij})\psi \quad \varepsilon_L = (l_in_j\varepsilon_{ij})\psi \quad (5.6)$$

onde  $\psi$  é a função de descontinuidade que provoca uma relaxação na restrição cinemática quando há predominância do estado de tração dominante.

Existem infinitas possibilidades para as direções M e L em torno da direção normal ao microplano. Para reduzi-las foi assumido que a direção M é sempre normal

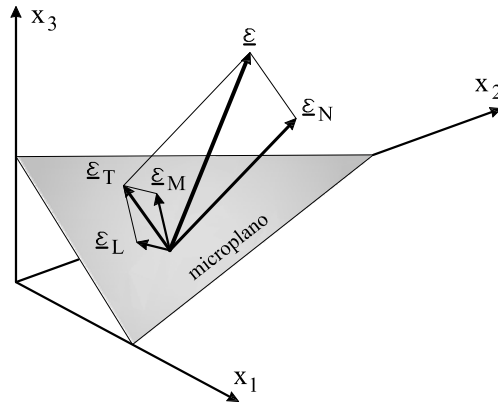
ao eixo  $x_3$  (Ozbolt et al., 2001), neste caso, tem-se

$$m_1 = n_2(n_1^2 + n_2^2)^{-1/2} \quad m_2 = -n_1(n_1^2 + n_2^2)^{-1/2} \quad m_3 = 0 \quad (5.7)$$

Porém, quando  $n_1 = n_2 = 0$  assume-se que

$$m_1 = 1 \quad m_2 = 0 \quad m_3 = 0 \quad (5.8)$$

As coordenadas do vetor  $\mathbf{l}$  são obtidas pelo produto vetorial  $\mathbf{l} = \mathbf{m} \times \mathbf{n}$ .



**Figura 5.4:** Componentes de deformação num microplano

Como se pode observar nas equações 5.6, exceto para a deformação volumétrica, as deformações efetivas nos microplanos são iguais à decomposição do tensor macroscópico de deformação  $\varepsilon_{ij}$  naquela direção multiplicada por uma função  $\psi$ .

A componente volumétrica da parcela normal de deformação não é multiplicada pela função  $\psi$  porque é invariante para qualquer orientação do microplano e serve como um indicador macroscópico de dano para o estado de tração dominante.

A função  $\psi$  reflete a descontinuidade devido às fissuras de tração. Esta função varia de 0 a 1 e o seu valor está relacionado à lei tensão-deformação volumétrica de cada microplano. Adicionalmente, esta função deve garantir uma suave transição do estado de tração dominante para o de compressão dominante, então assume-se que ela também seja dependente da tensão principal máxima ( $\sigma_1$ ).

Segundo Ozbolt et al. (2001), para considerar a orientação do dano (da fissura) em estado de tração dominante, a função de descontinuidade é ativada e controlada

pela componente de deformação desviadora nos microplanos. No início da fissuração, o microplano que está próximo à direção que é ortogonal à direção da fissura apresenta deformação desviadora negativa. Entretanto, à medida que o dano aumenta, as tensões e deformações desviadoras nesses microplanos deveriam aproximar-se de zero, então estas são “relaxadas” pela função  $\psi$ . Ao contrário, se o microplano é paralelo à direção da fissura, apresenta deformação desviadora positiva e deve ser carregado em tração. Assim, a função de descontinuidade para a deformação desviadora é dada por:

$$\text{Se } \varepsilon_D < 0, \quad \varepsilon_V > 0, \quad \sigma_1 > \sigma_{1min}, \quad \Rightarrow \quad \psi = e^{-\left|\frac{f(\sigma_1)\varepsilon_V}{a_1}\right|^{p_1}} \quad (5.9)$$

$$\text{Se } \varepsilon_D \geq 0, \quad \Rightarrow \quad \psi = 1 \quad (5.10)$$

A resistência ao cisalhamento de cada microplano depende das tensões normais que nele estão agindo. Para tensões normais positivas (tração), depois de iniciada a fissuração e independente da orientação do microplano, a resistência ao cisalhamento se reduz a zero, ou seja, a função de descontinuidade deve ser ativada. Ao contrário, para tensões normais negativas (compressão), o microplano oferece resistência ao cisalhamento mesmo durante o processo de amolecimento, principalmente devido ao atrito, e geralmente essa resistência não se reduz a zero. Assim, a função de descontinuidade para a componente cisalhante de deformação é dada por:

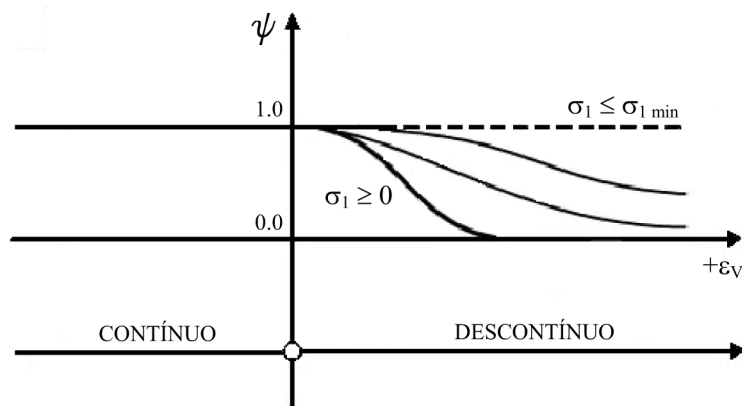
$$\text{Se } \varepsilon_V > 0, \quad \sigma_1 > \sigma_{1min}, \quad \Rightarrow \quad \psi = e^{-\left|\frac{f(\sigma_1)\varepsilon_V}{a_1}\right|^{p_1}} \quad (5.11)$$

$$\text{Se não } \Rightarrow \quad \psi = 1 \quad (5.12)$$

Nas equações 5.9 e 5.11,  $a_1$  e  $p_1$  são constantes do material e  $\sigma_{1min}$  é um valor limite mínimo para a tensão principal máxima.

Uma vez que a deformação volumétrica positiva é utilizada como um indicador do estado de tração dominante nos microplanos, assume-se que a função de descontinuidade seja muito parecida com a relação tensão-deformação volumétrica quando  $\varepsilon_V > 0$ , não sendo iguais pela presença da função  $f(\sigma_1)$ , que garante uma suave

transição do estado descontínuo (fissuração por tração) para o estado contínuo (fissura fechada e subsequente carregamento em compressão). O gráfico da função de descontinuidade é mostrado na figura 5.5.



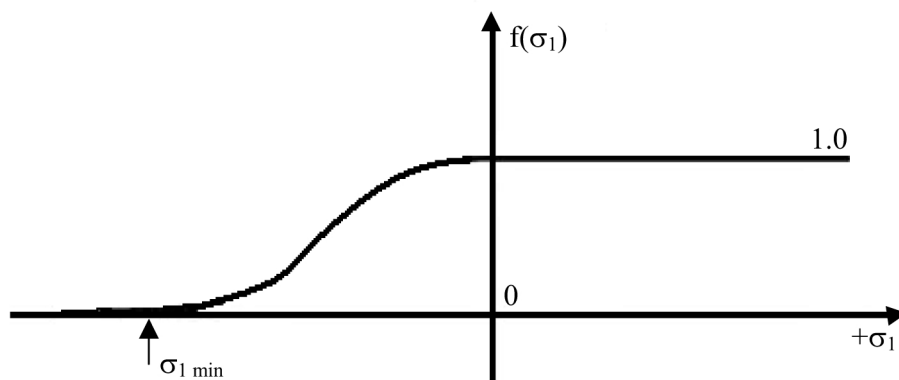
**Figura 5.5:** Gráfico da função de descontinuidade (Ozbolt et al., 2001)

Segundo Ozbolt et al. (2001), a determinação da função  $f(\sigma_1)$  (figura 5.6) baseou-se no comportamento do concreto por meio de ajustes de testes experimentais sob carregamento cíclico, adotando-se o seguinte:

$$\text{Se } \sigma_{1 \min} \leq \sigma_1 \leq 0, \Rightarrow f(\sigma_1) = 1 - \text{sen} \left( \frac{\pi}{2} \left| \frac{\sigma_1}{\sigma_{1 \min}} \right| \right) \quad (5.13)$$

$$\text{Se } \sigma_1 > 0, \Rightarrow f(\sigma_1) = 1 \quad (5.14)$$

$$\text{Se } \sigma_1 < \sigma_{1 \min}, \Rightarrow f(\sigma_1) = 0 \quad (5.15)$$



**Figura 5.6:** Gráfico da função  $f(\sigma_1)$  (Ozbolt et al., 2001)

### 5.3.2 Relações Constitutivas nos Microplanos

Associadas às quatro deformações  $\varepsilon_V$ ,  $\varepsilon_D$ ,  $\varepsilon_M$  e  $\varepsilon_L$ , as quatro tensões correspondentes  $\sigma_V$ ,  $\sigma_D$ ,  $\sigma_M$  e  $\sigma_L$  são calculadas adotando-se leis tensão-deformação definidas em função, somente, de suas respectivas deformações, permitindo que o modelo seja completamente cinemático, sem dependência iterativa no cálculo das tensões.

Os símbolos  $a$ ,  $b$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ ,  $p_1$ ,  $p_2$  e  $p_3$ , que aparecem nas relações tensão-deformação apresentadas a seguir, são constantes empíricas do material. Estas constantes são geradas a partir de ajustes de curvas obtidas do ensaio de compressão axial, tração axial e cisalhamento. Este processo é bastante trabalhoso e por isso o número de materiais já descritos não é muito grande. Além disto, encontram-se sugestões de diferentes parâmetros para descrever o mesmo material.

Os valores de  $E_V^0$ ,  $E_D^0$  e  $E_T^0$ , que também aparecem nas leis tensão-deformação a seguir, são os módulos elásticos obtidos das relações uniaxiais de tensão-deformação nos microplanos. Estes módulos são obtidos admitindo-se isotropia inicial, a partir dos valores do módulo de elasticidade longitudinal do material ( $E$ ) e do coeficiente de Poisson ( $\nu$ ), através das relações (Bazant e Prat, 1988)

$$E_V^0 = \frac{E}{1 - 2\nu} \quad (5.16)$$

$$E_D^0 = \eta_0 E_V^0 \quad (5.17)$$

$$E_T^0 = \frac{1}{3} \left[ \frac{5(1 - 2\nu)}{1 + \nu} - 2\eta_0 \right] E_V^0 \quad (5.18)$$

onde  $\eta_0$  é um parâmetro do material, cujo valor recomendado por Ozbolt et al. (2001) é  $\eta_0 = 0,8$ .

Para modelar o descarregamento e o recarregamento, são introduzidas algumas regras para todas as leis de tensão-deformação em cada microplano.

O microplano está em um processo de carregamento somente se  $\varepsilon \Delta \varepsilon \geq 0$  e  $(\varepsilon - \varepsilon_{max})(\varepsilon - \varepsilon_{min}) \geq 0$ , onde  $\Delta \varepsilon$  é um incremento (ou decremento) de deformação e,  $\varepsilon_{max}$  e  $\varepsilon_{min}$  são os valores máximo e mínimo da deformação efetiva que ocorreu até

o momento no microplano. Ao contrário, ocorre descarregamento ou recarregamento na lei constitutiva da deformação correspondente para o referido microplano. Esta análise deve ser efetuada para as componentes volumétrica, desviadora e tangenciais.

Para todas as componentes de deformação no microplano, assume-se que este descarrega, em tração ou compressão, seguindo o módulo inicial  $E_*^0$ , onde \* refere-se à parcela volumétrica, desviadora ou tangencial. Entretanto, se durante o descarregamento, a tensão muda de sinal, passa de compressão para tração ou vice-versa, assume-se a lei correspondente a este novo estado para o cálculo das tensões.

### 5.3.2.1 Lei Volumétrica

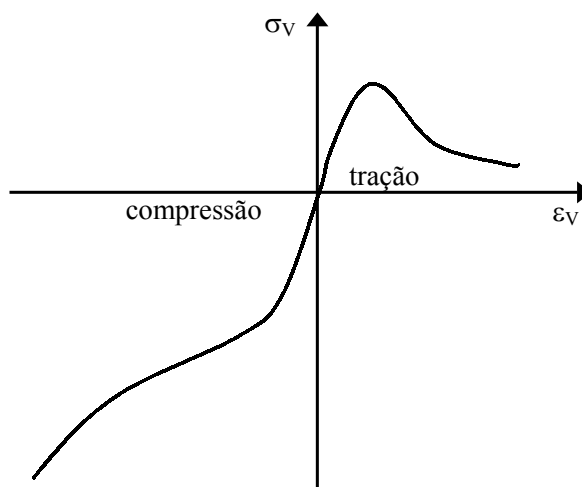
Esta lei reproduz diretamente o comportamento macroscópico do material quando somente deformações e tensões volumétricas estão presentes. Então, uma curva que ajusta dados experimentais para testes hidrostáticos pode ser diretamente introduzida (figura 5.7).

Para compressão, adota-se:

$$\sigma_V = E_V^0 \varepsilon_V \left[ \left( 1 + \left| \frac{\varepsilon_V}{a} \right| \right)^{-p} + \left| \frac{\varepsilon_V}{b} \right|^q \right] \quad (5.19)$$

e para tração:

$$\sigma_V = E_V^0 \varepsilon_V e^{-\left| \frac{\varepsilon_V}{a_1} \right|^{p_1}} \quad (5.20)$$



**Figura 5.7:** Lei tensão-deformação volumétrica

### 5.3.2.2 Lei Desviadora

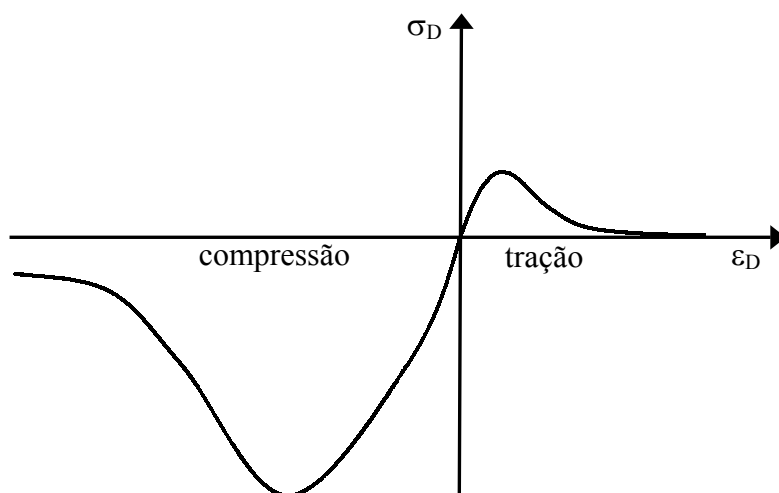
Esta lei é baseada no mesmo tipo de curva exponencial obtida no ensaio de tração do comportamento volumétrico, mas considerando-se dois grupos diferentes de parâmetros, um para tração e outro para compressão (figura 5.8).

Para compressão, adota-se:

$$\sigma_D = E_D^0 \varepsilon_D e^{-\left|\frac{\varepsilon_D}{a_2}\right|^{p_2}} \quad (5.21)$$

e para tração:

$$\sigma_D = E_D^0 \varepsilon_D e^{-\left|\frac{\varepsilon_D}{a_1}\right|^{p_1}} \quad (5.22)$$



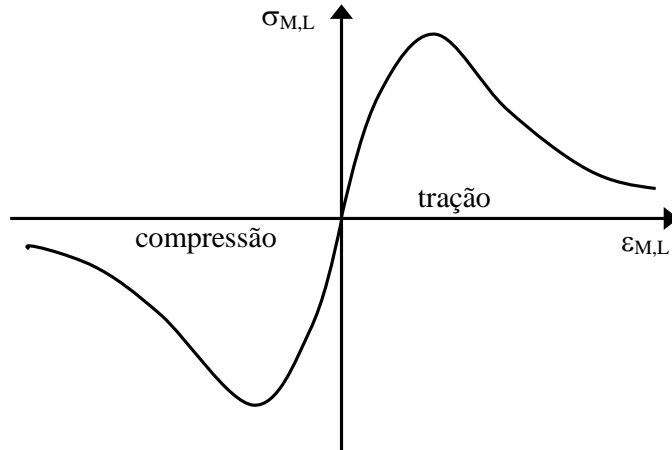
**Figura 5.8:** Lei tensão-deformação desviadora

### 5.3.2.3 Lei Tangencial

A lei tangencial é a mesma para as duas componentes tangenciais (M e L) e é baseada no mesmo tipo de curva exponencial utilizada nas outras leis, sendo dada por (figura 5.9):

$$\sigma_T = E_T^0 \varepsilon_T e^{-\left|\frac{\varepsilon_T}{a_3}\right|^{p_3}} \quad (5.23)$$

onde  $\varepsilon_T$  representa  $\varepsilon_M$  ou  $\varepsilon_L$  e  $\sigma_T$  representa  $\sigma_M$  ou  $\sigma_L$ . O módulo  $E_T^0$  é utilizado para ambas as componentes M e L.



**Figura 5.9:** Lei tensão-deformação tangencial

A variável  $a_3$  introduz uma dependência com o confinamento por meio da relação:

$$a_3 = a_3^0 + k_a \varepsilon_V \quad (5.24)$$

onde  $\varepsilon_V$  é a deformação volumétrica (usada para medir o confinamento) e  $a_3^0$  e  $k_a$  são constantes empíricas do material.

### 5.3.3 Aplicação do PTV para Obtenção das Grandezas Macroscópicas

A relação entre as tensões nos microplanos ( $\sigma_V$ ,  $\sigma_D$ ,  $\sigma_M$  e  $\sigma_L$ ) e o tensor macroscópico de tensões  $\sigma_{ij}$  é obtida pela aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais. Impondo-se a igualdade dos trabalhos virtuais realizados pelas componentes macroscópicas de tensão e pelas componentes de tensão nos microplanos, quando aplicada uma variação virtual de deformação, obtém-se a seguinte equação

$$\frac{4\pi}{3} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} = 2 \int_{\Omega} [(\sigma_V + \sigma_D) \delta \varepsilon_N + \sigma_M \delta \varepsilon_M + \sigma_L \delta \varepsilon_L] d\Omega \quad (5.25)$$

onde o domínio de integração ( $\Omega$ ) é a metade superior da superfície de uma esfera unitária e  $\delta$  é uma variação virtual.



O lado esquerdo da equação 5.25 representa o trabalho macroscópico feito numa esfera unitária do material, enquanto o lado direito representa o trabalho macroscópico feito sobre a superfície da mesma esfera.

Após aplicar a restrição cinemática aos incrementos de deformações virtuais da equação 5.25 e considerar que a simetria do incremento  $\delta\varepsilon_{ij}$  deve ser preservada, chega-se à equação

$$\sigma_{ij} = \frac{3}{2\pi} \int_{\Omega} \left[ n_i n_j \sigma_V + n_i n_j \sigma_D + \frac{1}{2} (m_i n_j + m_j n_i) \sigma_M + \frac{1}{2} (l_i n_j + l_j n_i) \sigma_L \right] d\Omega \quad (5.26)$$

Para obter uma resposta estrutural utilizando processos incrementais-iterativos de análise é fundamental que se obtenha uma estimativa da rigidez tangente macroscópica. Portanto, é necessário estabelecer uma relação entre incrementos de tensão e deformação na forma

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl}^{tan} d\varepsilon_{kl} \quad (5.27)$$

onde  $D_{ijkl}^{tan}$  é o tensor constitutivo tangente macroscópico.

Para a obtenção do tensor  $D_{ijkl}^{tan}$ , a equação 5.26 deve ser reescrita em termos dos incrementos de tensão diferencial

$$d\sigma_{ij} = \frac{3}{2\pi} \int_{\Omega} \left[ n_i n_j d\sigma_V + n_i n_j d\sigma_D + \frac{1}{2} (m_i n_j + m_j n_i) d\sigma_M + \frac{1}{2} (l_i n_j + l_j n_i) d\sigma_L \right] d\Omega \quad (5.28)$$

Então, os incrementos de tensão num microplano devem ser substituídos por suas expressões incrementais em termos dos módulos tangentes ( $E_V^{tan}$ ,  $E_D^{tan}$ ,  $E_M^{tan}$  e  $E_L^{tan}$ ) e dos incrementos de deformação no microplano. Assim, tem-se as expressões escalares:

$$d\sigma_V = E_V^{tan} d\varepsilon_V, \quad d\sigma_D = E_D^{tan} d\varepsilon_D, \quad d\sigma_M = E_M^{tan} d\varepsilon_M, \quad d\sigma_L = E_L^{tan} d\varepsilon_L. \quad (5.29)$$

Introduzindo-se as equações 5.29 em 5.28, e então, substituindo-se os incrementos de deformação no microplano de acordo com as equações 5.5 e 5.6, obtém-se

a expressão para  $D_{ijkl}^{tan}$ , considerando-se que sua simetria deva ser preservada:

$$D_{ijkl}^{tan} = \frac{3}{2\pi} \int_{\Omega} \left[ n_i n_j n_r n_s E_D^{tan} + \frac{1}{3} n_i n_j \delta_{rs} (E_V^{tan} - E_D^{tan}) + \frac{1}{4} (m_i n_j + m_j n_i) \right. \\ \left. (m_r n_s + m_s n_r) E_M^{tan} + \frac{1}{4} (l_i n_j + l_j n_i) (l_r n_s + l_s n_r) E_L^{tan} \right] d\Omega \quad (5.30)$$

Os módulos tangentes volumétrico, desviador e tangenciais são obtidos pela diferenciação das equações 5.19 a 5.23.

## 5.4 Modelo Constitutivo de Microplanos com Deformação Equivalente

O modelo proposto por Leukart e Ramm (2006) reúne atraentes características que o difere dos demais modelos de microplanos. Entre elas estão: *a*) restrição cinemática com componentes de deformação volumétrica e desviadora nos microplanos (decomposição V-D); *b*) utilização de uma única variável de dano que acopla os danos volumétrico e desviador nos microplanos; *c*) a degradação é baseada no conceito de deformação equivalente e *d*) a formulação adotada é termodinamicamente consistente. A seguir, essas características são descritas e suas vantagens são apontadas. Aqui, utilizar-se-á a palavra “macroscópica” para indicar o nível que corresponde ao ponto material.

### 5.4.1 Restrição Cinemática

A restrição cinemática consiste em obter o vetor de deformação  $\underline{t}_{\epsilon}$ , em cada microplano, como a projeção normal do tensor de deformação macroscópico  $\underline{\epsilon}$  naquela direção.

$$\underline{t}_{\epsilon} = \underline{\epsilon} \cdot \underline{n} \quad (5.31)$$

onde  $\underline{n}$  é o vetor normal unitário de cada microplano.

São discutidos em Leukart e Ramm (2002) três tipos de decomposição do vetor  $\underline{t}_{\epsilon}$ , suas inter-relações e as conseqüências de cada escolha específica. Segundo Leukart

e Ramm (2006), a principal vantagem de se utilizar a decomposição V-D é que as respostas macroscópicas são diretamente refletidas no nível dos microplanos e também porque, para muitos materiais, os comportamentos volumétrico e desviador são completamente diferentes, não só no nível macroscópico, mas também numa escala menor de observação. Além disso, essa restrição é capaz de capturar o intervalo de  $-1 < \nu < 0,5$  para o coeficiente de Poisson e de satisfazer simultaneamente as restrições cinemática e estática (Leukart e Ramm, 2002). Tudo isto motiva a utilização desta escolha.

Para deformações infinitesimais, a decomposição aditiva do tensor de deformação ainda no nível macroscópico é:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{vol} + \boldsymbol{\varepsilon}_{dev} \quad (5.32)$$

com as deformações volumétrica e desviadora dadas por

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{vol} = \frac{1}{3}[\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{I}] \cdot \mathbf{I}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{dev} = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_{vol} \quad (5.33)$$

onde  $\mathbf{I}$  é o tensor identidade de segunda ordem de componentes  $\delta_{ij}$ .

As deformações volumétrica  $\varepsilon_V$  e desviadora  $\boldsymbol{\varepsilon}_D$  nos microplanos são obtidas pela projeção das parcelas  $\boldsymbol{\varepsilon}_{vol}$  e  $\boldsymbol{\varepsilon}_{dev}$  na direção dos mesmos (ver figura 5.10). Assim, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_\varepsilon = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n} &= [\boldsymbol{\varepsilon}_{vol} + \boldsymbol{\varepsilon}_{dev}] \cdot \mathbf{n} \\ &= \frac{1}{3}[\mathbf{I} : \boldsymbol{\varepsilon}] \cdot \mathbf{n} + \boldsymbol{\varepsilon}_{dev} \cdot \mathbf{n} \\ &= \mathbf{V} : \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n} + \boldsymbol{\varepsilon}_{dev} \cdot \mathbf{n} \\ &= \varepsilon_V \mathbf{n} + \boldsymbol{\varepsilon}_D \end{aligned} \quad (5.34)$$

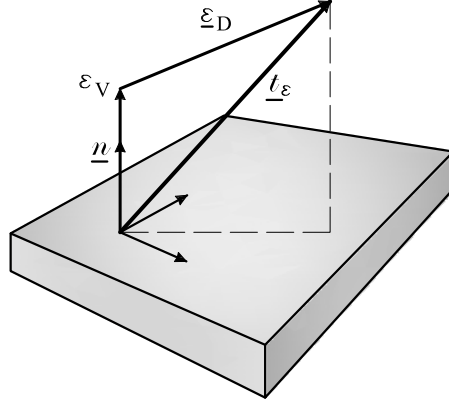
Logo, as componentes de deformação nos microplanos são dadas por

$$\varepsilon_V = \mathbf{V} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_D = \mathbf{t}_\varepsilon - \varepsilon_V \mathbf{n} = \mathbf{Dev} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5.35)$$

onde os tensores de projeção volumétrico  $\mathbf{V}$  e desviador  $\mathbf{Dev}$  são

$$\mathbf{V} = \frac{1}{3} \mathbf{I}, \quad \mathbf{Dev} = \mathbf{n} \cdot \mathcal{I}^{sym} - \frac{1}{3} \mathbf{n} \cdot \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} = \mathbf{n} \cdot \mathcal{I}^{dev} \quad (5.36)$$

onde  $\underline{\underline{\mathcal{I}}}^{sym}$  é o tensor identidade de quarta ordem de componentes  $\frac{[\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}]}{2}$ , sendo  $\underline{\underline{\mathcal{I}}}^{dev}$  sua parcela desviadora, dada por  $\underline{\underline{\mathcal{I}}}^{dev} = \underline{\underline{\mathcal{I}}}^{sym} - \underline{\underline{\mathcal{I}}}^{vol}$ , e  $\underline{\underline{\mathcal{I}}}^{vol} = \frac{1}{3} \underline{\underline{\mathbf{I}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{I}}}$  sua parcela volumétrica.



**Figura 5.10:** Componentes de deformação volumétrica e desviadora num microplano

A transposição do tensor de projeção desviador é definida como

$$\underline{\underline{Dev}}^T := \underline{\underline{\mathcal{I}}}^{dev} \cdot \underline{\underline{\mathbf{n}}} \quad (5.37)$$

Pode-se encontrar em Kanatani (1984) e Lubarda e Krajcinovic (1993) as propriedades de integração analítica dos produtos de quarta ordem dos tensores de projeção volumétrico e desviador. Elas são

$$\frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \underline{\underline{\mathbf{V}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{V}}} d\mathcal{S} = \underline{\underline{\mathcal{I}}}^{vol} \quad (5.38)$$

$$\frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \underline{\underline{Dev}}^T \cdot \underline{\underline{Dev}} d\mathcal{S} = \underline{\underline{\mathcal{I}}}^{dev} \quad (5.39)$$

onde o domínio de integração  $\mathcal{S}$  é a superfície de uma esfera unitária.

O tensor de deformação macroscópico pode ser escrito em função das componentes de deformação nos microplanos na forma

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \underline{\underline{\mathbf{V}}} \varepsilon_V + \underline{\underline{Dev}}^T \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_D d\mathcal{S} \quad (5.40)$$

Esta equação pode ser verificada utilizando-se as restrições cinemáticas em 5.35 e as propriedades de integração em 5.38 e 5.39. Adicionalmente, o primeiro invariante

das deformações macroscópicas e o segundo invariante das deformações macroscópicas desviadoras podem ser obtidos em função das componentes de deformação nos microplanos (Leukart e Ramm, 2003)

$$I_1 = \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \varepsilon_V d\mathcal{S} = 3\varepsilon_V, \quad 2J_2 = \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \underline{\varepsilon}_{D^*} \cdot \underline{\varepsilon}_D d\mathcal{S} \quad (5.41)$$

### 5.4.2 Relações Constitutivas nos Microplanos

Para obter as relações constitutivas nos microplanos, assume-se que processos de dano são os mecanismos dissipativos dominantes que descrevem a degradação progressiva das propriedades mecânicas do material nos microplanos. Para isto, é utilizada uma formulação genérica termodinamicamente consistente desenvolvida por Carol et al. (2001). O resultado é um modelo de dano macroscópico que considera os efeitos anisotrópicos de uma forma elegante, natural e simples (Leukart e Ramm, 2006).

A introdução de dois parâmetros de dano independentes representa uma possibilidade para incorporar as leis de dano em formulações de microplanos (Kuhl e Ramm, 2000; Leukart e Ramm, 2002, 2003). Modelos deste tipo controlam a degradação da rigidez volumétrica e desviadora nos microplanos de forma independente. Do ponto de vista físico, um desacoplamento volumétrico-desviador não parece razoável para a modelagem de meios parcialmente frágeis heterogêneos. Por isso, aqui é utilizado um único parâmetro de dano,  $d^{mic}$ , nos microplanos e uma degradação equivalente da rigidez volumétrica e desviadora é introduzida. Assim, o vetor das variáveis internas pode ser identificado como  $\underline{\mathbf{q}} = \{d^{mic}\}$ . A variável de dano está limitada entre o valor 0, que corresponde ao estado não-danificado, e o valor 1, que define a ruptura completa do material, isto é,  $0 \leq d^{mic} \leq 1$ . Isto segue a definição da variável de dano de Lemaître (1992), conhecida como a densidade efetiva da superfície de microdefeitos.

A energia livre nos microplanos,  $\Psi^{mic}$ , pode ser expressa em função das duas

componentes de deformação nos microplanos e da variável de dano, na forma

$$\Psi^{mic}(\varepsilon_V, \underline{\varepsilon}_D, d^{mic}) := [1 - d^{mic}] \Psi_0^{mic} \quad (5.42)$$

onde a energia livre elástica nos microplanos,  $\Psi_0^{mic}$ , é uma função quadrática, como a adotada no nível macroscópico, que é aditivamente decomposta numa parcela volumétrica,  $\Psi_{vol}^{mic}$ , e desviadora,  $\Psi_{dev}^{mic}$ .

$$\Psi_0^{mic}(\varepsilon_V, \underline{\varepsilon}_D) := \Psi_{vol}^{mic}(\varepsilon_V) + \Psi_{dev}^{mic}(\underline{\varepsilon}_D) = \frac{1}{2} \varepsilon_V E_{V0}^{mic} \varepsilon_V + \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}_D \cdot E_{D0}^{mic} \underline{\varepsilon}_D \quad (5.43)$$

aqui,  $E_{V0}^{mic}$  e  $E_{D0}^{mic}$  são os módulos elásticos nos microplanos.

A energia livre nos microplanos define suas tensões constitutivas,  $\sigma_V$  e  $\underline{\sigma}_D$ , como quantidades termodinamicamente conjugadas às correspondentes componentes de deformação nos microplanos

$$\sigma_V := \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \varepsilon_V} = [1 - d^{mic}] E_{V0}^{mic} \varepsilon_V, \quad \underline{\sigma}_D := \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \underline{\varepsilon}_D} = [1 - d^{mic}] E_{D0}^{mic} \underline{\varepsilon}_D \quad (5.44)$$

### 5.4.3 Aplicação das Leis da Termodinâmica

A formulação termodinamicamente consistente baseia-se na fundamental consideração de que a energia livre nos microplanos,  $\Psi^{mic}$ , existe e que a integral desta sobre todos os microplanos é equivalente à energia livre macroscópica de Helmholtz,  $\Psi^{mac}$ . Assim,

$$\Psi^{mac} = \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \Psi^{mic} d\mathcal{S} \quad (5.45)$$

Considerando-se a desigualdade macroscópica de Clausius-Duhem para o caso isotérmico, tem-se

$$\mathcal{D}^{mac} = \underline{\sigma} : \dot{\underline{\varepsilon}} - \dot{\Psi}^{mac} \geq 0 \quad (5.46)$$

onde  $\mathcal{D}^{mac}$  é a dissipação macroscópica,  $\dot{\underline{\varepsilon}}$  e  $\dot{\Psi}^{mac}$  são as taxas de deformações e de energia livre macroscópicas, respectivamente.

Utilizando-se as equações em 5.35, a taxa de energia livre nos microplanos pode ser escrita como segue:

$$\dot{\Psi}^{mic} = [\underline{V} \sigma_V + \underline{Dev}^T \cdot \underline{\sigma}_D] : \dot{\underline{\varepsilon}} - \mathcal{D}^{mic} \quad (5.47)$$

onde  $\mathcal{D}^{mic}$  é a dissipação nos microplanos definida como

$$\mathcal{D}^{mic} := -\frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (5.48)$$

com  $\cdot$  indicando o produto da ordem de  $\mathbf{q}$ .

Substituindo-se a equação 5.47 em 5.45 obtém-se a equação da taxa de energia livre macroscópica

$$\dot{\Psi}^{mac} = \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} [\mathbf{V} \sigma_V + \mathbf{D} \mathbf{e} \mathbf{v}^T \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}}_D] d\mathcal{S} : \dot{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} - \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \mathcal{D}^{mic} d\mathcal{S} \quad (5.49)$$

Finalmente, a versão macroscópica da desigualdade de Clausius-Duhem (equação 5.46) pode ser avaliada, resultando na definição do tensor de tensão macroscópico  $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$  em termos das componentes de tensão constitutivas nos microplanos

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} [\mathbf{V} \sigma_V + \mathbf{D} \mathbf{e} \mathbf{v}^T \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}}_D] d\mathcal{S} \quad (5.50)$$

Satisfazendo-se à desigualdade da dissipação macroscópica, tem-se

$$\mathcal{D}^{mac} = \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \mathcal{D}^{mic} d\mathcal{S} \geq 0, \quad (5.51)$$

na qual a dissipação de energia em cada microplano é exigida ser não-negativa

$$\mathcal{D}^{mic} \geq 0. \quad (5.52)$$

Esta exigência é obviamente mais forte do que aquela imposta pela equação 5.51 e, então, representa uma condição suficiente para que se cumpra a segunda lei da termodinâmica. Assim, a equação 5.47 pode ser interpretada como a versão da desigualdade de Clausius-Duhem no nível dos microplanos, tal que

$$\mathcal{D}^{mic} = (\sigma_V \dot{\varepsilon}_V + \underline{\boldsymbol{\sigma}}_D \cdot \dot{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_D) - \dot{\Psi}^{mic} \geq 0 \quad (5.53)$$

A formulação apresentada acima foi desenvolvida de acordo com a restrição cinemática adotada (decomposição V-D) e agora substitui-se nela os conceitos definidos nas seções anteriores referentes à restrição cinemática e às relações constitutivas.

O tensor de tensão macroscópico, conjugado termodinamicamente ao tensor de deformação macroscópico e definido na equação 5.50, pode ser reescrito utilizando-se as equações em 5.44 e 5.35

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \frac{\partial \Psi^{mac}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \underline{\underline{\mathbf{E}}}_{sec}^d : \boldsymbol{\varepsilon} \\ &= \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} [1 - d^{mic}] [E_{V0}^{mic} \underline{\underline{\mathbf{V}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{V}}} + E_{D0}^{mic} \underline{\underline{\mathbf{D}}}\underline{\underline{\mathbf{e}}}\underline{\underline{\mathbf{v}}}^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}}\underline{\underline{\mathbf{e}}}\underline{\underline{\mathbf{v}}}] d\mathcal{S} : \boldsymbol{\varepsilon}\end{aligned}\quad (5.54)$$

na qual  $\underline{\underline{\mathbf{E}}}_{sec}^d$  é um tensor de quarta ordem que denota o módulo secante elasto-dano macroscópico.

No regime linear,  $d^{mic} = 0$ , considerando este fato e reescrevendo o módulo secante, tem-se

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}}_{sec}^{el} = \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} [E_{V0}^{mic} \underline{\underline{\mathbf{V}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{V}}} + E_{D0}^{mic} \underline{\underline{\mathbf{D}}}\underline{\underline{\mathbf{e}}}\underline{\underline{\mathbf{v}}}^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}}\underline{\underline{\mathbf{e}}}\underline{\underline{\mathbf{v}}}] d\mathcal{S}, \quad (5.55)$$

utilizando-se as integrais analíticas em 5.38 e 5.39 e assumindo que os módulos elásticos nos microplanos são independentes da orientação dos mesmos, obtém-se

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}}_{sec}^{el} = E_{V0}^{mic} \underline{\underline{\mathcal{J}}}^{vol} + E_{D0}^{mic} \underline{\underline{\mathcal{J}}}^{dev}. \quad (5.56)$$

Comparando-se esta equação com aquela que define o módulo elástico dado pela lei de Hooke, isto é,

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}}^{el} = 3K^{mac} \underline{\underline{\mathcal{J}}}^{vol} + 2G^{mac} \underline{\underline{\mathcal{J}}}^{dev} \quad (5.57)$$

resulta nas seguintes relações entre as quantidades elásticas nos níveis dos microplanos e macroscópico

$$E_{V0}^{mic} = K^{mic} = 3K^{mac}, \quad E_{D0}^{mic} = 2G^{mic} = 2G^{mac}. \quad (5.58)$$

Aqui ficaram definidos os módulos volumétrico,  $K^{mic}$ , e cisalhante,  $G^{mic}$ , nos microplanos.

Para completar a formulação termodinamicamente consistente desta modelagem constitutiva, necessita-se ainda definir equações para o módulo tangente elasto-dano,  $\underline{\underline{\mathbf{E}}}_{tan}^d$ , e para o parâmetro de dano,  $d^{mic}$ .



Dessa forma, através das equações 5.48 e 5.52, define-se a densidade da taxa de liberação de energia,  $Y^{mic}$ , ou força termodinâmica, termo mais freqüentemente encontrado na literatura, substituindo-se  $\mathbf{q} = \{d^{mic}\}$

$$\mathcal{D}^{mic} = -\frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial d^{mic}} \dot{d}^{mic} = Y^{mic} \dot{d}^{mic} \geq 0. \quad (5.59)$$

Segundo Leukart e Ramm (2006),  $Y^{mic}$  controla a propagação das microfissuras, podendo-se compreendê-la como uma energia local necessária para iniciar ou propagar microfissuras ou para a coalescência das mesmas.

Através das equações 5.42, 5.43 e 5.58, pode-se obter

$$Y^{mic} := -\frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial d^{mic}} = \Psi_0^{mic} = \frac{1}{2} K^{mic} \varepsilon_V^2 + G^{mic} \boldsymbol{\varepsilon}_D \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_D \quad (5.60)$$

O estado de dano é então caracterizado pela função de carregamento,  $\Phi^{mic}$ , que representa a equação da superfície que contorna o regime elástico, análogo ao que ocorre em plasticidade. Ela induz um acoplamento volumétrico-desviador no regime inelástico.

$$\Phi^{mic} = \phi^{mic}(\eta^{mic}) - d^{mic} \leq 0 \quad (5.61)$$

onde  $\phi^{mic}$  representa uma função da deformação equivalente,  $\eta^{mic}$ , a qual será definida mais adiante.

O critério de carregamento-descarregamento é baseado nas condições de Kuhn-Tucker, semelhante ao adotado para a plasticidade na seção 3.5.1

$$(i) \Phi^{mic} \leq 0, \quad (ii) \dot{\kappa}^{mic} \geq 0, \quad (iii) \Phi^{mic} \dot{\kappa}^{mic} = 0 \quad (5.62)$$

onde  $\kappa^{mic}$  é uma espécie de multiplicador de dano. Assim, a condição de consistência é dada por  $\dot{\Phi}^{mic} \dot{\kappa}^{mic} = 0$ .

Algumas formulações de dano (Simo e Ju, 1987; Ju, 1989) consideram que a deformação equivalente,  $\eta^{mic}$ , é função da força termodinâmica  $Y^{mic}$  e esta, por sua vez, é função das componentes de deformação nos microplanos. Assim, de acordo com Simo e Ju (1987) e Ju (1989), a condição de consistência leva à equivalência

$\dot{\kappa}^{mic} = \dot{Y}^{mic}$ , que permite obter uma fórmula explícita para a variável de dano por meio de uma função monotônica  $\phi^{mic}(\cdot)$

$$d^{mic} = \phi^{mic}(\kappa^{mic}), \quad \text{com} \quad \kappa^{mic} = \max_{-\infty < t < \tau} [\eta^{mic}(t), \kappa_0^{mic}] \quad (5.63)$$

Aqui,  $\kappa_0^{mic}$  é o valor inicial de  $\kappa^{mic}$ , enquanto este é adotado como o valor máximo das deformações equivalentes que ocorreram durante todo o histórico de carregamento.

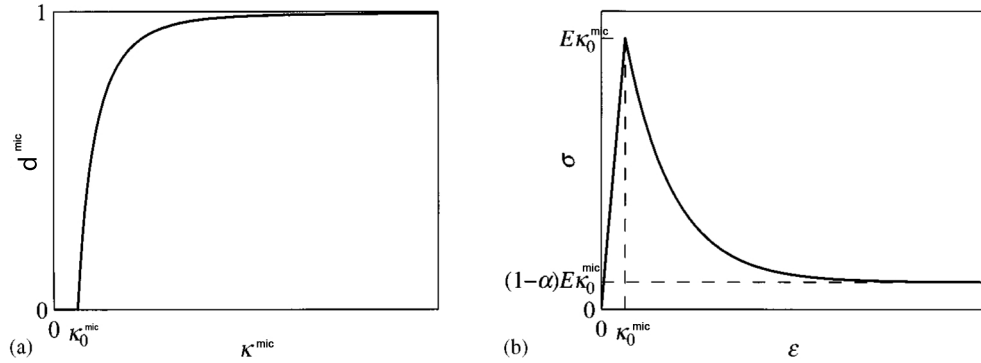
Adicionalmente, especifica-se uma função para descrever a variável de dano  $d^{mic}$ . Para um dano progressivo e exponencialmente crescente, assume-se a seguinte função (Peerlings et al., 1998)

$$d^{mic} = 1 - \frac{\kappa_0^{mic}}{\kappa^{mic}} \{1 - \alpha^{mic} + \alpha^{mic} e^{[\beta^{mic}(\kappa_0^{mic} - \kappa^{mic})]}\} \quad (5.64)$$

Conseqüentemente, deve-se definir três parâmetros adicionais para o material:  $\beta^{mic}$ , que governa a forma do ramo descendente;  $\alpha^{mic}$ , que representa a máxima degradação possível do material e  $\kappa_0^{mic}$ , que é o valor da deformação equivalente que determina o início do processo de dano. A figura 5.11(a) mostra a relação  $d^{mic} \times \kappa^{mic}$  e a figura 5.11(b) mostra uma curva tensão-deformação para uma situação unidimensional em tração uniaxial e deformação homogênea ( $\eta^{mic} = \eta^{mac} = \varepsilon$ ). Note que o dano se inicia quando a deformação axial alcança o valor de  $\kappa_0^{mic}$ . Para  $\varepsilon \rightarrow \infty$  a tensão aproxima-se de  $(1 - \alpha^{mic})E\kappa_0^{mic}$ . O parâmetro  $\beta^{mic}$  determina a taxa de crescimento do dano. Um valor alto para  $\beta^{mic}$  resulta num crescimento mais rápido do dano e, assim, numa resposta mais frágil.

Antes de definir uma fórmula para a deformação equivalente ( $\eta^{mic}$ ), determina-se o módulo tangente elasto-dano,  $\mathbf{E}_{\tilde{z}tan}^d$ , linearizando-se a equação 5.54

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\tilde{z}tan}^d &= \mathbf{E}_{\tilde{z}sec}^d - \frac{3}{4\pi} \int_S \frac{\partial \phi^{mic}}{\partial \kappa^{mic}} \left[ \frac{\mathbf{V} \sigma_V + \mathbf{Dev}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_D}{(1 - d^{mic})} \right] \\ &\otimes \left[ \frac{\partial \eta^{mic}}{\partial \varepsilon_V} \mathbf{V} + \frac{\partial \eta^{mic}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_D} \cdot \mathbf{Dev} \right] dS \end{aligned} \quad (5.65)$$



**Figura 5.11:** Modelo de dano exponencial: (a) variável de dano como uma função de  $\kappa^{\text{mic}}$ , (b) comportamento homogêneo em tração uniaxial (Peerlings et al., 1998)

#### 5.4.4 Definição da Deformação Equivalente nos Microplanos

Neste modelo, o crescimento do dano está relacionado ao desenvolvimento da deformação via uma medida escalar chamada *deformação equivalente*. Para uma definição adequada das deformações equivalentes nos microplanos, são feitas algumas comparações com o modelo de dano escalar macroscópico (Leukart e Ramm, 2003, 2006). Assim, o comportamento constitutivo no microplano pode ser interpretado fisicamente e definido de uma forma mais racional. Para tanto, a seguir, são apresentadas as duas principais definições de deformação equivalente macroscópica ( $\eta^{\text{mac}}$ ):

##### 1) Simo e Ju (1987)

De acordo com Simo e Ju (1987), a deformação equivalente pode ser obtida pela raiz quadrada da energia elástica armazenada multiplicada por dois. Além disso, ela pode ser formulada em termos do primeiro invariante do tensor de deformação e do segundo invariante das deformações desviadoras

$$\eta^{\text{mac}} = \sqrt{\underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\mathbf{E}}}^{\text{el}} : \underline{\underline{\varepsilon}}} = \sqrt{K^{\text{mac}} I_1^2 + 4G^{\text{mac}} J_2} \quad (5.66)$$

##### 2) von Mises Modificado (de Vree et al. (1995))

A definição da deformação equivalente segundo Simo e Ju (1987) leva a superfícies

de carregamento simétricas. Não há diferença no comportamento do dano sob tração e compressão. Todavia, para materiais parcialmente frágeis heterogêneos isto não é muito realista. Microfissuras no concreto, por exemplo, crescem principalmente sob tensões de tração. Conseqüentemente, a influência da tração na definição da deformação equivalente deve ser enfatizada. Uma possibilidade de distinguir entre tração e compressão é descrita pela definição de von Mises Modificado da deformação equivalente (de Vree et al., 1995), que resulta em superfícies de carregamento elípticas

$$\eta^{mac} = k_0 I_1 + \sqrt{k_1^2 I_1^2 + k_2 J_2} \quad (5.67)$$

Os parâmetros  $k_0$ ,  $k_1$  e  $k_2$  podem ser especificados como

$$k_0 = k_1 = \frac{r-1}{2r(1-2\nu)}; \quad k_2 = \frac{3}{r(1+\nu)^2} \quad (5.68)$$

onde o parâmetro  $r$  representa a razão entre as resistências à tração e à compressão do material, tornando o dano sensível a deformações de compressão em relação àquelas de tração.

Para comparar o modelo de dano nos microplanos com o macroscópico é conveniente e necessário que ambos os modelos de dano sigam as mesmas considerações e restrições (Leukart e Ramm, 2006). Então, esta comparação torna-se razoável se a distribuição de dano isotrópico for adotada também no nível dos microplanos. Isto significa que a “quantidade” de dano é a mesma em todos os microplanos de um ponto material considerado, o que é uma restrição substancial à generalidade inerente do modelo de microplanos. Mas esta restrição é apenas de natureza teórica porque é somente usada para a comparação e identificação das leis constitutivas nos microplanos, mostradas aqui nesta seção. O conceito de microplanos não é influenciado por essa consideração de forma genérica, ele continua sendo uma eficiente aproximação para descrever o comportamento anisotrópico do material. A

introdução desta consideração na equação 5.54 leva ao seguinte

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= [1 - d^{mic}] \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} [K^{mic} \underline{\mathbf{V}} \otimes \underline{\mathbf{V}} + 2G^{mic} \underline{\mathbf{Dev}}^T \cdot \underline{\mathbf{Dev}}] d\mathcal{S} : \boldsymbol{\varepsilon} \\ &= [1 - d^{mic}] [K^{mic} \boldsymbol{\varepsilon}_{vol} + 2G^{mic} \boldsymbol{\varepsilon}_{dev}]\end{aligned}\quad (5.69)$$

Comparando esta equação com a do modelo macroscópico (Leukart e Ramm, 2006), isto é,

$$\boldsymbol{\sigma} = [1 - d^{mac}] \underline{\mathbf{E}}^{el} : \boldsymbol{\varepsilon} = [1 - d^{mac}] [3K^{mac} \boldsymbol{\varepsilon}_{vol} + 2G^{mac} \boldsymbol{\varepsilon}_{dev}] \quad (5.70)$$

e considerando as relações entre os parâmetros elásticos dos microplanos e macroscópicos dadas pela equação 5.58, a variável de dano nos microplanos deve ser igual àquela macroscópica,  $d^{mic} = d^{mac}$ . A consequência disto é a igualdade das deformações equivalentes nos microplanos e macroscópica, uma vez que são as responsáveis pela evolução das variáveis de dano. A introdução das expressões para os invariantes (equações 5.41) na deformação equivalente macroscópica conforme Simo e Ju (1987) (equação 5.66) e a consideração de isotropia no desenvolvimento das integrais envolvidas, levam à seguinte deformação equivalente nos microplanos

$$\begin{aligned}\eta_{Simo}^{mic} &= \sqrt{\frac{1}{3} K^{mic} \left( \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \varepsilon_V d\mathcal{S} \right)^2 + 2G^{mic} \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\varepsilon}_D \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_D d\mathcal{S}} \\ &= \sqrt{3K^{mic} \varepsilon_V^2 + 6G^{mic} \boldsymbol{\varepsilon}_D \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_D} = \sqrt{6Y^{mic}}\end{aligned}\quad (5.71)$$

Com esta deformação equivalente e a equação 5.65, o módulo tangente elasto-dano para Simo e Ju (1987) pode ser reformulado como

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{E}}_{tan\,Simo}^d &= \underline{\mathbf{E}}_{sec}^d - \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \frac{\partial \phi^{mic}}{\partial K^{mic}} \left[ \frac{3(\underline{\mathbf{V}} \sigma_V + \underline{\mathbf{Dev}}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_D)}{\eta^{mic} (1 - d^{mic})^2} \right] \\ &\quad \otimes [\sigma_V \underline{\mathbf{V}} + \boldsymbol{\sigma}_D \cdot \underline{\mathbf{Dev}}] d\mathcal{S}\end{aligned}\quad (5.72)$$

Ao aplicar o procedimento descrito acima para a definição da deformação equivalente de von Mises Modificado (equação 5.67), chega-se à seguinte expressão para a correspondente deformação equivalente nos microplanos

$$\eta_{Vrec}^{mic} = 3k_0 \varepsilon_V + \sqrt{(3k_1 \varepsilon_V)^2 + \frac{3}{2} k_2 \boldsymbol{\varepsilon}_D \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_D} \quad (5.73)$$

Com esta deformação equivalente e a equação 5.65, o módulo tangente elasto-dano para von Mises Modificado pode ser reformulado como

$$\begin{aligned} \underline{\underline{E}}_{\tilde{z}tanVree}^d &= \underline{\underline{E}}_{\tilde{z}sec}^d - \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \frac{\partial \phi^{mic}}{\partial \kappa^{mic}} \left[ \frac{\underline{\underline{V}}\sigma_V + \underline{\underline{Dev}}^T \cdot \underline{\underline{\sigma}}_D}{(1 - \tilde{d}^{mic})} \right] \\ \otimes \left[ \left( 3k_0 + \frac{9k_1^2 \varepsilon_V}{\eta^{mic} - 3k_0 \varepsilon_V} \right) \underline{\underline{V}} + \left( \frac{3k_2 \underline{\underline{\varepsilon}}_D}{2(\eta^{mic} - 3k_0 \varepsilon_V)} \right) \cdot \underline{\underline{Dev}} \right] d\mathcal{S} \quad (5.74) \end{aligned}$$

Destaca-se que a consideração de isotropia foi usada somente para o ajuste das deformações equivalentes dos microplanos e não na formulação normal do conceito de microplanos, desenvolvida nas seções anteriores. Conseqüentemente, a resposta do material neste modelo é ainda anisotrópica. Com as deformações equivalentes definidas, as respostas do material nos modelos de dano macroscópico e de microplanos não são idênticas, mas muito próximas. As diferenças surgem da evolução anisotrópica do dano incorporada ao modelo de microplanos, onde estes, em um ponto material, são influenciados sucessivamente pela degradação do dano (Leukart e Ramm, 2006).

## 5.5 Integração Numérica

Como foi apresentado anteriormente, na obtenção das tensões macroscópicas e dos módulos secantes e tangentes macroscópicos, é necessário efetuar uma integração sobre uma semi-esfera de raio unitário. Apesar de algumas integrais aparecerem com o domínio de integração correspondente à toda a esfera, computacionalmente é sempre mais barato realizar a integração numérica sobre a semi-esfera, já que dois pares de microplanos possuem a mesma direção espacial. Estas integrais necessitam ser avaliadas, numa análise de elementos finitos, em cada passo de carga, em cada iteração do passo e em cada ponto de integração de cada elemento finito, pois aqui este ponto de integração é tomado como o ponto material em torno do qual a esfera é criada. Então, isto deve ser tão eficiente quanto possível. Esta avaliação é feita por integração numérica usando fórmulas de integração Gaussiana adequadas para

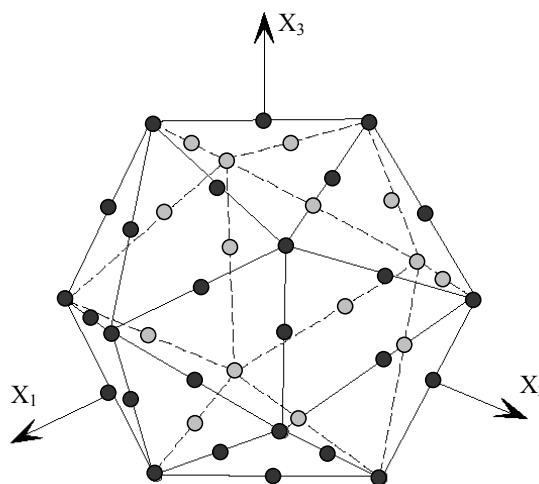
a superfície do hemisfério. Assim, a integração é realizada pela soma dos valores da função a ser integrada em um número de pontos da semi-esfera na forma

$$\int_{\Omega} F d\Omega \approx 4\pi \sum_{k=1}^{nmp} F_k \omega_k \quad (5.75)$$

onde o índice  $k$  representa cada um dos microplanos utilizados na integração e  $\omega_k$  representa o peso da integração numérica para cada microplano.

Uma escolha correta do número de microplanos a ser utilizado na análise é fundamental para a sua precisão. Não se pode escolher um número pequeno de microplanos, pois isto acarretaria erros na análise. Entretanto, um número muito grande de microplanos pode não conferir uma precisão melhor ao modelo. Com isto, o esforço computacional seria maior que o necessário.

Estudos realizados por Bazant e Oh (1985) mostram que um total de 21 pontos de integração, distribuídos sobre a superfície da semi-esfera, são suficientes para a obtenção das grandezas. A figura 5.12 mostra a discretização espacial de uma esfera, na qual os microplanos são situados em planos tangentes aos vértices e aos lados de um icosaedro regular.



**Figura 5.12:** Discretização espacial de uma esfera (Kuhl et al., 2001)

Neste trabalho foram implementados três tipos de integração numérica: as regras de 21 pontos de integração (simétrica e não-simétrica) e a de 33 pontos. A

seguir, são apresentadas as tabelas 5.1, 5.2 e 5.3 contendo o peso e as componentes da normal de cada microplano para cada uma das regras.

**Tabela 5.1:** Coordenadas e pesos para integração numérica sobre uma semi-esfera com 21 pontos de integração - sem simetrias ortogonais (Bazant e Oh, 1985)

| $k_i$ | $n_1$          | $n_2$           | $n_3$           | $\omega_k$      |
|-------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 1     | 0,187592474085 | 0               | 0,982246946377  | 0,0198412698413 |
| 2     | 0,794654472292 | -0,525731112119 | 0,303530999103  | 0,0198412698413 |
| 3     | 0,794654472292 | 0,525731112119  | 0,303530999103  | 0,0198412698413 |
| 4     | 0,187592474085 | -0,850650808352 | -0,491123473188 | 0,0198412698413 |
| 5     | 0,794654472292 | 0               | -0,607061998207 | 0,0198412698413 |
| 6     | 0,187592474085 | 0,850650808352  | -0,491123473188 | 0,0198412698413 |
| 7     | 0,577350269190 | -0,309016994375 | 0,755761314076  | 0,0253968253968 |
| 8     | 0,577350269190 | 0,309016994375  | 0,755761314076  | 0,0253968253968 |
| 9     | 0,934172358963 | 0               | 0,356822089773  | 0,0253968253968 |
| 10    | 0,577350269190 | -0,809016994375 | -0,110264089708 | 0,0253968253968 |
| 11    | 0,934172358963 | -0,309016994375 | -0,178411044887 | 0,0253968253968 |
| 12    | 0,934172358963 | 0,309016994375  | -0,178411044887 | 0,0253968253968 |
| 13    | 0,577350269190 | 0,809016994375  | -0,110264089708 | 0,0253968253968 |
| 14    | 0,577350269190 | -0,5            | -0,645497224368 | 0,0253968253968 |
| 15    | 0,577350269190 | 0,5             | -0,645497224368 | 0,0253968253968 |
| 16    | 0,356822089773 | -0,809016994375 | 0,467086179481  | 0,0253968253968 |
| 17    | 0,356822089773 | 0               | -0,934172358963 | 0,0253968253968 |
| 18    | 0,356822089773 | 0,809016994375  | 0,467086179481  | 0,0253968253968 |
| 19    | 0              | -0,5            | 0,866025403784  | 0,0253968253968 |
| 20    | 0              | 0,5             | -0,866025403784 | 0,0253968253968 |
| 21    | 0              | 1               | 0               | 0,0253968253968 |



**Tabela 5.2:** Coordenadas e pesos para integração numérica sobre uma semi-esfera com 21 pontos de integração - com simetrias ortogonais (Bazant e Oh, 1985)

| $k_i$ | $n_1$          | $n_2$           | $n_3$           | $\omega_k$      |
|-------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 1     | 1              | 0               | 0               | 0,0265214244093 |
| 2     | 0              | 1               | 0               | 0,0265214244093 |
| 3     | 0              | 0               | 1               | 0,0265214244093 |
| 4     | 0,707106781187 | 0,707106781187  | 0               | 0,0199301476312 |
| 5     | 0,707106781187 | -0,707106781187 | 0               | 0,0199301476312 |
| 6     | 0,707106781187 | 0               | 0,707106781187  | 0,0199301476312 |
| 7     | 0,707106781187 | 0               | -0,707106781187 | 0,0199301476312 |
| 8     | 0              | 0,707106781187  | 0,707106781187  | 0,0199301476312 |
| 9     | 0              | 0,707106781187  | -0,707106781187 | 0,0199301476312 |
| 10    | 0,387907304067 | 0,387907304067  | 0,836095596749  | 0,0250712367487 |
| 11    | 0,387907304067 | 0,387907304067  | -0,836095596749 | 0,0250712367487 |
| 12    | 0,387907304067 | -0,387907304067 | 0,836095596749  | 0,0250712367487 |
| 13    | 0,387907304067 | -0,387907304067 | -0,836095596749 | 0,0250712367487 |
| 14    | 0,387907304067 | 0,836095596749  | 0,387907304067  | 0,0250712367487 |
| 15    | 0,387907304067 | 0,836095596749  | -0,387907304067 | 0,0250712367487 |
| 16    | 0,387907304067 | -0,836095596749 | 0,387907304067  | 0,0250712367487 |
| 17    | 0,387907304067 | -0,836095596749 | -0,387907304067 | 0,0250712367487 |
| 18    | 0,836095596749 | 0,387907304067  | 0,387907304067  | 0,0250712367487 |
| 19    | 0,836095596749 | 0,387907304067  | -0,387907304067 | 0,0250712367487 |
| 20    | 0,836095596749 | -0,387907304067 | 0,387907304067  | 0,0250712367487 |
| 21    | 0,836095596749 | -0,387907304067 | -0,387907304067 | 0,0250712367487 |

**Tabela 5.3:** Coordenadas e pesos para integração numérica sobre uma semi-esfera com 33 pontos de integração (Bazant e Oh, 1985)

| $k_i$ | $n_1$          | $n_2$           | $n_3$           | $\omega_k$      |
|-------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 1     | 1              | 0               | 0               | 0,0098535399343 |
| 2     | 0              | 1               | 0               | 0,0098535399343 |
| 3     | 0              | 0               | 0               | 0,0098535399343 |
| 4     | 0,707106781187 | 0,707106781187  | 0               | 0,0162969685886 |
| 5     | 0,707106781187 | -0,707106781187 | 0               | 0,0162969685886 |
| 6     | 0,707106781187 | 0               | 0,707106781187  | 0,0162969685886 |
| 7     | 0,707106781187 | 0               | -0,707106781187 | 0,0162969685886 |
| 8     | 0              | 0,707106781187  | 0,707106781187  | 0,0162969685886 |
| 9     | 0              | 0,707106781187  | -0,707106781187 | 0,0162969685886 |
| 10    | 0,933898956394 | 0,357537045978  | 0               | 0,0134788844008 |
| 11    | 0,933898956394 | -0,357537045978 | 0               | 0,0134788844008 |
| 12    | 0,357537045978 | 0,933898956394  | 0               | 0,0134788844008 |
| 13    | 0,357537045978 | -0,933898956394 | 0               | 0,0134788844008 |
| 14    | 0,933898956394 | 0               | 0,357537045978  | 0,0134788844008 |
| 15    | 0,933898956394 | 0               | -0,357537045978 | 0,0134788844008 |
| 16    | 0,357537045978 | 0               | 0,933898956394  | 0,0134788844008 |
| 17    | 0,357537045978 | 0               | -0,933898956394 | 0,0134788844008 |
| 18    | 0              | 0,933898956394  | 0,357537045978  | 0,0134788844008 |
| 19    | 0              | 0,933898956394  | -0,357537045978 | 0,0134788844008 |
| 20    | 0              | 0,357537045978  | 0,933898956394  | 0,0134788844008 |
| 21    | 0              | 0,357537045978  | -0,933898956394 | 0,0134788844008 |
| 22    | 0,437263676092 | 0,437263676092  | 0,785875915868  | 0,0175759129880 |
| 23    | 0,437263676092 | 0,437263676092  | -0,785875915868 | 0,0175759129880 |
| 24    | 0,437263676092 | -0,437263676092 | 0,785875915868  | 0,0175759129880 |
| 25    | 0,437263676092 | -0,437263676092 | -0,785875915868 | 0,0175759129880 |
| 26    | 0,437263676092 | 0,785875915868  | 0,437263676092  | 0,0175759129880 |
| 27    | 0,437263676092 | 0,785875915868  | -0,437263676092 | 0,0175759129880 |
| 28    | 0,437263676092 | -0,785875915868 | 0,437263676092  | 0,0175759129880 |
| 29    | 0,437263676092 | -0,785875915868 | -0,437263676092 | 0,0175759129880 |
| 30    | 0,785875915868 | 0,437263676092  | 0,437263676092  | 0,0175759129880 |
| 31    | 0,785875915868 | 0,437263676092  | -0,437263676092 | 0,0175759129880 |
| 32    | 0,785875915868 | -0,437263676092 | 0,437263676092  | 0,0175759129880 |
| 33    | 0,785875915868 | -0,437263676092 | -0,437263676092 | 0,0175759129880 |

# Capítulo 6

## Modelos Constitutivos de Microplanos para Contínuos Generalizados

### 6.1 Introdução

As duas formulações apresentadas neste capítulo reúnem as vantagens do modelo constitutivo de microplanos com aquelas dos contínuos generalizados. A principal diferença entre elas é o tipo de contínuo empregado. A primeira utiliza o contínuo de Cosserat e a segunda o contínuo com microexpansão. Isto é relevante porque pode-se relacionar o tipo de material em questão com o contínuo mais adequado para descrevê-lo. As escolhas feitas durante o desenvolvimento dessas formulações e que resultam nos modelos constitutivos apresentados aqui merecem algumas justificativas, expostas a seguir.

### 6.2 Justificativas

A tabela 6.1 mostra as teorias adotadas para o desenvolvimento das formulações desta Tese e, em seguida, são apresentadas algumas justificativas para cada uma destas escolhas.

**Tabela 6.1:** Teorias adotadas

| <b>Teorias</b>         | <b>Tipo adotado</b>    |
|------------------------|------------------------|
| Contínuo               | Micropolar             |
|                        | com Microexpansão      |
| Modelagem Constitutiva | Microplanos            |
| Formulação             | Termodinâmica          |
| Medida de dano         | Deformação Equivalente |

### 1) Contínuos Micropolar e com Microexpansão

Modelar o fenômeno de amolecimento por meio do contínuo clássico pode resultar numa escolha pouco representativa da realidade física. Numericamente, isto se manifesta na dependência patológica da malha de elementos finitos, ou seja, localizações que inevitavelmente acompanham os processos de falha nos materiais parcialmente frágeis tendem a ser determinadas inteiramente pelo espaçamento da malha de elementos finitos (de Borst, 1993).

Inúmeras aproximações têm sido propostas para enriquecer a descrição do contínuo tal que a localização possa se desenvolver corretamente (Bazant e Pijaudier-Cabot, 1988; Mühlhaus e Vardoulakis, 1987; de Borst, 1991, 1993). A mecânica generalizada de Cosserat tem sido aplicada com êxito na modelagem contínua de problemas referentes a meios com algum tipo de microestruturação intrínseca, tais como materiais granulares de qualquer espécie (Figueiredo e Vargas, 2002). Em problemas onde a heterogeneidade é originada pela evolução das próprias deformações do meio, como no caso de bifurcações com localização de deformações, a mecânica de Cosserat também tem sido empregada como estratégia para remediar a dependência das soluções computacionais obtidas por elementos finitos com relação à discretização adotada (Lages, 1997).

O aspecto que diferencia a mecânica generalizada de Cosserat e a torna apropriada à modelagem de tais problemas é a existência, na cinemática do meio, de graus de liberdade rotacionais adicionais, independentes dos translacionais clássicos. Na

estática, por sua vez, tem-se grandezas denominadas tensões-momento conjugadas energeticamente com os gradientes dessas rotações. Como conseqüência, aparecem parâmetros com dimensão de comprimento nas relações constitutivas, que permitem contemplar a influência das dimensões e a forma da microestrutura na resposta macroscópica do meio (Figueiredo e Vargas, 2002).

As estratégias micropolar têm apresentado resultados satisfatórios para a modelagem de localização de deformações com predominância do modo de cisalhamento (ou modo II). Entretanto, alguns autores comentam a respeito de sua inaplicabilidade no caso de predominância do mecanismo de localização no modo de abertura (ou modo I), muito importante no caso de concreto e materiais geológicos (Lages, 1997). Neste caso, o contínuo com microexpansão surge como uma alternativa, pois além de conter a teoria micropolar, também possui a microexpansão volumétrica como grau de liberdade adicional, tornando-se capaz de representar também o modo I de abertura de fissuras. Isso ocorre porque este contínuo possui comprimentos característicos à flexão e à tração.

A vantagem de se poder optar entre o contínuo com microexpansão e micropolar está na possibilidade de adequá-lo às deformações da microestrutura do material, quando conhecidas a priori. Outro fato que deve ser considerado é o aspecto computacional, pois, como visto no capítulo 4, em problemas bidimensionais, o contínuo com microexpansão possui 6 grandezas internas adicionais em relação ao contínuo micropolar (uma microexpansão, seus dois gradientes, uma microtensão e duas microforças), o que acarreta um esforço computacional maior no cálculo das tensões e deformações e principalmente no armazenamento dessas grandezas. Logo, a utilização do contínuo micropolar deve ser preferida quando não houver necessidade do uso do contínuo com microexpansão.

## **2) Modelo de Microplanos**

A teoria micropolar tem sido comumente usada com a teoria da plasticidade

em problemas não-lineares (Adhikary e Dyskin, 1998; Jog, 2004; Li e Tang, 2005; Liu e Hu, 2005; Voyiadjis et al., 2005; Hu et al., 2005) e esta última apresenta algumas limitações quando se refere a materiais parcialmente frágeis. A ocorrência de “strain-softening”, muito comum na descrição do comportamento destes materiais, viola as hipóteses básicas da teoria da plasticidade, geralmente expressadas como postulados de Drucker. A presença de atrito nas microfissuras e a degradação da rigidez elástica devido à microfissuração progressiva também invalidam os postulados de Drucker. Assim, as teorias que utilizam superfícies de carregamento e potenciais inelásticos, sem considerar o comportamento anisotrópico do material, dificilmente podem produzir um bom modelo para a microfissuração progressiva. Seu uso é mais complicado pelo fato de que as microfissuras fazem a rigidez elástica tornar-se anisotrópica (Bazant e Gambarova, 1984). Por estas razões, parece preferível descrever as propriedades inelásticas não globalmente, mas individualmente para planos de orientações arbitrárias dentro do material.

Para a descrição estática de meios parcialmente frágeis heterogêneos, o modelo constitutivo de microplanos tem se apresentado como uma alternativa.

A teoria de microplanos apresenta quatro características relevantes que a torna uma das teorias constitutivas de maior sucesso na ramo da engenharia. São elas:

1. Incorpora a informação microscópica na formulação macroscópica do material de forma natural;
2. Apresenta equações constitutivas muito simples para os microplanos que levam a resultados macroscópicos altamente precisos do comportamento do material;
3. É capaz de modelar o comportamento anisotrópico do material, uma vez que cada microplano está sujeito a diferentes históricos de carregamento e pode exibir diferentes deformações e rigidezes;
4. Não necessita da imposição de qualquer exigência de invariância tensorial para

as relações tensão-deformação (como é o caso, por exemplo, da teoria da plasticidade), uma vez que estas relações na teoria de microplanos referem-se a um único plano que não pode ser rotacionado por definição. As exigências de invariância tensorial são satisfeitas à posteriori, isto é feito simplesmente pela combinação adequada dos planos de várias orientações arbitrárias (Bazant e Prat, 1988).

### 3) Formulação Termodinâmica

Todos os modelos constitutivos devem obedecer às leis da termodinâmica. Na maioria dos casos, entretanto, esta exigência básica é imposta retroativamente, isto é, primeiramente as leis constitutivas são propostas e as limitações termodinâmicas são, então, aplicadas como uma restrição. Há duas desvantagens nesta aproximação: a) as restrições adicionadas podem indevidamente limitar o comportamento do modelo; ou b) as condições impostas podem não restringir o modelo adequadamente, conduzindo a resultados sem sentido físico (Walsh e Tordesillas, 2004b).

A descrição matemática não é o todo de um modelo constitutivo. Em comportamentos descritos pela mecânica do dano, sem a consideração termodinâmica equivalente, a lei de evolução do dano não pode ser consistentemente estabelecida e as características convenientes que acompanham esta teoria são perdidas (Wu e Li, 2008).

Embora implementados com sucesso e excessivamente verificados com resultados experimentais, os modelos tradicionais de microplanos foram baseados até certo ponto em argumentos intuitivos, e sua consistência termodinâmica não pôde ser garantida em todas as situações de carregamento. Além disso, da forma com que foram introduzidas, algumas das tensões nos microplanos não são quantidades conjugadas às suas correspondentes deformações. Estas deficiências foram detectadas quando a base termodinâmica para formulações de microplanos foi estabelecida pelos autores Carol et al. (2001). A idéia principal consiste em um potencial de energia livre

introduzido para cada microplano, cuja integral sobre todas as orientações possíveis conduz à energia livre macroscópica clássica, permitindo que todos os tipos de comportamento constitutivo sejam impostos aos microplanos e que os parâmetros do material necessários à sua descrição tenham sentidos físicos mais claros. Este conceito, combinado com a restrição cinemática, fornece um procedimento termodinamicamente consistente para definir esforços conjugados nos microplanos, e para desenvolver as corretas relações integrais estáticas necessárias. Isto tornou possível, por exemplo, o desenvolvimento consistente e racional de formulações de microplanos com deformação finita, que exigem total consistência termodinâmica (Carol et al., 2004).

#### **4) Deformação Equivalente**

As variáveis de dano devem relacionar as quantidades efetivas às suas contrapartes nominais ou aparentes, que são aquelas medidas externamente e que satisfazem o equilíbrio e a compatibilidade em nível estrutural. As quantidades efetivas são aquelas que o material, entre as microfissuras, está sujeito, isto é, são as grandezas relacionadas às regiões do material que ainda conseguem resistir a alguma ação externa. A deformação equivalente é uma das formas utilizadas para descrever a evolução do dano e relacionar as quantidades nominais e efetivas.

A deformação equivalente mapeia o estado tensorial de deformação em uma variável escalar. Ela reflete os diferentes efeitos de cada componente de deformação no crescimento do dano, pela ponderação dessas componentes (Peerlings et al., 1998).

Uma vez que a degradação pode ser compreendida como o efeito médio de microfissuras distribuídas, e cada uma destas pode estar sofrendo a influência de certas componentes de deformação, é mais sensato que o dano seja descrito por uma deformação equivalente.

A seguir, as teorias acima são empregadas nas formulações de microplanos



para o contínuo de Cosserat e de microplanos para o contínuo com microexpansão. As formulações são descritas para o caso tridimensional. Utilizar-se-á a palavra “*macroscópica*” para indicar o nível que corresponde ao ponto material e a palavra “*generalizada*” para referir-se a todos os tipos de deformação ou tensão existentes num contínuo generalizado.

Para cada formulação, são definidas as restrições cinemáticas para a obtenção das componentes de deformação generalizadas nos microplanos. Em seguida, as relações constitutivas nos microplanos e a aplicação das leis da Termodinâmica para obtenção das grandezas macroscópicas são desenvolvidas para um material linear, elástico e isotrópico e para um material que sofre dano progressivo, quando são definidas as deformações equivalentes que controlam o crescimento do dano.

## 6.3 Modelo Constitutivo de Microplanos para o Contínuo de Cosserat

### 6.3.1 Restrição Cinemática

A restrição cinemática é tal que os vetores de deformação  $\underline{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{\gamma}}$  e de microcurvatura  $\underline{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{\kappa}}$  em cada microplano são obtidos pela projeção normal dos tensores macroscópicos  $\boldsymbol{\gamma}$  e  $\boldsymbol{\kappa}$ , respectivamente, naquela direção.

$$\underline{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{n}, \quad \underline{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{\kappa}} = \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{n} \quad (6.1)$$

onde  $\boldsymbol{n}$  é o vetor normal unitário de cada microplano.

As componentes de deformação e de microcurvatura nos microplanos são definidas de modo que os parâmetros elásticos nos microplanos sejam unicamente determinados pelas constantes elásticas macroscópicas. Dessa forma, cada parte dos tensores macroscópicos de deformação e de microcurvatura são projetados nos microplanos. O tensor de deformação macroscópico é decomposto em suas partes volumétrica e desviadora e o tensor de microcurvatura macroscópico em suas partes

simétrica e anti-simétrica.

$$\underline{\gamma} = \underline{\gamma}_{vol} + \underline{\gamma}_{dev}, \quad \underline{\kappa} = \underline{\kappa}^{sym} + \underline{\kappa}^{skw} \quad (6.2)$$

com cada parcela de deformação e de microcurvatura dadas por

$$\underline{\gamma}_{vol} = \frac{1}{3}[\underline{\gamma} : \underline{\mathbf{I}}] \cdot \underline{\mathbf{I}}, \quad \underline{\gamma}_{dev} = \underline{\gamma} - \underline{\gamma}_{vol} \quad (6.3)$$

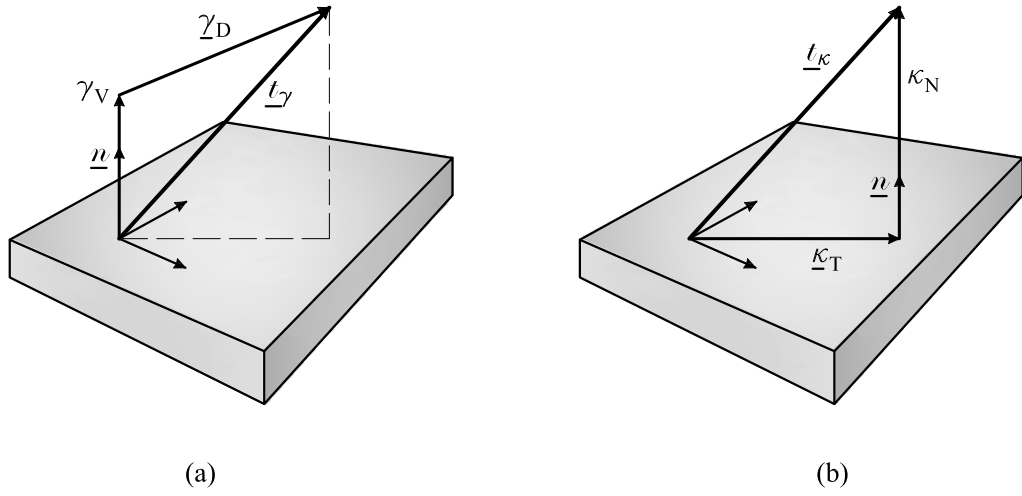
$$\underline{\kappa}^{sym} = \underline{\mathcal{J}}^{sym} : \underline{\kappa}, \quad \underline{\kappa}^{skw} = \underline{\mathcal{J}}^{skw} : \underline{\kappa} \quad (6.4)$$

onde  $\underline{\mathbf{I}}$  é o tensor identidade de segunda ordem de componentes  $\delta_{ij}$  e  $\underline{\mathcal{J}}^{sym}$  é o tensor identidade simétrico de quarta ordem de componentes  $\frac{[\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}]}{2}$ , enquanto  $\underline{\mathcal{J}}^{skw}$  é o anti-simétrico de componentes  $\frac{[\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}]}{2}$ .

Assim, as componentes de deformação e de microcurvatura nos microplanos são obtidas pela projeção, na direção dos mesmos, das parcelas nas equações 6.3 e 6.4. A figura 6.1 mostra estas restrições.

$$\begin{aligned} \underline{t}_{\gamma} = \underline{\gamma} \cdot \underline{n} &= [\underline{\gamma}_{vol} + \underline{\gamma}_{dev}] \cdot \underline{n} \\ &= \frac{1}{3}[\underline{\mathbf{I}} : \underline{\gamma}] \cdot \underline{n} + \underline{\gamma}_{dev} \cdot \underline{n} \\ &= \underline{V} : \underline{\gamma} \cdot \underline{n} + \underline{\gamma}_{dev} \cdot \underline{n} \\ &= \gamma_V \underline{n} + \underline{\gamma}_D \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} \underline{t}_{\kappa} = \underline{\kappa} \cdot \underline{n} &= [\underline{\kappa}^{sym} + \underline{\kappa}^{skw}] \cdot \underline{n} \\ &= \underline{\kappa}^{sym} \cdot \underline{n} + \underline{\kappa}^{skw} \cdot \underline{n} \\ &= \underline{n} \cdot \underline{\kappa}^{sym} - \underline{n} \cdot \underline{\kappa}^{skw} \\ &= \underline{n} \cdot \underline{\mathcal{J}}^{sym} : \underline{\kappa} - \underline{n} \cdot \underline{\mathcal{J}}^{skw} : \underline{\kappa} \\ &= \kappa_N \underline{n} + \underline{\kappa}_T \end{aligned} \quad (6.6)$$



**Figura 6.1:** (a) Componentes de deformação nos microplanos, (b) Componentes de microcurvatura nos microplanos

Então, as componentes de deformação desviadora,  $\underline{\gamma}_D$ , e de microcurvatura tangencial,  $\underline{\kappa}_T$ , nos microplanos são dadas por:

$$\underline{\gamma}_D = \underline{t}_\gamma - \gamma_V \underline{n} = \underline{\underline{D}} : \underline{\gamma}, \quad \underline{\kappa}_T = \underline{t}_\kappa - \kappa_N \underline{n} = \underline{\underline{T}} : \underline{\kappa} \quad (6.7)$$

onde os tensores de projeção desviador  $\underline{\underline{D}}$  e tangencial  $\underline{\underline{T}}$  são definidos como

$$\underline{\underline{D}} = \underline{n} \cdot \underline{\underline{\mathcal{I}}}_{dev}, \quad \underline{\underline{T}} = \underline{n} \cdot \underline{\underline{\mathcal{I}}} - \underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n} \quad (6.8)$$

Aqui,  $\underline{\underline{\mathcal{I}}}$  é o tensor identidade de quarta ordem de componentes  $\mathcal{I}_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$ , sendo  $\underline{\underline{\mathcal{I}}} = \underline{\underline{\mathcal{I}}}^{sym} + \underline{\underline{\mathcal{I}}}^{skw}$ , cujas parcelas volumétrica e desviadora são  $\underline{\underline{\mathcal{I}}}_{vol} = \frac{1}{3} \underline{\underline{\mathbf{I}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{I}}}$  e  $\underline{\underline{\mathcal{I}}}_{dev} = \underline{\underline{\mathcal{I}}} - \underline{\underline{\mathcal{I}}}_{vol}$ , respectivamente.

As componentes de deformação volumétrica,  $\gamma_V$ , e de microcurvatura normal,  $\kappa_N$ , são definidas abaixo, enquanto as parcelas de deformação desviadora e de microcurvatura tangencial nos microplanos são decompostas em suas partes simétrica,  $(\underline{\gamma}_D^{sym}, \underline{\kappa}_T^{sym})$  e anti-simétrica  $(\underline{\gamma}_D^{skw}, \underline{\kappa}_T^{skw})$ .

$$\gamma_V = \underline{V} : \underline{\gamma}, \quad \kappa_N = \underline{N} : \underline{\kappa} \quad (6.9)$$

$$\underline{\gamma}_D^{sym} = \underline{\underline{D}}^{sym} : \underline{\gamma}, \quad \underline{\kappa}_T^{sym} = \underline{\underline{T}}^{sym} : \underline{\kappa} \quad (6.10)$$

$$\underline{\gamma}_D^{skw} = -\underline{\underline{D}}^{skw} : \underline{\gamma}, \quad \underline{\kappa}_T^{skw} = -\underline{\underline{T}}^{skw} : \underline{\kappa} \quad (6.11)$$

onde

$$\underline{\underline{V}} = \frac{1}{3} \underline{\underline{I}} \quad , \quad \underline{\underline{N}} = \underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}} \quad (6.12)$$

$$\underline{\underline{D}}^{sym} = \underline{\underline{n}} \cdot \underline{\underline{\mathcal{J}}}^{sym} - \frac{1}{3} \underline{\underline{n}} \cdot \underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{I}} = \underline{\underline{n}} \cdot \underline{\underline{\mathcal{J}}}_{dev}^{sym} \quad (6.13)$$

$$\underline{\underline{T}}^{sym} = \underline{\underline{n}} \cdot \underline{\underline{\mathcal{J}}}^{sym} - \underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}} \quad (6.14)$$

$$\underline{\underline{D}}^{skw} = \underline{\underline{T}}^{skw} = \underline{\underline{n}} \cdot \underline{\underline{\mathcal{J}}}^{skw} \quad (6.15)$$

$\underline{\underline{\mathcal{J}}}_{dev}^{sym} = \underline{\underline{\mathcal{J}}}^{sym} - \underline{\underline{\mathcal{J}}}_{vol}$  é a parcela desviadora do tensor identidade simétrico de quarta ordem.

### 6.3.2 Integrações Analíticas

Pode-se encontrar em Kanatani (1984) e Lubarda e Krajcinovic (1993) as propriedades de integração analítica que envolvem os tensores de projeção normal, volumétrico, desviador e tangencial. Elas se tornam úteis no desenvolvimento das formulações propostas. O domínio de integração  $\mathcal{S}$  é a superfície de uma esfera unitária.

$$\frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} d\mathcal{S} = 3, \quad \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \underline{\underline{V}} d\mathcal{S} = 3\underline{\underline{V}} = \underline{\underline{I}}, \quad \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \underline{\underline{N}} d\mathcal{S} = \underline{\underline{I}} \quad (6.16)$$

$$\frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \underline{\underline{V}} \otimes \underline{\underline{V}} d\mathcal{S} = \underline{\underline{\mathcal{J}}}_{vol} \quad (6.17)$$

$$\frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \underline{\underline{D}}^{symT} \cdot \underline{\underline{D}}^{sym} = \underline{\underline{\mathcal{J}}}_{dev}^{sym} \quad (6.18)$$

$$\frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \underline{\underline{D}}^{skwT} \cdot \underline{\underline{D}}^{skw} = \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \underline{\underline{T}}^{skwT} \cdot \underline{\underline{T}}^{skw} = \underline{\underline{\mathcal{J}}}_{skw} \quad (6.19)$$

$$\frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \underline{\underline{N}} \otimes \underline{\underline{N}} d\mathcal{S} = \underline{\underline{\mathcal{J}}}_{vol} + \frac{2}{5} \underline{\underline{\mathcal{J}}}_{dev}^{sym} \quad (6.20)$$

$$\frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \underline{\underline{T}}^{symT} \cdot \underline{\underline{T}}^{sym} = \frac{3}{5} \underline{\underline{\mathcal{J}}}_{dev}^{sym} \quad (6.21)$$

A integração numérica utilizada durante a análise não-linear pelo método dos elementos finitos é aquela apresentada na seção 5.5 do capítulo 5.

### 6.3.3 Elasticidade nos Microplanos

Nesta seção, é apresentada a formulação do modelo constitutivo de microplanos para o contínuo de Cosserat considerando o material linear, elástico e isotrópico. Os correspondentes parâmetros elásticos nos microplanos são determinados em termos das constantes elásticas macroscópicas. Esta é a demanda mínima que um modelo de microplanos tem que alcançar sem qualquer restrição.

#### 6.3.3.1 Relações Constitutivas nos Microplanos

Materiais elásticos são completamente não-dissipativos e as deformações generalizadas são reversíveis e, assim, nenhuma variável interna  $\mathbf{q}$  necessita ser considerada. Para o caso linear, elástico e isotrópico, a energia livre elástica nos microplanos,  $\Psi_0^{mic}$ , é definida como uma função quadrática, que depende das componentes de deformação e de microcurvatura nos microplanos e que pode ser aditivamente decomposta na forma

$$\Psi_0^{mic} := \Psi_{0\gamma}^{mic}(\gamma_V, \boldsymbol{\gamma}_D^{sym}, \boldsymbol{\gamma}_D^{skw}) + \Psi_{0\kappa}^{mic}(\kappa_N, \boldsymbol{\kappa}_T^{sym}, \boldsymbol{\kappa}_T^{skw}) \quad (6.22)$$

ou

$$\begin{aligned} \Psi_0^{mic} := & \frac{1}{2} \left[ \gamma_V E_{V0} \gamma_V + \boldsymbol{\gamma}_D^{sym} \cdot E_{D0}^{sym} \boldsymbol{\gamma}_D^{sym} + \boldsymbol{\gamma}_D^{skw} \cdot E_{D0}^{skw} \boldsymbol{\gamma}_D^{skw} + \right. \\ & \left. + \kappa_N E_{N0} \kappa_N + \boldsymbol{\kappa}_T^{sym} \cdot E_{T0}^{sym} \boldsymbol{\kappa}_T^{sym} + \boldsymbol{\kappa}_T^{skw} \cdot E_{T0}^{skw} \boldsymbol{\kappa}_T^{skw} \right] \end{aligned} \quad (6.23)$$

onde  $E_{V0}$ ,  $E_{D0}^{sym}$ ,  $E_{D0}^{skw}$ ,  $E_{N0}$ ,  $E_{T0}^{sym}$  e  $E_{T0}^{skw}$  são os módulos elásticos nos microplanos relacionados a cada tipo de deformação generalizada nos microplanos.

As tensões  $(\sigma_V, \boldsymbol{\sigma}_D^{sym}, \boldsymbol{\sigma}_D^{skw})$  e tensões-momento  $(\mu_N, \boldsymbol{\mu}_T^{sym}, \boldsymbol{\mu}_T^{skw})$  nos microplanos são quantidades termodinamicamente conjugadas às correspondentes componentes de deformação e de microcurvatura por meio da energia livre elástica. Assim,

tem-se

$$\begin{aligned}
\sigma_V &:= \frac{\partial \Psi_0^{mic}}{\partial \gamma_V} = E_{V0} \gamma_V, & \mu_N &:= \frac{\partial \Psi_0^{mic}}{\partial \kappa_N} = E_{N0} \kappa_N \\
\underline{\sigma}_D^{sym} &:= \frac{\partial \Psi_0^{mic}}{\partial \underline{\gamma}_D^{sym}} = E_{D0}^{sym} \underline{\gamma}_D^{sym}, & \underline{\mu}_T^{sym} &:= \frac{\partial \Psi_0^{mic}}{\partial \underline{\kappa}_T^{sym}} = E_{T0}^{sym} \underline{\kappa}_T^{sym} \\
\underline{\sigma}_D^{skw} &:= \frac{\partial \Psi_0^{mic}}{\partial \underline{\gamma}_D^{skw}} = E_{D0}^{skw} \underline{\gamma}_D^{skw}, & \underline{\mu}_T^{skw} &:= \frac{\partial \Psi_0^{mic}}{\partial \underline{\kappa}_T^{skw}} = E_{T0}^{skw} \underline{\kappa}_T^{skw}
\end{aligned} \tag{6.24}$$

### 6.3.3.2 Aplicação das Leis da Termodinâmica

A aplicação das leis da termodinâmica realizada na seção 5.4.3 do capítulo 5 agora é estendida para contemplar as grandezas relativas ao contínuo de Cosserat. Novamente, é considerado que a integral da energia livre nos microplanos ( $\Psi^{mic}$ ) sobre a superfície de uma esfera unitária resulta na energia livre macroscópica ( $\Psi^{mac}$ )

$$\Psi^{mac} = \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \Psi^{mic} d\mathcal{S} \tag{6.25}$$

Considerando-se a desigualdade macroscópica de Clausius-Duhem para o caso isotérmico, tem-se

$$\mathcal{D}^{mac} = \underline{\sigma} : \underline{\dot{\gamma}} + \underline{\mu} : \underline{\dot{\kappa}} - \dot{\Psi}^{mac} \geq 0 \tag{6.26}$$

onde  $\mathcal{D}^{mac}$  é a dissipação macroscópica,  $\underline{\dot{\gamma}}$ ,  $\underline{\dot{\kappa}}$  e  $\dot{\Psi}^{mac}$  são as taxas de deformações, de microcurvaturas e de energia livre macroscópicas, respectivamente.

Utilizando-se as equações em 6.9 a 6.11, a taxa de energia livre nos microplanos pode ser escrita como segue:

$$\begin{aligned}
\dot{\Psi}^{mic} &= [\underline{V} \sigma_V + \underline{D}^{symT} \cdot \underline{\sigma}_D^{sym} - \underline{D}^{skwT} \cdot \underline{\sigma}_D^{skw}] : \underline{\dot{\gamma}} + \\
&+ [\underline{N} \mu_N + \underline{T}^{symT} \cdot \underline{\mu}_T^{sym} - \underline{T}^{skwT} \cdot \underline{\mu}_T^{skw}] : \underline{\dot{\kappa}} - \mathcal{D}_\gamma^{mic} - \mathcal{D}_\kappa^{mic}
\end{aligned} \tag{6.27}$$

onde  $\mathcal{D}_\gamma^{mic}$  e  $\mathcal{D}_\kappa^{mic}$  são as dissipações nos microplanos devidas às variáveis internas relacionadas à deformação ( $\mathbf{q}_\gamma$ ) e à microcurvatura ( $\mathbf{q}_\kappa$ ), respectivamente, e são definidas como:

$$\mathcal{D}_\gamma^{mic} := - \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \mathbf{q}_\gamma} \cdot \dot{\mathbf{q}}_\gamma, \quad \mathcal{D}_\kappa^{mic} := - \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \mathbf{q}_\kappa} \cdot \dot{\mathbf{q}}_\kappa \tag{6.28}$$

com  $\cdot$  indicando o produto da ordem de  $\mathbf{q}_\gamma$  e de  $\mathbf{q}_\kappa$ .

Substituindo-se a equação 6.27 em 6.25, obtém-se a equação da taxa de energia livre macroscópica

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}^{mac} &= \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} [\mathbf{V} \sigma_V + \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{symT} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}_D^{sym} - \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{skwT} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}_D^{skw}] d\mathcal{S} : \dot{\boldsymbol{\gamma}} + \\ &+ \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} [\underline{\underline{\mathbf{N}}} \mu_N + \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{symT} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}}_T^{sym} - \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{skwT} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}}_T^{skw}] d\mathcal{S} : \dot{\boldsymbol{\kappa}} + \\ &- \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} (\mathcal{D}_\gamma^{mic} + \mathcal{D}_\kappa^{mic}) d\mathcal{S} \end{aligned} \quad (6.29)$$

Finalmente, a versão macroscópica da desigualdade de Clausius-Duhem (equação 6.26) pode ser avaliada, resultando na definição do tensor de tensão,  $\boldsymbol{\sigma}$ , e de tensão-momento,  $\underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}}$ , macroscópicos em termos das componentes de tensão e de tensão-momento constitutivas nos microplanos

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} [\mathbf{V} \sigma_V + \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{symT} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}_D^{sym} - \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{skwT} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}_D^{skw}] d\mathcal{S} \quad (6.30)$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}} = \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} [\underline{\underline{\mathbf{N}}} \mu_N + \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{symT} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}}_T^{sym} - \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{skwT} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}}_T^{skw}] d\mathcal{S} \quad (6.31)$$

Satisfazendo-se à desigualdade da dissipação macroscópica, tem-se

$$\mathcal{D}^{mac} = \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} (\mathcal{D}_\gamma^{mic} + \mathcal{D}_\kappa^{mic}) d\mathcal{S} \geq 0, \quad (6.32)$$

na qual a dissipação de energia total em cada microplano é exigida ser não-negativa

$$\mathcal{D}^{mic} = \mathcal{D}_\gamma^{mic} + \mathcal{D}_\kappa^{mic} \geq 0. \quad (6.33)$$

Esta exigência é obviamente mais forte do que aquela imposta pela equação 6.32 e, então, representa uma condição suficiente para que se cumpra a segunda lei da termodinâmica. Assim, a equação 6.27 pode ser interpretada como a versão da desigualdade de Clausius-Duhem no nível dos microplanos, tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{mic} &= [(\sigma_V \dot{\gamma}_V + \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}_D^{sym} \cdot \dot{\underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}}_D^{sym} + \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}_D^{skw} \cdot \dot{\underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}}_D^{skw}) - \dot{\Psi}_\gamma^{mic} + \\ &+ (\mu_N \dot{\kappa}_N + \underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}}_T^{sym} \cdot \dot{\underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}}_T^{sym} + \underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}}_T^{skw} \cdot \dot{\underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}}_T^{skw}) - \dot{\Psi}_\kappa^{mic}] \geq 0 \end{aligned} \quad (6.34)$$

Essa formulação termodinamicamente consistente não se aplica apenas à elasticidade nos microplanos, mas a qualquer descrição do seu comportamento constitutivo.

Os tensores elásticos macroscópicos de tensão e de tensão-momento, conjugados termodinamicamente aos tensores macroscópicos de deformação e de microcurvatura, respectivamente, e definidos nas equações 6.30 e 6.31, podem ser reescritos utilizando-se as equações em 6.24, 6.9, 6.10 e 6.11

$$\begin{aligned}\underline{\boldsymbol{\sigma}} &= \frac{\partial \Psi^{mac}}{\partial \underline{\boldsymbol{\gamma}}} = \underline{\mathbf{E}}_{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}^{el} : \underline{\boldsymbol{\gamma}} \\ &= \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} [E_{V0} \underline{\mathbf{V}} \otimes \underline{\mathbf{V}} + E_{D0}^{sym} \underline{\mathbf{D}}^{symT} \cdot \underline{\mathbf{D}}^{sym} + E_{D0}^{skw} \underline{\mathbf{D}}^{skwT} \cdot \underline{\mathbf{D}}^{skw}] d\mathcal{S} : \underline{\boldsymbol{\gamma}}\end{aligned}\quad (6.35)$$

$$\begin{aligned}\underline{\boldsymbol{\mu}} &= \frac{\partial \Psi^{mac}}{\partial \underline{\boldsymbol{\kappa}}} = \underline{\mathbf{E}}_{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^{el} : \underline{\boldsymbol{\kappa}} \\ &= \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} [E_{N0} \underline{\mathbf{N}} \otimes \underline{\mathbf{N}} + E_{T0}^{sym} \underline{\mathbf{T}}^{symT} \cdot \underline{\mathbf{T}}^{sym} + E_{T0}^{skw} \underline{\mathbf{T}}^{skwT} \cdot \underline{\mathbf{T}}^{skw}] d\mathcal{S} : \underline{\boldsymbol{\kappa}}\end{aligned}\quad (6.36)$$

nas quais  $\underline{\mathbf{E}}_{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}^{el}$  e  $\underline{\mathbf{E}}_{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^{el}$  são os tensores de quarta ordem que denotam os módulos elásticos macroscópicos devidos às deformações e microcurvaturas, respectivamente.

Os módulos elásticos nos microplanos são considerados independentes da orientação dos mesmos pela condição de isotropia. Assim, os módulos elásticos macroscópicos podem ser escritos como

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{E}}_{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}^{el} &= \frac{3}{4\pi} \left[ E_{V0} \int_{\mathcal{S}} \underline{\mathbf{V}} \otimes \underline{\mathbf{V}} d\mathcal{S} + E_{D0}^{sym} \int_{\mathcal{S}} \underline{\mathbf{D}}^{symT} \cdot \underline{\mathbf{D}}^{sym} d\mathcal{S} + \right. \\ &\quad \left. + E_{D0}^{skw} \int_{\mathcal{S}} \underline{\mathbf{D}}^{skwT} \cdot \underline{\mathbf{D}}^{skw} d\mathcal{S} \right]\end{aligned}\quad (6.37)$$

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{E}}_{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^{el} &= \frac{3}{4\pi} \left[ E_{N0} \int_{\mathcal{S}} \underline{\mathbf{N}} \otimes \underline{\mathbf{N}} d\mathcal{S} + E_{T0}^{sym} \int_{\mathcal{S}} \underline{\mathbf{T}}^{symT} \cdot \underline{\mathbf{T}}^{sym} d\mathcal{S} + \right. \\ &\quad \left. + E_{T0}^{skw} \int_{\mathcal{S}} \underline{\mathbf{T}}^{skwT} \cdot \underline{\mathbf{T}}^{skw} d\mathcal{S} \right]\end{aligned}\quad (6.38)$$

Utilizando-se as integrais analíticas das equações 6.17 a 6.21 e substituindo-as nas equações 6.37 e 6.38, tem-se

$$\underline{\mathbf{E}}_{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}^{el} = E_{V0} \underline{\mathcal{J}}_{vol} + E_{D0}^{sym} \underline{\mathcal{J}}_{dev}^{sym} + E_{D0}^{skw} \underline{\mathcal{J}}_{skw} \quad (6.39)$$

$$\underline{\mathbf{E}}_{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^{el} = \left( \frac{3}{5} E_{N0} - \frac{3}{5} E_{T0}^{sym} \right) \underline{\mathcal{J}}_{vol} + \left( \frac{2}{5} E_{N0} + \frac{3}{5} E_{T0}^{sym} \right) \underline{\mathcal{J}}_{dev}^{sym} + E_{T0}^{skw} \underline{\mathcal{J}}_{skw} \quad (6.40)$$



Para a determinação dos módulos elásticos nos microplanos, os módulos elásticos macroscópicos determinados acima são igualados àqueles obtidos pela teoria da elasticidade para o contínuo de Cosserat. Para tanto, toma-se a densidade de energia de deformação definida para o contínuo micropolar na seção 3.4.2 do capítulo 3, isto é,

$$U_0 = \frac{1}{2}A_{ijkl}\gamma_{ij}\gamma_{kl} + \frac{1}{2}C_{ijkl}\kappa_{ij}\kappa_{kl} \quad (6.41)$$

onde

$$A_{ijkl} = A_1\delta_{ij}\delta_{kl} + A_2\delta_{ik}\delta_{jl} + A_3\delta_{il}\delta_{jk} \quad (6.42)$$

$$C_{ijkl} = C_1\delta_{ij}\delta_{kl} + C_2\delta_{ik}\delta_{jl} + C_3\delta_{il}\delta_{jk} \quad (6.43)$$

Reescrevendo-se estas equações através dos parâmetros elásticos do contínuo micropolar definidos na seção 3.4.3 do capítulo 3 e conhecendo-se a definição dos tensores identidade de quarta ordem, obtém-se

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = (3\lambda + 2G)\underline{\underline{\mathcal{I}}}_{vol} + 2G\underline{\underline{\mathcal{I}}}_{dev}^{sym} + 2\alpha\underline{\underline{\mathcal{I}}}_{skw} \quad (6.44)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}} = 3C_1\underline{\underline{\mathcal{I}}}_{vol} + \frac{2\eta GL_f^2}{2\eta - GL_f^2}\underline{\underline{\mathcal{I}}}_{dev}^{sym} + 2\eta\underline{\underline{\mathcal{I}}}_{skw} \quad (6.45)$$

onde

$$C_1 = \frac{2GL_f^2\eta[\eta(L_f^2 - 2L_t^2) + GL_f^2L_t^2]}{(GL_f^2 - 2\eta)[\eta(3L_f^2 - 4L_t^2) + 2GL_f^2L_t^2]} \quad (6.46)$$

Comparando-se as equações 6.39 e 6.44 e as equações 6.40 e 6.45, determinam-se os módulos elásticos nos microplanos em função dos parâmetros elásticos macroscópicos

$$E_{V0} = 3\lambda + 2G, \quad E_{D0}^{sym} = 2G, \quad E_{D0}^{skw} = 2\alpha \quad (6.47)$$

$$E_{N0} = 3C_1 + \frac{2\eta GL_f^2}{2\eta - GL_f^2}, \quad E_{T0}^{sym} = \frac{2\eta GL_f^2}{2\eta - GL_f^2} - 2C_1, \quad E_{T0}^{skw} = 2\eta \quad (6.48)$$

Observa-se que os módulos elásticos volumétrico e desviador simétrico na equação 6.47 igualam-se àqueles definidos por Leukart e Ramm (2006) na equação 5.58,

o que torna possível simular o comportamento do contínuo clássico através desta formulação. Percebe-se também que  $-1 \leq \nu \leq 0,5$  continua válido, mas que

$$\frac{GL_f^2}{2} < \eta < \frac{4GL_f^2L_t^2}{8L_t^2 - 5L_f^2},$$

sofre uma pequena modificação em seu intervalo de validade se comparado com as equações 3.84(d) e 3.84(e).

### 6.3.4 Dano nos Microplanos

#### 6.3.4.1 Relações Constitutivas nos Microplanos

Baseando-se na formulação de dano nos microplanos apresentada por Leukart e Ramm (2006) para o contínuo clássico, desenvolvem-se as equações constitutivas de dano nos microplanos para o contínuo de Cosserat.

Dessa forma, são introduzidos dois parâmetros de dano nos microplanos,  $d_\gamma^{mic}$  e  $d_\kappa^{mic}$ , referentes às deformações e às microcurvaturas, respectivamente. Nota-se que estes parâmetros são únicos para cada tipo de deformação generalizada, tornando possível o acoplamento volumétrico-desviador, no caso das deformações, e normal-tangencial, no caso das microcurvaturas. Assim, o vetor das variáveis internas pode ser identificado como  $\underline{\mathbf{q}} = \{d_\gamma^{mic}, d_\kappa^{mic}\}$ . As variáveis de dano estão limitadas entre o valor 0, que corresponde ao estado não-danificado, e o valor 1, que define a ruptura completa do material, isto é,  $0 \leq d_\gamma^{mic} \leq 1$  e  $0 \leq d_\kappa^{mic} \leq 1$ .

A energia livre nos microplanos,  $\Psi^{mic}$ , pode ser expressa em função das componentes de deformação e de microcurvatura nos microplanos e das variáveis de dano, na forma

$$\Psi^{mic} := \Psi_\gamma^{mic}(\gamma_V, \underline{\boldsymbol{\gamma}}_D^{sym}, \underline{\boldsymbol{\gamma}}_D^{skw}, d_\gamma^{mic}) + \Psi_\kappa^{mic}(\kappa_N, \underline{\boldsymbol{\kappa}}_T^{sym}, \underline{\boldsymbol{\kappa}}_T^{skw}, d_\kappa^{mic}) \quad (6.49)$$

onde

$$\Psi_\gamma^{mic} := [1 - d_\gamma^{mic}] \Psi_{0\gamma}^{mic}, \quad \Psi_\kappa^{mic} := [1 - d_\kappa^{mic}] \Psi_{0\kappa}^{mic} \quad (6.50)$$

Aqui, os processos de dano são os mecanismos dissipativos dominantes que descrevem a degradação progressiva das propriedades mecânicas do material nos

microplanos. Assim, por meio das equações 6.28 e 6.33, são definidas as forças termodinâmicas,  $Y_\gamma^{mic}$  e  $Y_\kappa^{mic}$ , e substituindo-se  $\underline{\mathbf{q}} = \{d_\gamma^{mic}, d_\kappa^{mic}\}$  obtém-se a dissipação nos microplanos

$$\mathcal{D}^{mic} = -\frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial d_\gamma^{mic}} \dot{d}_\gamma^{mic} - \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial d_\kappa^{mic}} \dot{d}_\kappa^{mic} = Y_\gamma^{mic} \dot{d}_\gamma^{mic} + Y_\kappa^{mic} \dot{d}_\kappa^{mic} \geq 0. \quad (6.51)$$

A energia livre nos microplanos define suas tensões e tensões-momento constitutivas como quantidades termodinamicamente conjugadas às correspondentes componentes de deformação e de microcurvatura, respectivamente,

$$\begin{aligned} \sigma_V &:= \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \gamma_V} = [1 - d_\gamma^{mic}] E_{V0} \gamma_V, & \mu_N &:= \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \kappa_N} = [1 - d_\kappa^{mic}] E_{N0} \kappa_N \\ \underline{\boldsymbol{\sigma}}_D^{sym} &:= \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \underline{\boldsymbol{\gamma}}_D^{sym}} = [1 - d_\gamma^{mic}] E_{D0}^{sym} \underline{\boldsymbol{\gamma}}_D^{sym}, & \underline{\boldsymbol{\mu}}_T^{sym} &:= \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \underline{\boldsymbol{\kappa}}_T^{sym}} = [1 - d_\kappa^{mic}] E_{T0}^{sym} \underline{\boldsymbol{\kappa}}_T^{sym} \end{aligned} \quad (6.52)$$

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}_D^{skw} := \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \underline{\boldsymbol{\gamma}}_D^{skw}} = [1 - d_\gamma^{mic}] E_{D0}^{skw} \underline{\boldsymbol{\gamma}}_D^{skw}, \quad \underline{\boldsymbol{\mu}}_T^{skw} := \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \underline{\boldsymbol{\kappa}}_T^{skw}} = [1 - d_\kappa^{mic}] E_{T0}^{skw} \underline{\boldsymbol{\kappa}}_T^{skw}$$

### 6.3.4.2 Aplicação das Leis da Termodinâmica

Os tensores macroscópicos de tensão e de tensão-momento conjugados termodinamicamente aos tensores macroscópicos de deformação e de microcurvatura, respectivamente, e definidos nas equações 6.30 e 6.31, podem ser reescritos utilizando-se as equações em 6.52, 6.9, 6.10 e 6.11

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \frac{\partial \Psi^{mac}}{\partial \boldsymbol{\gamma}} = \underline{\underline{\mathbf{E}}}_{sec_\gamma}^d : \boldsymbol{\gamma} \\ &= \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} [1 - d_\gamma^{mic}] [E_{V0} \underline{\underline{\mathbf{V}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{V}}} + E_{D0}^{sym} \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{symT} \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{sym} + E_{D0}^{skw} \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{skwT} \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{skw}] d\mathcal{S} : \boldsymbol{\gamma} \end{aligned} \quad (6.53)$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}} &= \frac{\partial \Psi^{mac}}{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}} = \underline{\underline{\mathbf{E}}}_{sec_\kappa}^d : \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} \\ &= \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} [1 - d_\kappa^{mic}] [E_{N0} \underline{\underline{\mathbf{N}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{N}}} + E_{T0}^{sym} \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{symT} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{sym} + E_{T0}^{skw} \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{skwT} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{skw}] d\mathcal{S} : \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} \end{aligned} \quad (6.54)$$

nas quais  $\underline{\underline{\mathbf{E}}}_{sec_\gamma}^d$  e  $\underline{\underline{\mathbf{E}}}_{sec_\kappa}^d$  são os tensores de quarta ordem que denotam os módulos secantes macroscópicos devidos às deformações e microcurvaturas, respectivamente.

Observa-se que os módulos elásticos presentes nestas equações já foram definidos em 6.47 e 6.48, mas não foram substituídos aqui por clareza de exposição das equações acima.

Linearizando-se estas equações, obtém-se os módulos tangentes elasto-dano referentes às deformações e microcurvaturas.

$$\dot{\underline{\sigma}} = \underline{\mathbf{E}}_{\underline{\zeta}tan\gamma}^d : \dot{\underline{\gamma}}, \quad \dot{\underline{\mu}} = \underline{\mathbf{E}}_{\underline{\zeta}tan\kappa}^d : \dot{\underline{\kappa}} \quad (6.55)$$

onde

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}}_{\underline{\zeta}tan\gamma}^d &= \underline{\mathbf{E}}_{\underline{\zeta}sec\gamma}^d - \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \frac{\partial \phi_{\gamma}^{mic}}{\partial \kappa_{\gamma}^{mic}} \left[ \frac{\underline{\mathbf{V}}\sigma_V + \underline{\mathbf{D}}^{symT} \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}}_D^{sym} - \underline{\mathbf{D}}^{skwT} \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}}_D^{skw}}{(1 - d_{\gamma}^{mic})} \right] \\ &\otimes \left[ \frac{\partial \eta_{\gamma}^{mic}}{\partial \gamma_V} \underline{\mathbf{V}} + \frac{\partial \eta_{\gamma}^{mic}}{\partial \underline{\boldsymbol{\gamma}}_D^{sym}} \cdot \underline{\mathbf{D}}^{sym} - \frac{\partial \eta_{\gamma}^{mic}}{\partial \underline{\boldsymbol{\gamma}}_D^{skw}} \cdot \underline{\mathbf{D}}^{skw} \right] d\mathcal{S} \end{aligned} \quad (6.56)$$

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}}_{\underline{\zeta}tan\kappa}^d &= \underline{\mathbf{E}}_{\underline{\zeta}sec\kappa}^d - \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \frac{\partial \phi_{\kappa}^{mic}}{\partial \kappa_{\kappa}^{mic}} \left[ \frac{\underline{\mathbf{N}}\mu_N + \underline{\mathbf{T}}^{symT} \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}}_T^{sym} - \underline{\mathbf{T}}^{skwT} \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}}_T^{skw}}{(1 - d_{\kappa}^{mic})} \right] \\ &\otimes \left[ \frac{\partial \eta_{\kappa}^{mic}}{\partial \kappa_N} \underline{\mathbf{N}} + \frac{\partial \eta_{\kappa}^{mic}}{\partial \underline{\boldsymbol{\kappa}}_T^{sym}} \cdot \underline{\mathbf{T}}^{sym} - \frac{\partial \eta_{\kappa}^{mic}}{\partial \underline{\boldsymbol{\kappa}}_T^{skw}} \cdot \underline{\mathbf{T}}^{skw} \right] d\mathcal{S} \end{aligned} \quad (6.57)$$

onde  $\phi_{*}^{mic}$ ,  $\kappa_{*}^{mic}$  e  $\eta_{*}^{mic}$  são grandezas definidas adiante.

A caracterização do estado de dano é feita adotando-se duas funções de carregamento,  $\Phi_{\gamma}^{mic}$  e  $\Phi_{\kappa}^{mic}$ . Isto foi feito por Leukart e Ramm (2003), porém para danos volumétrico e desviador, aqui este desacoplamento é feito em termos dos tipos de deformações generalizadas, mas continuam valendo os acoplamentos volumétrico-desviador e normal-tangencial induzidos pelas componentes de deformação e de microcurvatura nos microplanos, como proposto por Leukart e Ramm (2006). Para isto, são apresentadas abaixo as fórmulas válidas para ambos os tipos de deformação generalizada, onde o “\*” significa deformação ( $\gamma$ ) ou microcurvatura ( $\kappa$ ).

As funções de carregamento são definidas como

$$\Phi_{*}^{mic} = \phi_{*}^{mic}(\eta_{*}^{mic}) - d_{*}^{mic} \leq 0 \quad (6.58)$$

onde  $\phi_{*}^{mic}$  representa uma função da deformação equivalente,  $\eta_{*}^{mic}$ , a qual será definida mais adiante.

O critério de carregamento-descarregamento e a condição de consistência são baseados nas condições de Kuhn-Tucker,

$$\Phi_*^{mic} \leq 0, \quad \dot{\kappa}_*^{mic} \geq 0, \quad \Phi_*^{mic} \dot{\kappa}_*^{mic} = 0, \quad \dot{\Phi}_*^{mic} \dot{\kappa}_*^{mic} = 0 \quad (6.59)$$

onde  $\kappa_*^{mic}$  é uma espécie de multiplicador de dano.

A evolução dos parâmetros históricos,  $\dot{\kappa}_*^{mic}$ , são determinados pelas condições de consistência, conforme Simo e Ju (1987). Assim, obtém-se fórmulas explícitas para as variáveis de dano por meio das funções monotônicas  $\phi_*^{mic}(\cdot)$

$$d_*^{mic} = \phi_*^{mic}(\kappa_*^{mic}), \quad \text{com} \quad \kappa_*^{mic} = \max_{-\infty < t < \tau} [\eta_*^{mic}(t), \kappa_{0*}^{mic}] \quad (6.60)$$

onde  $\kappa_{0*}^{mic}$  é o valor inicial de  $\kappa_*^{mic}$ , enquanto este é adotado como o valor máximo das deformações equivalentes que ocorreram durante todo o histórico de carregamento.

As variáveis de dano são descritas pela função apresentada por Peerlings et al. (1998). Esta função também foi adotada por Leukart e Ramm (2003, 2006) em suas formulações e já foi apresentada no capítulo 5.

$$d_*^{mic} = 1 - \frac{\kappa_{0*}^{mic}}{\kappa_*^{mic}} \{1 - \alpha_*^{mic} + \alpha_*^{mic} e^{[\beta_*^{mic}(\kappa_{0*}^{mic} - \kappa_*^{mic})]}\} \quad (6.61)$$

Aqui, devem ser especificados seis parâmetros adicionais para o material:  $\beta_\gamma^{mic}$  e  $\beta_\kappa^{mic}$ , que determinam a taxa de crescimento do dano, governando a forma do ramo descendente;  $\alpha_\gamma^{mic}$  e  $\alpha_\kappa^{mic}$ , que representam a máxima degradação possível do material e  $\kappa_{0\gamma}^{mic}$  e  $\kappa_{0\kappa}^{mic}$ , que são os valores da deformação equivalente que determinam o início do processo de dano.

### 6.3.4.3 Definição das Deformações Equivalentes nos Microplanos

A deformação equivalente é a medida escalar que descreve o crescimento do dano. Na seção 5.4.4, foram apresentadas duas definições para a deformação equivalente macroscópica, a de Simo e Ju (1987) e a de von Mises Modificado (de Vree et al., 1995). Aqui, estas são utilizadas para determinar as deformações equivalentes nos microplanos com o contínuo de Cosserat.

A distribuição de dano isotrópico adotada no nível dos microplanos para se obter a deformação equivalente neste nível a partir da deformação equivalente macroscópica, também é adotada aqui. Lembrando que, como explicado na seção 5.4.4, isto não afeta o caráter anisotrópico da formulação de microplanos, correspondendo a uma restrição apenas de natureza teórica. Introduzindo-se esta consideração nas equações 6.53 e 6.54, utilizando-se as relações em 6.47 e 6.48 e as integrais analíticas em 6.17 a 6.21, chega-se a

$$\begin{aligned}\underline{\sigma} &= [1 - d_\gamma^{mic}] \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} [E_{V0} \underline{V} \otimes \underline{V} + E_{D0}^{sym} \underline{D}^{symT} \cdot \underline{D}^{sym} + E_{D0}^{skw} \underline{D}^{skwT} \cdot \underline{D}^{skw}] d\mathcal{S} : \underline{\gamma} \\ &= [1 - d_\gamma^{mic}] [(3\lambda + 2G)\underline{\gamma}_{vol} + 2G\underline{\gamma}_{dev}^{sym} + 2\alpha\underline{\gamma}_{dev}^{skw}] \end{aligned} \quad (6.62)$$

$$\begin{aligned}\underline{\mu} &= [1 - d_\kappa^{mic}] \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} [E_{N0} \underline{N} \otimes \underline{N} + E_{T0}^{sym} \underline{T}^{symT} \cdot \underline{T}^{sym} + E_{T0}^{skw} \underline{T}^{skwT} \cdot \underline{T}^{skw}] d\mathcal{S} : \underline{\kappa} \\ &= [1 - d_\kappa^{mic}] \left( 3C_1 \underline{\kappa}_{vol} + \frac{2\eta GL_f^2}{2\eta - GL_f^2} \underline{\kappa}^{sym} + 2\eta \underline{\kappa}^{skw} \right) \end{aligned} \quad (6.63)$$

Equações equivalentes a estas no nível macroscópico podem ser escritas com a ajuda dos módulos constitutivos em 6.39, 6.40, 6.47 e 6.48, obtendo-se

$$\begin{aligned}\underline{\sigma} &= [1 - d_\gamma^{mac}] \underline{E}_\gamma^{el} : \underline{\gamma} \\ &= [1 - d_\gamma^{mac}] [(3\lambda + 2G)\underline{\gamma}_{vol} + 2G\underline{\gamma}_{dev}^{sym} + 2\alpha\underline{\gamma}_{dev}^{skw}] \end{aligned} \quad (6.64)$$

$$\begin{aligned}\underline{\mu} &= [1 - d_\kappa^{mac}] \underline{E}_\kappa^{el} : \underline{\kappa} \\ &= [1 - d_\kappa^{mac}] \left( 3C_1 \underline{\kappa}_{vol} + \frac{2\eta GL_f^2}{2\eta - GL_f^2} \underline{\kappa}^{sym} + 2\eta \underline{\kappa}^{skw} \right) \end{aligned} \quad (6.65)$$

Comparando as equações 6.62 com 6.64 e 6.63 com 6.65, percebe-se que as variáveis de dano nos microplanos devem ser iguais àsquelas macroscópicas, isto é,  $d_\gamma^{mic} = d_\gamma^{mac}$  e  $d_\kappa^{mic} = d_\kappa^{mac}$ . A consequência disso são as igualdades  $\eta_\gamma^{mic} = \eta_\gamma^{mac}$  e  $\eta_\kappa^{mic} = \eta_\kappa^{mac}$ , pois são as responsáveis pela evolução das variáveis de dano.

### 1) Simo e Ju (1987)

Utilizando-se a idéia de Simo e Ju (1987), as deformações equivalentes macroscópicas são dadas por

$$\eta_\gamma^{mac} = \sqrt{\underline{\gamma} : \underline{E}_\gamma^{el} : \underline{\gamma}} = \sqrt{2\Psi_{0\gamma}^{mac}}, \quad \eta_\kappa^{mac} = \sqrt{\underline{\kappa} : \underline{E}_\kappa^{el} : \underline{\kappa}} = \sqrt{2\Psi_{0\kappa}^{mac}} \quad (6.66)$$

onde  $\Psi_{0\gamma}^{mac}$  e  $\Psi_{0\kappa}^{mac}$  são as energias livres elásticas macroscópicas referentes à deformação e microcurvatura, respectivamente. Substituindo-se a equação 6.25 em 6.66, tem-se

$$\eta_{\gamma}^{mic} = \sqrt{2\frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \Psi_{0\gamma}^{mic} d\mathcal{S}}, \quad \eta_{\kappa}^{mic} = \sqrt{2\frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \Psi_{0\kappa}^{mic} d\mathcal{S}} \quad (6.67)$$

Introduzindo-se as equações 6.22 e 6.23, obtém-se

$$\eta_{\gamma}^{mic2} = \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} [\gamma_V E_{V0} \gamma_V + \boldsymbol{\gamma}_D^{sym} \cdot E_{D0}^{sym} \boldsymbol{\gamma}_D^{sym} + \boldsymbol{\gamma}_D^{skw} \cdot E_{D0}^{skw} \boldsymbol{\gamma}_D^{skw}] d\mathcal{S} \quad (6.68)$$

$$\eta_{\kappa}^{mic2} = \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} [\kappa_N E_{N0} \kappa_N + \boldsymbol{\kappa}_T^{sym} \cdot E_{T0}^{sym} \boldsymbol{\kappa}_T^{sym} + \boldsymbol{\kappa}_T^{skw} \cdot E_{T0}^{skw} \boldsymbol{\kappa}_T^{skw}] d\mathcal{S} \quad (6.69)$$

Considerando-se que os módulos elásticos nos microplanos são independentes da orientação dos mesmos e que as integrais envolvidas na equação acima são resolvidas com a condição de isotropia (Leukart e Ramm, 2003, 2006), tem-se

$$\eta_{\gamma Simo}^{mic} = \sqrt{3\gamma_V E_{V0} \gamma_V + 3\boldsymbol{\gamma}_D^{sym} \cdot E_{D0}^{sym} \boldsymbol{\gamma}_D^{sym} + 3\boldsymbol{\gamma}_D^{skw} \cdot E_{D0}^{skw} \boldsymbol{\gamma}_D^{skw}} \quad (6.70)$$

$$\eta_{\kappa Simo}^{mic} = \sqrt{3\kappa_N E_{N0} \kappa_N + 3\boldsymbol{\kappa}_T^{sym} \cdot E_{T0}^{sym} \boldsymbol{\kappa}_T^{sym} + 3\boldsymbol{\kappa}_T^{skw} \cdot E_{T0}^{skw} \boldsymbol{\kappa}_T^{skw}} \quad (6.71)$$

## 2) von Mises Modificado (de Vree et al. (1995))

De acordo com de Vree et al. (1995), as deformações equivalentes macroscópicas são dadas por

$$\eta^{mac} = k_0 I_1 + \sqrt{k_1^2 I_1^2 + k_2 J_2} \quad (6.72)$$

Os parâmetros  $k_0$ ,  $k_1$  e  $k_2$  podem ser especificados como

$$k_0 = k_1 = \frac{r-1}{2r(1-2\nu)}; \quad k_2 = \frac{3}{r(1+\nu)^2} \quad (6.73)$$

onde o parâmetro  $r$  representa a razão entre as resistências à tração e à compressão do material, tornando o dano sensível a deformações de compressão em relação àquelas de tração.

Para determinar as deformações equivalentes nos microplanos algumas considerações são feitas:

1. O primeiro invariante das deformações macroscópicas não se modifica, isto é,

$$I_1 = \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \gamma_V d\mathcal{S} = 3\gamma_V, \quad (6.74)$$

pois o contínuo de Cosserat não tem influência sobre as parcelas normais de deformação macroscópica em relação ao contínuo clássico.

2. O segundo invariante das deformações macroscópicas desviadoras,  $J_2$ , é baseado na equação 3.102 do capítulo 3, escrita em função das deformações e microcurvaturas. Uma vez que existem duas deformações equivalentes, uma para as deformações de Cosserat e outra para as microcurvaturas, este invariante é decomposto de acordo com estas parcelas.

$$4J_{2\gamma} = \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} (\underline{\gamma}_D^{sym} \cdot \underline{\gamma}_D^{sym} + \underline{\gamma}_D^{skw} \cdot \underline{\gamma}_D^{skw}) d\mathcal{S} \quad (6.75)$$

$$4J_{2\kappa} = \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} (\underline{\kappa}_T^{sym} \cdot \underline{\kappa}_T^{sym} + \underline{\kappa}_T^{skw} \cdot \underline{\kappa}_T^{skw}) d\mathcal{S} \quad (6.76)$$

3. Uma vez que os parâmetros  $k_0$ ,  $k_1$  e  $k_2$  dependem de  $r$ , eles estão intimamente relacionados à diferença do comportamento do material em tração e compressão. Como o contínuo de Cosserat não afeta esses comportamentos, os valores desses parâmetros são mantidos iguais aos que foram utilizados para o contínuo clássico (ver equações em 6.73).

Essas considerações juntamente com as equações 6.72 e 6.73 possibilitam definir as deformações equivalentes nos microplanos como

$$\eta_{\gamma V_{ree}}^{mic} = 3k_0\gamma_V + \sqrt{(3k_1\gamma_V)^2 + \frac{3}{4}k_2(\underline{\gamma}_D^{sym} \cdot \underline{\gamma}_D^{sym} + \underline{\gamma}_D^{skw} \cdot \underline{\gamma}_D^{skw})} \quad (6.77)$$

$$\eta_{\kappa V_{ree}}^{mic} = \sqrt{\frac{3}{4}k_2(\underline{\kappa}_T^{sym} \cdot \underline{\kappa}_T^{sym} + \underline{\kappa}_T^{skw} \cdot \underline{\kappa}_T^{skw})} \quad (6.78)$$

## 6.4 Modelo Constitutivo de Microplanos para o Contínuo com Microexpansão

A formulação do modelo constitutivo de microplanos para o contínuo com microexpansão é, em parte, muito semelhante a que foi apresentada para o contínuo de



Cosserat, uma vez que este é um caso especial do primeiro. Então, muitos conceitos e hipóteses utilizados até o momento são adotados na formulação a seguir, onde as semelhanças são comentadas e as diferenças existentes entre as duas formulações são apresentadas.

### 6.4.1 Restrição Cinemática

As restrições cinemáticas em termos de deformações e de microcurvaturas são iguais às aquelas apresentadas para o contínuo de Cosserat. Acrescentam-se a elas as restrições correspondentes à microexpansão e aos gradientes de microexpansão.

A microexpansão nos microplanos é igual ao seu valor no ponto material, pois uma vez que essa microexpansão é isotrópica ou volumétrica, seu valor é o mesmo para qualquer orientação dos microplanos. Assim, tem-se

$$\varphi^{mic} = \varphi^{mac} = \varphi \quad (6.79)$$

O gradiente de microexpansão é representado por um vetor no ponto material ( $\underline{\varphi}_g$ ), então o valor dessa grandeza correspondente a cada microplano é obtido por sua projeção na direção do mesmo.

$$\varphi_g = \underline{\varphi}_g \cdot \underline{n} \quad (6.80)$$

### 6.4.2 Elasticidade nos Microplanos

Nesta seção, formula-se o modelo constitutivo de microplanos para o contínuo com microexpansão considerando o material linear, elástico e isotrópico. Os correspondentes parâmetros elásticos nos microplanos são determinados em termos das constantes elásticas macroscópicas.

#### 6.4.2.1 Relações Constitutivas nos Microplanos

Para o caso linear, elástico e isotrópico, nenhuma variável interna  $\mathbf{q}$  necessita ser considerada e a energia livre elástica nos microplanos,  $\Psi_0^{mic}$ , é definida como uma

função quadrática, que depende das componentes de deformação generalizadas nos microplanos e que pode ser aditivamente decomposta na forma

$$\Psi_0^{mic} := \Psi_{0\varphi\gamma}^{mic}(\varphi, \gamma_V, \underline{\gamma}_D^{sym}, \underline{\gamma}_D^{skw}) + \Psi_{0\kappa}^{mic}(\kappa_N, \underline{\kappa}_T^{sym}, \underline{\kappa}_T^{skw}) + \Psi_{0\varphi_g}^{mic}(\varphi_g) \quad (6.81)$$

ou

$$\begin{aligned} \Psi_0^{mic} := & \varphi E_{\varphi\gamma_0} \gamma_V + \frac{1}{2} [\gamma_V E_{V_0} \gamma_V + \varphi E_{\varphi_0} \varphi + \underline{\gamma}_D^{sym} \cdot E_{D_0}^{sym} \underline{\gamma}_D^{sym} + \underline{\gamma}_D^{skw} \cdot E_{D_0}^{skw} \underline{\gamma}_D^{skw} + \\ & + \kappa_N E_{N_0} \kappa_N + \underline{\kappa}_T^{sym} \cdot E_{T_0}^{sym} \underline{\kappa}_T^{sym} + \underline{\kappa}_T^{skw} \cdot E_{T_0}^{skw} \underline{\kappa}_T^{skw} + \varphi_g E_{\varphi_g_0} \varphi_g] \end{aligned} \quad (6.82)$$

onde  $E_{V_0}$ ,  $E_{\varphi\gamma_0}$ ,  $E_{\varphi_0}$ ,  $E_{D_0}^{sym}$ ,  $E_{D_0}^{skw}$ ,  $E_{N_0}$ ,  $E_{T_0}^{sym}$ ,  $E_{T_0}^{skw}$  e  $E_{\varphi_g_0}$  são os módulos elásticos nos microplanos relacionados a cada tipo de deformação generalizada nos microplanos.

As tensões  $(\sigma_V, \underline{\sigma}_D^{sym}, \underline{\sigma}_D^{skw})$ , tensões-momento  $(\mu_N, \underline{\mu}_T^{sym}, \underline{\mu}_T^{skw})$ , microtensão  $(\psi_m)$  e microforça  $(\lambda_m)$  nos microplanos são quantidades termodinamicamente conjugadas às correspondentes componentes de deformação, microcurvatura, microexpansão e gradiente de microexpansão, respectivamente, por meio da energia livre elástica. Assim, tem-se

$$\sigma_V := \frac{\partial \Psi_0^{mic}}{\partial \gamma_V} = E_{V_0} \gamma_V + E_{\varphi\gamma_0} \varphi, \quad \mu_N := \frac{\partial \Psi_0^{mic}}{\partial \kappa_N} = E_{N_0} \kappa_N \quad (6.83a)$$

$$\underline{\sigma}_D^{sym} := \frac{\partial \Psi_0^{mic}}{\partial \underline{\gamma}_D^{sym}} = E_{D_0}^{sym} \underline{\gamma}_D^{sym}, \quad \underline{\mu}_T^{sym} := \frac{\partial \Psi_0^{mic}}{\partial \underline{\kappa}_T^{sym}} = E_{T_0}^{sym} \underline{\kappa}_T^{sym} \quad (6.83b)$$

$$\underline{\sigma}_D^{skw} := \frac{\partial \Psi_0^{mic}}{\partial \underline{\gamma}_D^{skw}} = E_{D_0}^{skw} \underline{\gamma}_D^{skw}, \quad \underline{\mu}_T^{skw} := \frac{\partial \Psi_0^{mic}}{\partial \underline{\kappa}_T^{skw}} = E_{T_0}^{skw} \underline{\kappa}_T^{skw} \quad (6.83c)$$

$$\psi_m := \frac{\partial \Psi_0^{mic}}{\partial \varphi} = E_{\varphi_0} \varphi + E_{\varphi\gamma_0} \gamma_V, \quad \lambda_m := \frac{\partial \Psi_0^{mic}}{\partial \varphi_g} = E_{\varphi_g_0} \varphi_g \quad (6.83d)$$

#### 6.4.2.2 Aplicação das Leis da Termodinâmica

Considera-se, novamente, que a integral da energia livre nos microplanos sobre a superfície de uma esfera unitária resulta na energia livre macroscópica

$$\Psi^{mac} = \frac{3}{4\pi} \int_S \Psi^{mic} dS \quad (6.84)$$

Considerando-se a desigualdade macroscópica de Clausius-Duhem para o caso isotérmico, tem-se

$$\mathcal{D}^{mac} = \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\gamma}}} + \underline{\underline{\mu}} : \dot{\underline{\underline{\kappa}}} + \psi \dot{\varphi} + \underline{\underline{\lambda}} \cdot \dot{\underline{\underline{\varphi}}}_g - \dot{\Psi}^{mac} \geq 0 \quad (6.85)$$

onde  $\mathcal{D}^{mac}$  é a dissipação macroscópica,  $\dot{\underline{\underline{\gamma}}}$ ,  $\dot{\underline{\underline{\kappa}}}$ ,  $\dot{\varphi}$ ,  $\dot{\underline{\underline{\varphi}}}_g$  e  $\dot{\Psi}^{mac}$  são as taxas de deformações, de microcurvaturas, de microexpansão e de seu gradiente, e de energia livre macroscópicas, respectivamente.

Utilizando-se as equações em 6.9 a 6.11, 6.79 e 6.80, a taxa de energia livre nos microplanos pode ser escrita como segue:

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}^{mic} &= [\underline{\underline{V}}\sigma_V + \underline{\underline{D}}^{symT} \cdot \underline{\underline{\sigma}}_D^{sym} - \underline{\underline{D}}^{skwT} \cdot \underline{\underline{\sigma}}_D^{skw}] : \dot{\underline{\underline{\gamma}}} + \\ &+ [\underline{\underline{N}}\mu_N + \underline{\underline{T}}^{symT} \cdot \underline{\underline{\mu}}_T^{sym} - \underline{\underline{T}}^{skwT} \cdot \underline{\underline{\mu}}_T^{skw}] : \dot{\underline{\underline{\kappa}}} + \\ &+ \psi_m \dot{\varphi} + [\lambda_m \underline{\underline{n}}] \cdot \dot{\underline{\underline{\varphi}}}_g - \mathcal{D}_{\varphi\gamma}^{mic} - \mathcal{D}_{\kappa}^{mic} - \mathcal{D}_{\varphi_g}^{mic} \end{aligned} \quad (6.86)$$

onde  $\mathcal{D}_{\varphi\gamma}^{mic}$ ,  $\mathcal{D}_{\kappa}^{mic}$  e  $\mathcal{D}_{\varphi_g}^{mic}$  são as dissipações nos microplanos devidas às variáveis internas relacionadas à deformação e à microexpansão ( $\mathbf{q}_{\varphi\gamma}$ ), à microcurvatura ( $\mathbf{q}_{\kappa}$ ) e ao gradiente de microexpansão ( $\mathbf{q}_{\varphi_g}$ ), respectivamente, e são definidas como:

$$\mathcal{D}_{\varphi\gamma}^{mic} := -\frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \mathbf{q}_{\varphi\gamma}} \cdot \dot{\mathbf{q}}_{\varphi\gamma}, \quad \mathcal{D}_{\kappa}^{mic} := -\frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \mathbf{q}_{\kappa}} \cdot \dot{\mathbf{q}}_{\kappa} \quad (6.87)$$

$$\mathcal{D}_{\varphi_g}^{mic} := -\frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \mathbf{q}_{\varphi_g}} \cdot \dot{\mathbf{q}}_{\varphi_g} \quad (6.88)$$

com  $\cdot$  indicando o produto da ordem de  $\mathbf{q}_{\varphi\gamma}$ ,  $\mathbf{q}_{\kappa}$  e  $\mathbf{q}_{\varphi_g}$ .

Substituindo-se a equação 6.86 em 6.84, obtém-se a equação da taxa de energia livre macroscópica

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}^{mac} &= \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} [\underline{\underline{V}}\sigma_V + \underline{\underline{D}}^{symT} \cdot \underline{\underline{\sigma}}_D^{sym} - \underline{\underline{D}}^{skwT} \cdot \underline{\underline{\sigma}}_D^{skw}] d\mathcal{S} : \dot{\underline{\underline{\gamma}}} + \\ &+ \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} [\underline{\underline{N}}\mu_N + \underline{\underline{T}}^{symT} \cdot \underline{\underline{\mu}}_T^{sym} - \underline{\underline{T}}^{skwT} \cdot \underline{\underline{\mu}}_T^{skw}] d\mathcal{S} : \dot{\underline{\underline{\kappa}}} + \\ &+ \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \psi_m d\mathcal{S} \dot{\varphi} + \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \lambda_m \underline{\underline{n}} d\mathcal{S} \cdot \dot{\underline{\underline{\varphi}}}_g + \\ &- \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} (\mathcal{D}_{\varphi\gamma}^{mic} + \mathcal{D}_{\kappa}^{mic} + \mathcal{D}_{\varphi_g}^{mic}) d\mathcal{S} \end{aligned} \quad (6.89)$$

Finalmente, a versão macroscópica da desigualdade de Clausius-Duhem (equação 6.85) pode ser avaliada, resultando na definição do tensor de tensão,  $\underline{\sigma}$ , de tensão-momento,  $\underline{\mu}$ , de microtensão,  $\psi$ , e de microforça  $\underline{\lambda}$  macroscópicos em termos das componentes de tensão generalizadas constitutivas nos microplanos

$$\underline{\sigma} = \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} [\underline{V} \sigma_V + \underline{D}^{symT} \cdot \underline{\sigma}_D^{sym} - \underline{D}^{skwT} \cdot \underline{\sigma}_D^{skw}] d\mathcal{S} \quad (6.90)$$

$$\underline{\mu} = \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} [\underline{N} \mu_N + \underline{T}^{symT} \cdot \underline{\mu}_T^{sym} - \underline{T}^{skwT} \cdot \underline{\mu}_T^{skw}] d\mathcal{S} \quad (6.91)$$

$$\psi = \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \psi_m d\mathcal{S} \quad (6.92)$$

$$\underline{\lambda} = \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \lambda_m \underline{n} d\mathcal{S} \quad (6.93)$$

Satisfazendo-se à desigualdade da dissipação macroscópica, tem-se

$$\mathcal{D}^{mac} = \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} (\mathcal{D}_{\varphi\gamma}^{mic} + \mathcal{D}_{\kappa}^{mic} + \mathcal{D}_{\varphi_g}^{mic}) d\mathcal{S} \geq 0, \quad (6.94)$$

na qual a dissipação de energia total em cada microplano é exigida ser não-negativa

$$\mathcal{D}^{mic} = (\mathcal{D}_{\varphi\gamma}^{mic} + \mathcal{D}_{\kappa}^{mic} + \mathcal{D}_{\varphi_g}^{mic}) \geq 0. \quad (6.95)$$

Esta exigência é obviamente mais forte do que aquela imposta pela equação 6.94 e, então, representa uma condição suficiente para que se cumpra a segunda lei da termodinâmica. Assim, a equação 6.86 pode ser interpretada como a versão da desigualdade de Clausius-Duhem no nível dos microplanos, tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{mic} = & [(\psi_m \dot{\varphi} + \sigma_V \dot{\gamma}_V + \underline{\sigma}_D^{sym} \cdot \dot{\underline{\gamma}}_D^{sym} + \underline{\sigma}_D^{skw} \cdot \dot{\underline{\gamma}}_D^{skw}) - \dot{\Psi}_{\varphi\gamma}^{mic} + \\ & + (\mu_N \dot{\kappa}_N + \underline{\mu}_T^{sym} \cdot \dot{\underline{\kappa}}_T^{sym} + \underline{\mu}_T^{skw} \cdot \dot{\underline{\kappa}}_T^{skw}) - \dot{\Psi}_{\kappa}^{mic} + \lambda_m \dot{\varphi}_g - \dot{\Psi}_{\varphi_g}^{mic}] \geq 0 \end{aligned} \quad (6.96)$$

Essa formulação termodinamicamente consistente não se aplica apenas à elasticidade nos microplanos, mas a qualquer descrição do seu comportamento constitutivo.

Os tensores elásticos macroscópicos de tensão generalizada, conjugados termodinamicamente aos tensores macroscópicos de deformação generalizada, e definidos nas equações 6.90 a 6.93, podem ser reescritos utilizando-se as equações 6.83, 6.9, 6.10, 6.11, 6.79 e 6.80

$$\underline{\sigma} = \frac{\partial \Psi^{mac}}{\partial \underline{\gamma}} = \underline{\mathbf{E}}_{\underline{\gamma}}^{el} : \underline{\gamma} + \underline{\mathbf{E}}_{\sigma\varphi}^{el} \varphi \quad (6.97)$$

$$= \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} [E_{V0} \underline{\mathbf{V}} \otimes \underline{\mathbf{V}} + E_{D0}^{sym} \underline{\mathbf{D}}^{symT} \cdot \underline{\mathbf{D}}^{sym} + E_{D0}^{skw} \underline{\mathbf{D}}^{skwT} \cdot \underline{\mathbf{D}}^{skw}] d\mathcal{S} : \underline{\gamma} +$$

$$+ \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} E_{\varphi\gamma 0} \underline{\mathbf{V}} d\mathcal{S} \varphi$$

$$\underline{\mu} = \frac{\partial \Psi^{mac}}{\partial \underline{\kappa}} = \underline{\mathbf{E}}_{\underline{\kappa}}^{el} : \underline{\kappa} \quad (6.98)$$

$$= \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} [E_{N0} \underline{\mathbf{N}} \otimes \underline{\mathbf{N}} + E_{T0}^{sym} \underline{\mathbf{T}}^{symT} \cdot \underline{\mathbf{T}}^{sym} + E_{T0}^{skw} \underline{\mathbf{T}}^{skwT} \cdot \underline{\mathbf{T}}^{skw}] d\mathcal{S} : \underline{\kappa}$$

$$\psi = \frac{\partial \Psi^{mac}}{\partial \varphi} = E_{\varphi}^{el} \varphi + \underline{\mathbf{E}}_{\psi\gamma}^{el} : \underline{\gamma} \quad (6.99)$$

$$= \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} E_{\varphi 0} d\mathcal{S} \varphi + \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} E_{\varphi\gamma 0} \underline{\mathbf{V}} d\mathcal{S} : \underline{\gamma}$$

$$\underline{\lambda} = \frac{\partial \Psi^{mac}}{\partial \underline{\varphi}_g} = \underline{\mathbf{E}}_{\varphi_g}^{el} \cdot \underline{\varphi}_g \quad (6.100)$$

$$= \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} E_{\varphi_g 0} \underline{\mathbf{N}} d\mathcal{S} \cdot \underline{\varphi}_g$$

nas quais  $\underline{\mathbf{E}}_{\underline{\gamma}}^{el}$  e  $\underline{\mathbf{E}}_{\underline{\kappa}}^{el}$  são os tensores de quarta ordem que denotam os módulos elásticos macroscópicos devidos às deformações e microcurvaturas, respectivamente.  $\underline{\mathbf{E}}_{\varphi_g}^{el}$ ,  $\underline{\mathbf{E}}_{\sigma\varphi}^{el}$  e  $\underline{\mathbf{E}}_{\psi\gamma}^{el}$  são os tensores de segunda ordem que denotam os módulos elásticos macroscópicos devidos aos gradientes de microexpansão e às relações entre tensão-microexpansão e microtensão-deformação, respectivamente.  $E_{\varphi}^{el}$  é um escalar que denota o módulo elástico macroscópico devido à microexpansão.

Os módulos elásticos nos microplanos são considerados independentes da orientação dos mesmos pela condição de isotropia. Assim, os módulos elásticos macroscópicos podem ser escritos como

$$\underline{\mathbf{E}}_{\underline{\gamma}}^{el} = \frac{3}{4\pi} \left[ E_{V0} \int_{\mathcal{S}} \underline{\mathbf{V}} \otimes \underline{\mathbf{V}} d\mathcal{S} + E_{D0}^{sym} \int_{\mathcal{S}} \underline{\mathbf{D}}^{symT} \cdot \underline{\mathbf{D}}^{sym} d\mathcal{S} + \right.$$

$$\left. + E_{D0}^{skw} \int_{\mathcal{S}} \underline{\mathbf{D}}^{skwT} \cdot \underline{\mathbf{D}}^{skw} d\mathcal{S} \right] \quad (6.101)$$

$$\underline{\mathbf{E}}_{\sigma\varphi}^{el} = E_{\varphi\gamma 0} \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \underline{\mathbf{V}} d\mathcal{S} \quad (6.102)$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{E}}}_{\kappa}^{el} &= \frac{3}{4\pi} \left[ E_{N0} \int_{\mathcal{S}} \underline{\underline{\mathbf{N}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{N}}} d\mathcal{S} + E_{T0}^{sym} \int_{\mathcal{S}} \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{symT} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{sym} d\mathcal{S} + \right. \\ &\left. + E_{T0}^{skw} \int_{\mathcal{S}} \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{skwT} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{skw} d\mathcal{S} \right] \end{aligned} \quad (6.103)$$

$$E_{\varphi}^{el} = E_{\varphi 0} \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} d\mathcal{S} \quad (6.104)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}}_{\psi\gamma}^{el} = E_{\varphi\gamma 0} \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \underline{\underline{\mathbf{V}}} d\mathcal{S} \quad (6.105)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}}_{\varphi_g}^{el} = E_{\varphi_g 0} \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \underline{\underline{\mathbf{N}}} d\mathcal{S} \quad (6.106)$$

Utilizando-se as integrais analíticas das equações 6.16 a 6.21 e substituindo-as nas equações 6.101 a 6.106, tem-se

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}}_{\gamma}^{el} = E_{V0} \underline{\underline{\mathcal{J}}}_{vol} + E_{D0}^{sym} \underline{\underline{\mathcal{J}}}_{dev}^{sym} + E_{D0}^{skw} \underline{\underline{\mathcal{J}}}_{skw} \quad (6.107)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}}_{\sigma\varphi}^{el} = \underline{\underline{\mathbf{E}}}_{\psi\gamma}^{el} = E_{\varphi\gamma 0} \underline{\underline{\mathbf{I}}} \quad (6.108)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}}_{\kappa}^{el} = \left( \frac{3}{5} E_{N0} - \frac{3}{5} E_{T0}^{sym} \right) \underline{\underline{\mathcal{J}}}_{vol} + \left( \frac{2}{5} E_{N0} + \frac{3}{5} E_{T0}^{sym} \right) \underline{\underline{\mathcal{J}}}_{dev}^{sym} + E_{T0}^{skw} \underline{\underline{\mathcal{J}}}_{skw} \quad (6.109)$$

$$E_{\varphi}^{el} = 3E_{\varphi 0} \quad (6.110)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}}_{\varphi_g}^{el} = E_{\varphi_g 0} \underline{\underline{\mathbf{I}}} \quad (6.111)$$

Para a determinação dos módulos elásticos nos microplanos, os módulos elásticos macroscópicos determinados acima são igualados àqueles obtidos pela teoria da elasticidade para o contínuo com microexpansão. Para tanto, toma-se a densidade de energia de deformação definida para este contínuo na seção 4.2.2 do capítulo 4, isto é,

$$U_0 = \frac{1}{2} A_{ijkl} \gamma_{ij} \gamma_{kl} + C_{ij} \gamma_{ij} \varphi + \frac{1}{2} E_{ijkl} \kappa_{ij} \kappa_{kl} + \frac{1}{2} H \varphi^2 + \frac{1}{2} J_{ij} \varphi_{,i} \varphi_{,j} \quad (6.112)$$

onde

$$A_{ijkl} = A_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + A_2 \delta_{ik} \delta_{jl} + A_3 \delta_{il} \delta_{jk} \quad (6.113)$$

$$E_{ijkl} = E_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + E_2 \delta_{ik} \delta_{jl} + E_3 \delta_{il} \delta_{jk} \quad (6.114)$$

$$C_{ij} = C\delta_{ij} \quad (6.115)$$

$$J_{ij} = J\delta_{ij} \quad (6.116)$$

Reescrevendo-se estas equações através dos parâmetros elásticos do contínuo com microexpansão definidos na seção 4.2.3 do capítulo 4 e conhecendo-se a definição dos tensores identidade, obtém-se

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \left[ 3 \left( \lambda + \frac{C^2}{H} \right) + 2G \right] \underline{\underline{\mathcal{I}}}_{vol} + 2G \underline{\underline{\mathcal{I}}}_{dev}^{sym} + 2\alpha \underline{\underline{\mathcal{I}}}_{skw} \quad (6.117)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}} = 3E_1 \underline{\underline{\mathcal{I}}}_{vol} + \frac{2\eta GL_f^2}{2\eta - GL_f^2} \underline{\underline{\mathcal{I}}}_{dev}^{sym} + 2\eta \underline{\underline{\mathcal{I}}}_{skw} \quad (6.118)$$

onde  $E_1$  é dado pela equação 6.46

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}} = C \underline{\underline{\mathbf{I}}} \quad (6.119)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{J}}} = 2GL_a^2 \underline{\underline{\mathbf{I}}} \quad (6.120)$$

Comparando-se as equações 6.107 e 6.117, 6.109 e 6.118, 6.108 e 6.119, 6.111 e 6.120 e lembrando que o parâmetro elástico  $H$  relaciona a microtensão com a microexpansão, determinam-se os módulos elásticos nos microplos em função dos parâmetros elásticos macroscópicos

$$E_{V0} = 3 \left( \lambda + \frac{C^2}{H} \right) + 2G, \quad E_{D0}^{sym} = 2G, \quad E_{D0}^{skw} = 2\alpha \quad (6.121)$$

$$E_{N0} = 3E_1 + \frac{2\eta GL_f^2}{2\eta - GL_f^2}, \quad E_{T0}^{sym} = \frac{2\eta GL_f^2}{2\eta - GL_f^2} - 2E_1, \quad E_{T0}^{skw} = 2\eta \quad (6.122)$$

$$E_{\varphi\gamma 0} = C, \quad E_{\varphi 0} = \frac{H}{3}, \quad E_{\varphi_g 0} = 2GL_a^2 \quad (6.123)$$

Observa-se que as equações em 6.121 e 6.122 são iguais àquelas para o contínuo de Cosserat (equações 6.47 e 6.48) se  $C \rightarrow 0$  ou  $H \rightarrow \infty$ , como comentado na seção 4.2.4 do capítulo 4. Isto torna possível simular o comportamento do contínuo micropolar e, por sua vez, do contínuo clássico, através desta formulação. Quanto ao intervalo de validade dos parâmetros elásticos, permanecem válidas as observações feitas no final da seção 6.3.3.2, bem como as equações em 4.41, exceto a equação 4.41(e).

### 6.4.3 Dano nos Microplanos

#### 6.4.3.1 Relações Constitutivas nos Microplanos

Nesta seção, desenvolvem-se as equações constitutivas de dano nos microplanos para o contínuo com microexpansão, introduzindo-se três parâmetros de dano,  $d_{\varphi\gamma}^{mic}$ ,  $d_{\kappa}^{mic}$  e  $d_{\varphi_g}^{mic}$ , referentes às deformações e microexpansões, às microcurvaturas e aos gradientes de microexpansão, respectivamente. Nota-se que existe um único parâmetro para as deformações e microexpansões, tornando possível o acoplamento volumétrico-desviador, assim como existe somente um parâmetro de dano para as microcurvaturas, garantindo o acoplamento normal-tangencial nos microplanos. Assim, o vetor das variáveis internas pode ser identificado como  $\underline{\mathbf{q}} = \{d_{\varphi\gamma}^{mic}, d_{\kappa}^{mic}, d_{\varphi_g}^{mic}\}$ . As variáveis de dano estão limitadas entre o valor 0, que corresponde ao estado não-danificado, e o valor 1, que define a ruptura completa do material, isto é,  $0 \leq d_{\varphi\gamma}^{mic} \leq 1$ ,  $0 \leq d_{\kappa}^{mic} \leq 1$  e  $0 \leq d_{\varphi_g}^{mic} \leq 1$ .

A energia livre nos microplanos,  $\Psi^{mic}$ , pode ser expressa em função das componentes de deformação generalizadas nos microplanos e das variáveis de dano, na forma

$$\Psi^{mic} := \Psi_{\varphi\gamma}^{mic}(\varphi, \gamma_V, \underline{\boldsymbol{\gamma}}_D^{sym}, \underline{\boldsymbol{\gamma}}_D^{skw}, d_{\varphi\gamma}^{mic}) + \Psi_{\kappa}^{mic}(\kappa_N, \underline{\boldsymbol{\kappa}}_T^{sym}, \underline{\boldsymbol{\kappa}}_T^{skw}, d_{\kappa}^{mic}) + \Psi_{\varphi_g}^{mic}(\varphi_g, d_{\varphi_g}^{mic}) \quad (6.124)$$

onde

$$\Psi_{\varphi\gamma}^{mic} := [1 - d_{\varphi\gamma}^{mic}] \Psi_{0\varphi\gamma}^{mic}, \quad \Psi_{\kappa}^{mic} := [1 - d_{\kappa}^{mic}] \Psi_{0\kappa}^{mic} \quad (6.125)$$

$$\Psi_{\varphi_g}^{mic} := [1 - d_{\varphi_g}^{mic}] \Psi_{0\varphi_g}^{mic} \quad (6.126)$$

Aqui, os processos de dano são os mecanismos dissipativos dominantes que descrevem a degradação progressiva das propriedades mecânicas do material nos microplanos. Assim, por meio das equações 6.87, 6.88 e 6.95, são definidas as forças termodinâmicas,  $Y_{\varphi\gamma}^{mic}$ ,  $Y_{\kappa}^{mic}$  e  $Y_{\varphi_g}^{mic}$ , substituindo-se  $\underline{\mathbf{q}} = \{d_{\varphi\gamma}^{mic}, d_{\kappa}^{mic}, d_{\varphi_g}^{mic}\}$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{mic} &= -\frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial d_{\varphi\gamma}^{mic}} \dot{d}_{\varphi\gamma}^{mic} - \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial d_{\kappa}^{mic}} \dot{d}_{\kappa}^{mic} - \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial d_{\varphi_g}^{mic}} \dot{d}_{\varphi_g}^{mic} = \\ &= Y_{\varphi\gamma}^{mic} \dot{d}_{\varphi\gamma}^{mic} + Y_{\kappa}^{mic} \dot{d}_{\kappa}^{mic} + Y_{\varphi_g}^{mic} \dot{d}_{\varphi_g}^{mic} \geq 0. \end{aligned} \quad (6.127)$$



A energia livre nos microplanos define suas tensões generalizadas constitutivas como quantidades termodinamicamente conjugadas às correspondentes componentes de deformação generalizadas,

$$\begin{aligned}
\sigma_V &:= \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \gamma_V} = [1 - d_{\varphi\gamma}^{mic}](E_{V0}\gamma_V + E_{\varphi\gamma 0}\varphi), & \mu_N &:= \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \kappa_N} = [1 - d_{\kappa}^{mic}]E_{N0}\kappa_N \\
\boldsymbol{\sigma}_D^{sym} &:= \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \boldsymbol{\gamma}_D^{sym}} = [1 - d_{\varphi\gamma}^{mic}]E_{D0}^{sym}\boldsymbol{\gamma}_D^{sym}, & \boldsymbol{\mu}_T^{sym} &:= \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \boldsymbol{\kappa}_T^{sym}} = [1 - d_{\kappa}^{mic}]E_{T0}^{sym}\boldsymbol{\kappa}_T^{sym} \\
\boldsymbol{\sigma}_D^{skw} &:= \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \boldsymbol{\gamma}_D^{skw}} = [1 - d_{\varphi\gamma}^{mic}]E_{D0}^{skw}\boldsymbol{\gamma}_D^{skw}, & \boldsymbol{\mu}_T^{skw} &:= \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \boldsymbol{\kappa}_T^{skw}} = [1 - d_{\kappa}^{mic}]E_{T0}^{skw}\boldsymbol{\kappa}_T^{skw} \\
\psi_m &:= \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \varphi} = [1 - d_{\varphi\gamma}^{mic}](E_{\varphi 0}\varphi + E_{\varphi\gamma 0}\gamma_V), & \lambda_m &:= \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \varphi_g} = [1 - d_{\varphi_g}^{mic}]E_{\varphi_g 0}\varphi_g
\end{aligned} \tag{6.128}$$

#### 6.4.3.2 Aplicação das Leis da Termodinâmica

Os tensores macroscópicos de tensão generalizada conjugados termodinamicamente aos tensores macroscópicos de deformação generalizada, e definidos nas equações 6.90 a 6.93, podem ser reescritos utilizando-se as equações em 6.128, 6.9 a 6.11, 6.79 e 6.80

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} &= \frac{\partial \Psi^{mac}}{\partial \boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{E}_{sec\boldsymbol{\gamma}}^d : \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{E}_{sec\varphi}^d \varphi \\
&= \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} [1 - d_{\varphi\gamma}^{mic}][E_{V0}\boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{V} + E_{D0}^{sym}\boldsymbol{D}^{symT} \cdot \boldsymbol{D}^{sym} + E_{D0}^{skw}\boldsymbol{D}^{skwT} \cdot \boldsymbol{D}^{skw}] d\mathcal{S} : \boldsymbol{\gamma} + \\
&+ \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} [1 - d_{\varphi\gamma}^{mic}]E_{\varphi\gamma 0}\boldsymbol{V} d\mathcal{S} \varphi
\end{aligned} \tag{6.129}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mu} &= \frac{\partial \Psi^{mac}}{\partial \boldsymbol{\kappa}} = \boldsymbol{E}_{sec\boldsymbol{\kappa}}^d : \boldsymbol{\kappa} \\
&= \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} [1 - d_{\kappa}^{mic}][E_{N0}\boldsymbol{N} \otimes \boldsymbol{N} + E_{T0}^{sym}\boldsymbol{T}^{symT} \cdot \boldsymbol{T}^{sym} + E_{T0}^{skw}\boldsymbol{T}^{skwT} \cdot \boldsymbol{T}^{skw}] d\mathcal{S} : \boldsymbol{\kappa}
\end{aligned} \tag{6.130}$$

$$\begin{aligned}
\psi &= \frac{\partial \Psi^{mac}}{\partial \varphi} = E_{sec\varphi}^d \varphi + \boldsymbol{E}_{sec\boldsymbol{\gamma}}^d : \boldsymbol{\gamma} \\
&= \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} [1 - d_{\varphi\gamma}^{mic}]E_{\varphi 0} d\mathcal{S} \varphi + \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} [1 - d_{\varphi\gamma}^{mic}]E_{\varphi\gamma 0}\boldsymbol{V} d\mathcal{S} : \boldsymbol{\gamma}
\end{aligned} \tag{6.131}$$

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{\partial \Psi^{mac}}{\partial \varphi_g} = \underline{\underline{\mathbf{E}}}_{sec\varphi_g}^d \cdot \varphi_g \\ &= \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} [1 - d_{\varphi_g}^{mic}] E_{\varphi_g 0} \underline{\underline{\mathbf{N}}} d\mathcal{S} \cdot \varphi_g\end{aligned}\quad (6.132)$$

nas quais  $\underline{\underline{\mathbf{E}}}_{sec\gamma}^d$  e  $\underline{\underline{\mathbf{E}}}_{sec\kappa}^d$  são os tensores de quarta ordem que denotam os módulos secantes macroscópicos devidos às deformações e microcurvaturas, respectivamente.  $\underline{\underline{\mathbf{E}}}_{sec\varphi_g}^d$ ,  $\underline{\underline{\mathbf{E}}}_{sec\sigma\varphi}^d$  e  $\underline{\underline{\mathbf{E}}}_{sec\psi\gamma}^d$  são os tensores de segunda ordem que denotam os módulos secantes macroscópicos devidos aos gradientes de microexpansão e às relações entre tensão-microexpansão e microtensão-deformação, respectivamente.  $E_{sec\varphi}^d$  é um escalar que denota o módulo secante macroscópico devido à microexpansão. Observe que os módulos elásticos presentes nestas equações já foram definidos em 6.121 a 6.123, mas não foram substituídos aqui por clareza de exposição das equações acima.

Linearizando-se estas equações, obtém-se os módulos tangentes elasto-dano referentes às deformações generalizadas

$$\dot{\underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{\mathbf{E}}}_{tan\gamma}^d : \dot{\underline{\underline{\gamma}}} + \underline{\underline{\mathbf{E}}}_{tan\sigma\varphi}^d \dot{\varphi}, \quad \dot{\underline{\underline{\mu}}} = \underline{\underline{\mathbf{E}}}_{tan\kappa}^d : \dot{\underline{\underline{\kappa}}}\quad (6.133)$$

$$\dot{\psi} = E_{tan\varphi}^d \dot{\varphi} + \underline{\underline{\mathbf{E}}}_{tan\psi\gamma}^d : \dot{\underline{\underline{\gamma}}}, \quad \dot{\lambda} = \underline{\underline{\mathbf{E}}}_{tan\varphi_g}^d \cdot \dot{\varphi}_g\quad (6.134)$$

onde

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\mathbf{E}}}_{tan\gamma}^d &= \underline{\underline{\mathbf{E}}}_{sec\gamma}^d - \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \frac{\partial \phi_{\varphi\gamma}^{mic}}{\partial \kappa_{\varphi\gamma}^{mic}} \left[ \frac{\underline{\underline{\mathbf{V}}}\sigma_V + \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{symT} \cdot \underline{\underline{\sigma}}_D^{sym} - \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{skwT} \cdot \underline{\underline{\sigma}}_D^{skw}}{(1 - d_{\varphi\gamma}^{mic})} \right] \\ &\otimes \left[ \frac{\partial \eta_{\varphi\gamma}^{mic}}{\partial \gamma_V} \underline{\underline{\mathbf{V}}} + \frac{\partial \eta_{\varphi\gamma}^{mic}}{\partial \underline{\underline{\gamma}}_D^{sym}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{sym} - \frac{\partial \eta_{\varphi\gamma}^{mic}}{\partial \underline{\underline{\gamma}}_D^{skw}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{skw} \right] d\mathcal{S}\end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}}_{tan\sigma\varphi}^d = \underline{\underline{\mathbf{E}}}_{sec\sigma\varphi}^d - \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \frac{\partial \phi_{\varphi\gamma}^{mic}}{\partial \kappa_{\varphi\gamma}^{mic}} \frac{\partial \eta_{\varphi\gamma}^{mic}}{\partial \varphi} \left[ \frac{\underline{\underline{\mathbf{V}}}\sigma_V + \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{symT} \cdot \underline{\underline{\sigma}}_D^{sym} - \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{skwT} \cdot \underline{\underline{\sigma}}_D^{skw}}{(1 - d_{\varphi\gamma}^{mic})} \right] d\mathcal{S}$$

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\mathbf{E}}}_{tan\kappa}^d &= \underline{\underline{\mathbf{E}}}_{sec\kappa}^d - \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \frac{\partial \phi_{\kappa}^{mic}}{\partial \kappa_{\kappa}^{mic}} \left[ \frac{\underline{\underline{\mathbf{N}}}\mu_N + \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{symT} \cdot \underline{\underline{\mu}}_T^{sym} - \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{skwT} \cdot \underline{\underline{\mu}}_T^{skw}}{(1 - d_{\kappa}^{mic})} \right] \\ &\otimes \left[ \frac{\partial \eta_{\kappa}^{mic}}{\partial \kappa_N} \underline{\underline{\mathbf{N}}} + \frac{\partial \eta_{\kappa}^{mic}}{\partial \underline{\underline{\kappa}}_T^{sym}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{sym} - \frac{\partial \eta_{\kappa}^{mic}}{\partial \underline{\underline{\kappa}}_T^{skw}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{skw} \right] d\mathcal{S}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{tan\varphi}^d &= E_{sec\varphi}^d - \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \frac{\partial\phi_{\varphi\gamma}^{mic}}{\partial\kappa_{\varphi\gamma}^{mic}} \frac{\partial\eta_{\varphi\gamma}^{mic}}{\partial\varphi} \frac{\psi_m}{(1-d_{\varphi\gamma}^{mic})} d\mathcal{S} \\
\tilde{\mathbf{E}}_{tan\psi\gamma}^d &= \tilde{\mathbf{E}}_{sec\psi\gamma}^d - \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \frac{\partial\phi_{\varphi\gamma}^{mic}}{\partial\kappa_{\varphi\gamma}^{mic}} \frac{\psi_m}{(1-d_{\varphi\gamma}^{mic})} \left[ \frac{\partial\eta_{\varphi\gamma}^{mic}}{\partial\gamma_V} \tilde{\mathbf{V}} + \frac{\partial\eta_{\varphi\gamma}^{mic}}{\partial\gamma_D^{sym}} \cdot \tilde{\mathbf{D}}^{sym} - \frac{\partial\eta_{\varphi\gamma}^{mic}}{\partial\gamma_D^{skw}} \cdot \tilde{\mathbf{D}}^{skw} \right] d\mathcal{S} \\
\tilde{\mathbf{E}}_{tan\varphi_g}^d &= \tilde{\mathbf{E}}_{sec\varphi_g}^d - \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \frac{\partial\phi_{\varphi_g}^{mic}}{\partial\kappa_{\varphi_g}^{mic}} \frac{\partial\eta_{\varphi_g}^{mic}}{\partial\varphi_g} \frac{\lambda_m}{(1-d_{\varphi_g}^{mic})} \tilde{\mathbf{N}} d\mathcal{S} \quad (6.135)
\end{aligned}$$

De acordo com o que foi apresentado para o modelo de microplanos com o contínuo de Cosserat, a caracterização do estado de dano é feita adotando-se funções de carregamento, então, aqui são adotadas  $\Phi_{\varphi\gamma}^{mic}$ ,  $\Phi_{\kappa}^{mic}$  e  $\Phi_{\varphi_g}^{mic}$ . A formulação genérica de dano apresentada na seção 6.3.4.2 também é adotada aqui, onde “\*” significa a relação deformação-microexpansão ( $\varphi\gamma$ ), microcurvatura ( $\kappa$ ) ou gradiente de microexpansão ( $\varphi_g$ ). Entretanto, conforme a função adotada para a determinação das variáveis de dano, devem ser especificados, aqui, nove parâmetros adicionais para o material:  $\beta_{\varphi\gamma}^{mic}$ ,  $\beta_{\kappa}^{mic}$  e  $\beta_{\varphi_g}^{mic}$ , que determinam a taxa de crescimento do dano, governando a forma do ramo descendente;  $\alpha_{\varphi\gamma}^{mic}$ ,  $\alpha_{\kappa}^{mic}$  e  $\alpha_{\varphi_g}^{mic}$ , que representam a máxima degradação possível do material e  $\kappa_{0\varphi\gamma}^{mic}$ ,  $\kappa_{0\kappa}^{mic}$  e  $\kappa_{0\varphi_g}^{mic}$ , que são os valores da deformação equivalente que determinam o início do processo de dano.

### 6.4.3.3 Definição das Deformações Equivalentes nos Microplanos

Adota-se, novamente, a distribuição de dano isotrópico no nível dos microplanos para se obter a deformação equivalente neste nível a partir da deformação equivalente macroscópica. Introduzindo-se esta consideração nas equações 6.129 a 6.132, utilizando-se as relações em 6.121 a 6.123 e as integrais analíticas em 6.16 a 6.21, chega-se a

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} &= [1 - d_{\varphi\gamma}^{mic}] \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} [E_{V0} \tilde{\mathbf{V}} \otimes \tilde{\mathbf{V}} + E_{D0}^{sym} \tilde{\mathbf{D}}^{symT} \cdot \tilde{\mathbf{D}}^{sym} + E_{D0}^{skw} \tilde{\mathbf{D}}^{skwT} \cdot \tilde{\mathbf{D}}^{skw}] d\mathcal{S} : \boldsymbol{\gamma} + \\
&+ [1 - d_{\varphi\gamma}^{mic}] \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} E_{\varphi\gamma 0} \tilde{\mathbf{V}} d\mathcal{S} \varphi = \\
&= [1 - d_{\varphi\gamma}^{mic}] \left\{ \left[ 3 \left( \lambda + \frac{C^2}{H} \right) + 2G \right] \boldsymbol{\gamma}_{vol} + 2G \boldsymbol{\gamma}_{dev}^{sym} + 2\alpha \boldsymbol{\gamma}_{dev}^{skw} + C \varphi \mathbf{I} \right\} \quad (6.136)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{\mu}} &= [1 - d_{\kappa}^{mic}] \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} [E_{N0} \tilde{\mathbf{N}} \otimes \tilde{\mathbf{N}} + E_{T0}^{sym} \tilde{\mathbf{T}}^{symT} \cdot \tilde{\mathbf{T}}^{sym} + E_{T0}^{skw} \tilde{\mathbf{T}}^{skwT} \cdot \tilde{\mathbf{T}}^{skw}] d\mathcal{S} : \tilde{\boldsymbol{\kappa}} \\
&= [1 - d_{\kappa}^{mic}] \left( 3E_1 \tilde{\boldsymbol{\kappa}}_{vol} + \frac{2\eta GL_f^2}{2\eta - GL_f^2} \tilde{\boldsymbol{\kappa}}^{sym} + 2\eta \tilde{\boldsymbol{\kappa}}^{skw} \right)
\end{aligned} \tag{6.137}$$

$$\begin{aligned}
\psi &= [1 - d_{\varphi\gamma}^{mic}] \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} E_{\varphi 0} d\mathcal{S} \varphi + [1 - d_{\varphi\gamma}^{mic}] \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} E_{\varphi\gamma 0} \tilde{\mathbf{V}} d\mathcal{S} : \tilde{\boldsymbol{\gamma}} = \\
&= [1 - d_{\varphi\gamma}^{mic}] (H \varphi + 3C \gamma_V)
\end{aligned} \tag{6.138}$$

$$\boldsymbol{\lambda} = [1 - d_{\varphi_g}^{mic}] \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} E_{\varphi_g 0} \tilde{\mathbf{N}} d\mathcal{S} \cdot \boldsymbol{\varphi}_g = [1 - d_{\varphi_g}^{mic}] 2GL_a^2 \tilde{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\varphi}_g \tag{6.139}$$

Equações equivalentes a estas no nível macroscópico podem ser escritas com a ajuda dos módulos constitutivos em 6.107 a 6.111, 6.121 a 6.123, obtendo-se

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} &= [1 - d_{\varphi\gamma}^{mac}] (\tilde{\mathbf{E}}_{\tilde{\boldsymbol{\gamma}}}^{el} : \tilde{\boldsymbol{\gamma}} + \tilde{\mathbf{E}}_{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}\varphi}^{el} \varphi) \\
&= [1 - d_{\varphi\gamma}^{mac}] \left\{ \left[ 3 \left( \lambda + \frac{C^2}{H} \right) + 2G \right] \gamma_{vol} + 2G \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_{dev}^{sym} + 2\alpha \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_{dev}^{skw} + C \varphi \tilde{\mathbf{I}} \right\}
\end{aligned} \tag{6.140}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{\mu}} &= [1 - d_{\kappa}^{mac}] \tilde{\mathbf{E}}_{\tilde{\boldsymbol{\kappa}}}^{el} : \tilde{\boldsymbol{\kappa}} \\
&= [1 - d_{\kappa}^{mac}] \left( 3E_1 \tilde{\boldsymbol{\kappa}}_{vol} + \frac{2\eta GL_f^2}{2\eta - GL_f^2} \tilde{\boldsymbol{\kappa}}^{sym} + 2\eta \tilde{\boldsymbol{\kappa}}^{skw} \right)
\end{aligned} \tag{6.141}$$

$$\psi = [1 - d_{\varphi\gamma}^{mac}] (E_{\varphi}^{el} \varphi + \tilde{\mathbf{E}}_{\tilde{\boldsymbol{\psi}}\gamma}^{el} : \tilde{\boldsymbol{\gamma}}) = [1 - d_{\varphi\gamma}^{mac}] (H \varphi + 3C \gamma_V) \tag{6.142}$$

$$\boldsymbol{\lambda} = [1 - d_{\varphi_g}^{mac}] \tilde{\mathbf{E}}_{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_g}^{el} \cdot \boldsymbol{\varphi}_g = [1 - d_{\varphi_g}^{mac}] 2GL_a^2 \tilde{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\varphi}_g \tag{6.143}$$

Comparando as equações de 6.136 a 6.139 com aquelas de 6.140 a 6.143, respectivamente, percebe-se que as variáveis de dano nos microplanos devem ser iguais àsquelas macroscópicas, isto é,  $d_*^{mic} = d_*^{mac}$ . A consequência disso são as igualdades  $\eta_*^{mic} = \eta_*^{mac}$ , pois são as responsáveis pela evolução das variáveis de dano.

### 1) Simo e Ju (1987)

Analogamente ao desenvolvido para o modelo de microplanos com o contínuo de Cosserat, as deformações equivalentes nos microplanos utilizando-se a idéia de Simo

e Ju (1987) resultam em

$$\begin{aligned}
\eta_{\varphi\gamma}^{mic}{}_{Simo} &= \sqrt{3E_{V0}\gamma_V^2 + 3E_{\varphi0}\varphi^2 + 6\varphi E_{\varphi\gamma0}\gamma_V + 3\boldsymbol{\gamma}_D^{sym} \cdot E_{D0}^{sym} \boldsymbol{\gamma}_D^{sym} + 3\boldsymbol{\gamma}_D^{skw} \cdot E_{D0}^{skw} \boldsymbol{\gamma}_D^{skw}} \\
\eta_{\kappa}^{mic}{}_{Simo} &= \sqrt{3E_{N0}\kappa_N^2 + 3\boldsymbol{\kappa}_T^{sym} \cdot E_{T0}^{sym} \boldsymbol{\kappa}_T^{sym} + 3\boldsymbol{\kappa}_T^{skw} \cdot E_{T0}^{skw} \boldsymbol{\kappa}_T^{skw}} \\
\eta_{\varphi_g}^{mic}{}_{Simo} &= \sqrt{3E_{\varphi_g0} \varphi_g^2}
\end{aligned} \tag{6.144}$$

## 2) von Mises Modificado (de Vree et al. (1995))

Para determinar as deformações equivalentes nos microplanos devido a de Vree et al. (1995) algumas considerações são feitas:

1. O primeiro invariante das deformações macroscópicas é influenciado pela existência da microexpansão volumétrica, resultando em

$$I_1 = \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} (\gamma_V + \varphi) d\mathcal{S} = 3(\gamma_V + \varphi) \tag{6.145}$$

2. O segundo invariante das deformações macroscópicas desviadoras,  $J_2$ , é escrito em função das deformações, microcurvaturas e gradiente de microexpansão. Uma vez que a diferença entre o contínuo com microexpansão e o micropolar é a existência da microexpansão volumétrica e de seu gradiente, as fórmulas adotadas para  $J_2$  devido às deformações e microcurvaturas são iguais às adotadas para o contínuo micropolar na seção 6.3.4.3. Adicionalmente, a definição de  $J_2$  devido ao gradiente de microexpansão é dada por

$$2J_{2\varphi_g} = \frac{3}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} (\varphi_g \varphi_g) d\mathcal{S} \tag{6.146}$$

3. Uma vez que os parâmetros  $k_0$ ,  $k_1$  e  $k_2$  dependem de  $r$ , eles estão intimamente relacionados à diferença do comportamento do material em tração e compressão. Como o contínuo com microexpansão afeta esses comportamentos pela presença da microexpansão volumétrica, os valores desses parâmetros devem ser modificados de alguma forma. De acordo com as considerações feitas acima, a primeira proposição para a deformação equivalente devido às deformações e

microexpansões foi

$$\eta_{\varphi\gamma}^{mic}{}_{Vree} = 3k_0(\gamma_V + \varphi) + \sqrt{[3k_1(\gamma_V + \varphi)]^2 + \frac{3}{4}k_2(\underline{\gamma}_D^{sym} \cdot \underline{\gamma}_D^{sym} + \underline{\gamma}_D^{skw} \cdot \underline{\gamma}_D^{skw})} \quad (6.147)$$

onde  $k_0$ ,  $k_1$  e  $k_2$  não foram alterados. Essa proposição não refletiu o comportamento do material quando a razão entre suas resistências à tração e à compressão era  $r$ , resultando num valor muito superior. Então, como esperado, alguma alteração nesses parâmetros seria necessária. Comparando esta fórmula com a 6.77, percebe-se que o segundo termo dentro da raiz são iguais, mantendo-se assim o valor de  $k_2$ . Entretanto, os valores de  $k_0$  e  $k_1$  precisam ser modificados para as parcelas com microexpansão. Observou-se que num ensaio de tração pura, a presença da microexpansão torna a deformação equivalente (equação 6.147) superior àquela adotada para o contínuo de Cosserat, então foi proposta a diminuição dessas parcelas, dividindo-as por  $r$ , ou seja

$$\eta_{\varphi\gamma}^{mic}{}_{Vree} = 3k_0\gamma_V + 3k'_0\varphi + \sqrt{(3k_1\gamma_V + 3k'_1\varphi)^2 + \frac{3}{4}k_2(\underline{\gamma}_D^{sym} \cdot \underline{\gamma}_D^{sym} + \underline{\gamma}_D^{skw} \cdot \underline{\gamma}_D^{skw})} \quad (6.148)$$

onde  $k'_0 = k'_1 = \frac{k_0}{r} = \frac{k_1}{r}$ . Esta proposição foi testada para vários valores de  $r$ , refletindo a diferença do comportamento do material à tração e à compressão da maneira correta, como esperado.

Logo, as deformações equivalentes nos microplanos ficam definidas pela equação 6.148 e pelas equações

$$\eta_{\kappa}^{mic}{}_{Vree} = \sqrt{\frac{3}{4}k_2(\underline{\kappa}_T^{sym} \cdot \underline{\kappa}_T^{sym} + \underline{\kappa}_T^{skw} \cdot \underline{\kappa}_T^{skw})} \quad (6.149)$$

$$\eta_{\varphi_g}^{mic}{}_{Vree} = \sqrt{\frac{3}{2}k_2\varphi_g\varphi_g} \quad (6.150)$$

# Capítulo 7

## Implementações Computacionais

### 7.1 Introdução

As teorias apresentadas nos capítulos anteriores foram incorporadas ao sistema computacional **INSANE** (*Interactive Structural Analysis Environment*), que utiliza a metodologia de programação orientada a objetos (POO) como técnica de implementação.

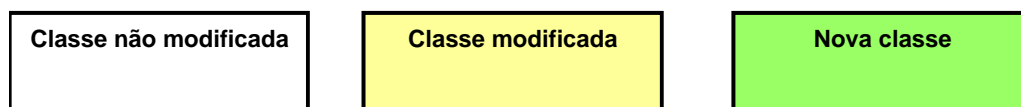
O **INSANE** é atualmente um sistema composto por vários módulos, implementados na linguagem Java, que permite a participação de pesquisadores em diversos níveis do conhecimento e que estes desenvolvam trabalhos simultâneos, uma vez que os módulos podem ser, separadamente, compilados e ter os métodos de suas classes testados. De forma geral, o relacionamento entre estes módulos constitui uma determinada aplicação. Isto exige uma constante preocupação por partes dos pesquisadores em manter a organização do programa a mais genérica possível para que futuras implementações possam ser feitas sem modificações naquelas já existentes.

O sistema **INSANE** é composto por três grandes aplicações: pré-processador, processador e pós-processador. O pré e o pós-processador são aplicações gráficas interativas que disponibilizam, respectivamente, ferramentas de pré e pós-processamento de diferentes modelos discretos. O processador é a aplicação que representa o núcleo numérico do sistema e é o responsável pela obtenção dos resultados de diferentes

modelos discretos de análise estrutural.

Este trabalho expandiu o núcleo numérico do **INSANE**, o qual é formado por interfaces e classes abstratas que representam as diversas abstrações de uma resolução numérica de modelos discretos, cada qual com sua hierarquia de classes responsável por cumprir o seu devido papel no processamento.

Neste capítulo, são apresentadas as interfaces e classes do núcleo numérico que, diretamente, se relacionam com as implementações decorrentes deste trabalho. Para tanto, são utilizados diagramas de classes que permitem conhecer a hierarquia das mesmas e como elas se comunicam para desempenhar suas funções. Estes diagramas seguem a proposta da *Unified Modeling Language* (UML), linguagem padronizada para a modelagem de sistemas de software orientados a objetos. Para facilitar a visualização das expansões e modificações realizadas, utiliza-se a simbologia mostrada na figura 7.1: em amarelo, encontram-se as classes modificadas e em verde, as classes que foram criadas durante o desenvolvimento deste trabalho.



**Figura 7.1:** Simbologia utilizada nos diagramas em UML deste trabalho

## 7.2 Organização do Núcleo Numérico do INSANE

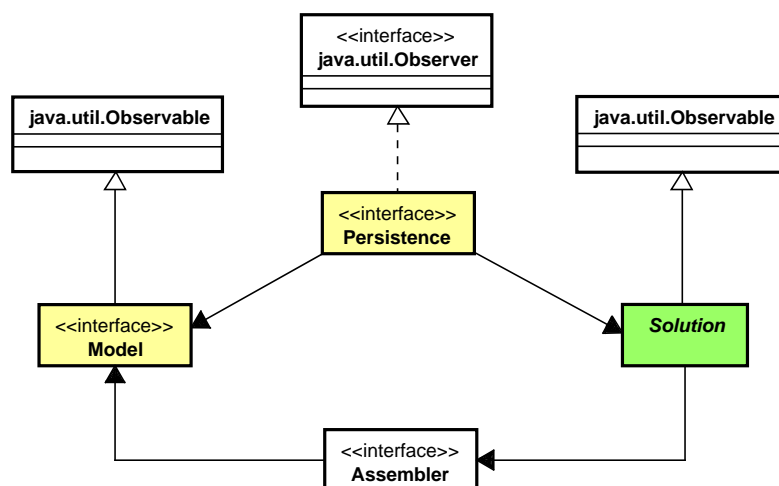
Uma visão geral da organização do núcleo numérico do **INSANE** é mostrada na figura 7.2. As superclasses que o representam são as interfaces **Assembler**, **Model** e **Persistence** e a classe abstrata **Solution**.

A interface **Assembler** pertence ao módulo *assembler*, sendo responsável por montar, conforme o problema a ser resolvido, as matrizes e vetores da equação matricial de equilíbrio

$$A \ddot{X} + B \dot{X} + C X = R - F \quad (7.1)$$

onde  $X$  é o vetor das variáveis de estado do problema;  $\dot{X}$  e  $\ddot{X}$  são os vetores com,





**Figura 7.2:** Organização do núcleo numérico do **INSANE**

respectivamente, a primeira e a segunda variação temporal da variável de estado;  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  são as matrizes dos coeficientes, que podem ou não depender da variável de estado e suas derivadas; e  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{F}$  representam os termos independentes do sistema de equações.

A interface **Assembler**, atualmente, é implementada pela classe **FemAssembler**, que é apropriada aos diversos tipos de problemas que podem ser modelados pelo Método dos Elementos Finitos.

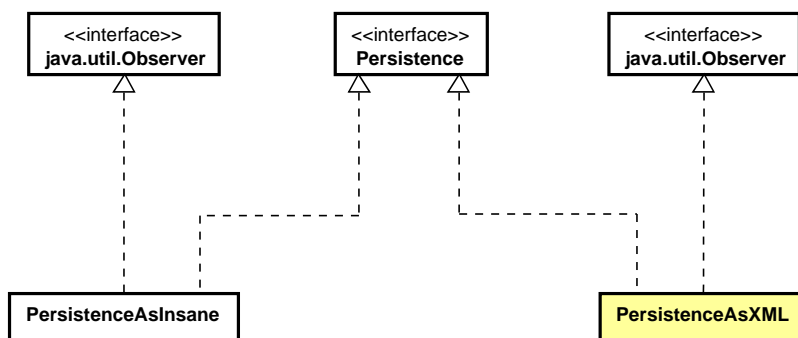
Por meio desta Tese, foi criado no **INSANE** um módulo chamado *solution*, que é responsável pela solução de problemas lineares e não-lineares (discutido no capítulo 2). Neste módulo, a classe abstrata **Solution** é a que desencadeia o processo de solução, possuindo os recursos necessários para resolver o sistema matricial acima (equação 7.1).

A interface **Model** pertence ao módulo *model* e, atualmente, é implementada pela classe **FemModel**, que representa o modelo de elementos finitos propriamente dito. Esta possui os dados relativos ao modelo discreto a ser analisado e fornece para **Assembler** todas as informações necessárias para montar a equação do modelo, que será resolvida por **Solution**.

Tanto **Model** quanto **Solution** se comunicam com a interface **Persistence**,

pertencente ao módulo *persistence*, que trata os dados de entrada e, principalmente, persiste os dados de saída para as demais aplicações, sempre que observa alterações no estado do modelo discreto, e é particularizada segundo o tipo de arquivo a persistir (figura 7.3).

A persistência de dados mais utilizada é baseada em arquivos XML, sigla esta que é uma abreviação de *eXtensible Markup Language*, ou seja, linguagem de marcação estendida. A XML permite criar dados estruturados, baseada em um arquivo texto. Nesse sentido, a classe `PersistenceAsXML` foi constantemente modificada nesta Tese para contemplar todas as implementações realizadas, tornando possível a persistência de entrada e saída de dados relacionados a estas implementações.

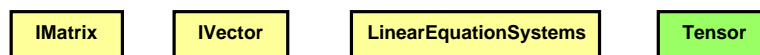


**Figura 7.3:** Diagrama de classe para `Persistence`

O processo de observação de alterações ocorre segundo o padrão de projeto *Observer-Observable*, que é um mecanismo de propagação de mudanças. Quando um objeto dito *observador* (que implementa a interface `java.util.Observer`) é criado, ele é inscrito na lista de observadores dos objetos ditos *observados* (que estendem a interface `java.util.Observable`). Quando alguma mudança ocorre no estado de um objeto observado, é disparado então o mecanismo de propagação de mudanças, que se encarrega de notificar os objetos observadores para se atualizarem. Isto garante a consistência e a comunicação entre o componente observador (`Persistence`) e os componentes observados (`Solution` e `Model`) (figura 7.2).

Um outro módulo muito importante e utilizado por todo o núcleo numérico do **INSANE** é o módulo *util*, onde ficam as classes de utilitários em geral. Nesta

Tese, um dos componentes de *util* chamado *LinearAlgebra* (figura 7.4) foi expandido e modificado. As classes modificadas foram `IMatrix`, `IVector` e `LinearEquationSystems` e a classe criada foi `Tensor`. As classes `IMatrix` e `IVector` são aquelas que representam uma matriz e um vetor, respectivamente. Elas possuem vários métodos para manipulações destas entidades matemáticas. A classe `LinearEquationSystems` é responsável pela solução do sistema de equações algébricas lineares e nela foi introduzido o Método de Cardan para a obtenção das raízes de uma equação do terceiro grau, auxiliando, por exemplo, no cálculo de tensões principais. A classe `Tensor` possui métodos que definem várias operações tensoriais. Sua criação foi motivada pelos tensores presentes nas formulações apresentadas na seção 5.4 e no capítulo 6.



**Figura 7.4:** Classes pertencentes à *LinearAlgebra*

Maiores informações sobre o núcleo numérico do **INSANE** podem ser encontradas nos trabalhos de Fonseca (2006) e Fonseca (2008).

A seguir, são descritas as implementações realizadas neste trabalho, por meio de interfaces e classes que foram criadas ou modificadas no **INSANE**.

### 7.3 Implementação das Soluções Lineares e Não-Lineares

Uma vez montada a equação do problema, fica a cargo da classe abstrata `Solution` (figura 7.5) resolvê-la. Esta classe estende a classe `Observable`, uma vez que é observada pela persistência. Seu principal método é denominado `execute()` e é ele quem desencadeia todo o processo de solução.

A classe `SteadyState` é a mais simples das subclasses de `Solution`, pois representa a solução de um problema linear estático. A classe abstrata `EquilibriumPath`

generaliza uma solução cujo objetivo é determinar uma trajetória de equilíbrio. Para o caso de uma análise não-linear estática, esta trajetória é geralmente representada em um gráfico fator de carga  $\times$  deslocamento. Em uma análise dinâmica, seja ela linear ou não, esta trajetória é obtida em função do tempo (gráfico deslocamento  $\times$  tempo). A solução não-linear estática é representada pela classe `StaticEquilibriumPath`, que implementa um processo incremental-iterativo e utiliza um dos métodos de controle estudados no capítulo 2 para solucionar o problema. Essas são as subclasses de `Solution`, que diretamente relacionam-se com este trabalho. A figura 7.5 mostra os objetos instanciados pelas classes `SteadyState` e `StaticEquilibriumPath`.

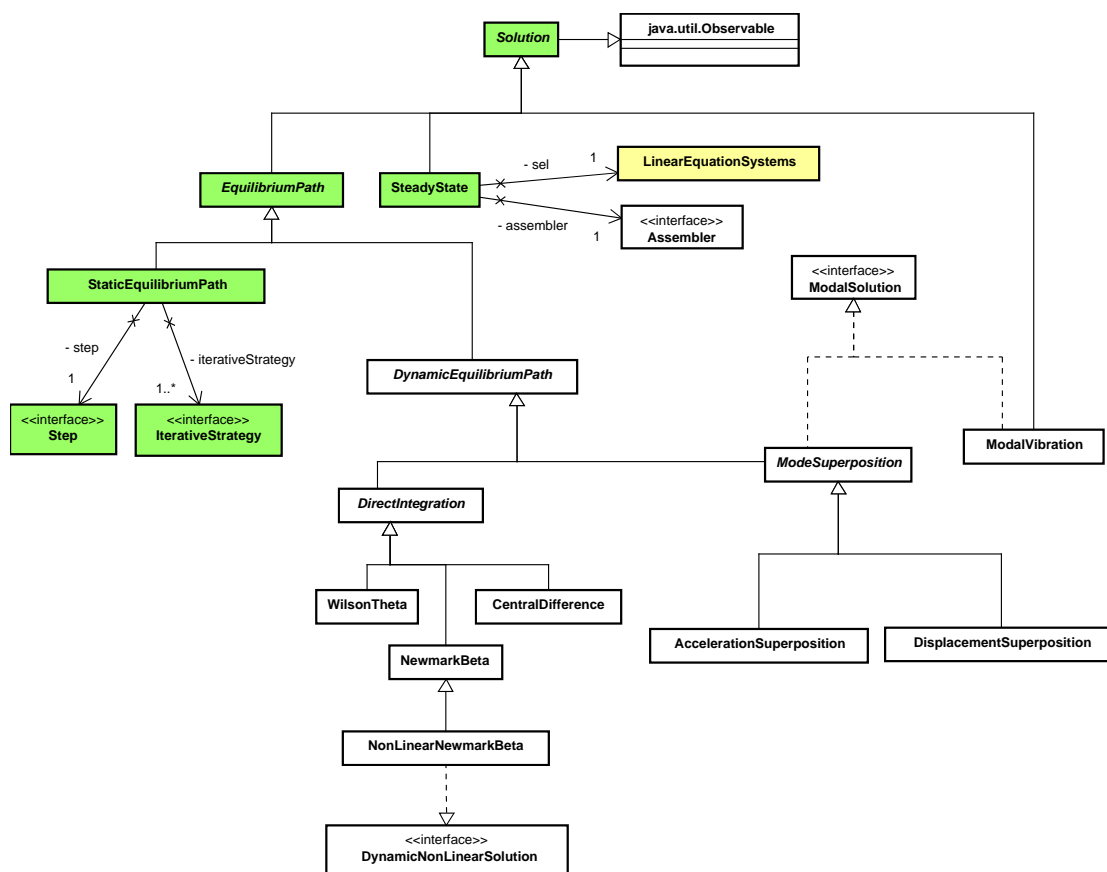


Figura 7.5: Diagrama da classe `Solution`

Um objeto do tipo `SteadyState` possui um objeto do tipo `LinearEquationSystems`, responsável pela solução do sistema de equações algébricas lineares, e

um objeto do tipo `Assembler`, capaz de informar as matrizes e vetores da equação a ser resolvida.

A classe `StaticEquilibriumPath` possui um objeto do tipo `Step`, responsável pelos métodos necessários à execução de um passo incremental da análise não-linear, e uma lista de objetos do tipo `IterativeStrategy`, informada pelo usuário, que define os métodos de controle para obtenção da trajetória de equilíbrio. Como mostra a figura 7.6, `Step` é uma interface implementada pelas classes `StandardNewtonRaphson` e `ModifiedNewtonRaphson` onde, respectivamente, os métodos de Newton Raphson Padrão e Newton Raphson Modificado são empregados para resolver os problemas incrementais-iterativos da análise não-linear estática. A classe `StandardNewtonRaphson` possui uma subclasse chamada `OrthogonalResidueStandardNewtonRaphson`, que contempla as diferenças do Método de Resíduo Ortogonal em relação aos demais métodos de controle, como visto no capítulo 2. Estas três classes têm todos os atributos necessários para obter a convergência no passo, destacando-se um objeto `Assembler`, capaz de informar as matrizes e vetores da equação a ser resolvida em cada iteração do passo; um objeto `LinearEquationSystems`, capaz de resolver o sistema de equações algébricas lineares de cada iteração; e um objeto `IterativeStrategy`, que representa a estratégia de iteração corrente. Elas estendem a classe `Observable`, pois são observadas por `StaticEquilibriumPath`.

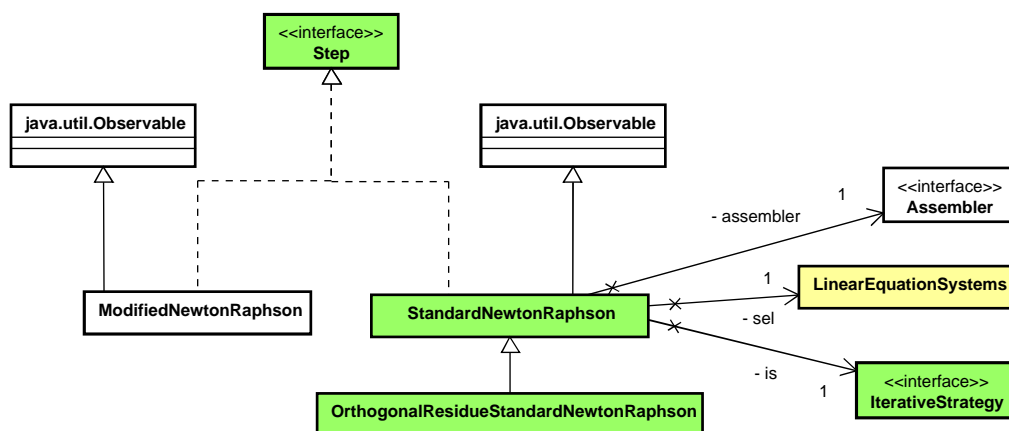
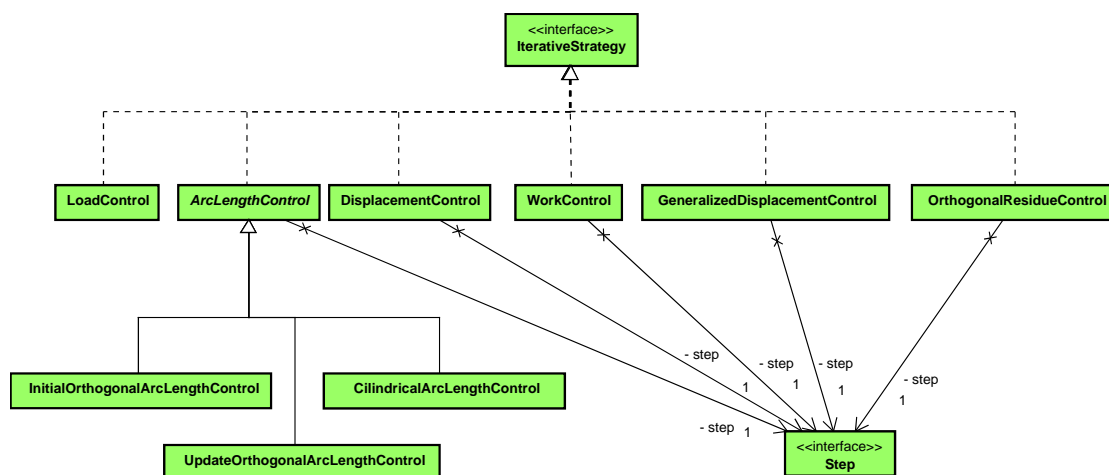


Figura 7.6: Diagrama de herança e instância da classe `StandardNewtonRaphson`

A interface `IterativeStrategy` (ver figura 7.7) é implementada pelas classes `LoadControl`, que implementa o Método de Controle de Carga, `DisplacementControl`, o Método de Controle Direto de Deslocamento, `WorkControl`, o Método de Controle por Trabalho, `OrthogonalResidueControl`, o Método de Controle de Resíduo Ortogonal, `GeneralizedDisplacementControl`, o Método de Controle de Deslocamento Generalizado, e pela classe abstrata `ArcLengthControl` que possui as subclasses `UpdateOrthogonalArcLengthControl`, que implementa o Método de Controle de Comprimento de Arco com Trajetória Ortogonal à Tangente da Iteração Anterior, `InitialOrthogonalArcLengthControl`, que implementa o Método de Controle de Comprimento de Arco com Trajetória Ortogonal à Tangente Inicial, e `CilindricalArcLengthControl`, o Método de Controle de Comprimento de Arco com Trajetória Cilíndrica.



**Figura 7.7:** Diagrama da interface `IterativeStrategy`

Para entender como essas classes se relacionam durante um processo de solução não-linear é necessário explicar a função dos seus principais métodos. Dessa forma, um objeto da classe `StaticEquilibriumPath` é instanciado e utilizado para invocar o método `execute()`, que é responsável pelo “loop” sobre o número de incrementos, informado pelo usuário. Dentro deste “loop”, é chamado o método `execute()` de `StandardNewtonRaphson`, que é responsável pelo “loop” sobre o número de iterações, também informado pelo usuário. A classe `StaticEquilibriumPath` possui uma

lista de objetos do tipo `IterativeStrategy`, informada pelo usuário, que define os métodos de controle de obtenção da trajetória de equilíbrio que serão utilizados. Cada classe que implementa `IterativeStrategy`, por sua vez, possui os métodos `getPredictor()` e `getCorrector()`, que calculam o fator de carga da primeira iteração e das demais iterações, respectivamente, conforme a figura 2.11 do capítulo 2. Então, a cada novo incremento, o método `execute()` de `StaticEquilibriumPath` atribui ao objeto da classe `StandardNewtonRaphson` o método de controle corrente e como este objeto possui um `IterativeStrategy`, pede a este que calcule o fator de carga para a iteração corrente. Exceto a classe `LoadControl`, todas as outras que caracterizam um método de controle possuem um objeto do tipo `Step`, pois precisam deste para saber informações sobre o passo anterior durante o cálculo do fator de carga.

A convergência é verificada pela classe `Convergence`, que pertence também ao módulo `solution`, mas que é isolada das demais classes. Um objeto `Convergence` é criado dentro do método `setConvergence()` da classe `StandardNewtonRaphson`. Por meio deste é possível calcular a convergência baseada em força, deslocamento ou ambos, conforme o usuário tenha informado, invocando o método `checkConvergence()` da classe `Convergence`.

Como a classe `StaticEquilibriumPath` possui um `Step`, invoca o método `getConvergence()` de `StandardNewtonRaphson` e obtém o resultado da convergência. Se, para um determinado passo incremental, após todas as iterações, a convergência não for obtida, o processo é interrompido. Se convergir, faz-se a atualização do modelo e o processo continua até que o número máximo de incrementos seja atingido.

Percebe-se que o algoritmo proposto por Yang e Shieh (1990), apresentado no capítulo 2, é aplicado utilizando-se a metodologia de programação orientada a objetos com classes que desempenham papéis bem definidos, isto é, uma classe que fica por conta dos passos incrementais, outra que refere-se a iterações e outra responsável pela aplicação do método de controle adotado calculando-se o fator de carga.

## 7.4 Implementação dos Contínuos Clássico e Generalizados

De acordo com as seções 3.6 e 4.3, as principais diferenças entre a implementação dos contínuos com Microexpansão e de Cosserat em relação àquela para um contínuo clássico são as definições de seus graus de liberdade, bem como de seus vetores de tensão e deformação generalizados. Além disso, são diferentes também as matrizes das funções de forma do elemento finito e as matrizes de incidência cinemática e estática.

Essas informações são incluídas no **INSANE** por meio do módulo *analysis-Model*, onde se agrupam os tipos de análise disponibilizados pelo programa. Neste módulo, existem classes que implementam os métodos da classe abstrata **AnalysisModel**. A figura 7.8 mostra a hierarquia dessas classes.

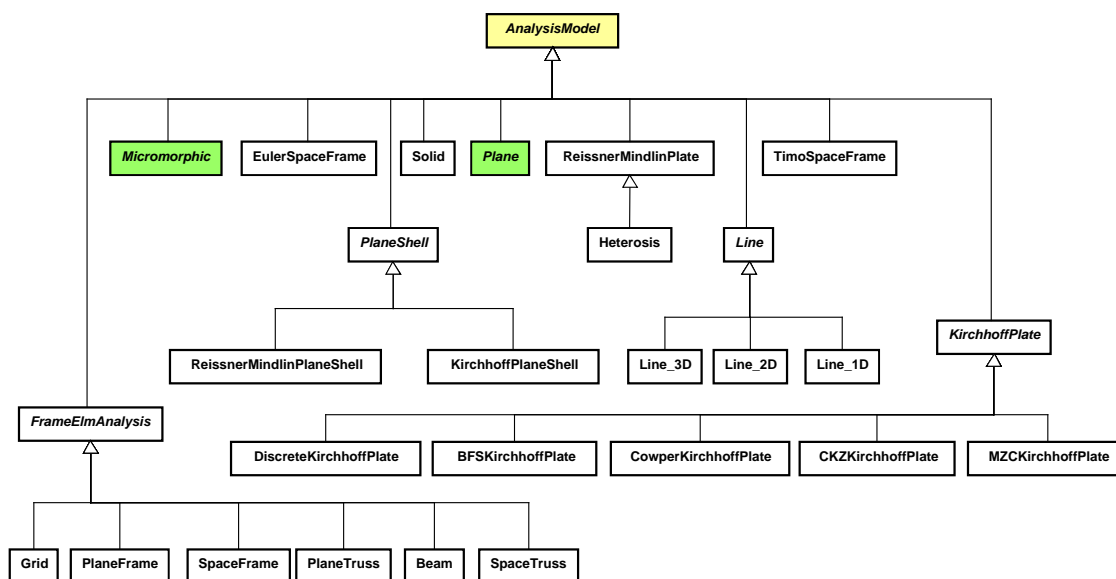


Figura 7.8: Diagrama de herança da classe **AnalysisModel**

No presente trabalho, foram implementadas no **INSANE** as análises de estados planos de tensão e de deformação. Inicialmente, isto foi feito para o contínuo



clássico por meio da classe abstrata `Plane` (figura 7.9) e de suas subclasses `PlaneStress`, que é responsável pela análise em estado plano de tensão e `PlaneStrain`, que é responsável pela análise em estado plano de deformação. Com a introdução dos contínuos micromórficos no **INSANE**, tornou-se necessário criar a classe abstrata `Micromorphic` (figura 7.9), onde são implementados os métodos comuns e declarados os métodos diferentes a qualquer tipo de análise com o contínuo micromórfico. O estado plano é uma das formas sob a qual este contínuo pode ser analisado. Para isto, criou-se a classe abstrata `MicromorphicPlane` com suas subclasses abstratas `PolarPlane` e `StretchPolarPlane` correspondendo, respectivamente, ao contínuo micropolar e com microexpansão, já que ambos são considerados tipos de contínuo micromórfico. Para estes contínuos, os estados planos de tensão (EPT) e de deformação (EPD) são descritos, respectivamente, pelas classes `PolarPlaneStress` e `PolarPlaneStrain`, para o contínuo micropolar e, `StretchPolarPlaneStress` e `StretchPolarPlaneStrain`, para o contínuo com microexpansão.

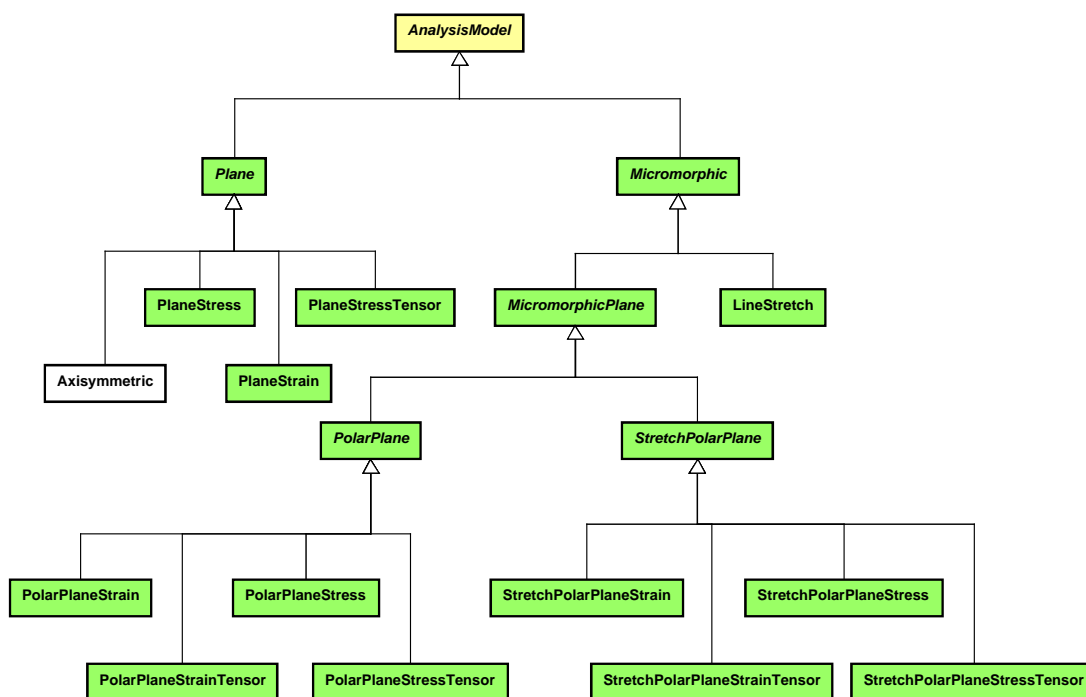


Figura 7.9: Diagrama de herança das classes `Plane` e `Micromorphic`

Essas classes estão preparadas para fornecer informações aos elementos finitos, desde que a aplicação em questão tenha sido formulada por relações matriciais. Uma vez que essas relações são tensoriais, como nos modelos de microplanos formulados nas seções 5.4, 6.3 e 6.4, é necessária a criação de novas classes semelhantes às aquelas apresentadas acima. Isto ocorre porque a implementação de uma modelagem constitutiva utilizando-se tensores dificulta a comunicação com modelos de análise que contenham grandezas energeticamente ativas e inativas. Algumas restrições para a obtenção destes modelos não conseguem ser diretamente impostas. É necessário trabalhar com todas as grandezas, energeticamente ativas ou não, da forma como prevê suas equações constitutivas, e impor as restrições de uma outra forma.

Assim, para o contínuo clássico, foi criada a classe `PlaneStressTensor` para o (EPT). Sua diferença em relação à classe `PlaneStress` é que esta considera apenas as grandezas energeticamente ativas durante a análise do problema, enquanto `PlaneStressTensor` considera também as grandezas que não são energeticamente ativas (neste caso, as tensões e deformações na direção  $z$ , quando o problema se encontra definido no plano  $xy$ ). A matriz constitutiva ( $[D^e]$ ) é escrita pelo método `getDualInternalVariablesOperator()` para o caso linear elástico, contendo as linhas e colunas de todas as grandezas envolvidas no problema. A matriz de incidência cinemática ( $[B]$ ) é implementada pelo método `getInternalVariablesOperator()` e a imposição da restrição para o EPT, por exemplo, é feita pelo método `modifyInternalVariablesOperator()`, que recebe como parâmetros a matriz  $[B]$  a ser modificada e um conjunto de constantes do material, capazes de modificar determinados elementos da matriz  $[B]$  conforme o modelo de análise que se deseja obter. Neste contexto, não foi necessário criar uma classe semelhante à `PlaneStressTensor` para o EPD, pois, no **INSANE**, a classe `PlaneStrain` já trabalha com grandezas energeticamente ativas ou não.

Analogamente, este raciocínio é feito para os contínuos micropolar e com microexpansão, surgindo as classes `PolarPlaneStressTensor` e `StretchPolarPlaneStressTensor` para EPT e, `PolarPlaneStrainTensor` e `StretchPolarPlaneStrainTensor` para EPD. Aqui, novas classes para o EPD são criadas pela presença de algumas microcurvaturas, que exigem o mesmo tratamento mencionado acima para as tensões fora do plano.

Adicionalmente, uma análise unidimensional foi implementada para o contínuo com microexpansão por meio da classe `LineStretch`, onde somente as deformações relacionadas com a direção axial são consideradas. Se esta for, por exemplo, a direção  $x$  tem-se:  $\gamma_{xx}$ ,  $\varphi$  e  $\varphi_{,x}$ .

Existem vários métodos implementados nas classes apresentadas acima, entre os que merecem destaque estão:

***getNumberOfDOF()*** e ***getDOFLabels()*** - retornam, respectivamente, o número e o nome dos graus de liberdade;

***getNumberOfInternalVariables()*** e ***getInternalVariablesLabels()*** - retornam, respectivamente, o número e o nome das variáveis internas, neste caso, de todos os tipos de deformação envolvidos na análise;

***getNumberOfDualInternalVariables()*** e ***getDualInternalVariablesLabels()*** - retornam, respectivamente, o número e o nome das variáveis internas duais, neste caso, de todos os tipos de tensão envolvidos na análise;

***getStateVariablesOperator()*** - monta a matriz das funções de forma do elemento finito (matriz  $[N]$ );

***getDualInternalVariablesOperator()*** - monta a matriz constitutiva elástica (matriz  $[D^e]$ );

***getInternalVariablesOperator()*** - monta a matriz que relaciona deslocamentos e deformações envolvidos na análise (matriz  $[B]$ );

***modifyInternalVariablesOperator()*** - além de inserir as restrições necessárias

na matriz  $[B]$  para o modelo de análise que se deseja obter, como explicado anteriormente, para o caso de implementação tensorial, este método também possibilita que constantes do material participem da matriz  $[B]$ , como são necessários para o contínuo micropolar e com microexpansão segundo mostram as seções 3.6 e 4.3.

Na classe abstrata `Micromorphic` foram criados alguns métodos que, por enquanto, só se aplicam a contínuos do tipo micropolar e com microexpansão, entre eles destacam-se:

***getNumberStressOrStrain()*** - retorna o número de deformações de Cosserat (relacionadas às translações e distorções) ou de tensões envolvidas na análise;

***getNumberCoupleStressOrCurvatures()*** - retorna o número de microcurvaturas ou de tensões-momento envolvidas na análise;

***groupVectorMicropolar()*** - agrupa as deformações de Cosserat e microcurvaturas ou as tensões e tensões-momento em somente um vetor;

***groupVectorMicrostretch()*** - agrupa as deformações de Cosserat, microcurvaturas, microexpansão e seus gradientes ou as tensões, tensões-momento, microtensão e microforças em somente um vetor;

***groupIMatrixMicropolar()*** - agrupa as matrizes constitutivas devidas às deformações de Cosserat e microcurvaturas ou às tensões e tensões-momento em somente uma matriz de acordo com o modelo de análise;

***groupIMatrixMicrostretch()*** - agrupa as matrizes constitutivas devidas às deformações de Cosserat, microcurvaturas, microexpansão e seus gradientes ou às tensões, tensões-momento, microtensão e microforças em somente uma matriz de acordo com o modelo de análise.

Considere a relação matricial abaixo, que corresponde ao caso mais geral, do contínuo com microexpansão em análise sólida (tridimensional):

$$\left( \begin{array}{c} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{zy} \\ \sigma_{zz} \\ \hline \mu_{xx}/L_t \\ \mu_{xy}/L_f \\ \mu_{xz}/L_f \\ \mu_{yx}/L_f \\ \mu_{yy}/L_t \\ \mu_{yz}/L_f \\ \mu_{zx}/L_f \\ \mu_{zy}/L_f \\ \mu_{zz}/L_t \\ \hline \psi \\ \lambda_x/L_a \\ \lambda_y/L_a \\ \lambda_z/L_a \end{array} \right) = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} & & & \\ & \underline{\underline{\mathbf{E}}}_{\gamma} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{E}}}_{\sigma\varphi} \\ & & & \\ & & & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \hline & & & \\ & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{E}}}_{\kappa} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ & & & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \hline & \underline{\underline{\mathbf{E}}}_{\psi\gamma} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & E_{\varphi} \\ & & & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \hline & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{E}}}_{\varphi g} \end{array} \right] \left( \begin{array}{c} \gamma_{xx} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} \\ \gamma_{yy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{zy} \\ \gamma_{zz} \\ \hline \kappa_{xx}L_t \\ \kappa_{xy}L_f \\ \kappa_{xz}L_f \\ \kappa_{yx}L_f \\ \kappa_{yy}L_t \\ \kappa_{yz}L_f \\ \kappa_{zx}L_f \\ \kappa_{zy}L_f \\ \kappa_{zz}L_t \\ \hline \varphi \\ \varphi_{,x}L_a \\ \varphi_{,y}L_a \\ \varphi_{,z}L_a \end{array} \right)$$

Os métodos *groupVectorMicrostretch()* e *groupIMatrixMicrostretch()* possibilitam escrever a matriz constitutiva e os vetores de deformação e tensão generalizados desta relação matricial. Os tensores que aparecem ilustrados nesta equação são, por exemplo, aqueles definidos nas equações em 6.135 para os módulos constitutivos tangentes.

## 7.5 Implementação de Elasticidade para os Contínuos Generalizados

Com os modelos de análise acima implementados, deseja-se resolver problemas lineares e não-lineares com os contínuos micropolar e com microexpansão no **INSANE**. Para isto, torna-se necessário a expansão do módulo `MaterialMedia`, que refere-se a propriedades do meio que está sendo analisado. Este módulo está dividido em quatro grupos, os quais correspondem às classes abstratas `ConstitutiveModel`, `Degeneration` e `Material`, e à classe `MaterialPoint`. Todos são explicados no decorrer deste capítulo, no momento adequado.

No **INSANE**, os diferentes materiais são representados pelas subclasses da classe abstrata `Material`. A figura 7.10 mostra a hierarquia dessas classes. Elas são as responsáveis por fornecer informações sobre as propriedades do material, sejam elas secantes, tangentes ou de descarregamento. Possuem como atributos o nome do material (seu *label*) e os valores do tipo `java.util.HashMap`, que armazena as variáveis necessárias para caracterizar o material num formato chave-valor, ou seja, uma *String* denota, por exemplo, um parâmetro do material, que está relacionada, por meio do `HashMap`, ao seu valor, descrito por um objeto de uma classe qualquer.

A classe `MicromorphicMaterial` (figura 7.10) foi criada para descrever materiais de contínuos micromórficos. Sua subclasse `PolarLinearElasticIsotropic` foi implementada para materiais elásticos, lineares e isotrópicos descritos pelo contínuo de Cosserat. Assim, as constantes do material definidas na seção 3.4.3 estão presentes nesta classe. Para o contínuo com microexpansão, foi implementada a classe `StretchPolarLinearElasticIsotropic`, que herda de `PolarLinearElasticIsotropic` todos os seus atributos e métodos, pois, conforme comentado na seção 4.2.3, este contínuo utiliza os parâmetros elásticos do contínuo micropolar, além de definir seus próprios parâmetros.



As classes `LinearMaterial` e `Steel` presentes na figura 7.10, foram criadas durante uma refatoração do código do **INSANE**, com a função de melhor organizar os diferentes tipos de materiais. A classe `LinearMaterial` refere-se aos materiais lineares isotrópicos, ortotrópicos ou anisotrópicos e a classe `Steel` possui subclasses que são utilizadas mais frequentemente quando o material em questão é o aço.

## 7.6 Implementação de Plasticidade Associada

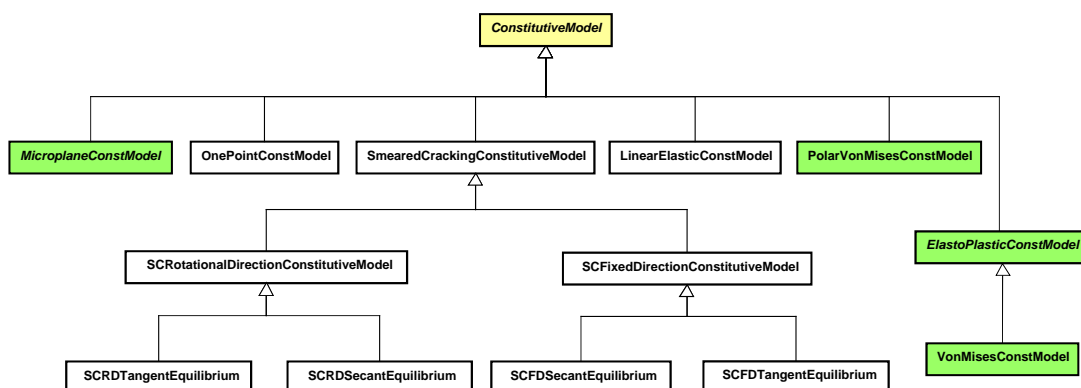
Neste trabalho, foi inserida no **INSANE** a teoria da plasticidade associada para o contínuo clássico, implementando-se a classe `ElastoPlasticMaterial` (figura 7.10), subclasse de `Material`, com algoritmos genéricos para a subsequente introdução de qualquer critério de escoamento. Foi implementada até o momento a classe `VonMises`, como subclasse de `ElastoPlasticMaterial`, representando um material regido pelo critério de escoamento de von Mises.

A implementação de plasticidade associada para o contínuo de Cosserat, segundo a teoria da seção 3.5, teve início com a criação da classe `PolarVonMises` (figura 7.10), subclasse de `MicromorphicMaterial`, onde foram implementadas as particularidades do contínuo de Cosserat para este tipo de material.

Ainda no módulo `materialMedia`, cada subclasse da classe abstrata `ConstitutiveModel` refere-se a um tipo de modelo constitutivo que mapeia o comportamento físico do material. A figura 7.11 mostra a hierarquia dessas classes.

Neste contexto, foi inserida a classe abstrata `ElastoPlasticConstModel`, representando os modelos constitutivos elastoplásticos, com sua subclasse `VonMisesConstModel`, onde é implementado o critério de escoamento de von Mises para o contínuo clássico. Também foi inserida a classe `PolarVonMisesConstModel`, subclasse de `ConstitutiveModel`, que refere-se a um modelo constitutivo elastoplástico baseado no critério de escoamento de von Mises para o contínuo de Cosserat, conforme formulação apresentada na seção 3.5.





**Figura 7.11:** Diagrama de herança da classe `ConstitutiveModel`

A implementação da plasticidade associada para o contínuo de Cosserat está intimamente relacionada com os métodos da classe `PolarVonMisesConstModel`. Então, descrevem-se abaixo seus métodos mais relevantes:

***init()*** - verifica se o modelo de análise e o material informados pelo usuário constituem uma combinação válida com o modelo constitutivo e inicializa as variáveis do modelo constitutivo elastoplástico;

***yieldFunction()*** - por meio de um objeto da classe `PolarVonMises`, obtém a tensão de escoamento inicial e o módulo plástico para este material. Com estes parâmetros, calcula-se o valor da função de escoamento para um dado estado de tensão e variáveis internas;

***yieldGrad()*** - avalia o gradiente da superfície de escoamento em relação às componentes de tensão e variáveis internas no espaço de tensão;

***mountDualInternalVariableVector()*** - avalia o estado de tensão num ponto de integração para um dado estado de deformação. Através deste método, o algoritmo de retorno apresentado na seção 3.5.2 do capítulo 3 é implementado. Então, um preditor elástico é calculado, onde a matriz constitutiva elástica é fornecida pelo modelo de análise do problema avaliado. Aqui o método *yieldFunction()* é invocado e verifica-se se o estado de tensão corrente permanece sobre a superfície de escoamento. Se houver necessidade de uma correção plástica, o método *yieldGrad()* é invocado e o incremento do multiplicador plástico é calculado, podendo-se obter a correção do

estado de tensão pela equação 3.125 do capítulo 3;

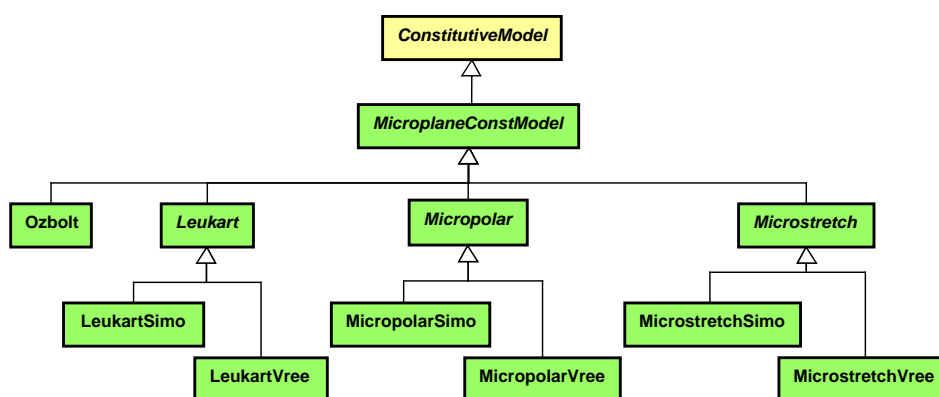
*mountCt()* - calcula a matriz constitutiva tangente elastoplástica. Verifica se o passo incremental está no regime plástico, ou seja, se o multiplicador plástico é positivo. Se estiver, o método calcula o módulo elastoplástico tangente consistente de acordo com a equação 3.133 do capítulo 3;

*update()* - atualiza o histórico do modelo elastoplástico. As deformações plásticas e as variáveis internas iterativas são atribuídas às variáveis incrementais após o modelo ter alcançado um estado de equilíbrio.

## 7.7 Implementação de Microplanos para Contínuos Clássico e Generalizados

O módulo `materialMedia` contém interfaces e classes necessárias para representar da forma mais geral possível a constituição física dos elementos finitos e é neste módulo que foram feitas as principais expansões para a implementação dos modelos constitutivos de microplanos.

A expansão mais evidente baseia-se na necessidade de se criar a classe abstrata `MicroplaneConstModel` (figura 7.12), subclasse de `ConstitutiveModel`. As subclasses de `MicroplaneConstModel` definem um tipo de modelo constitutivo de microplanos, seja ele para o contínuo clássico, micropolar ou com microexpansão.



**Figura 7.12:** Diagrama de herança da classe `MicroplaneConstModel`

Uma outra expansão ocorre em *Degeneration* (figura 7.13), classe abstrata que representa a degeneração na geometria do elemento. As degenerações são compostas por uma lista de pontos materiais e são representadas por objetos do tipo *Representation*.

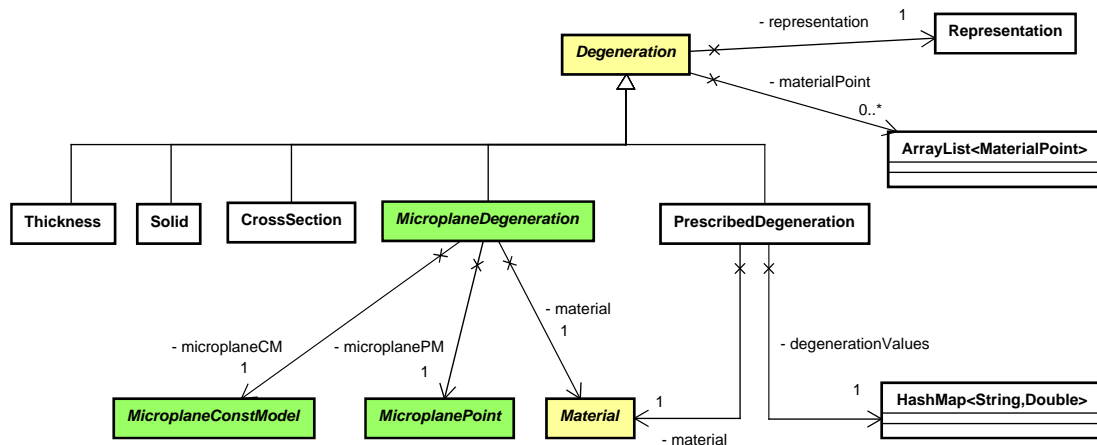


Figura 7.13: Diagrama da classe abstrata *Degeneration*

Antes de falar sobre a expansão propriamente dita de *Degeneration*, é importante entender os conceitos de *representação* e de *pontos materiais*.

Os pontos materiais no *INSANE* são representados pela classe *MaterialPoint* (figura 7.14) e tem o papel de representar um ponto no meio material.

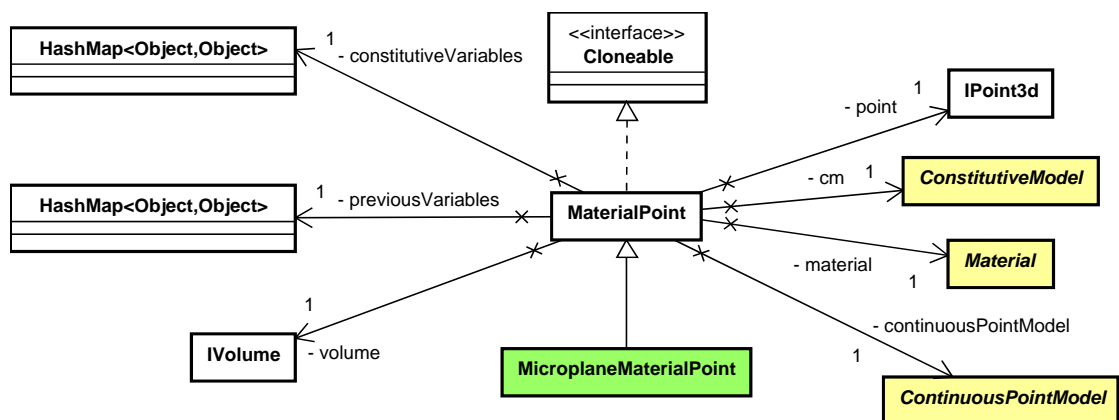
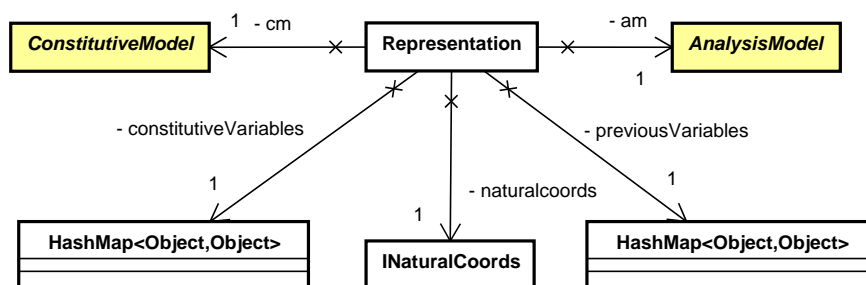


Figura 7.14: Diagrama de herança e instância da classe *MaterialPoint*

Um `MaterialPoint` tem como propriedades um `label`, um objeto `IPoint3d`, que o representa como um ponto no espaço, um objeto `IVolume`, que representa sua propriedade geométrica, um objeto `Material`, um objeto `ConstitutiveModel` e um objeto `ContinuousPointModel`, que pode ser entendido como um `AnalysisModel` para um `MaterialPoint` e é pertencente ao módulo `continuousPointModel`. Em um ponto material pertencente a uma degeneração, as subclasses de `ContinuousPointModel` são aquelas que informam os operadores que transformam valores da degeneração em valores pontuais. `MaterialPoint` possui ainda duas coleções do tipo `HashMap` que armazenam dois tipos de variáveis dependentes do seu modelo constitutivo: as variáveis constitutivas atuais e as variáveis constitutivas prévias. Estas duas coleções são capazes de informar, durante a análise, o estado do ponto material no momento corrente e no passo anterior. Um objeto `MaterialPoint` implementa a interface `java.lang.Cloneable`, possuindo a propriedade de ser clonado de forma seletiva. Esta propriedade permite a cópia de somente alguns atributos de um objeto `MaterialPoint`, pela implementação do método `clone()`.

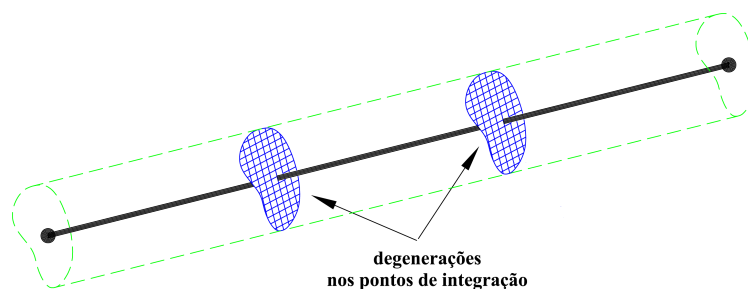
Um objeto `Representation` (figura 7.15), para representar uma degeneração, possui um modelo constitutivo, um modelo de análise, um objeto `INaturalCoords`, que identifica suas coordenadas naturais, e duas coleções do tipo `HashMap`, que armazenam suas variáveis constitutivas atuais e prévias. Estes atributos dizem respeito à degeneração como um todo, representando o comportamento do conjunto de pontos materiais da referida degeneração. A representação cumpre ainda o papel de ponto de integração, possuindo os atributos necessários à integração numérica.



**Figura 7.15:** Diagrama de instância da classe `Representation`

Voltando à figura 7.13, o tipo mais simples de degeneração é a **Prescribed-Degeneration**, em que as propriedades geométricas são prescritas pelo usuário e nenhum ponto material necessita ser definido, pois a sua representação se encarrega de calcular suas tensões e seus módulos constitutivos. Ela possui um objeto do tipo **Material** e um conjunto de valores que definem esta degeneração armazenados num **HashMap**.

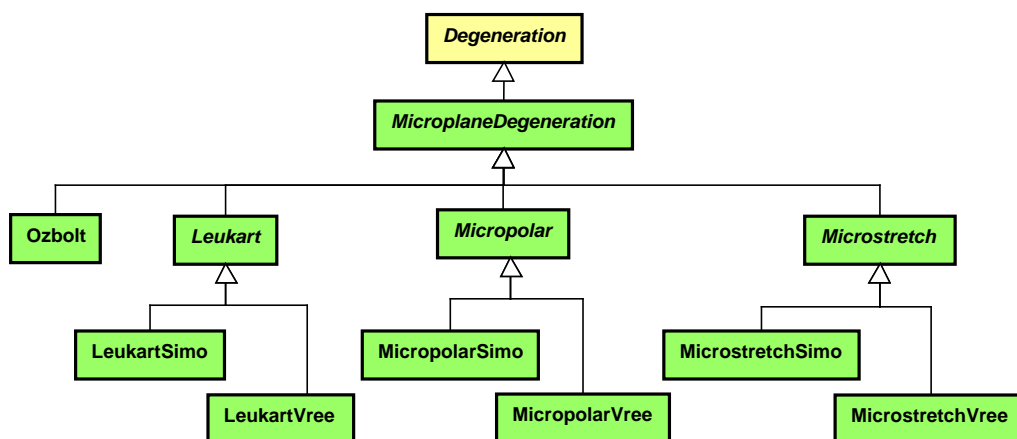
Outro exemplo de **Degeneration** é a classe **CrossSection**, que representa a degeneração causada pela discretização em elementos finitos unidimensionais, na qual simplifica-se uma geometria tridimensional em apenas uma linha, como mostra a figura 7.16. Perdem-se as informações sobre a seção transversal (as duas dimensões que foram simplificadas), principalmente se ela for de geometria qualquer e composta. A classe **CrossSection** contém uma lista de pontos materiais, fornecida pelo usuário, que descreve de maneira aproximada a geometria e a composição da seção, permitindo que o modelo constitutivo dessa degeneração seja aproximado pelo somatório da contribuição de cada um dos pontos. Para cada ponto de integração do elemento há uma degeneração, o que permite aproximar o modelo constitutivo ao longo do elemento.



**Figura 7.16:** Degeneração da geometria de um elemento finito unidimensional (Fonseca, 2006)

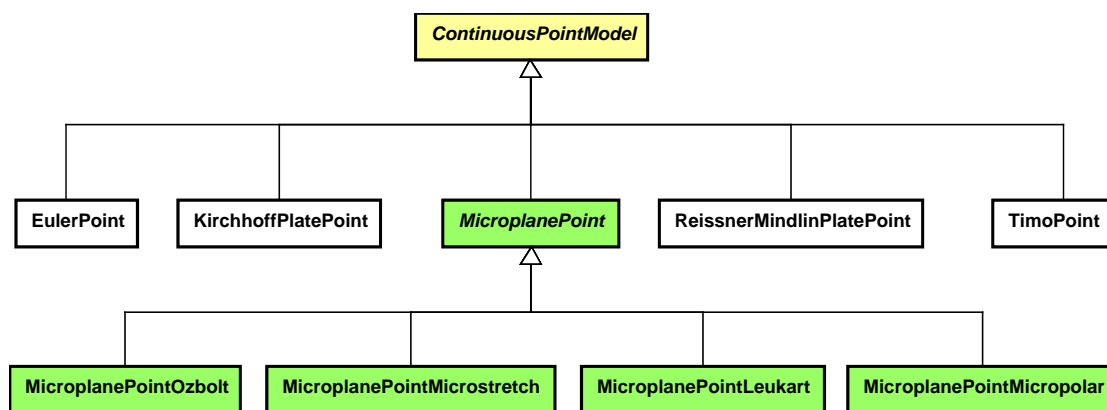
A classe abstrata **MicroplaneDegeneration** (figuras 7.13 e 7.17), subclasse de **Degeneration**, foi concebida nesta Tese por analogia à classe **CrossSection**, ou seja, no lugar de uma degeneração composta por seus pontos materiais, cada degeneração possui um conjunto de microplanos, cada um deles comportando-se como

um ponto material, permitindo que as grandezas nas degenerações sejam obtidas pelo somatório da contribuição de cada um dos microplanos. Dessa forma, surgiu a classe `MicroplaneMaterialPoint` (figura 7.14), que herda de `MaterialPoint` seus atributos e métodos. Para o cálculo das deformações no microplano, é fundamental que se conheçam as componentes de seu vetor normal. Assim, cada microplano possui as coordenadas  $n_1$ ,  $n_2$  e  $n_3$ , e o peso  $\omega$ , os quais variam de acordo com as tabelas 5.1, 5.2 e 5.3 do capítulo 5. Na classe `MicroplaneMaterialPoint`, o método `clone()` é sobrescrito para que somente os atributos necessários aos modelos de microplanos sejam clonados.



**Figura 7.17:** Diagrama da classe abstrata `MicroplaneDegeneration`

Como dito anteriormente, cada `MaterialPoint` possui um objeto `Material` e um objeto `ContinuousPointModel`. Então, torna-se necessário a criação das classes abstratas `MicroplaneMaterial` (figura 7.10), subclasse de `Material`, para fornecer as propriedades do material de um microplano e `MicroplanePoint`, subclasse de `ContinuousPointModel` (figura 7.18), que representa o modelo de análise de um microplano. Então, conforme a figura 7.13, cada `MicroplaneDegeneration` possui um modelo constitutivo, um modelo de análise e um material capazes de descrever suas relações constitutivas.



**Figura 7.18:** Diagrama de herança da classe `ContinuousPointModel`

Em suma, as classes que definem um modelo de microplanos são `MicroplaneConstModel`, `MicroplaneDegeneration`, `MicroplaneMaterial`, `MicroplaneMaterialPoint` e `MicroplanePoint`. Uma vez que existem vários modelos de microplanos que podem ser implementados, com contínuos diferentes, por relações matriciais ou tensoriais, com deformações equivalentes ou não, todas essas classes são estendidas para contemplar um determinado modelo de microplanos (ver tabela 7.1), exceto a classe `MicroplaneMaterialPoint`, pois a descrição espacial de um microplano independe de qualquer informação adicional e o seu método `clone()` acessa os atributos do microplano construído e atribui aos microplanos clonados.

Na tabela 7.1 são apresentadas as subclasses de `MicroplaneConstModel` e `MicroplaneDegeneration`. Cada uma dessas classes estão relacionadas com os seguintes modelos de microplanos: `Ozbolt` (seção 5.3), `LeuKart` (seção 5.4), para contínuos micropolares (seção 6.3) e contínuos com microexpansão (seção 6.4). As classes que representam os três últimos modelos são subdivididas de acordo com a definição da deformação equivalente que adotam, neste caso, de Simo e Ju (1987) ou de Vree et al. (1995).

Nota-se na tabela 7.1 a presença das classes `Ozbolt` e `Leukart`, que definem os parâmetros do material relacionados ao seu respectivo modelo de microplanos, por isso são subclasses de `MicroplaneMaterial`.

**Tabela 7.1:** Classes Implementadas no **INSANE**

| Superclasses                            | Subclasses                             |
|---|--|
| MicroplaneConstModel<br>(figura 7.12)   | MicroplaneConstModelOzbolt             |
|   | MicroplaneConstModelLeukart            |
|   | MicroplaneConstModelLeukartSimo        |
|   | MicroplaneConstModelLeukartVree        |
|   | MicroplaneConstModelMicropolar         |
|   | MicroplaneConstModelMicropolarSimo     |
|   | MicroplaneConstModelMicropolarVree     |
|   | MicroplaneConstModelMicrostretch       |
|   | MicroplaneConstModelMicrostretchSimo   |
|   | MicroplaneConstModelMicrostretchVree   |
| MicroplaneDegeneration<br>(figura 7.17) | MicroplaneDegenerationOzbolt           |
|   | MicroplaneDegenerationLeukart          |
|   | MicroplaneDegenerationLeukartSimo      |
|   | MicroplaneDegenerationLeukartVree      |
|   | MicroplaneDegenerationMicropolar       |
|   | MicroplaneDegenerationMicropolarSimo   |
|   | MicroplaneDegenerationMicropolarVree   |
|   | MicroplaneDegenerationMicrostretch     |
|   | MicroplaneDegenerationMicrostretchSimo |
|   | MicroplaneDegenerationMicrostretchVree |
| MicroplanePoint<br>(figura 7.18)        | MicroplanePointOzbolt                  |
|   | MicroplanePointLeukart                 |
|   | MicroplanePointMicropolar              |
|   | MicroplanePointMicrostretch            |
| MicroplaneMaterial<br>figura 7.10       | Ozbolt                                 |
|   | Leukart                                |
| MicromorphicMaterial<br>figura 7.10     | PolarMicroplaneDamage                  |
|   | StretchPolarMicroplaneDamage           |



As classes `PolarMicroplaneDamage` e `StretchPolarMicroplaneDamage`, na tabela 7.1, poderiam ser subclasses de `MicroplaneMaterial` e `MicromorphicMaterial` ao mesmo tempo, pois possuem parâmetros do material relacionados ao tipo de contínuo micromórfico e também à teoria de microplanos com dano, porém, como em Java não existe herança múltipla, escolheu-se que essas classes estenderiam a classe `MicromorphicMaterial`, definindo os parâmetros do material necessários à formulação de microplanos.

As deformações nos microplanos são calculadas pela degeneração por meio do método `getMPInternalVariables()`, recebendo como parâmetros as deformações na degeneração e o *label* do microplano (representado pelo objeto da classe `MicroplaneMaterialPoint`), para o qual as deformações serão calculadas. Este método é implementado pela classe `MicroplaneDegenerationOzbolt` e pelas subclasses de `MicroplaneDegenerationLeukart`, `MicroplaneDegenerationMicropolar` e `MicroplaneDegenerationMicrostretch`, pois estas subclasses utilizam o método `getMPInternalVariables()` para calcular também as deformações equivalentes em cada microplano, de acordo com Simo e Ju (1987) ou de Vree et al. (1995). Neste método, são invocados os métodos das classes `MicroplanePointOzbolt`, `MicroplanePointLeukart`, `MicroplanePointMicropolar` e `MicroplanePointMicrostretch`, que calculam os operadores que transformam as deformações nas degenerações em deformações nos microplanos. Estas classes definem o modelo de análise no nível dos microplanos.

Para se obter as tensões e os módulos constitutivos tangentes e secantes macroscópicos (nas degenerações), é necessário efetuar uma integração numérica sobre todos os microplanos em torno de uma esfera unitária centrada na degeneração (aqui representada por um ponto de Gauss). Assim, os métodos `mountCt()`,

*mountCs()* e *mountDualInternalVariableVector()* das classes `MicroplaneDegenerationOzbolt`, `MicroplaneDegenerationLeukart`, `MicroplaneDegenerationMicropolar` e `MicroplaneDegenerationMicrostretch` percorrem sua lista de microplanos (presentes na superfície da esfera), pedindo a eles que calculem a sua parcela de contribuição para as grandezas relacionadas acima, realizando um somatório para a obtenção dessas grandezas na degeneração.

Na classe `MicroplaneDegenerationOzbolt`, o método *discontinuityFunction()* calcula a função de descontinuidade apresentada na seção 5.3.1 e nas classes `MicroplaneDegenerationLeukart`, `MicroplaneDegenerationMicropolar` e `MicroplaneDegenerationMicrostretch`, o método *damageMultiplier()* calcula as variáveis históricas de dano dadas pelas equações em 5.63 e 6.60.

Abaixo são definidos os principais métodos de qualquer modelo constitutivo de microplanos:

***mountCs()*** e ***mountCt()*** - calculam, respectivamente, os módulos constitutivos secante e tangente, recebendo como parâmetros o modelo de análise, o material e os mapas com as variáveis constitutivas e prévias dos microplanos. Uma vez que as deformações equivalentes participam do cálculo dos módulos constitutivos tangentes para os modelos de microplanos do tipo `MicroplaneConstModelLeukart`, `MicroplaneConstModelMicropolar` e `MicroplaneConstModelMicrostretch`, os métodos responsáveis por calcular esses módulos ficam em suas subclasses, conforme a deformação equivalente adotada seja a de Simo e Ju (1987) ou de Vree et al. (1995);

***mountDualInternalVariableVector()*** - calcula as tensões nos microplanos, recebendo como parâmetros o modelo de análise, o material e os mapas com as variáveis constitutivas e prévias dos microplanos. Para a classe `MicroplaneConstModelOzbolt`, este método invoca os métodos privados *checkVolLoading()*, *checkDevLoading()*, *checkCompMLoading()* e *checkCompLLoading()*, responsáveis por calcular as tensões e os módulos tangentes relacionados, respectivamente, às leis volumétrica, desviadora, tangencial na direção M e tangencial na direção L, de acordo

com a seção 5.3. Para a classe `MicroplaneConstModelLeukart`, esse método invoca os métodos privados `checkDamageLoading()`, `checkVolLoading()` e `checkDevLoading()`, responsáveis por calcular, respectivamente, a variável de dano conforme a equação 5.64 e as tensões volumétrica e desviadora nos microplanos. Para a classe `MicroplaneConstModelMicropolar`, esse método invoca o método público `checkDamageLoading()`, que calcula as variáveis de dano nos microplanos, e os métodos privados `getStress()` e `getCoupleStress()`, que calculam, respectivamente, as parcelas de tensões e tensões-momento nos microplanos. Para a classe `MicroplaneConstModel-Microstretch`, esse método invoca o método público `checkDamageLoading()`, que calcula as variáveis de dano nos microplanos, e os métodos privados `getStress()`, `getCoupleStress()`, `getMicrostress()` e `getMicroforce()`, que calculam, respectivamente, as parcelas de tensões, tensões-momento, microtensão e microforças nos microplanos;

***init()*** - o método `init()` de cada elemento finito inicializa, por meio do método `initDegenerations()`, as variáveis relativas à integração numérica, que são armazenadas nas representações de suas degenerações. Este método atribui à representação o mesmo modelo de análise do elemento do qual faz parte. Cada elemento solicita, então, que suas degenerações inicializem suas variáveis constitutivas e prévias, armazenadas em objetos `HashMap`, as quais solicitam a todos seus microplanos que também se inicializem. Cada microplano consulta em seu modelo constitutivo o número de variáveis constitutivas e prévias através dos métodos `getNumberOfVariables()` e `getNumberOfPreviousVariables()` e, a partir dessa informação, cria seus objetos `HashMap` relativos às variáveis constitutivas e prévias. Estes mapas, ainda com objetos nulos, são passados pelo microplano como parâmetros no método `init()` de seu modelo constitutivo, juntamente com seu modelo de análise e material, para que possam ser inicializados. É o objeto modelo constitutivo que inicializa os valores dos mapas e verifica se o modelo de análise e material são compatíveis com o tipo de modelo constitutivo que ele representa;

***update()*** - terminada a solução de um passo do processo incremental-iterativo,

cada elemento finito solicita que cada uma das degenerações de sua lista atualize as suas variáveis. No caso de uma degeneração `MicroplaneDegeneration`, é solicitado à representação que armazene suas variáveis constitutivas atuais em seu mapa de variáveis prévias. Em seguida, é solicitado a todos os microplanos que também atualizem suas variáveis. O microplano invoca o método `update()` de seu modelo constitutivo, passando como parâmetro seus dois mapas. O modelo constitutivo armazena os valores do mapa de variáveis constitutivas do microplano no mapa de variáveis prévias. Desta forma, as variáveis constitutivas correntes foram atualizadas, sendo armazenadas como variáveis prévias, processo esse necessário à obtenção da convergência no próximo passo do processo incremental-iterativo.

# Capítulo 8

## Simulações Numéricas

Este capítulo apresenta as simulações numéricas realizadas no **INSANE**. As simulações são agrupadas de acordo com os modelos constitutivos, conforme mostrado na tabela 8.1.

**Tabela 8.1:** Agrupamento das simulações de acordo com os modelos constitutivos

| Modelos   | Simulações                        | Item  |
|---|-----------------------------------|-------|
| Elasticidade para<br>Contínuos Generalizados                          | Viga Sob Flexão Pura              | 8.1.1 |
|   | Barra Tracionada                  | 8.1.2 |
| Plasticidade<br>para o Contínuo<br>de Cosserat                        | Tração, Compressão e Cisalhamento | 8.2.1 |
|   | Flexão em Três Pontos             | 8.2.2 |
|   | Cisalhamento em Quatro Pontos     | 8.2.3 |
|   | Camada Infinita                   | 8.2.4 |
|   | Banda de Cisalhamento             | 8.2.5 |
| Microplanos com Relaxação<br>Cinemática para o Contínuo<br>Clássico   | Tração, Compressão e Cisalhamento | 8.3.1 |
|   | Flexão em Três Pontos             | 8.3.2 |
|   | Cisalhamento em Quatro Pontos     | 8.3.3 |
| Microplanos com Deformação<br>Equivalente para o Contínuo<br>Clássico | Tração, Compressão e Cisalhamento | 8.4.1 |
|   | Flexão em Três Pontos             | 8.4.2 |
|   | Cisalhamento em Quatro Pontos     | 8.4.3 |
| Microplanos para o<br>Contínuo de Cosserat                            | Tração, Compressão e Cisalhamento | 8.5.1 |
|   | Flexão em Três Pontos             | 8.5.2 |
| Microplanos para o<br>Contínuo<br>com Microexpansão                   | Tração, Compressão e Cisalhamento | 8.6.1 |
|   | Flexão em Três Pontos             | 8.6.2 |
|   | Tração com Entalhe Assimétrico    | 8.6.3 |

Todos os problemas aqui analisados utilizam os processos de solução de equações não-lineares de equilíbrio, também fruto desta Tese. As implementações relativas aos métodos incrementais-iterativos já foram utilizadas com sucesso por outros colaboradores do **INSANE**, com aplicação a problemas geometricamente não-lineares (Fonseca, 2008) e fisicamente não-lineares (Fonseca, 2006), bem como por outros trabalhos já concluídos e também em desenvolvimento no projeto **INSANE**. Por isso, esses métodos são aqui utilizados sem demonstração da correteza das implementações, uma vez que estas já foram exaustivamente testadas.

Nas simulações numéricas, apresentadas a seguir, foram utilizados 21 pontos de integração (microplanos) com simetrias ortogonais sobre a superfície da semi-esfera de raio unitário (tabela 5.2). As deformações equivalentes obtidas segundo de Vree et al. (1995) foram adotadas em todas as simulações que utilizam modelos constitutivos de microplanos e deformações equivalentes. Isto foi feito porque este modo de definir as deformações equivalentes se mostra mais adequado para representar o comportamento de meios parcialmente frágeis (Leukart e Ramm, 2006; Peerlings et al., 1998).

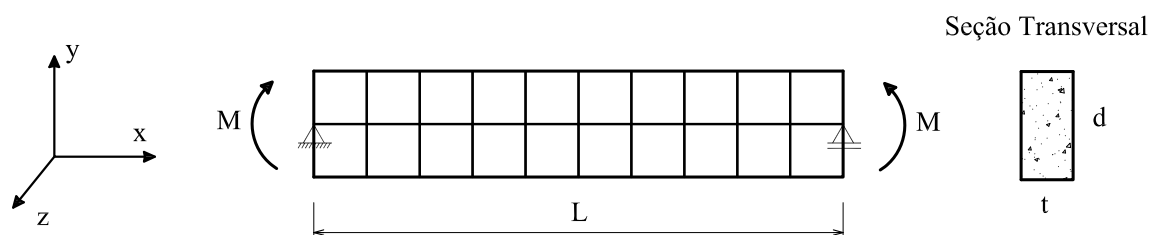
A seguir, são apresentados os resultados obtidos para todas as simulações realizadas e somente na seção 8.7 estes resultados são discutidos.

## 8.1 Exemplos de Elasticidade para Contínuos Generalizados

São apresentados, a seguir, os exemplos lineares de uma viga biapoiada sob flexão pura para o contínuo de Cosserat e de uma barra tracionada composta por dois materiais para o contínuo com microexpansão. Estes exemplos estão resolvidos analiticamente no apêndice A. Em todas as simulações desta seção, utilizam-se: implementação da análise linear para solucionar o problema; materiais lineares, elásticos e isotrópicos, conforme a descrição de cada contínuo, e seções transversais prescritas para cada elemento finito.

### 8.1.1 Viga Biapoçada sob Flexão Pura

A figura 8.1 mostra a discretização por elementos finitos quadrilaterais de 8 nós, em estado plano de tensões, com ordem de integração  $3 \times 3$ , de uma viga biapoçada sob flexão pura, onde as microrrotações são liberadas para todos os pontos da malha.



**Figura 8.1:** Discretização por elementos finitos de uma viga biapoçada sob flexão pura

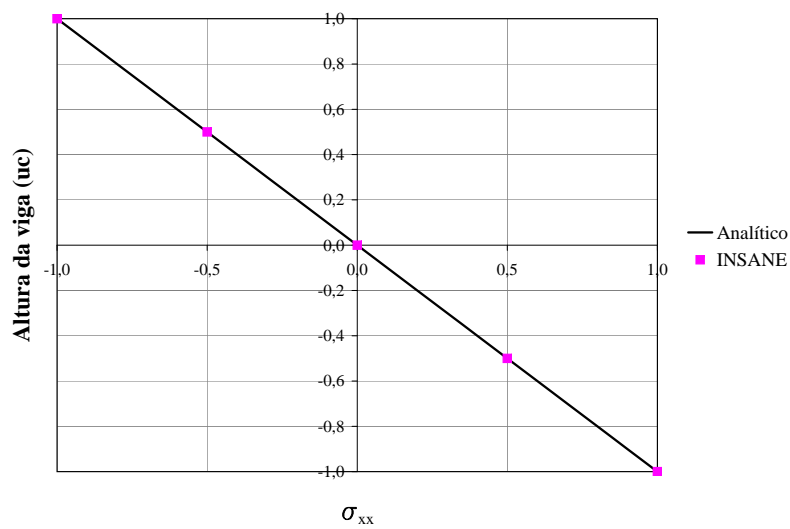
Foram adotados os parâmetros mostrados na tabela 8.2, em unidades de força ( $uf$ ) e unidades de comprimento ( $uc$ ) compatíveis.

Para comparar os resultados numéricos aos analíticos apresentados no apêndice A, adotou-se a altura da viga  $d = 2 uc$  e  $r = \frac{2d_f}{d} = 1$ , onde  $2d_f$  representa a dimensão do volume de controle. Para este valor de  $r$ , a solução obtida está a mais próxima possível da resposta micropolar.

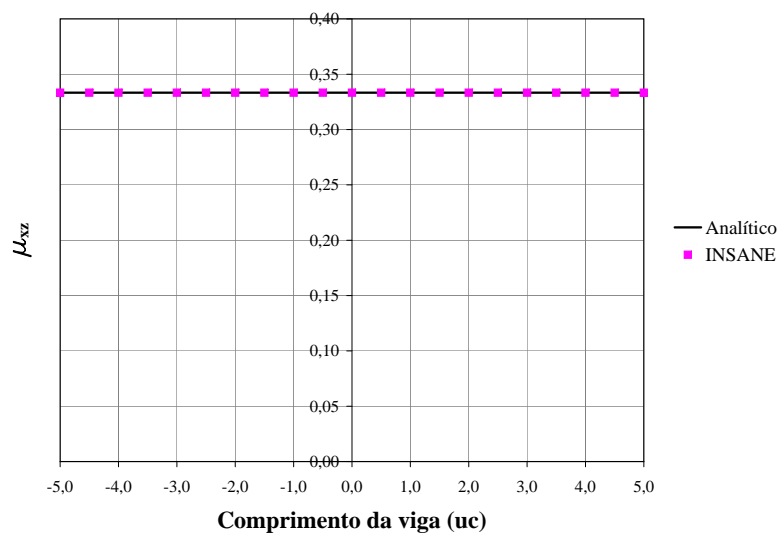
**Tabela 8.2:** Parâmetros da análise para o exemplo de flexão pura

|   |                   |
|---|-------------------|
| Módulo de elasticidade longitudinal (E)                             | = $1 uf/uc^2$     |
| Coefficiente de Poisson ( $\nu$ )                                   | = 0,2             |
| Momento aplicado nas extremidades (M)                               | = $2 uf.uc$       |
| Espessura da viga (t)   | = $1,5 uc$        |
| Comprimento da viga (L)   | = $10 uc$         |
| Comprimento característico à flexão ( $L_f$ )                       | = $\sqrt{0,4} uc$ |
| Altura da viga (d)  | = $2 uc$          |
| Razão entre a dimensão do volume de controle e a altura da viga (r) | = $1 uc$          |
| Módulo de cisalhamento rotacional ( $\alpha$ )                      | = $1/4,8 uf/uc^2$ |

Os resultados obtidos para os campos de tensões e deslocamentos são apresentados nos gráficos das figuras 8.2 a 8.6. Em seguida, são apresentadas a configuração deformada, com deslocamentos reduzidos de 10 vezes, e as distribuições de tensões e deslocamentos da viga sob flexão pura, correspondentes aos resultados numéricos (figuras 8.7 a 8.11).



**Figura 8.2:** Tensões normais  $\sigma_{xx}$  em qualquer seção da viga



**Figura 8.3:** Tensões-momento  $\mu_{xz}$  em qualquer ponto



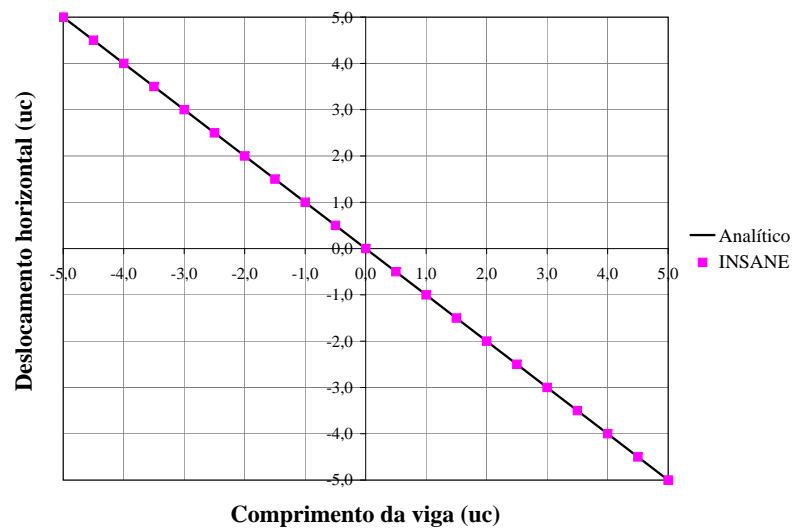


Figura 8.4: Deslocamentos  $u_x$  na borda superior da viga

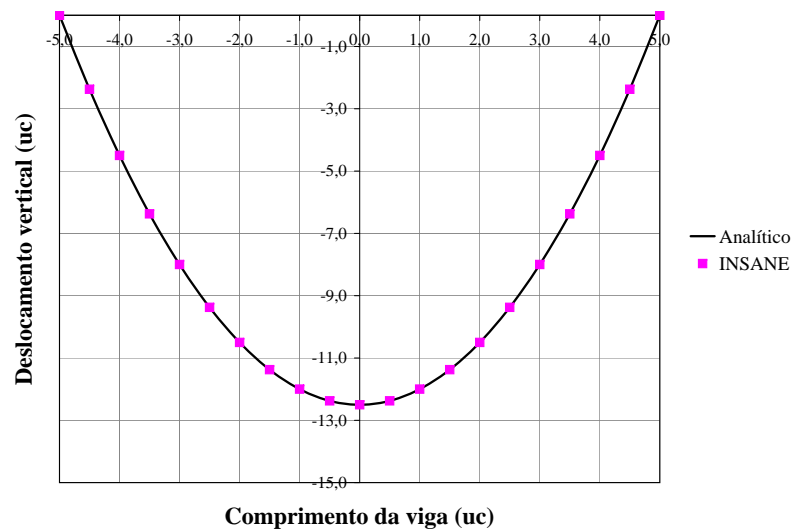


Figura 8.5: Deslocamentos  $u_y$  na linha neutra

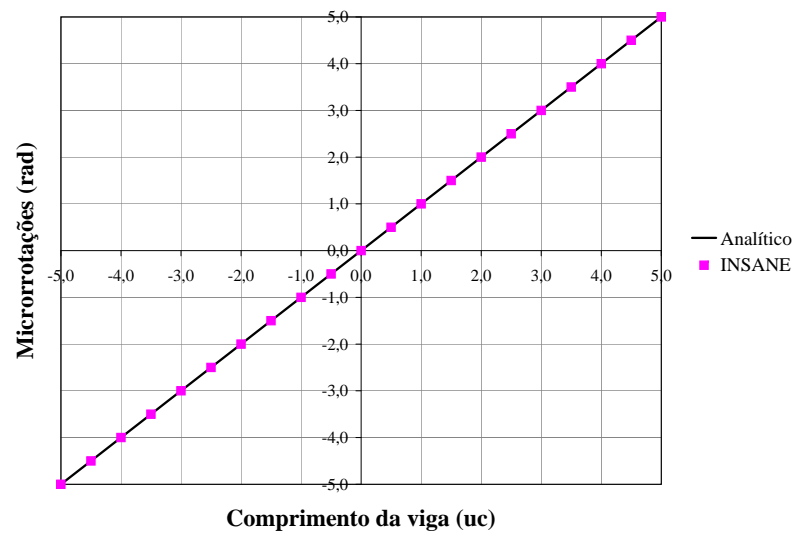


Figura 8.6: Microrrotações  $\phi_z$  ao longo do comprimento da viga

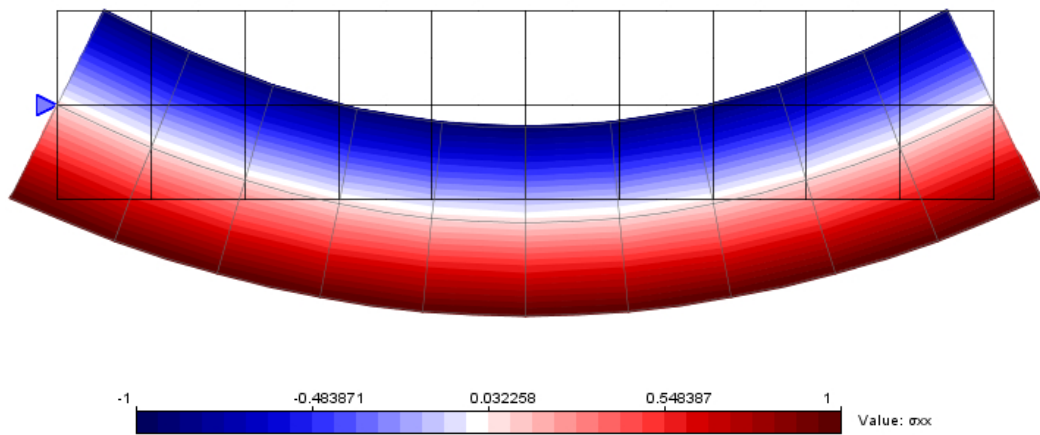


Figura 8.7: Distribuição de tensões normais  $\sigma_{xx}$  ao longo da viga sob flexão pura

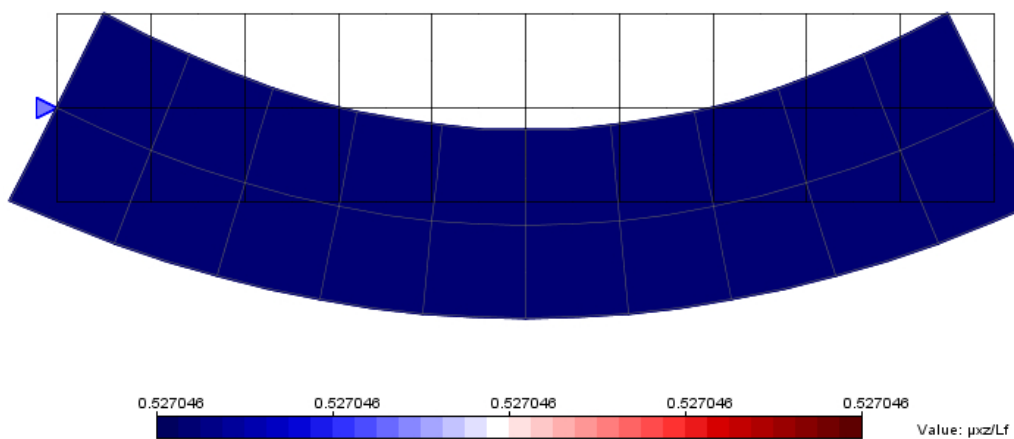
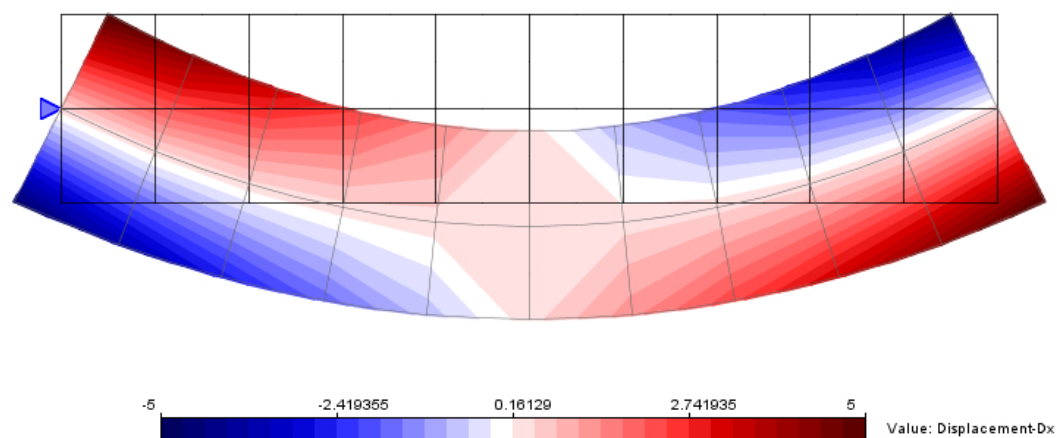
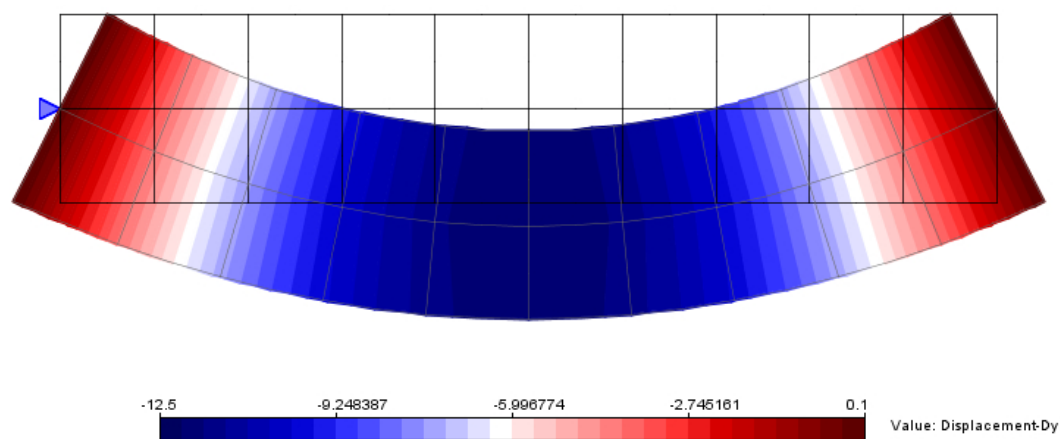


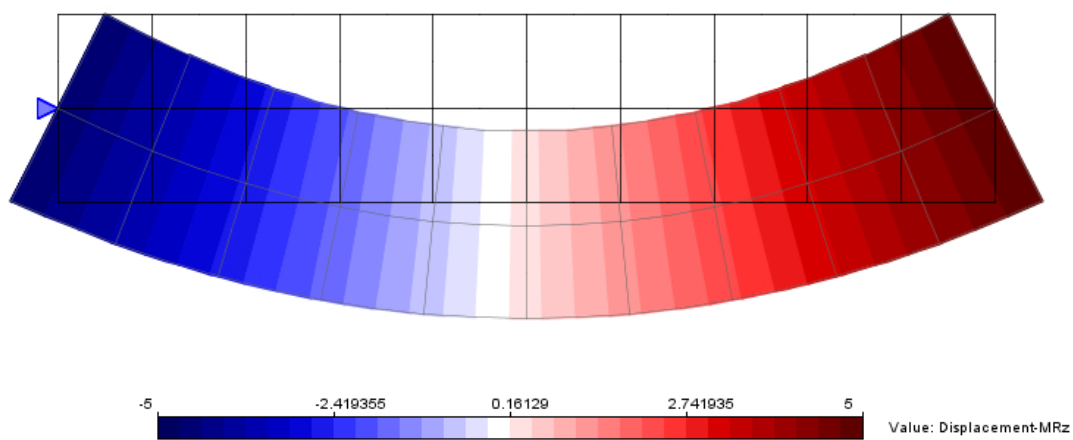
Figura 8.8: Distribuição de  $\mu_{xz}/L_f$  ao longo da viga sob flexão pura



**Figura 8.9:** Variação dos deslocamentos  $u_x$  da viga sob flexão pura



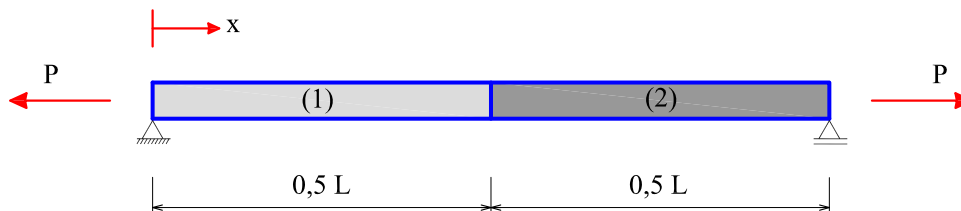
**Figura 8.10:** Variação dos deslocamentos  $u_y$  da viga sob flexão pura



**Figura 8.11:** Variação das microrrotações  $\phi_z$  da viga sob flexão pura

### 8.1.2 Barra Tracionada Composta por Dois Materiais

Uma barra tracionada (figura 8.12), composta por dois materiais, é analisada utilizando-se o contínuo com microexpansão.



**Figura 8.12:** Barra tracionada constituída por dois materiais

A simulação numérica é realizada com 40 elementos finitos Lagrangeanos unidimensionais de três nós utilizando-se o modelo de análise de barra para o contínuo com microexpansão. Admite-se que metade da barra é composta pelo material (1) e a outra metade pelo material (2).

Os parâmetros adotados para o problema são mostrados na tabela 8.3, em unidades compatíveis.

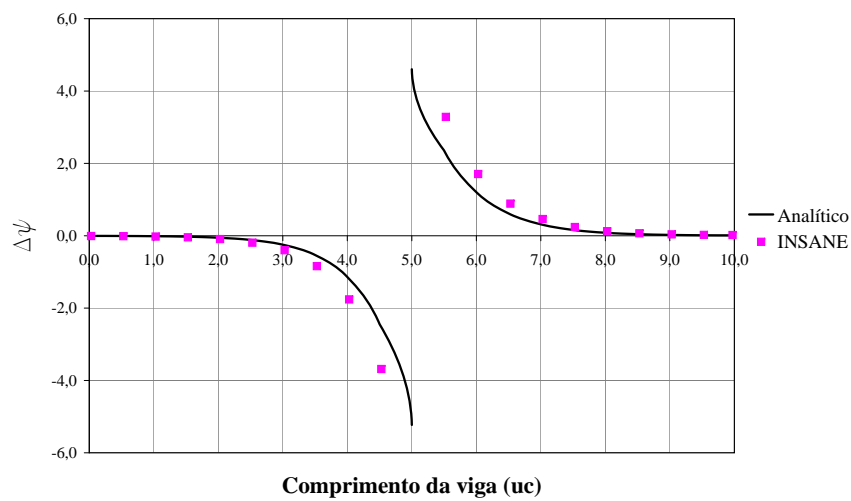
**Tabela 8.3:** Parâmetros da análise para o exemplo da barra tracionada composta por dois materiais

|   |                                   |
|---|-----------------------------------|
| Módulo de elast. longitudinal do material (1) ( $E^{(1)}$ ) | = $0,75 \text{ uf}/\text{uc}^2$   |
| Módulo de elast. longitudinal do material (2) ( $E^{(2)}$ ) | = $1 \text{ uf}/\text{uc}^2$      |
| Coefficiente de Poisson ( $\nu$ )                           | = $0,2$                           |
| Parâmetro C   | = $-0,556 \text{ uf}/\text{uc}^2$ |
| Parâmetro H   | = $1,667 \text{ uf}/\text{uc}^2$  |
| Comprimento da barra (L)                                    | = $10 \text{ uc}$                 |
| Comprimento característico à tração ( $L_a$ )               | = $1 \text{ uc}$                  |
| Área da barra (A)   | = $1 \text{ uc}^2$                |
| Carga aplicada (P)  | = $15 \text{ uf}$                 |

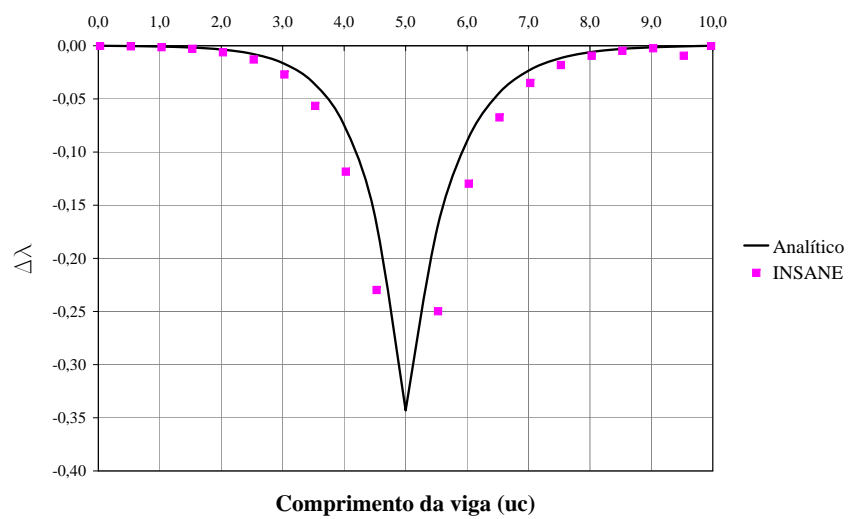
Para comparar os resultados numéricos aos analíticos apresentados no apêndice A, adotou-se a razão  $r = L_a/L = 0,1$ . A solução analítica foi desenvolvida para qualquer valor de  $\xi$ , o qual define qual região da barra é composta pelo material 1

ou 2. Neste exemplo numérico e naquele calculado utilizando-se a solução analítica (ver apêndice A) adotou-se  $\xi = 0,5$ .

Os resultados numéricos obtidos para as grandezas adimensionais  $\Delta\psi = 100\frac{\psi}{\sigma_{xx}}$  e  $\Delta\lambda = 100\frac{\lambda_x}{\sigma_{xx}L}$  (ver equações A.72 e A.73 do apêndice A) são apresentados nos gráficos das figuras 8.13 e 8.14.

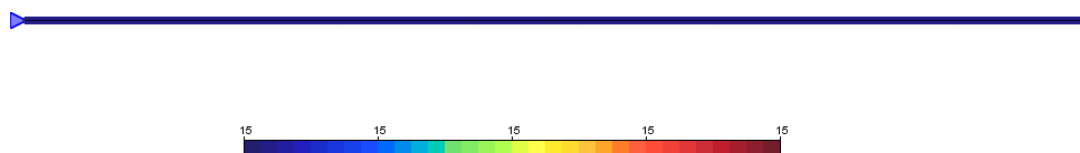


**Figura 8.13:**  $\Delta\psi \times$  Comprimento da viga

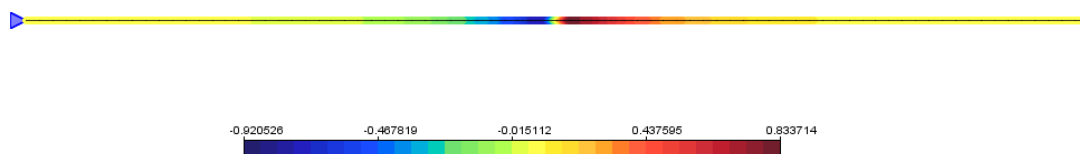


**Figura 8.14:**  $\Delta\lambda \times$  Comprimento da viga

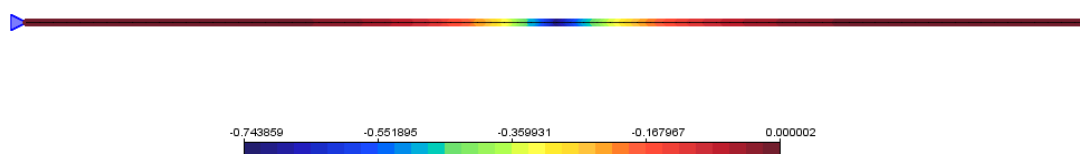
As distribuições de tensões normais, microtensões e microforças ao longo da barra estão mostradas nas figuras 8.15, 8.16 e 8.17



**Figura 8.15:** Distribuição de tensões normais na barra tracionada



**Figura 8.16:** Distribuição de microtensões na barra tracionada



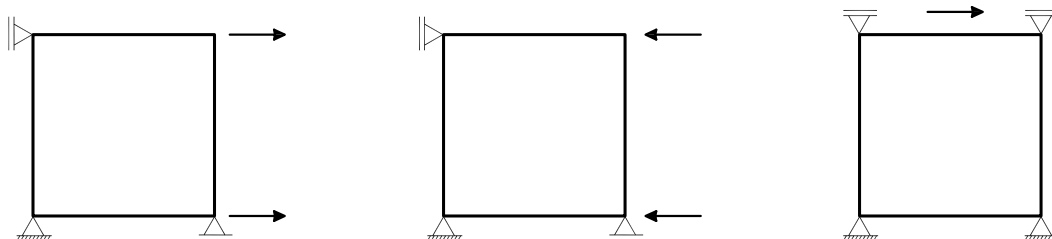
**Figura 8.17:** Distribuição de microforças na barra tracionada

## 8.2 Exemplos de Plasticidade para o Contínuo de Cosserat

Aqui, são apresentados os exemplos de tração, compressão e cisalhamento puros, flexão em três pontos, cisalhamento em quatro pontos, camada infinita e compressão com banda de cisalhamento, cujos materiais são descritos pelo modelo de plasticidade associada, segundo o critério de escoamento de von Mises, utilizando-se o contínuo de Cosserat.

### 8.2.1 Tração, Compressão e Cisalhamento Puros

A figura 8.18 mostra as configurações geométricas, de carga e condições de vínculo para as simulações numéricas de tração, compressão e cisalhamento puros. A peça analisada possui 1000 *mm* de comprimento, 1000 *mm* de largura e 1000 *mm* de espessura.



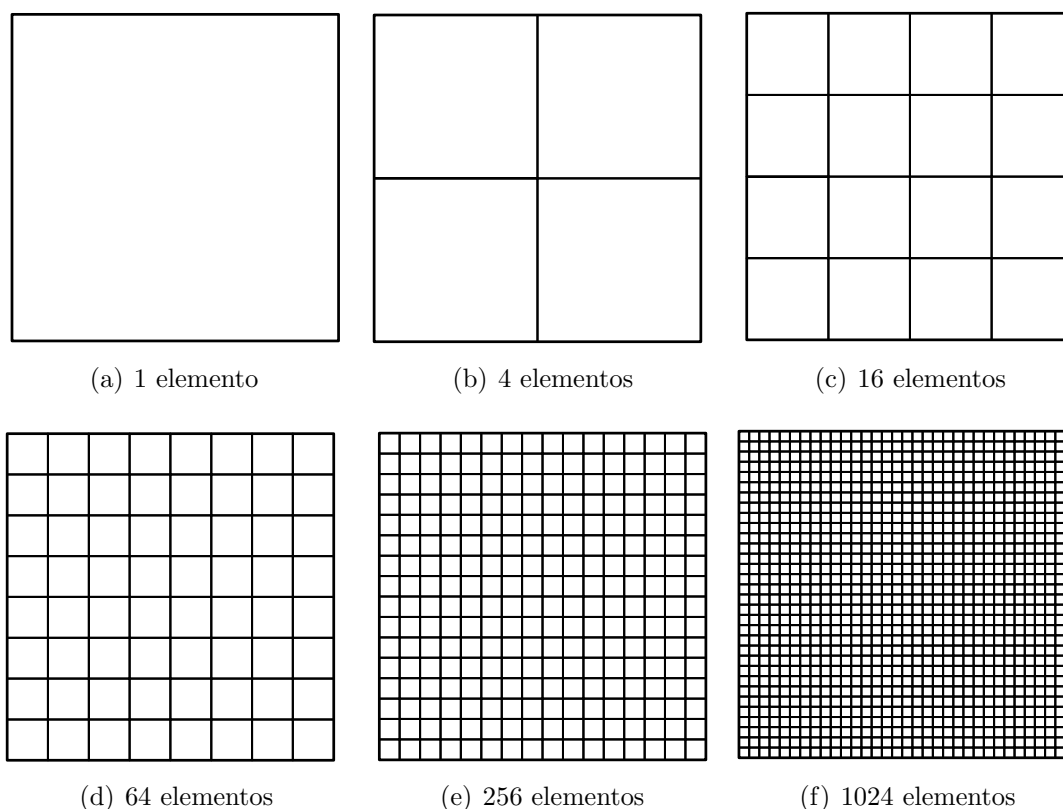
**Figura 8.18:** Configurações geométricas, de carga e condições de vínculo para as simulações de tração, compressão e cisalhamento puros

**Tabela 8.4:** Parâmetros do material para as simulações utilizando-se o modelo de plasticidade com Cosserat

|   |             |
|---|-------------|
| Módulo de elasticidade longitudinal ( $E$ )     | = 30000 MPa |
| Coefficiente de Poisson ( $\nu$ )               | = 0,2       |
| Módulo plástico ( $h$ )                         | = -290 MPa  |
| Tensão de escoamento inicial ( $\bar{\sigma}$ ) | = 3,35 MPa  |
| Comprimento característico à flexão ( $L_f$ )   | = 50 mm     |
| Módulo de cisalhamento rotacional ( $\alpha$ )  | = 6250 MPa  |

Na tabela 8.4 estão os parâmetros do material. Estes parâmetros foram calibrados com os utilizados por Leukart e Ramm (2006) no modelo de microplanos com contínuo clássico. A calibração foi feita por meio do exemplo de tração pura, igualando-se a energia de fratura de ambos os materiais.

As malhas utilizadas para cada um dos exemplos são mostradas na figura 8.19.



**Figura 8.19:** Discretizações utilizadas para as simulações de tração, compressão e cisalhamento puros

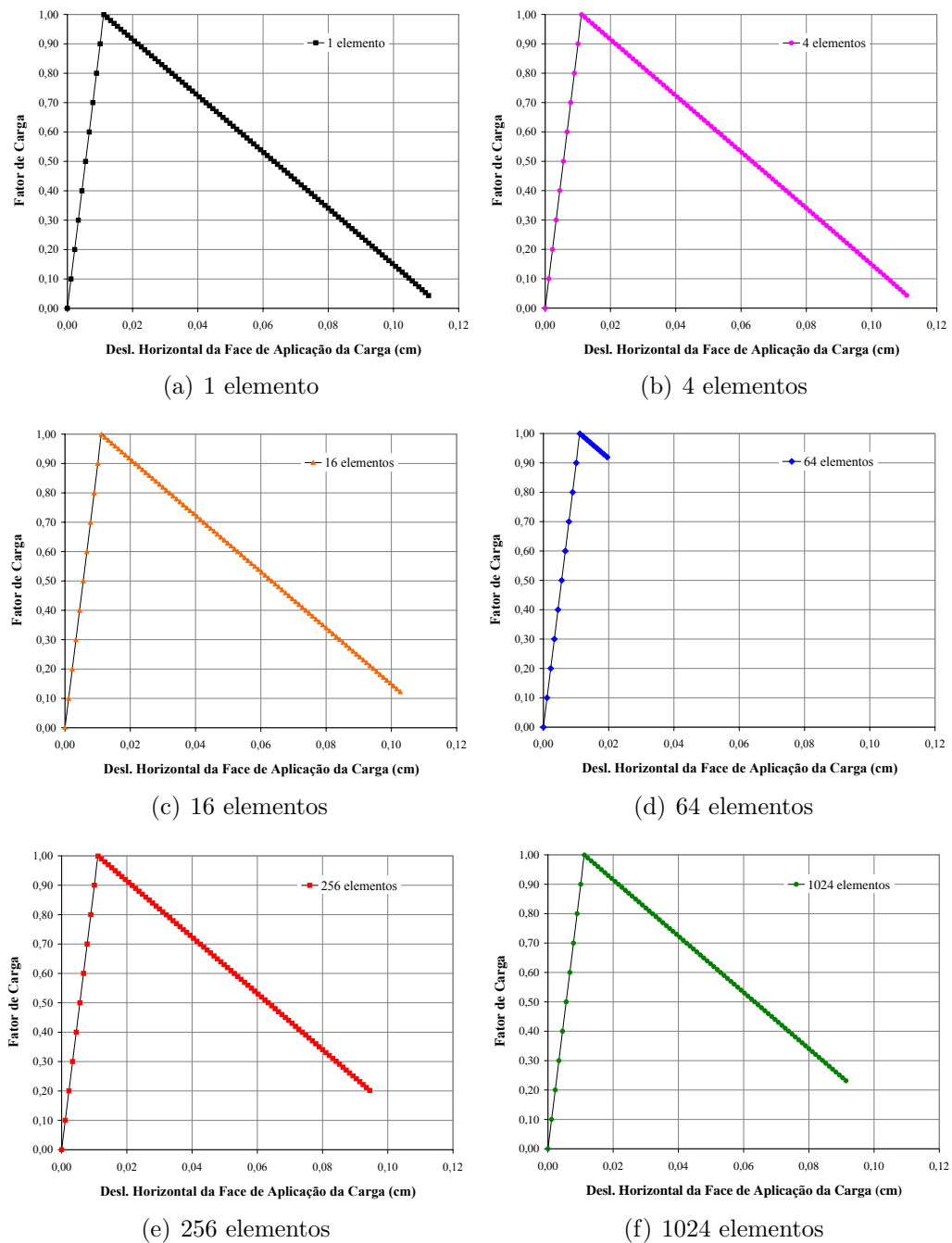
Para o exemplo de tração pura, os seguintes parâmetros foram considerados: elementos finitos quadrilaterais de 4 nós, em estado plano de tensões, com ordem de integração  $2 \times 2$ , carga de referência de  $P_0 = 3354 \text{ kN}$ , tolerância para a convergência em força de  $10^{-4}$ , controle de deslocamento generalizado e fator de carga externa inicial de 0,1. As trajetórias de equilíbrio obtidas encontram-se na figura 8.20.

Uma vez que o modelo de plasticidade utilizado é insensível à diferença entre as resistências à tração e à compressão do material, os resultados, em módulo, obtidos para os exemplos de tração axial e de compressão são idênticos. Isto foi confirmado

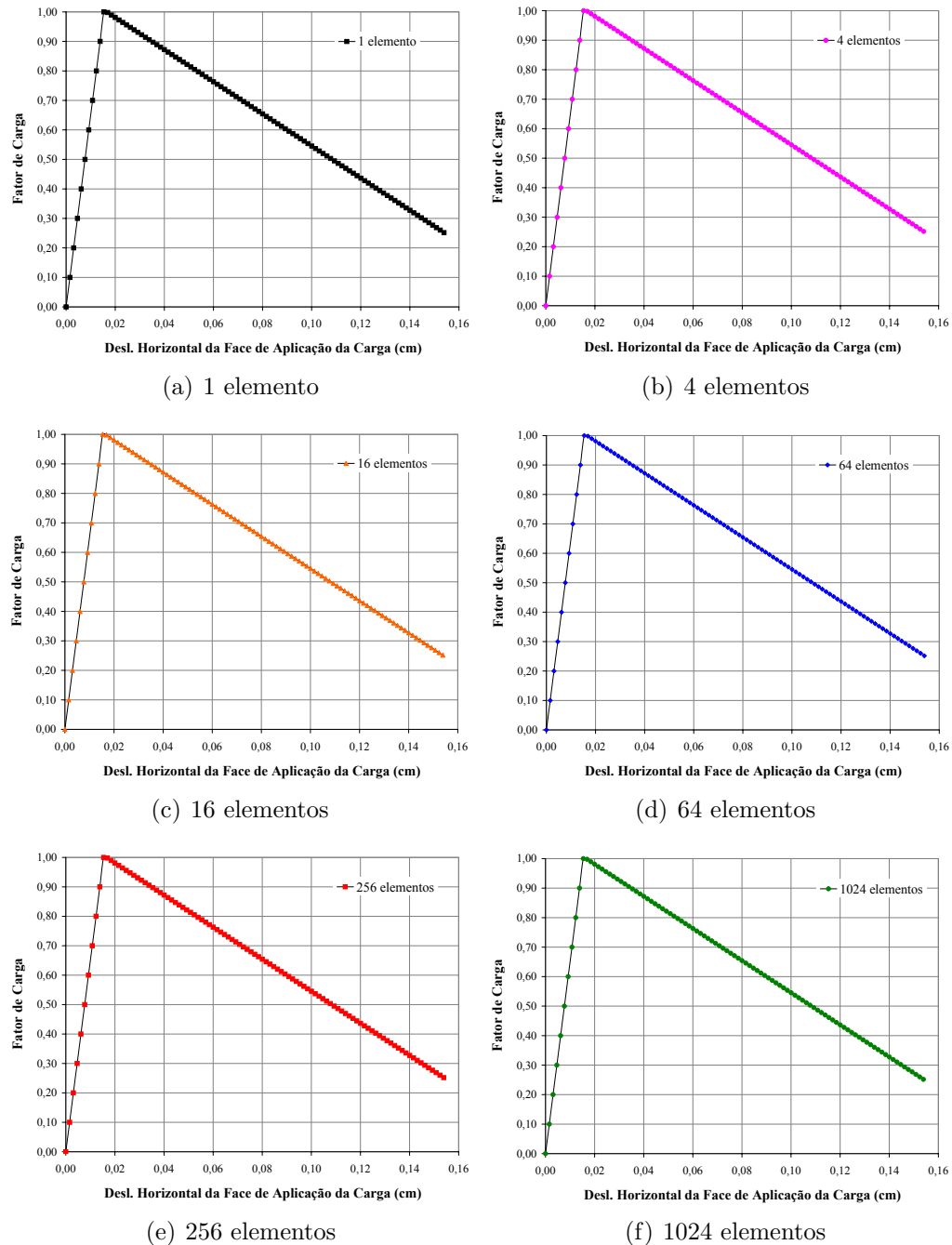


numericamente fazendo-se as simulações apresentadas acima para compressão axial, cujos resultados não são repetidos aqui.

Para o exemplo de cisalhamento puro, os dados são os mesmos do exemplo de tração axial supracitados, exceto a carga de referência, a qual vale  $P_0 = 1924 \text{ kN}$ . As trajetórias de equilíbrio obtidas estão mostradas na figura 8.21.



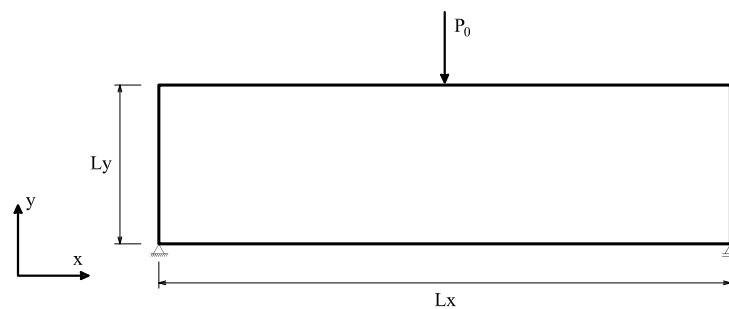
**Figura 8.20:** Trajetórias de equilíbrio correspondentes ao deslocamento horizontal da face de aplicação da carga na tração axial utilizando plasticidade e contínuo de Cosserat



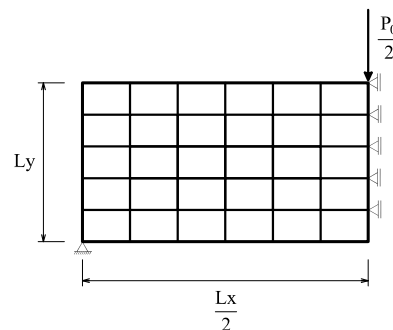
**Figura 8.21:** Trajetórias de equilíbrio correspondentes ao deslocamento horizontal da face de aplicação da carga no cisalhamento puro utilizando plasticidade e contínuo de Cosserat

## 8.2.2 Flexão em Três Pontos

As figuras 8.22 e 8.23 mostram as configurações geométricas e de carga, bem como as condições de vínculo e a respectiva discretização para a simulação do exemplo de flexão em três pontos. A viga utilizada neste exemplo tem dimensões  $L_x = 1800 \text{ mm}$  de comprimento,  $L_y = 500 \text{ mm}$  de altura e  $100 \text{ mm}$  de espessura. Os parâmetros do material são aqueles da tabela 8.4.



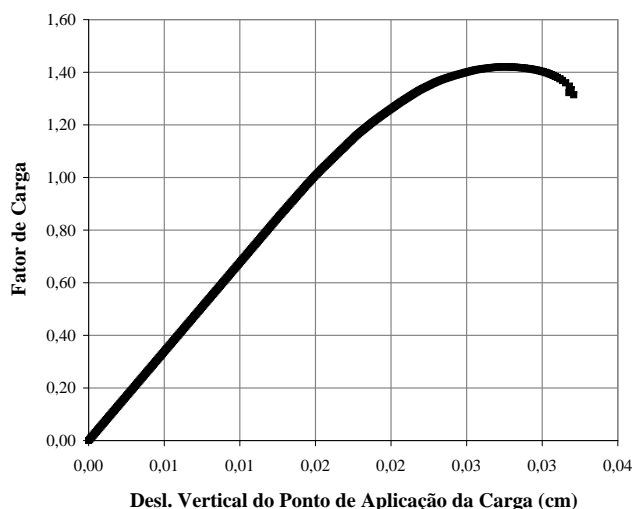
**Figura 8.22:** Viga sob flexão em três pontos



**Figura 8.23:** Discretização em 30 elementos finitos para a flexão em três pontos

Para este exemplo os seguintes parâmetros da análise foram considerados: elementos finitos quadriláteros de 4 nós, em estado plano de tensões, com ordem de integração  $3 \times 3$ , carga de referência de  $P_0 = 30 \text{ kN}$ , tolerância para a convergência em força de  $10^{-3}$ , controle de comprimento de arco cilíndrico e fator de carga externa inicial de 0,005.

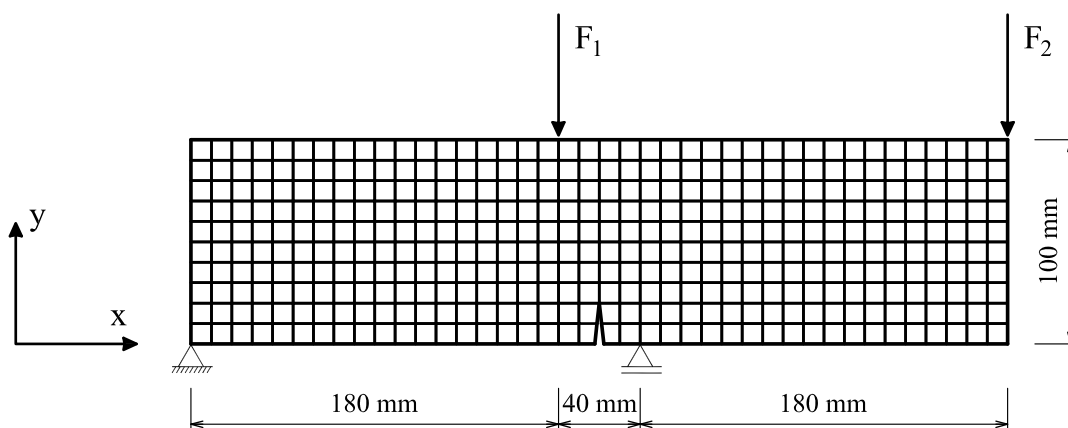
A trajetória de equilíbrio para o deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga está mostrada na figura 8.24.



**Figura 8.24:** Trajetória de equilíbrio correspondente ao deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga na flexão em três pontos utilizando plasticidade e contínuo de Cosserat

### 8.2.3 Cisalhamento em Quatro Pontos

Adota-se o exemplo sugerido por Feenstra e de Borst (1993) para uma viga com 400 *mm* de comprimento, 100 *mm* de altura e 100 *mm* de espessura, com fissura de 5 *mm* de abertura e 20 *mm* de altura iniciais.



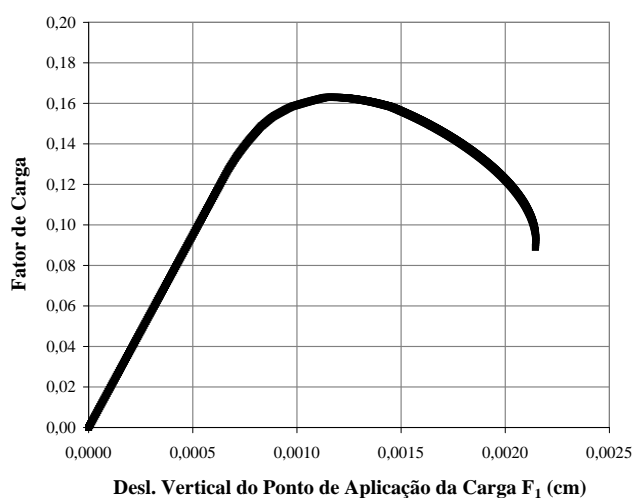
**Figura 8.25:** Malha de elementos finitos para o exemplo de cisalhamento em quatro pontos

Os parâmetros do material são aqueles da tabela 8.4 e os resultados obtidos não são comparados com os de Feenstra e de Borst (1993), pois os materiais empregados em ambas as análises são diferentes.

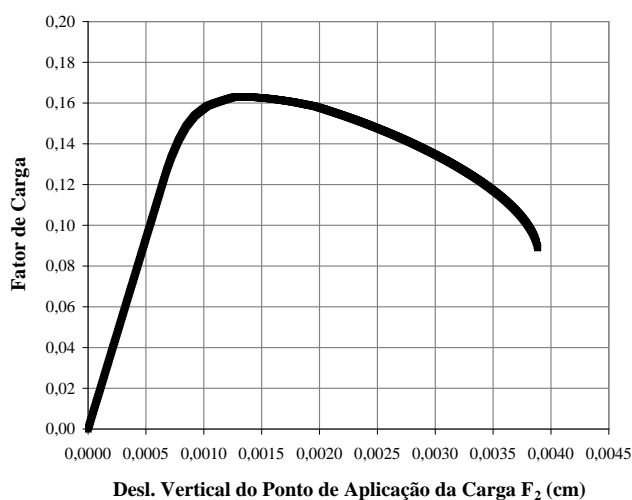
Para este exemplo, os seguintes parâmetros da análise foram considerados:

elementos finitos quadrilaterais de 4 nós, em estado plano de tensões, com ordem de integração  $2 \times 2$ , cargas de referência  $F_1 = 60 \text{ kN}$  e  $F_2 = 0,1 F_1$ , tolerância para a convergência em força de  $10^{-3}$ , controle direto de deslocamento, em que incrementou-se de  $0,000005 \text{ cm}$  o deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga  $F_2$ .

As trajetórias de equilíbrio correspondentes aos deslocamentos verticais dos pontos de aplicação das cargas  $F_1$  e  $F_2$  são mostradas nas figuras 8.26 e 8.27.



**Figura 8.26:** Trajetória de equilíbrio correspondente ao deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga  $F_1$  no cisalhamento em quatro pontos utilizando plasticidade e contínuo de Cosserat

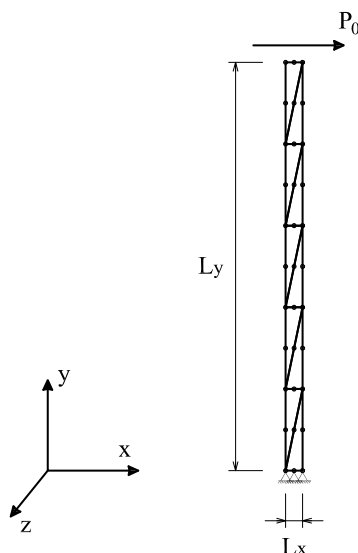


**Figura 8.27:** Trajetória de equilíbrio correspondente ao deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga  $F_2$  no cisalhamento em quatro pontos utilizando plasticidade e contínuo de Cosserat

### 8.2.4 Camada Infinita sob Cisalhamento

Este exemplo foi retirado dos trabalhos de Lages (1997), de Borst (1991, 1993) e Li e Tang (2005).

A figura 8.28 mostra uma camada no plano  $xy$  de altura  $L_y = 100$  mm e largura  $L_x = 2,5$  mm, infinitamente longa na direção do eixo  $z$ , submetida a um carregamento distribuído de cisalhamento em sua borda superior. A camada é modelada como um problema em estado plano de deformação, utilizando-se elementos finitos triangulares de 6 nós, com ordem de integração  $3 \times 3$ . Para simular o comportamento da camada na direção  $x$ , todos os deslocamentos na direção  $y$  foram impedidos.



**Figura 8.28:** Camada infinita sob cisalhamento

O problema é basicamente unidimensional e o uso de elementos planos requer que algumas restrições sejam adicionadas às equações algébricas resultantes da discretização do contínuo. Estas restrições são impostas aos deslocamentos na direção  $x$  e às microrrotações  $\phi_z$ . A borda inferior da camada é fixa, onde os deslocamentos nodais em  $x$  são impedidos. Como condições de contorno adicionais, as microrrotações são impedidas nas bordas superior e inferior da camada. Durante a análise,

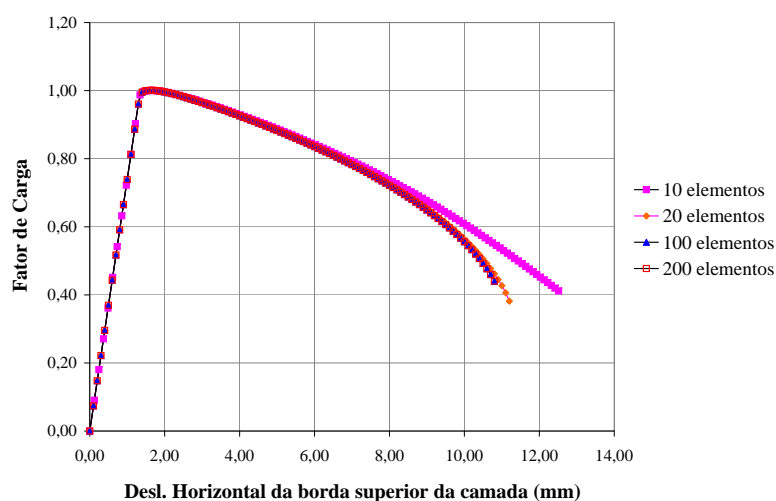
são adotadas quatro discretizações com 10, 20, 100 e 200 elementos finitos. Os parâmetros do material são os mesmos utilizados por de Borst (1991, 1993) e estão na tabela 8.5.

**Tabela 8.5:** Parâmetros do material para o exemplo da camada infinita sob cisalhamento

|   |             |
|---|-------------|
| Módulo de elasticidade longitudinal ( $E$ )     | = 10000 MPa |
| Coefficiente de Poisson ( $\nu$ )               | = 0,25      |
| Módulo plástico ( $h$ )                         | = -500 MPa  |
| Tensão de escoamento inicial ( $\bar{\sigma}$ ) | = 100 MPa   |
| Comprimento característico à flexão ( $L_f$ )   | = 12 mm     |
| Módulo de cisalhamento rotacional ( $\alpha$ )  | = 2000 MPa  |

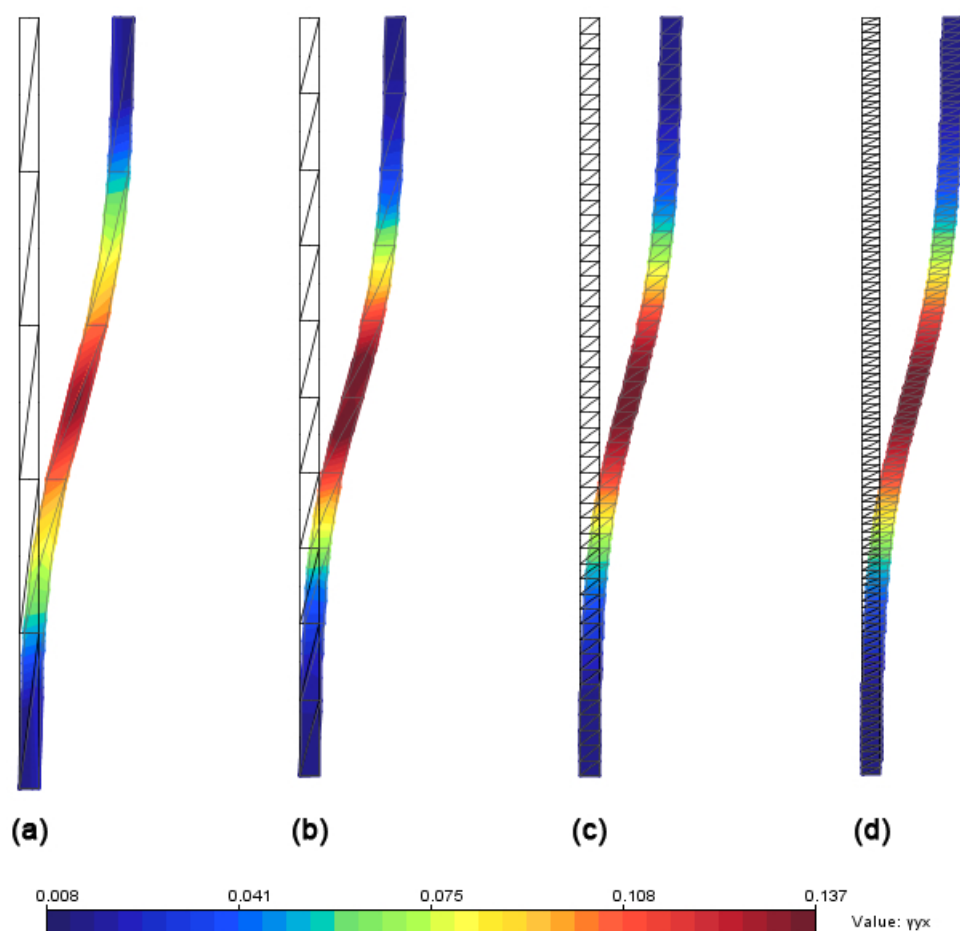
Considerando-se a carga de referência  $P_0 = 150N$  e admitindo-se uma tolerância para a convergência em força de  $10^{-4}$ , as trajetórias de equilíbrio foram obtidas com o controle direto de deslocamento, em que incrementou-se de  $0,1mm$  o deslocamento horizontal do nó central da borda superior da camada. Os resultados obtidos aqui são iguais àqueles apresentados por de Borst (1991, 1993).

Na figura 8.29 são mostradas as curvas fator de carga  $\times$  deslocamento horizontal da borda superior da camada.



**Figura 8.29:** Trajetórias de equilíbrio correspondentes ao deslocamento horizontal da borda superior da camada infinita mostrando o efeito do refinamento da malha com  $L_f = 12mm$

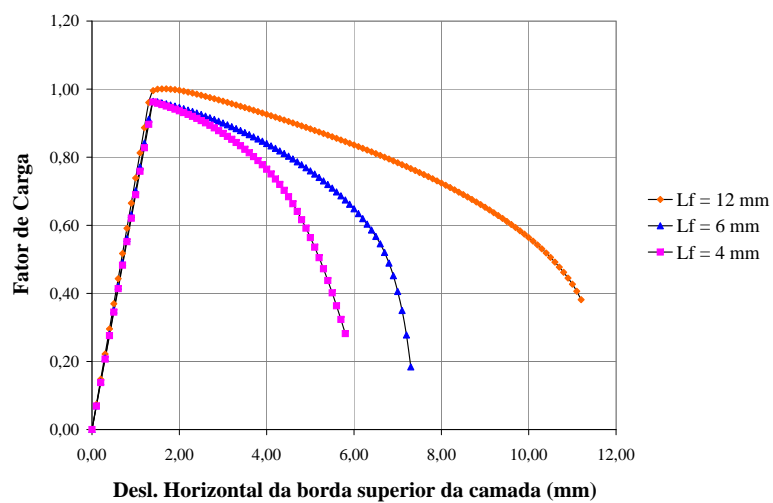
Na figura 8.30, o estado deformado e a distribuição de deformações cisalhantes  $\gamma_{yx}$  é mostrada para as quatro discretizações adotadas, correspondentes ao último passo da análise.



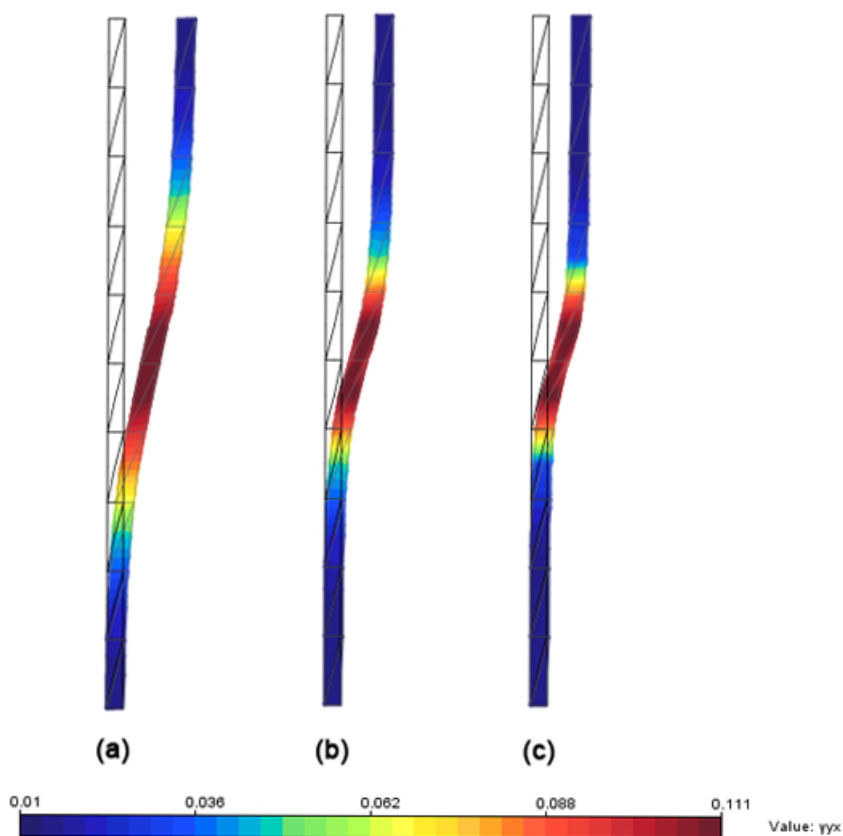
**Figura 8.30:** Estado deformado e distribuição de deformações cisalhantes  $\gamma_{yx}$ . (a) 10 elementos; (b) 20 elementos; (c) 100 elementos; (d) 200 elementos

A influência do comprimento característico à flexão ( $L_f$ ) na solução do problema é mostrada nas figuras 8.31 e 8.32, nas quais fixou-se a discretização para 20 elementos finitos e variou-se  $L_f$ , adotando-se para seu valor 12 mm, 6 mm e 4 mm.





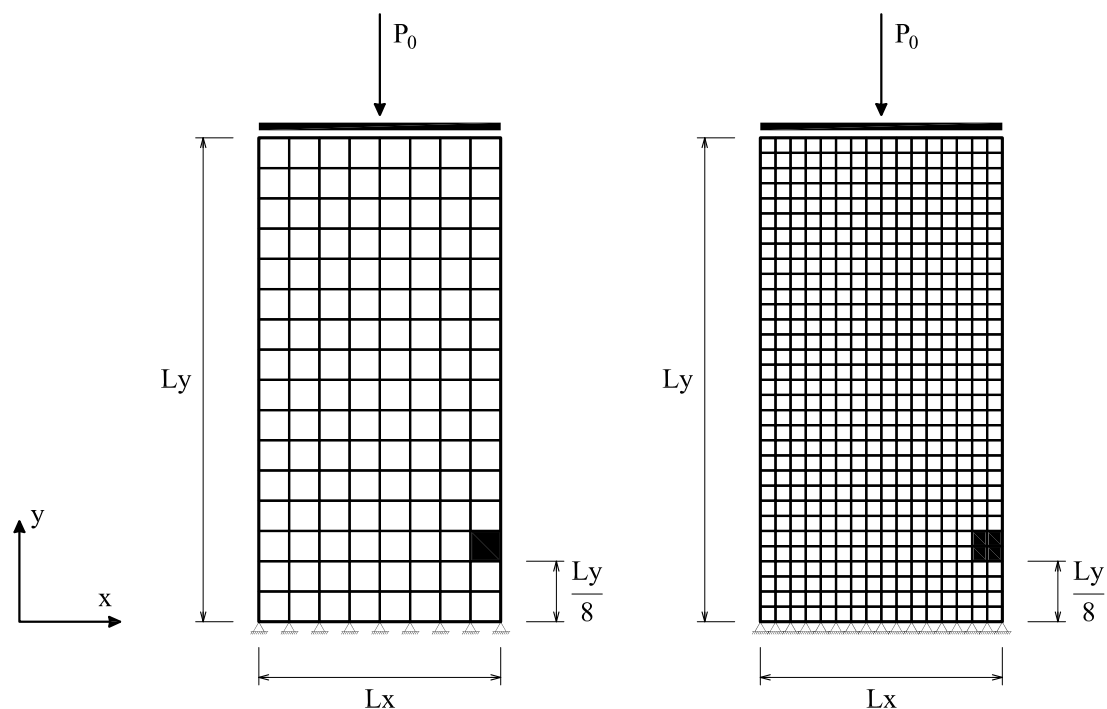
**Figura 8.31:** Trajetórias de equilíbrio correspondentes ao deslocamento horizontal da borda superior da camada infinita mostrando a influência do comprimento característico à flexão para a discretização com 20 elementos finitos



**Figura 8.32:** Estado deformado e distribuição de deformações cisalhantes  $\gamma_{yx}$ . (a)  $L_f = 12$  mm; (b)  $L_f = 6$  mm; (c)  $L_f = 4$  mm

### 8.2.5 Compressão com Banda de Cisalhamento

Neste exemplo, estuda-se a formação de uma banda de cisalhamento em um exemplo de compressão. Uma peça com  $L_y = 120$  mm de altura e  $L_x = 60$  mm de largura é submetida a um carregamento distribuído de compressão em sua parte superior. A fim de simular uma prensa, adotou-se uma camada de elementos finitos com material elástico linear muito mais resistente que o material da peça. O exemplo é modelado como um problema em estado plano de deformação, utilizando-se elementos finitos quadrilaterais de 9 nós, com ordem de integração  $3 \times 3$ . A figura 8.33, mostra as discretizações utilizadas para o problema, com 128 e 512 elementos.



**Figura 8.33:** Discretizações utilizadas no exemplo de compressão com banda de cisalhamento

Na parte inferior da peça, os deslocamentos são impedidos nas direções  $x$  e  $y$ , e as microrrotações são liberadas. Na parte superior, impedem-se as microrrotações dos nós contíguos à prensa.

Os parâmetros do material foram retirados de Lages (1997) e estão na tabela 8.6.

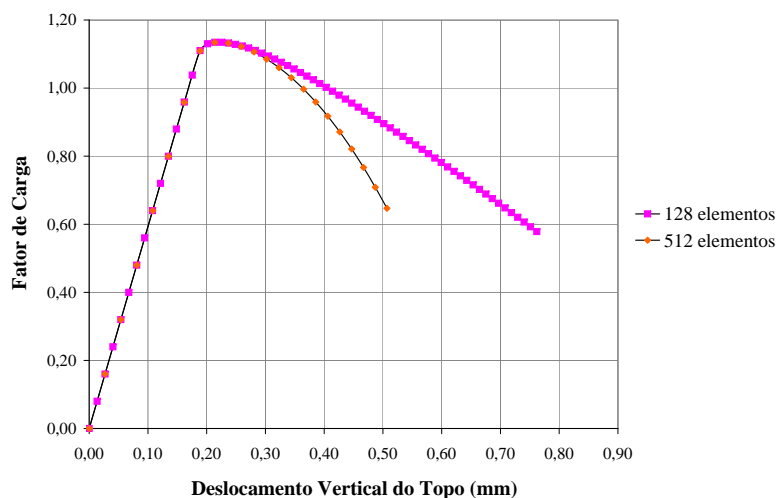
**Tabela 8.6:** Parâmetros do material para o exemplo de compressão com banda de cisalhamento

|   |             |
|---|-------------|
| Módulo de elasticidade longitudinal ( $E$ )     | = 12000 MPa |
| Coefficiente de Poisson ( $\nu$ )               | = 0,35      |
| Módulo plástico ( $h$ )                         | = -300 MPa  |
| Tensão de escoamento inicial ( $\bar{\sigma}$ ) | = 20 MPa    |
| Comprimento característico à flexão ( $L_f$ )   | = 1,25 mm   |
| Módulo de cisalhamento rotacional ( $\alpha$ )  | = 2000 MPa  |

Os dados da análise são: carga de referência  $P_0 = 1200N$ , tolerância para a convergência em força de  $10^{-4}$ , controle de deslocamento generalizado e fator de carga externa inicial de 0,02.

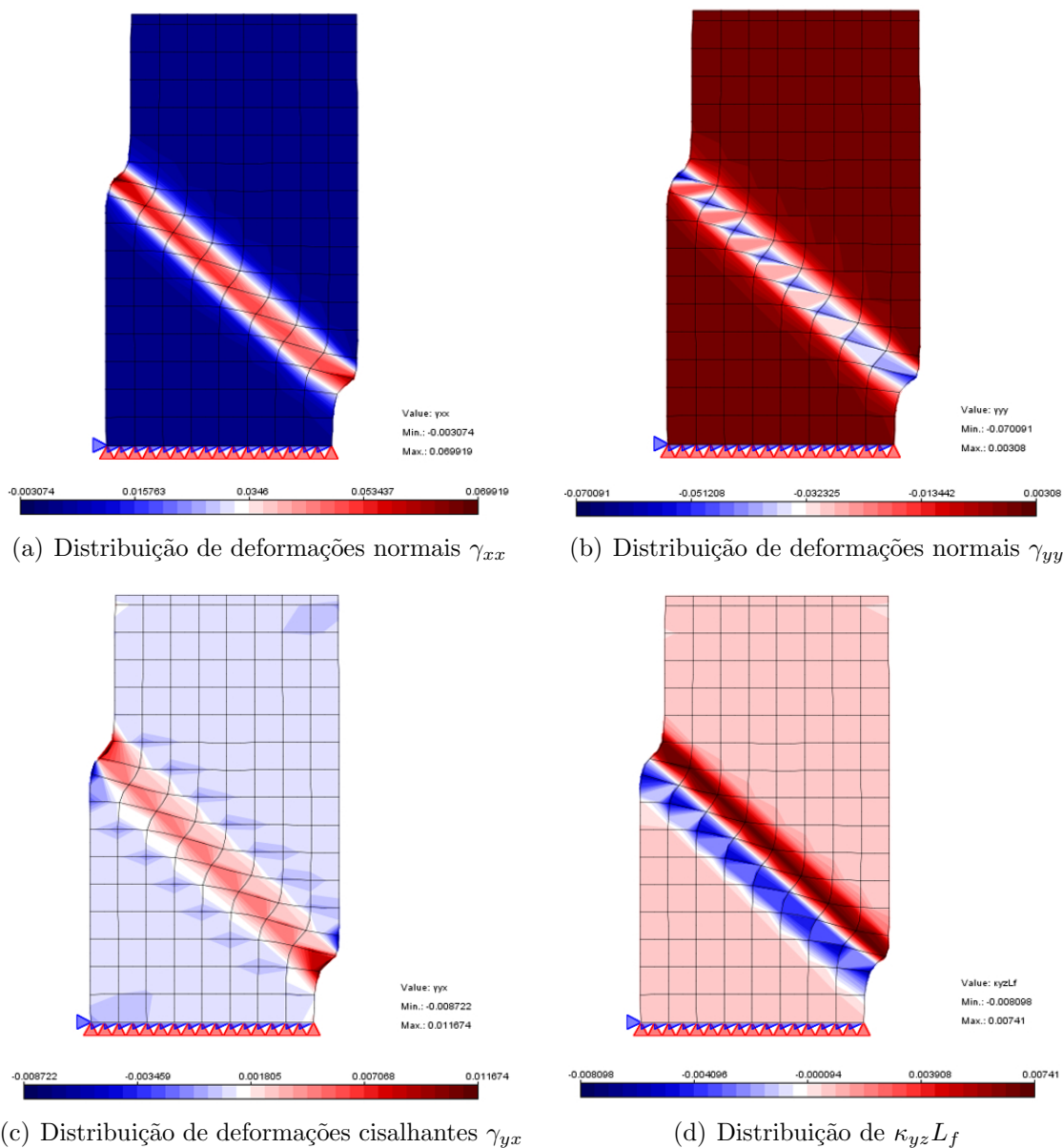
Para a formação de uma banda de cisalhamento, é introduzida uma região menos resistente na peça analisada, correspondendo a uma redução de 5% do valor da tensão de escoamento inicial para o material dos elementos finitos que compõem tal região. Estes elementos são os destacados nas malhas da figura 8.33.

A figura 8.34 mostra as curvas fator de carga  $\times$  deslocamento vertical do topo da peça para as malhas com 128 e 512 elementos finitos. Os resultados apresentados abaixo são iguais aos obtidos por Lages (1997).

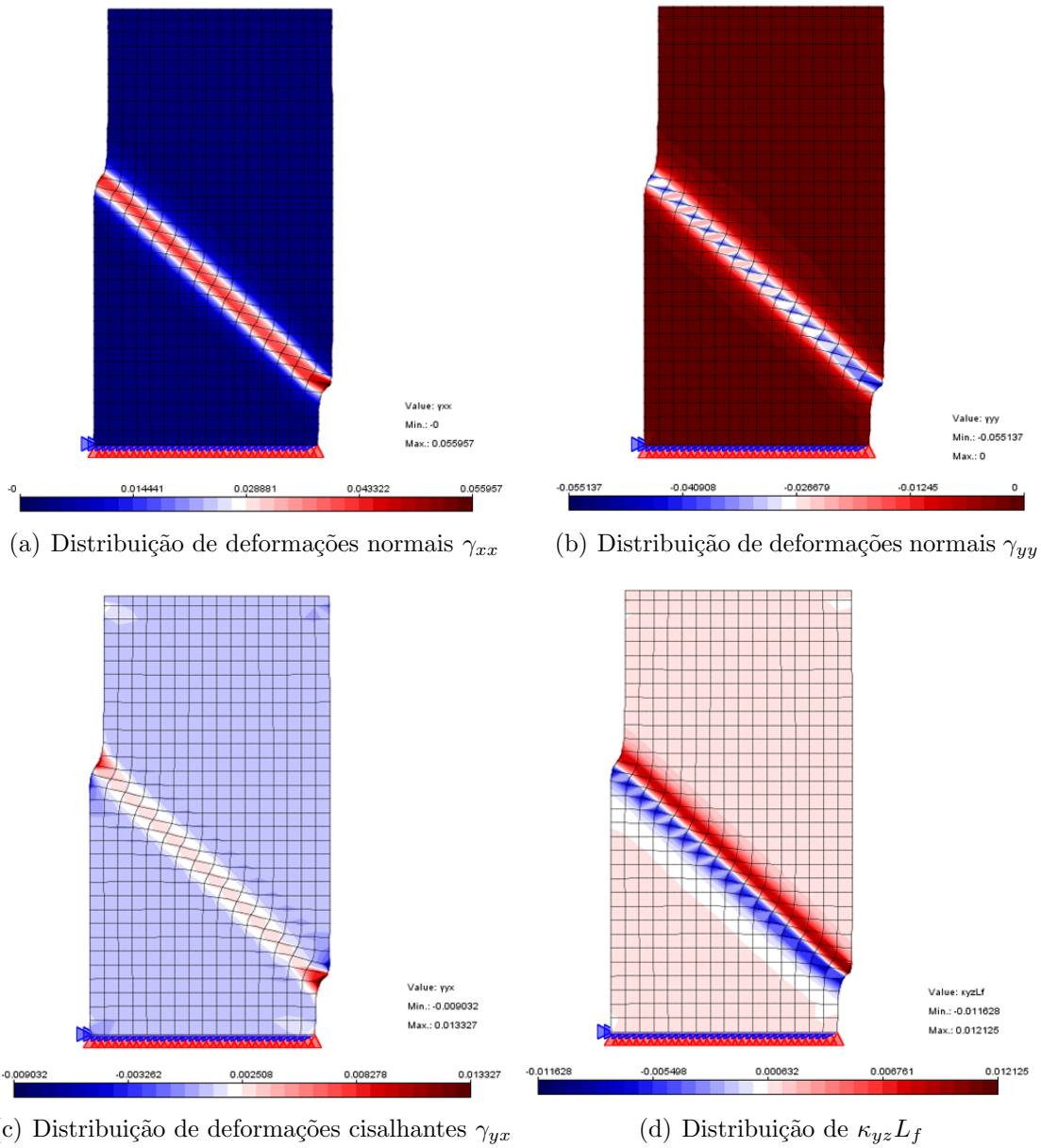


**Figura 8.34:** Trajetórias de equilíbrio correspondentes ao deslocamento vertical do topo da peça para as malhas de 128 e 512 elementos

As figuras 8.35 e 8.36 mostram as deformadas e as distribuições de deformações  $\gamma_{xx}$ ,  $\gamma_{yy}$ ,  $\gamma_{yx}$  e da microcurvatura  $\kappa_{yz}$  multiplicada pelo comprimento característico à flexão  $L_f$ , para a peça analisada com 128 e 512 elementos finitos, onde pode-se notar a formação da banda de cisalhamento. Esses resultados correspondem ao último passo da análise e a configuração deformada foi obtida aumentando-se os deslocamentos de 10 vezes.



**Figura 8.35:** Estado deformado e distribuição de grandezas internas para a malha de 128 elementos finitos



**Figura 8.36:** Estado deformado e distribuição de grandezas internas para a malha de 512 elementos finitos

## 8.3 Exemplos de Microplanos com Relaxação Cinemática para o Contínuo Clássico

Nesta seção, são apresentados os exemplos de tração, compressão e cisalhamento puros, de flexão em três pontos e de cisalhamento em quatro pontos analisados com o modelo de microplanos com relaxação cinemática (Ozbolt et al., 2001).

### 8.3.1 Tração, Compressão e Cisalhamento Puros

As configurações geométricas, de carga e condições de vínculo, bem como as discretizações aqui utilizadas são as mesmas da seção 8.2.1 (figuras 8.18 e 8.19). Os parâmetros dos materiais (tabela 8.7) foram retirados do trabalho de Ozbolt e Bazant (1992).

**Tabela 8.7:** Parâmetros do material para os exemplos utilizando o modelo de microplanos com relaxação cinemática

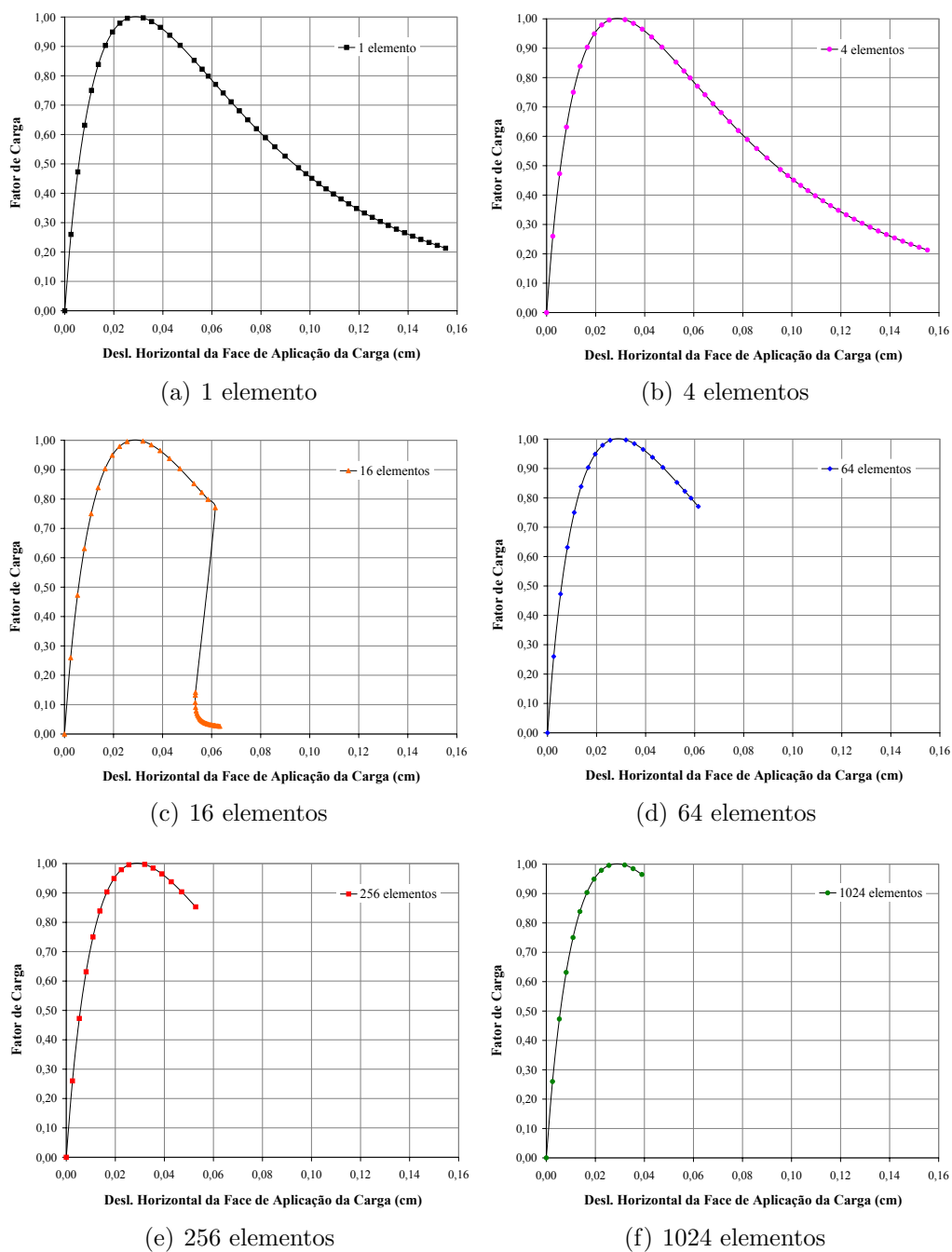
| Parâmetros | Valores   | Parâmetros | Valores |
|------------|-----------|------------|---------|
| $E$        | 20000 MPa | $q$        | 2,00    |
| $\nu$      | 0,18      | $a_2$      | 0,002   |
| $a_1$      | 0,00007   | $p_2$      | 2,25    |
| $p_1$      | 0,85      | $p_3$      | 2,25    |
| $a$        | 0,005     | $\eta_0$   | 0,8     |
| $b$        | 0,043     | $a_3^0$    | 0,002   |
| $p$        | 0,75      | $k_a$      | 0       |

Para o exemplo de tração pura, consideram-se: elementos finitos quadrilaterais de 4 nós, em estado plano de tensões, com ordem de integração  $2 \times 2$ , carga de referência de  $P_0 = 1694 \text{ kN}$ , tolerância para a convergência em força de  $10^{-4}$ , controle de deslocamento generalizado e fator de carga externa inicial de 0,3. As trajetórias obtidas estão mostradas na figura 8.37.

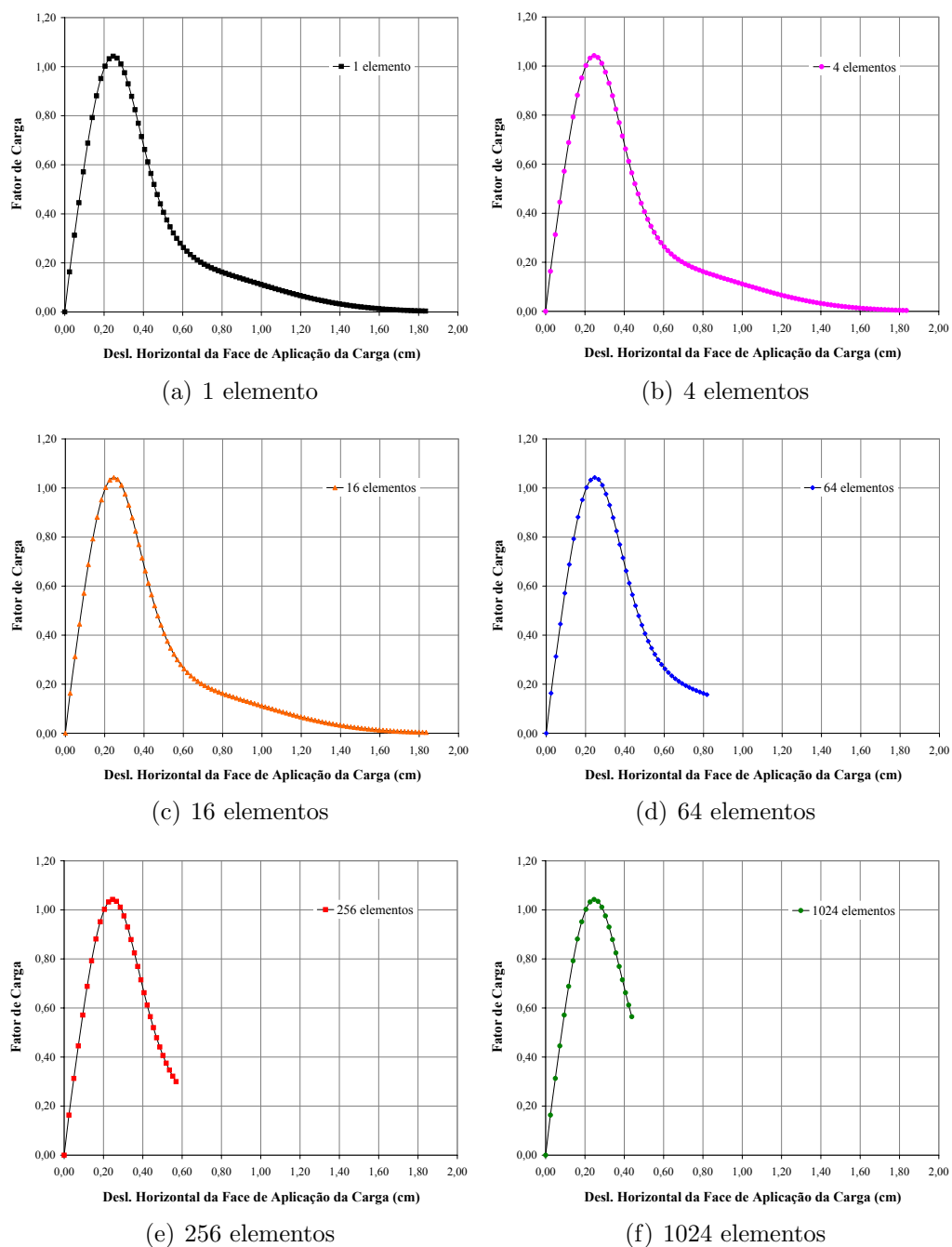
Para o exemplo de compressão pura, os dados utilizados são os mesmos do exemplo de tração axial supracitados, exceto a carga de referência, que teve seu valor aumentado de 10 vezes. As trajetórias de equilíbrio obtidas estão mostradas

na figura 8.38.

Para o exemplo de cisalhamento puro, os dados são os mesmos do exemplo de tração axial supracitados, exceto a carga de referência, a qual vale  $P_0 = 8976 \text{ kN}$ . As trajetórias de equilíbrio obtidas estão mostradas na figura 8.39.

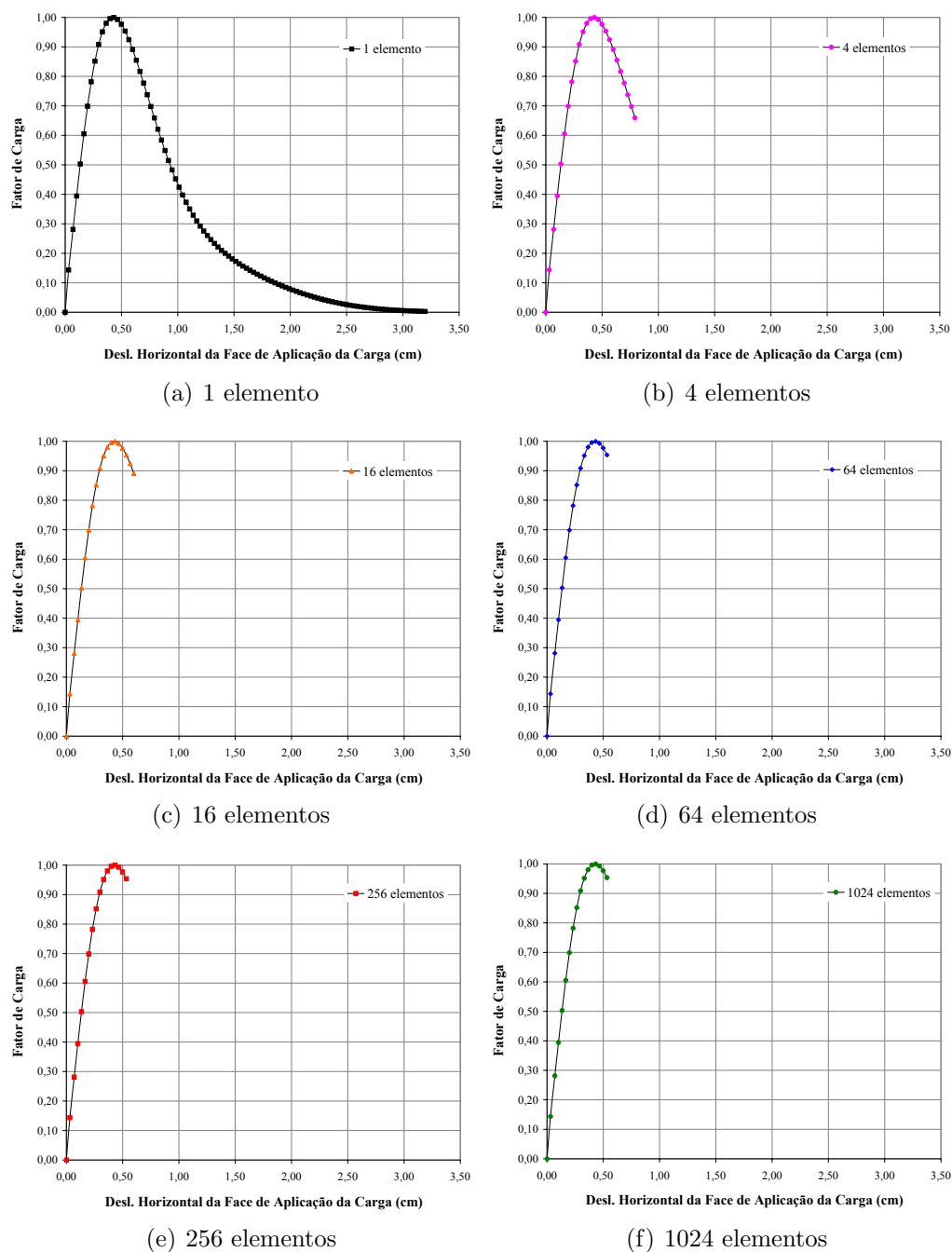


**Figura 8.37:** Trajetórias de equilíbrio correspondentes ao deslocamento horizontal da face de aplicação da carga na tração axial utilizando o modelo de microplanos com relaxação cinemática



**Figura 8.38:** Trajetórias de equilíbrio correspondentes ao deslocamento horizontal da face de aplicação da carga na compressão axial utilizando o modelo de microplanos com relaxação cinemática



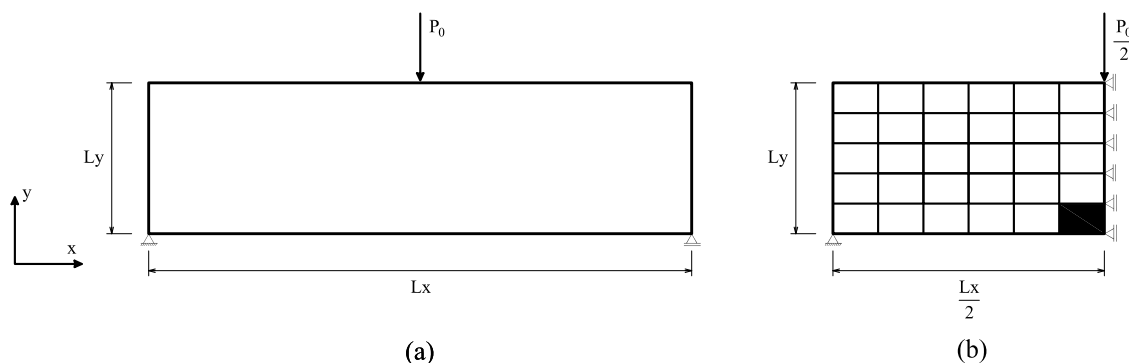


**Figura 8.39:** Trajetórias de equilíbrio correspondentes ao deslocamento horizontal da face de aplicação da carga no cisalhamento puro utilizando o modelo de microplanos com relaxação cinemática

### 8.3.2 Flexão em Três Pontos

A mesma viga da seção 8.2.2 é aqui analisada utilizando-se o modelo constitutivo de microplanos com relaxação cinemática (Ozbolt et al., 2001).

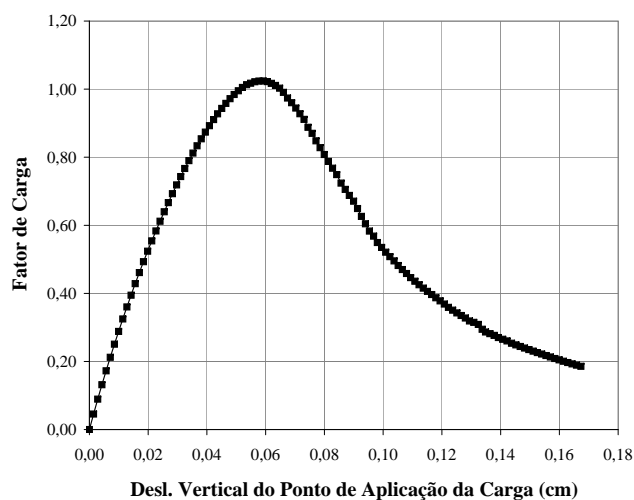
Considerando-se a simetria do problema, a viga foi discretizada em 30 elementos finitos quadriláteros de 4 nós, em estado plano de tensões, com ordem de integração  $3 \times 3$ , mostrada na figura 8.40. O elemento finito destacado nesta figura representa uma região da viga cujo material é menos resistente, a fim de simular o efeito de uma fissura inicial neste exemplo.



**Figura 8.40:** Geometria e discretização em 30 elementos finitos para a flexão em três pontos

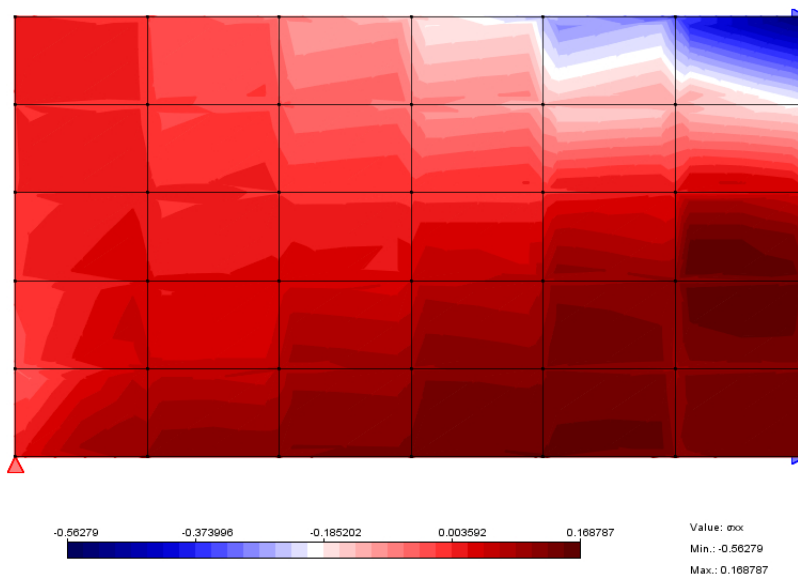
Os parâmetros do material são os mesmos da tabela 8.7. O material da região menos resistente da viga possui dois parâmetros que diferem daqueles mostrados na tabela 8.7, são eles:  $a_1 = 0,00004$  e  $p_1 = 0,5$ .

Considerando-se a carga de referência  $P_0 = 30 \text{ kN}$  e admitindo-se uma tolerância para a convergência em força de  $10^{-3}$ , foi obtida a trajetória de equilíbrio da figura 8.41, adotando-se controle de deslocamento generalizado e fator de carga externa inicial de 0,02. Os resultados obtidos aqui são iguais àqueles apresentados por Ozbolt e Bazant (1992).



**Figura 8.41:** Trajetória de equilíbrio correspondente ao deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga na flexão em três pontos utilizando o modelo de microplanos com relaxação cinemática

Na figura 8.42 é apresentada a distribuição de tensões normais  $\sigma_{xx}$  associada ao ponto limite de carga. Devido à introdução da fissura inicial, a região mais tracionada se situa logo acima do elemento menos resistente.



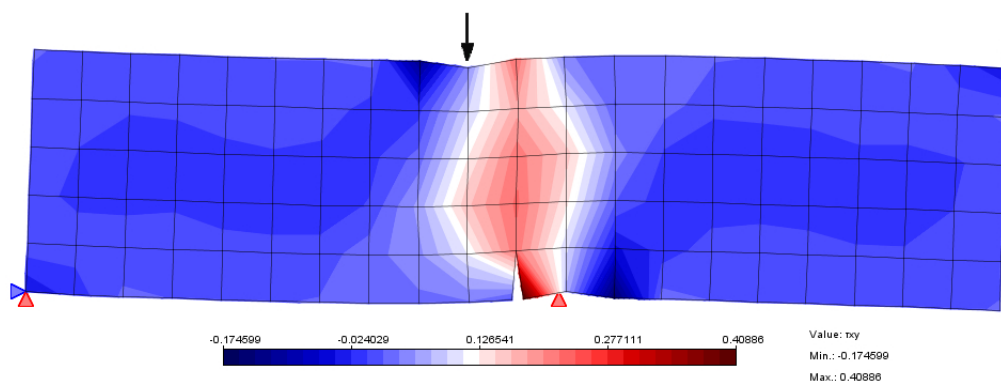
**Figura 8.42:** Distribuição de tensões normais  $\sigma_{xx}$  para a flexão em três pontos, simulando fissura inicial

### 8.3.3 Cisalhamento em Quatro Pontos

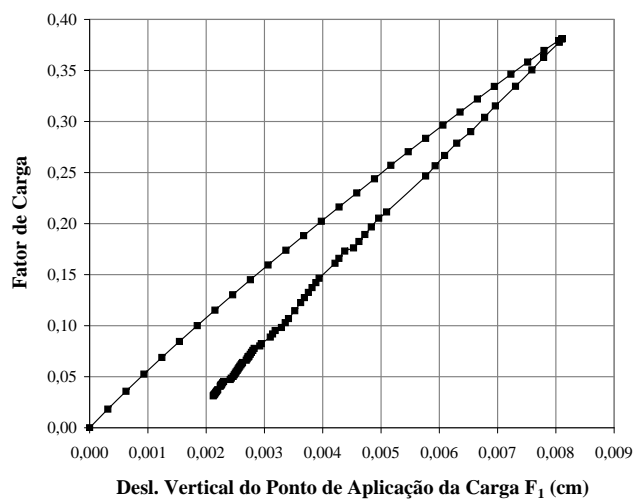
Esta simulação pretende mostrar o funcionamento do modelo de microplanos com relaxação cinemática (Ozbolt et al., 2001) na presença de altas tensões de cisalhamento, adotando-se a mesma viga e discretização da seção 8.2.3. As propriedades do material são as mesmas do exemplo anterior e se encontram na tabela 8.7.

Os dados da análise são: elementos finitos quadrilaterais de 4 nós, em estado plano de tensões, com ordem de integração  $2 \times 2$ , cargas de referência  $F_1 = 60 \text{ kN}$  e  $F_2 = 0,1 F_1$ , convergência em força de  $10^{-3}$  e controle direto de deslocamento, em que incrementou-se de  $0,0001 \text{ cm}$  o deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga  $F_2$ .

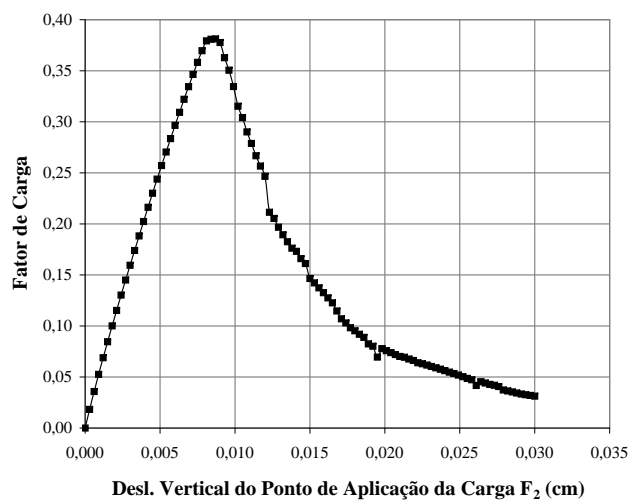
O estado deformado com o contorno de tensões cisalhantes associados ao ponto limite de carga está mostrado na figura 8.43. Para a configuração deformada, os deslocamentos foram aumentados de 100 vezes. As trajetórias de equilíbrio obtidas são mostradas nas figuras 8.44 e 8.45.



**Figura 8.43:** Estado deformado e contorno de tensões de cisalhamento para o ponto limite de carga



**Figura 8.44:** Trajetória de equilíbrio correspondente ao deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga  $F_1$  no cisalhamento em quatro pontos utilizando o modelo de microplos com relaxação cinemática



**Figura 8.45:** Trajetória de equilíbrio correspondente ao deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga  $F_2$  no cisalhamento em quatro pontos utilizando o modelo de microplos com relaxação cinemática

## 8.4 Exemplos de Microplanos com Deformação Equivalente para o Contínuo Clássico

Nesta seção, são apresentados os exemplos de tração, compressão e cisalhamento puros, de flexão em três pontos e de cisalhamento em quatro pontos analisados segundo o modelo constitutivo de microplanos com deformação equivalente (Leukart e Ramm, 2006), onde esta é definida por de Vree et al. (1995).

Os parâmetros do material utilizados nos ensaios que se seguem com este modelo estão apresentados na tabela 8.8 e foram retirados de (Leukart e Ramm, 2006).

**Tabela 8.8:** Parâmetros do material para os exemplos utilizando o modelo de microplanos com deformação equivalente

|   |             |
|---|-------------|
| Módulo de elasticidade longitudinal ( $E$ )                 | = 35000 MPa |
| Coefficiente de Poisson ( $\nu$ )                           | = 0,15      |
| Máxima degradação ( $\alpha^{mic}$ )                        | = 0,96      |
| Taxa de crescimento do dano ( $\beta^{mic}$ )               | = 300       |
| Deformação equivalente inicial ( $\kappa_0^{mic}$ )         | = 0,0005    |
| Razão entre as resistências à tração e à compressão ( $r$ ) | = 10        |

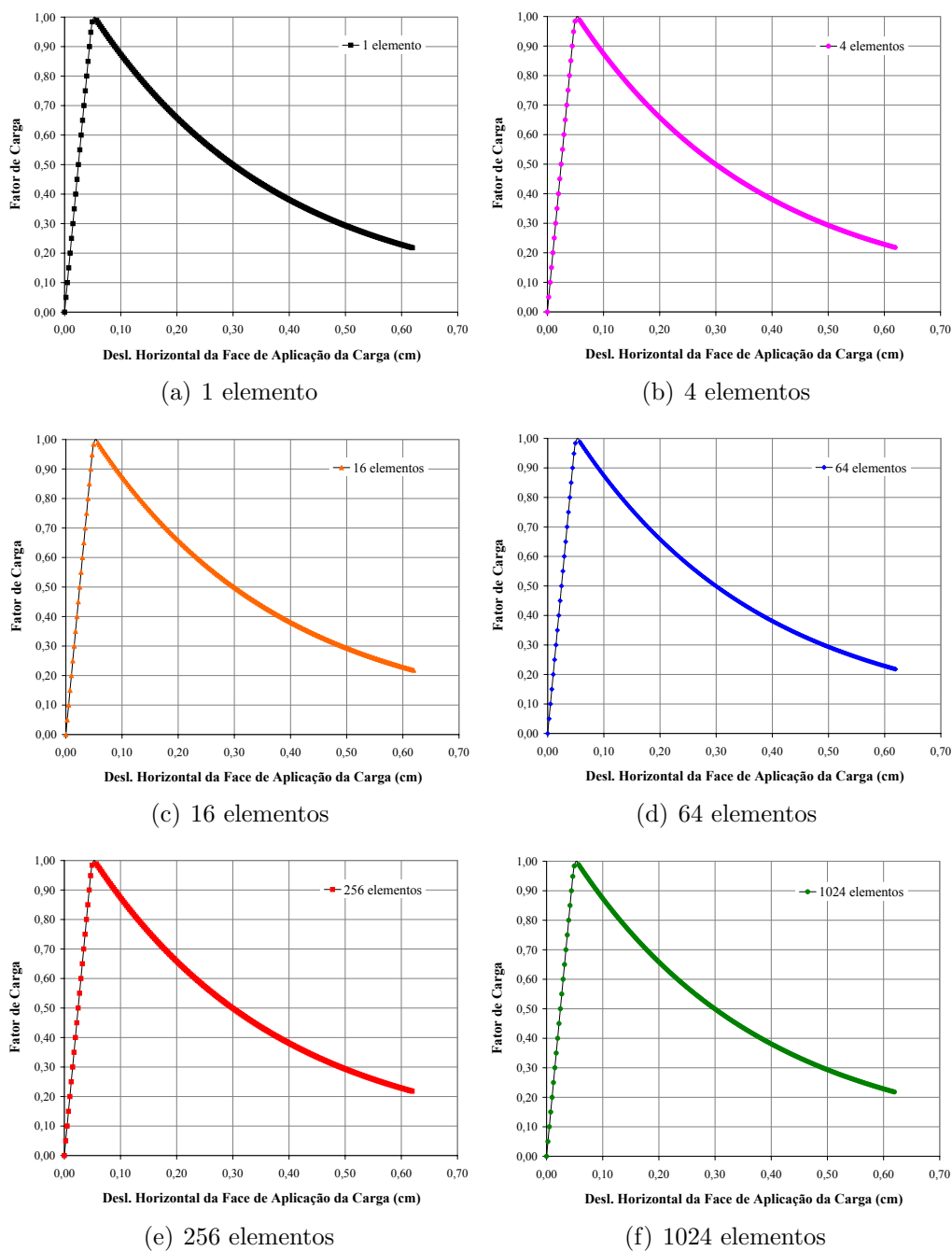
### 8.4.1 Tração, Compressão e Cisalhamento Puros

As configurações geométricas, de carga e condições de vínculo, bem como as discretizações aqui utilizadas são as mesmas da seção 8.2.1 (figuras 8.18 e 8.19).

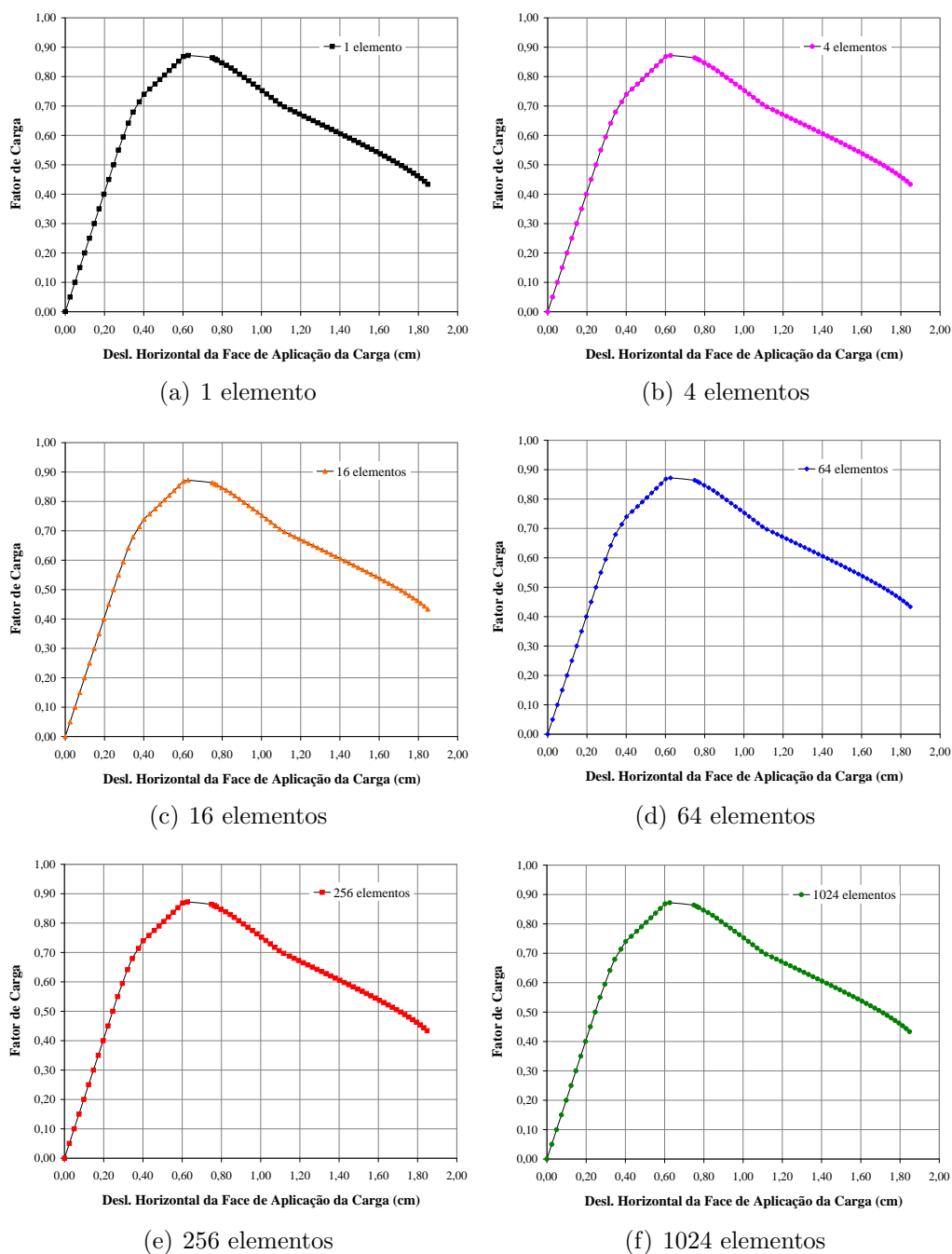
Para o exemplo de tração pura, os dados da análise são: elementos finitos quadrilaterais de 4 nós, em estado plano de tensões, com ordem de integração  $2 \times 2$ , carga de referência de  $P_0 = 17230 \text{ kN}$ , tolerância para a convergência em força de  $10^{-4}$ , controle de deslocamento generalizado e fator de carga externa inicial de 0,05. As trajetórias de equilíbrio obtidas estão mostradas na figura 8.46.

Para o exemplo de compressão pura, os dados utilizados são os mesmos do exemplo de tração axial supracitados, exceto a carga de referência, que teve seu valor aumentado de 10 vezes. As trajetórias de equilíbrio obtidas estão mostradas na figura 8.47.

Para o exemplo de cisalhamento puro, os dados são os mesmos do exemplo de tração axial supracitados, exceto a carga de referência, a qual vale  $P_0 = 28500 \text{ kN}$ , e o fator de carga externa inicial de 0,1. As trajetórias de equilíbrio obtidas estão mostradas na figura 8.48.

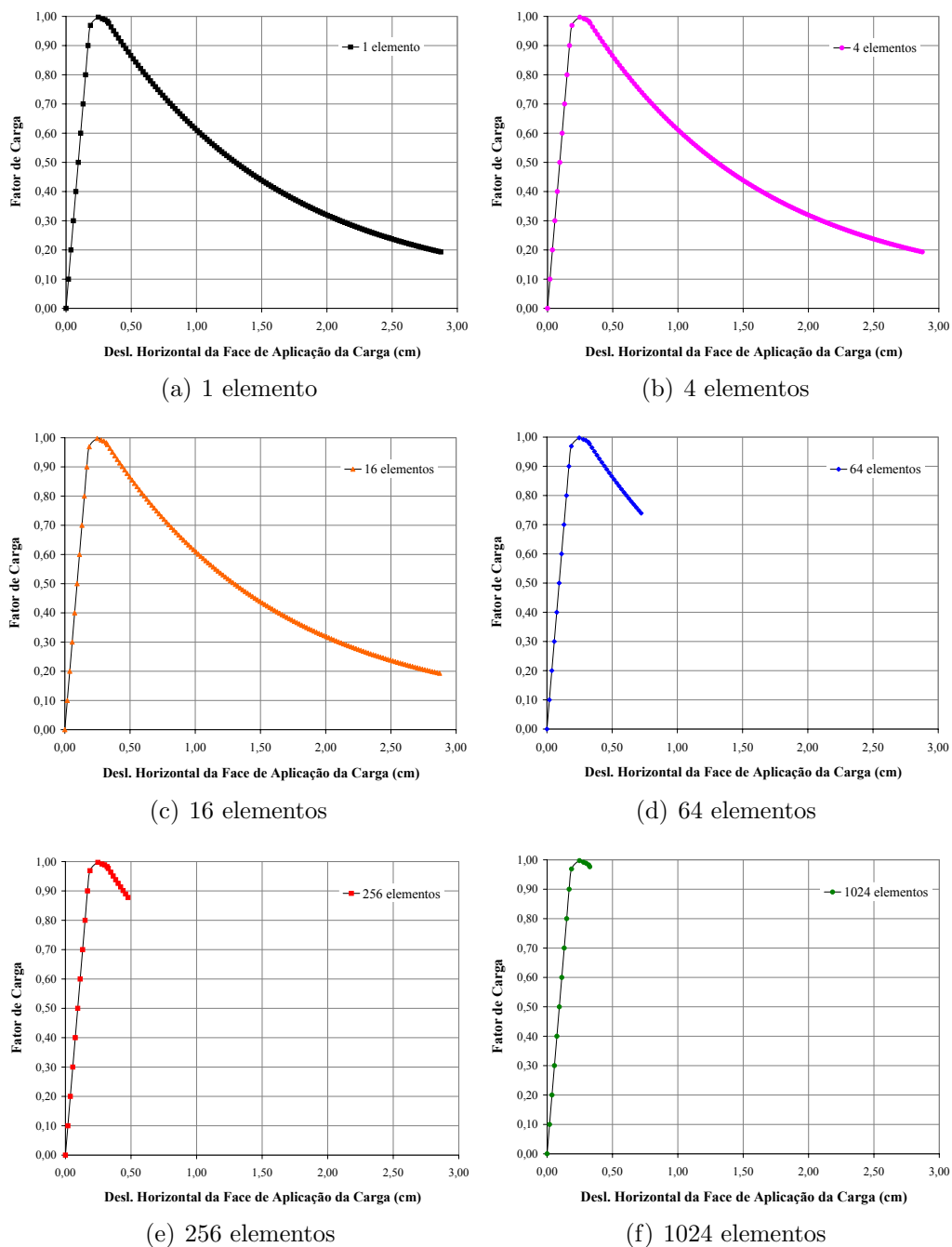


**Figura 8.46:** Trajetórias de equilíbrio correspondentes ao deslocamento horizontal da face de aplicação da carga na tração axial utilizando o modelo de microplanos com deformação equivalente



**Figura 8.47:** Trajetórias de equilíbrio correspondentes ao deslocamento horizontal da face de aplicação da carga na compressão axial utilizando o modelo de microplanos com deformação equivalente



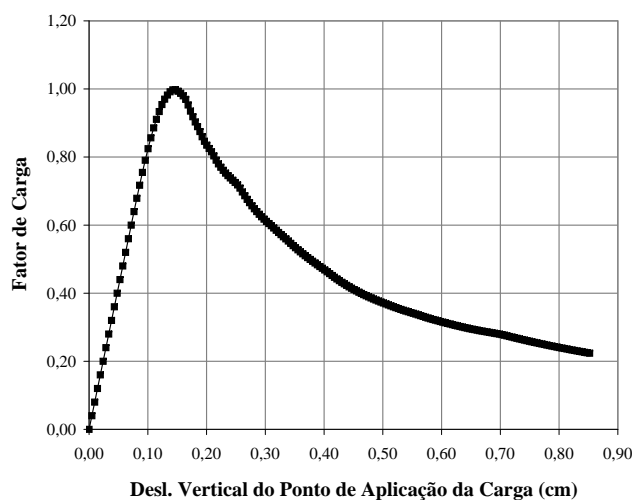


**Figura 8.48:** Trajetórias de equilíbrio correspondentes ao deslocamento horizontal da face de aplicação da carga no cisalhamento puro utilizando o modelo de microplanos com deformação equivalente

### 8.4.2 Flexão em Três Pontos

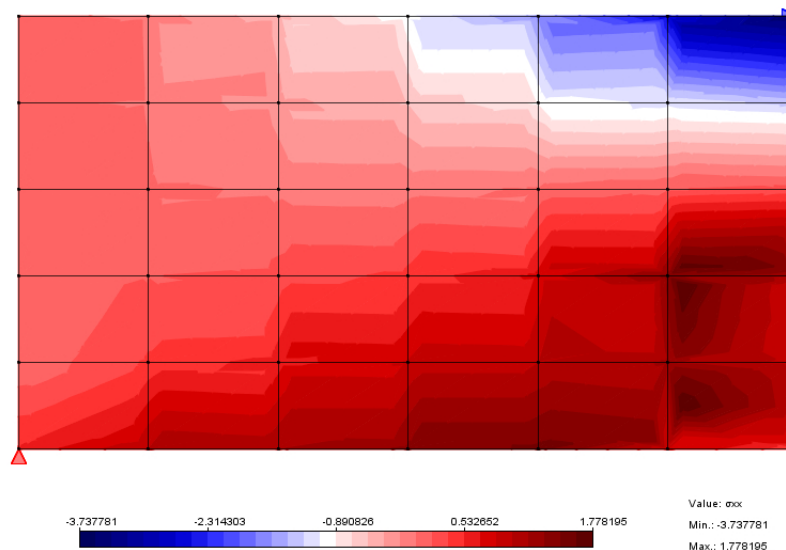
O exemplo de flexão em três pontos mostrado na seção 8.2.2 é agora analisado utilizando-se o modelo constitutivo de microplanos com deformação equivalente (Leukart e Ramm, 2006). A geometria do problema e a malha de elementos finitos adotadas são as mesmas das figuras 8.22 e 8.23. Para simular a trinca neste exemplo, retirou-se o apoio inferior direito mostrado na figura 8.23 e considerou-se um único material para toda a viga. Os parâmetros do material são aqueles listados na tabela 8.8.

Os seguintes dados da análise foram considerados: elementos finitos quadriláteros de 4 nós, em estado plano de tensões, com ordem de integração  $3 \times 3$ , carga de referência de  $P_0 = 118 \text{ kN}$ , tolerância para a convergência em força de  $10^{-3}$ , controle de comprimento de arco cilíndrico e fator de carga externa inicial de 0,04. A trajetória de equilíbrio obtida é mostrada na figura 8.49.



**Figura 8.49:** Trajetória de equilíbrio correspondente ao deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga na flexão em três pontos utilizando o modelo de microplanos com deformação equivalente

A distribuição de tensões normais  $\sigma_{xx}$  associada ao ponto limite de carga está mostrada na figura 8.50.



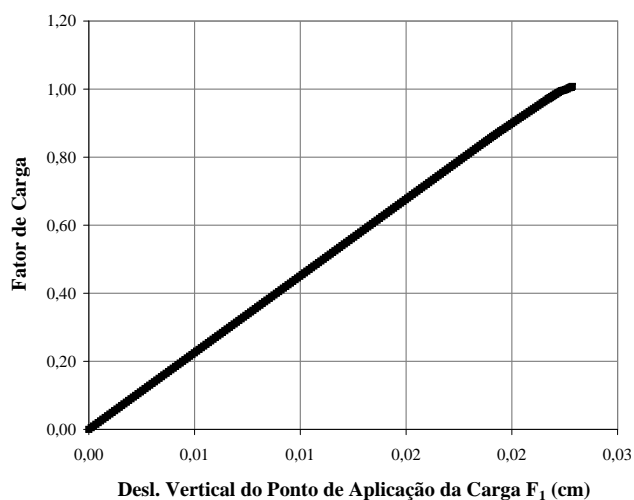
**Figura 8.50:** Distribuição de tensões normais  $\sigma_{xx}$  para a flexão em três pontos, simulando fissura inicial

### 8.4.3 Cisalhamento em Quatro Pontos

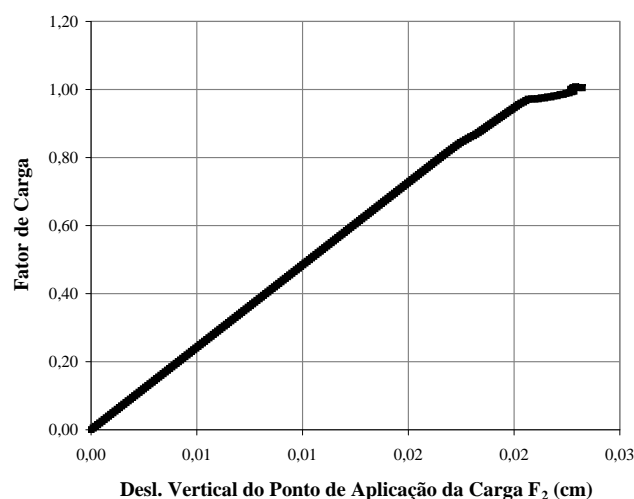
Em Leukart e Ramm (2006), este exemplo é analisado por meio do modelo de microplanos juntamente com uma formulação não-local. Se esta não é considerada, o autor afirma que a fragilidade do material aumenta com o aumento do refinamento da malha de elementos finitos e que as deformações tendem a ser localizar numa região que é governada pela escolha da discretização. Para confirmar isto, o exemplo de cisalhamento em quatro pontos mostrado anteriormente (seção 8.2.3) é, agora, analisado por meio do modelo de microplanos proposto por Leukart e Ramm (2006), sem a consideração das deformações não-locais.

A geometria do problema e a malha de elementos finitos adotadas são as mesmas da figura 8.25 e os parâmetros do material são os mesmos da tabela 8.8.

Os seguintes parâmetros da análise foram considerados: elementos finitos quadriláteros de 4 nós, em estado plano de tensões, com ordem de integração  $2 \times 2$ , cargas de referência  $F_1 = 205,45 \text{ kN}$  e  $F_2 = 0,1 F_1$ , tolerância para a convergência em força de  $10^{-3}$ , controle de comprimento de arco cilíndrico e fator de carga externa inicial de 0,005. As trajetórias de equilíbrio obtidas são mostradas nas figuras 8.51 e 8.52.



**Figura 8.51:** Trajetória de equilíbrio correspondente ao deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga  $F_1$  no cisalhamento em quatro pontos utilizando o modelo de microplanos com deformação equivalente



**Figura 8.52:** Trajetória de equilíbrio correspondente ao deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga  $F_2$  no cisalhamento em quatro pontos utilizando o modelo de microplanos com deformação equivalente

## 8.5 Exemplos de Microplanos para o Contínuo de Cosserat

Nesta seção, são apresentados os resultados obtidos para o Modelo de Microplanos com Contínuo de Cosserat proposto nesta Tese, utilizando-se a definição

de deformação equivalente semelhante à proposta por de Vree et al. (1995) (equações 6.77 e 6.78). Inicialmente, apresentam-se os resultados de tração, compressão e cisalhamento puros. Em seguida, este modelo é empregado no exemplo de flexão em três pontos.

Os parâmetros do material estão na tabela 8.9. A definição desses parâmetros partiu daqueles encontrados na literatura (Leukart e Ramm, 2006; Peerlings et al., 1998) para o contínuo clássico e de investigações realizadas durante as simulações apresentadas.

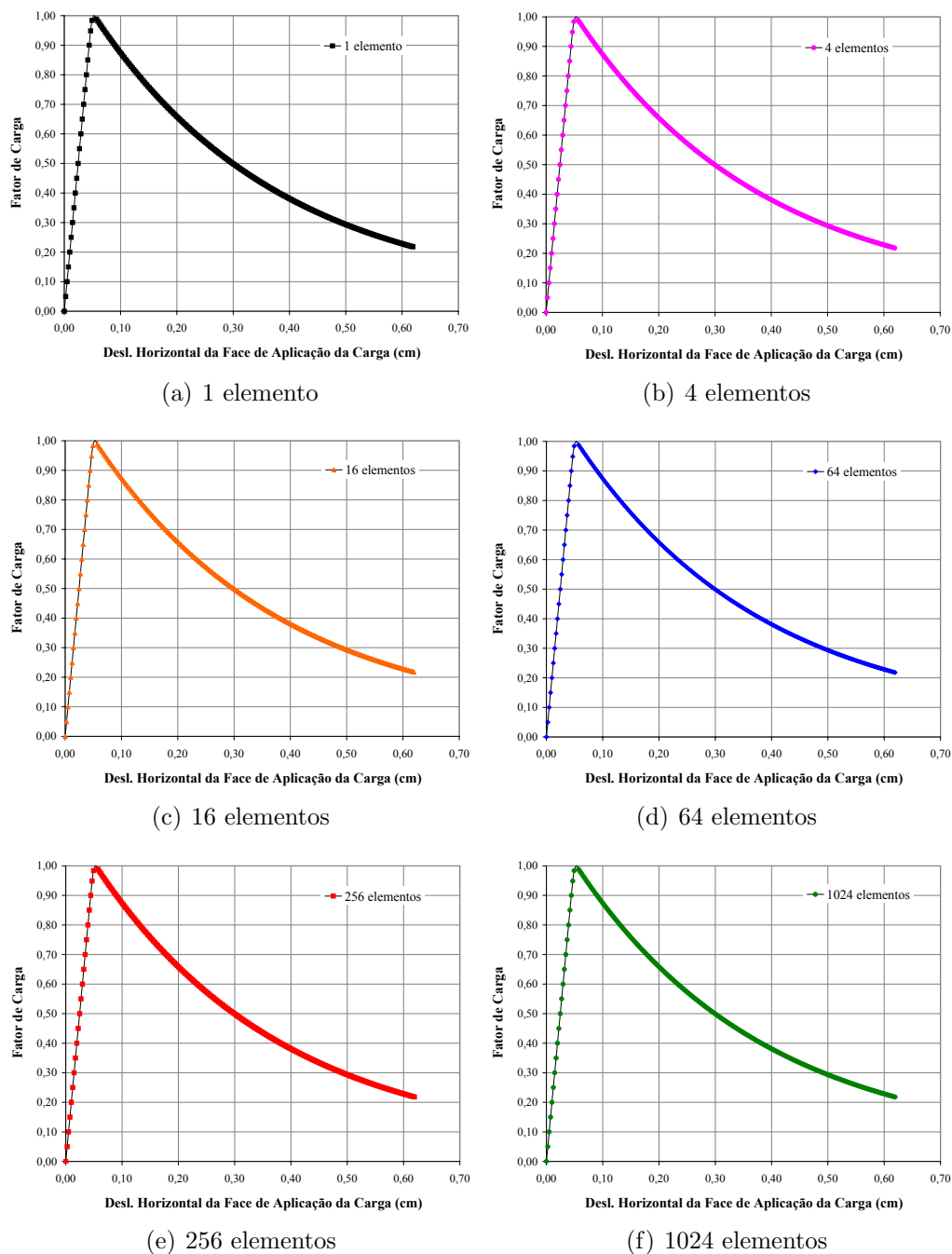
**Tabela 8.9:** Parâmetros do material para os exemplos utilizando o modelo de microplanos para o contínuo de Cosserat

|   |             |
|---|-------------|
| Módulo de elasticidade longitudinal ( $E$ )                                   | = 35000 MPa |
| Coefficiente de Poisson ( $\nu$ )   | = 0,15      |
| Comprimento característico à flexão ( $L_f$ )                                 | = 50 cm     |
| Módulo de cisalhamento rotacional ( $\alpha$ )                                | = 6250 MPa  |
| Máxima degradação em deformação ( $\alpha_\gamma^{mic}$ )                     | = 0,96      |
| Máxima degradação em microcurvatura ( $\alpha_\kappa^{mic}$ )                 | = 0,95      |
| Taxa de crescimento do dano em deformação ( $\beta_\gamma^{mic}$ )            | = 300       |
| Taxa de crescimento do dano em microcurvatura ( $\beta_\kappa^{mic}$ )        | = 25        |
| Deformação equivalente inicial em deformação ( $\kappa_{0\gamma}^{mic}$ )     | = 0,0005    |
| Deformação equivalente inicial em microcurvatura ( $\kappa_{0\kappa}^{mic}$ ) | = 0,0047    |
| Razão entre as resistências à tração e à compressão ( $r$ )                   | = 10        |

### 8.5.1 Tração, Compressão e Cisalhamento Puros

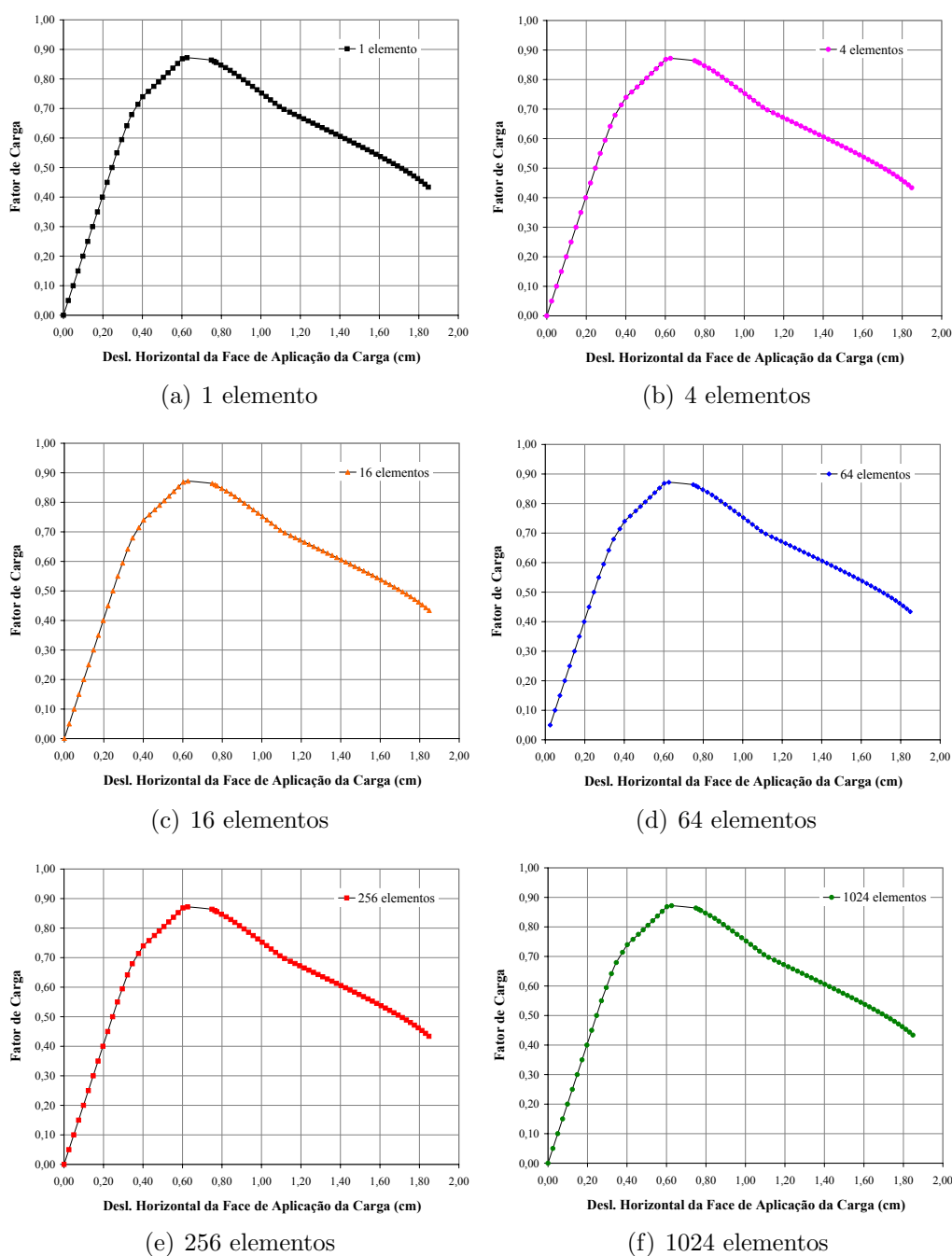
As configurações geométricas, de carga e condições de vínculo, bem como as discretizações aqui utilizadas são as mesmas da seção 8.2.1 (figuras 8.18 e 8.19).

Para o exemplo de tração pura, os seguintes parâmetros foram considerados: elementos finitos quadrilaterais de 4 nós, em estado plano de tensões, com ordem de integração  $2 \times 2$ , carga de referência de  $P_0 = 17230 \text{ kN}$ , tolerância para a convergência em força de  $10^{-4}$ , controle de deslocamento generalizado e fator de carga externa inicial de 0,05. As trajetórias de equilíbrio obtidas estão mostradas na figura 8.53.



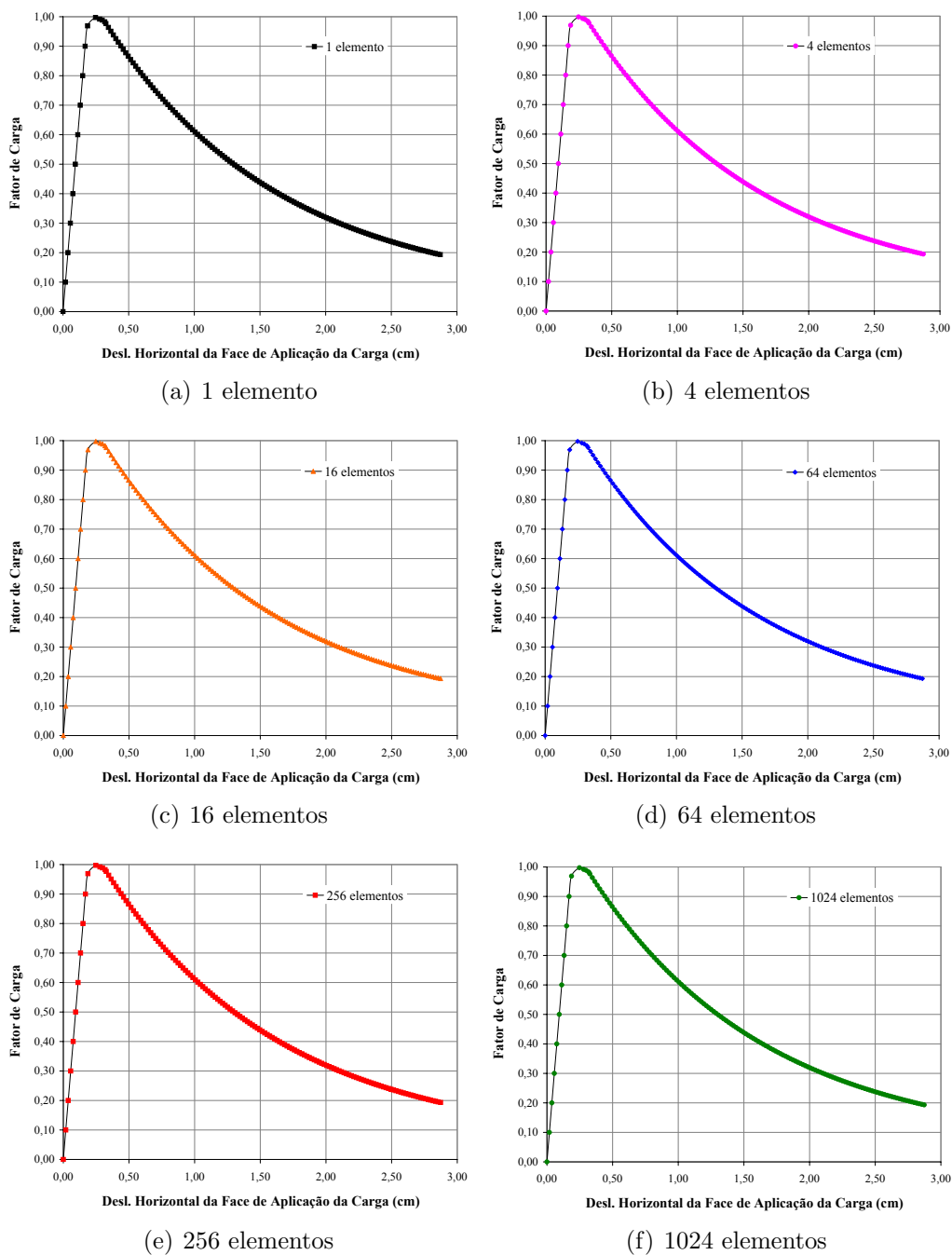
**Figura 8.53:** Trajetórias de equilíbrio correspondentes ao deslocamento horizontal da face de aplicação da carga na tração axial utilizando microplanos com contínuo de Cosserat

Para o exemplo de compressão pura, os dados utilizados são os mesmos do exemplo de tração axial supracitados, exceto a carga de referência, que teve seu valor aumentado de 10 vezes. As trajetórias de equilíbrio obtidas estão mostradas na figura 8.54.



**Figura 8.54:** Trajetórias de equilíbrio correspondentes ao deslocamento horizontal da face de aplicação da carga na compressão axial utilizando microplanos com contínuo de Cosserat

Para o exemplo de cisalhamento puro, os dados são os mesmos do exemplo de tração axial supracitados, exceto a carga de referência, a qual vale  $P_0 = 28500 \text{ kN}$ , e o fator de carga externa inicial de 0,1. As trajetórias de equilíbrio obtidas estão mostradas na figura 8.55.



**Figura 8.55:** Trajetórias de equilíbrio correspondentes ao deslocamento horizontal da face de aplicação da carga no cisalhamento puro utilizando microplanos com contínuo de Cosserat

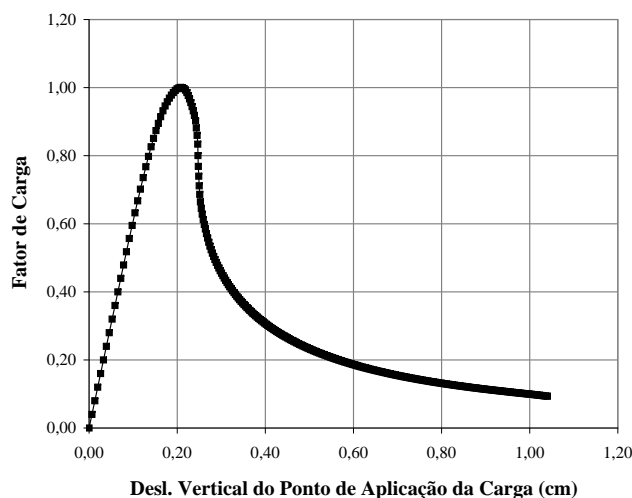


### 8.5.2 Flexão em Três Pontos

O exemplo de flexão em três pontos mostrado na seção 8.2.2 é agora analisado, utilizando-se o Modelo de Microplanos com Contínuo de Cosserat. A geometria do problema e a malha de elementos finitos adotadas são as mesmas das figuras 8.22 e 8.23.

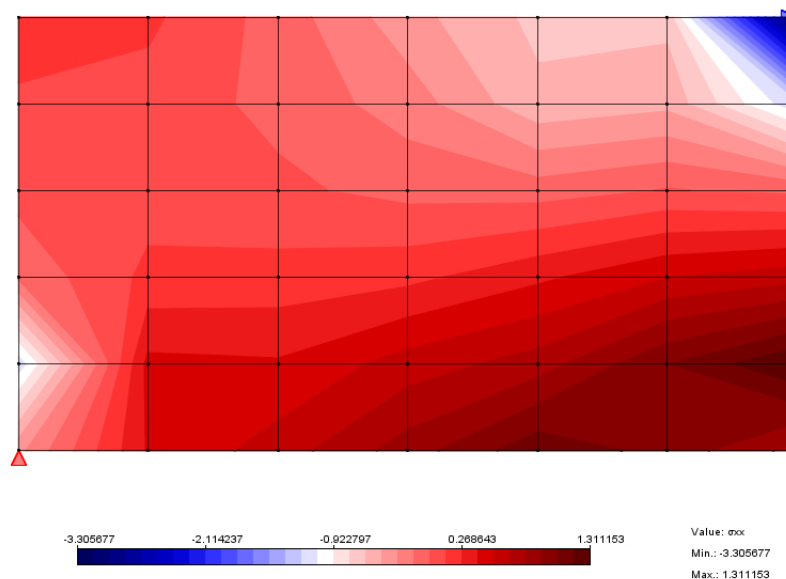
Os parâmetros do material utilizados são os mesmos apresentados na tabela 8.9.

Os seguintes dados da análise foram considerados: elementos finitos quadriláterais de 4 nós, em estado plano de tensões, com ordem de integração  $3 \times 3$ , carga de referência  $P_0 = 167 \text{ kN}$ , tolerância para a convergência em força de  $10^{-3}$ , controle de comprimento de arco cilíndrico e fator de carga externa inicial de 0,04. A trajetória de equilíbrio obtida está mostrada na figura 8.56.



**Figura 8.56:** Trajetória de equilíbrio correspondente ao deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga na flexão em três pontos utilizando microplanos com contínuo de Cosserat

A distribuição de tensões normais  $\sigma_{xx}$  associada ao ponto limite de carga está mostrada na figura 8.57. Pode-se notar que a região mais tracionada da viga encontra-se logo acima da fissura inicial considerada.



**Figura 8.57:** Distribuição de tensões normais  $\sigma_{xx}$  para a flexão em três pontos utilizando microplanos com contínuo de Cosserat

## 8.6 Exemplos de Microplanos para o Contínuo com Microexpansão

Nesta seção, são apresentados os resultados obtidos com o Modelo de Microplanos para o Contínuo com Microexpansão proposto nesta Tese, utilizando-se a definição de deformação equivalente semelhante à proposta por de Vree et al. (1995) (equações 6.148, 6.149 e 6.150). Inicialmente, apresentam-se os resultados para os ensaios de tração, compressão e cisalhamento puros. Em seguida, este modelo é empregado no exemplo de flexão em três pontos. Por fim, utiliza-se o modelo para o exemplo de tração com entalhe assimétrico.

Os parâmetros do material estão na tabela 8.10. A definição desses parâmetros partiu daqueles encontrados na literatura (Leukart e Ramm, 2006; Peerlings et al., 1998) para o contínuo clássico e de investigações realizadas durante as simulações apresentadas, observando-se que os parâmetros correspondentes aos utilizados para o modelo de microplanos com contínuo de Cosserat foram mantidos (ver tabela 8.9).

**Tabela 8.10:** Parâmetros do material para os exemplos utilizando o modelo de microplanos para o contínuo com microexpansão

|  |                  |
|--|------------------|
| Módulo de elasticidade longitudinal ( $E$ )                    | = 35000 MPa      |
| Coefficiente de Poisson ( $\nu$ )                              | = 0,15           |
| Comprimento característico à flexão ( $L_f$ )                  | = 50 cm          |
| Módulo de cisalhamento rotacional ( $\alpha$ )                 | = 6250 MPa       |
| Parâmetro elástico C   | = -16666,667 MPa |
| Parâmetro elástico H   | = 50000 MPa      |
| Comprimento característico à tração ( $L_a$ )                  | = 10 cm          |
| Máxima degradação $\alpha_{\varphi\gamma}^{mic}$               | = 0,96           |
| Máxima degradação $\alpha_{\kappa}^{mic}$                      | = 0,95           |
| Máxima degradação $\alpha_{\varphi_g}^{mic}$                   | = 0,96           |
| Taxa de crescimento do dano $\beta_{\varphi\gamma}^{mic}$      | = 300            |
| Taxa de crescimento do dano $\beta_{\kappa}^{mic}$             | = 25             |
| Taxa de crescimento do dano $\beta_{\varphi_g}^{mic}$          | = 300            |
| Deformação equivalente inicial $\kappa_{0\varphi\gamma}^{mic}$ | = 0,0005         |
| Deformação equivalente inicial $\kappa_{0\kappa}^{mic}$        | = 0,0047         |
| Deformação equivalente inicial $\kappa_{0\varphi_g}^{mic}$     | = 0,0005         |
| Razão entre as resistências à tração e à compressão ( $r$ )    | = 10             |

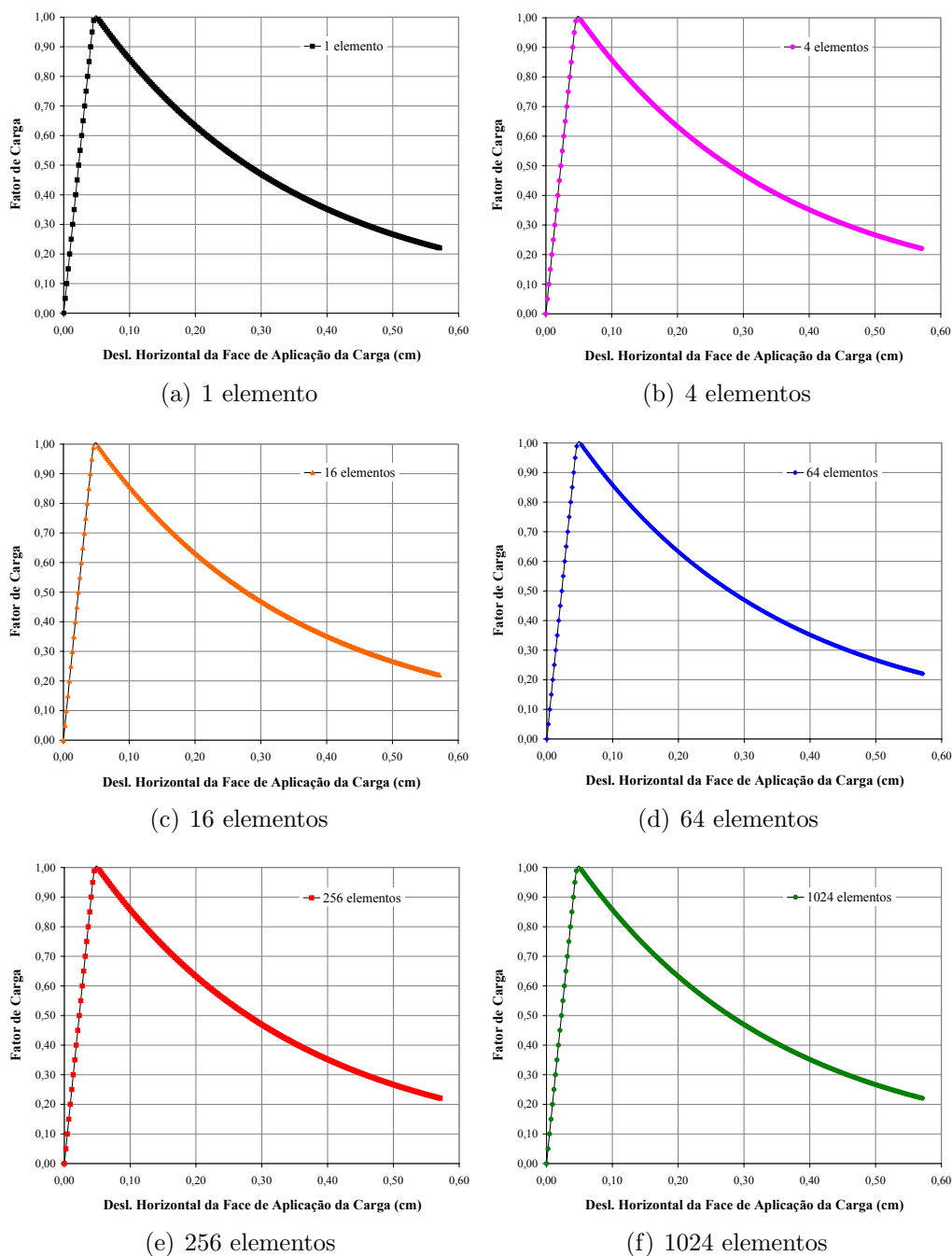
### 8.6.1 Tração, Compressão e Cisalhamento Puros

As configurações geométricas, de carga e condições de vínculo, bem como as discretizações aqui utilizadas são as mesmas da seção 8.2.1 (figuras 8.18 e 8.19).

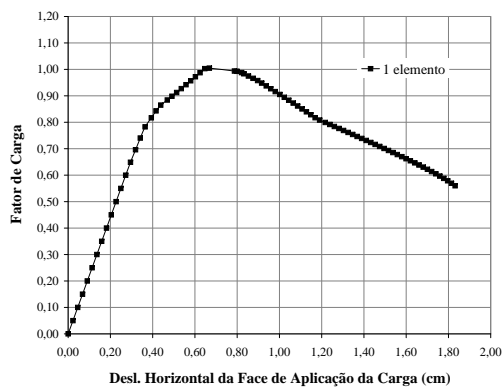
Para o exemplo de tração pura, os seguintes parâmetros foram considerados: elementos finitos quadrilaterais de 4 nós, em estado plano de tensões, com ordem de integração  $2 \times 2$ , carga de referência de  $P_0 = 15884 \text{ kN}$ , tolerância para a convergência em força de  $10^{-4}$ , controle de deslocamento generalizado e fator de carga externa inicial de 0,05. As trajetórias de equilíbrio obtidas estão mostradas na figura 8.58.

Para o exemplo de compressão pura, os dados utilizados são os mesmos do exemplo de tração axial supracitados, exceto a carga de referência, que teve seu valor aumentado de 10 vezes. As trajetórias de equilíbrio obtidas estão mostradas na figura 8.59.

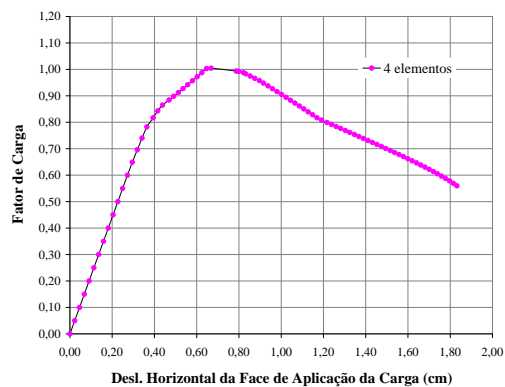
Para o exemplo de cisalhamento puro, os dados são os mesmos do exemplo de tração axial supracitados, exceto a carga de referência, a qual vale  $P_0 = 28500 \text{ kN}$ , e o fator de carga externa inicial de 0,1. As trajetórias de equilíbrio obtidas estão mostradas na figura 8.60.



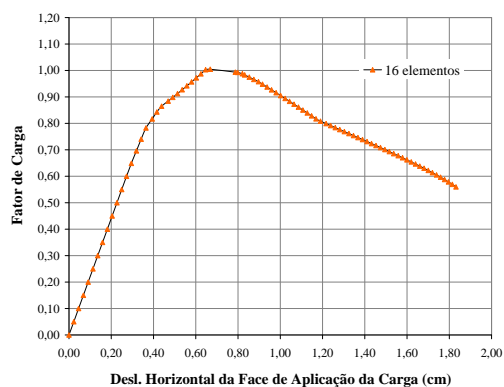
**Figura 8.58:** Trajetórias de equilíbrio correspondentes ao deslocamento horizontal da face de aplicação da carga na tração axial utilizando microplanos para o contínuo com microexpansão



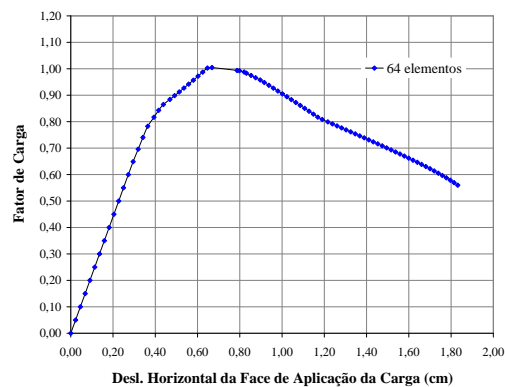
(a) 1 elemento



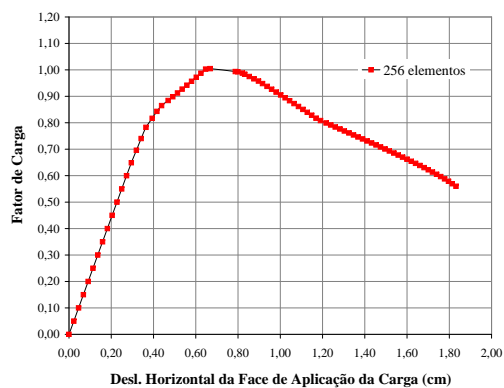
(b) 4 elementos



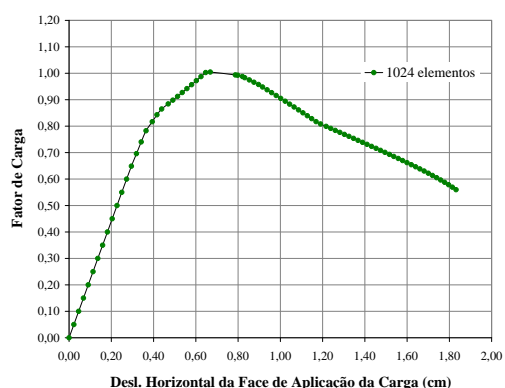
(c) 16 elementos



(d) 64 elementos

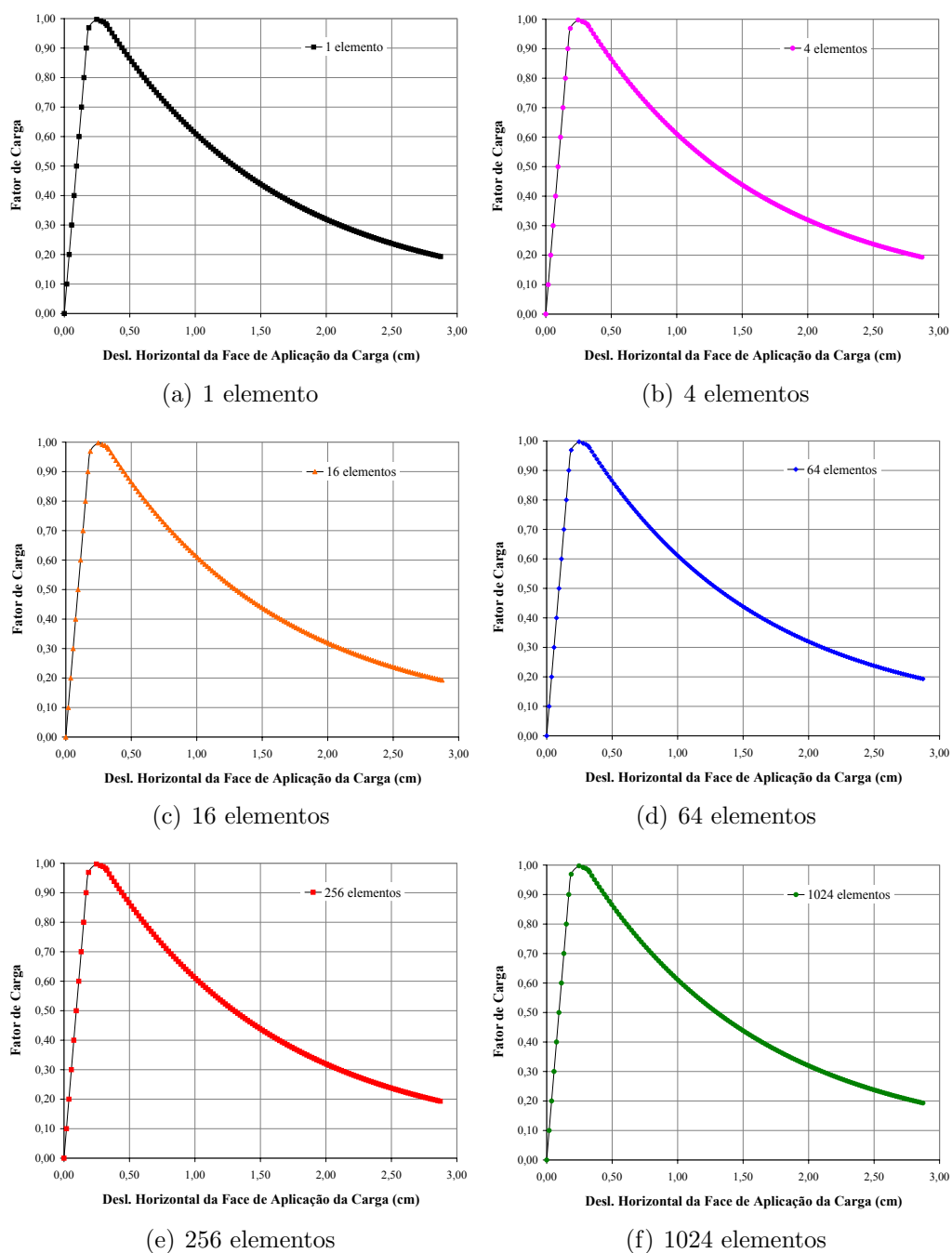


(e) 256 elementos



(f) 1024 elementos

**Figura 8.59:** Trajetórias de equilíbrio correspondentes ao deslocamento horizontal da face de aplicação da carga na compressão axial utilizando microplanos para o contínuo com microexpansão



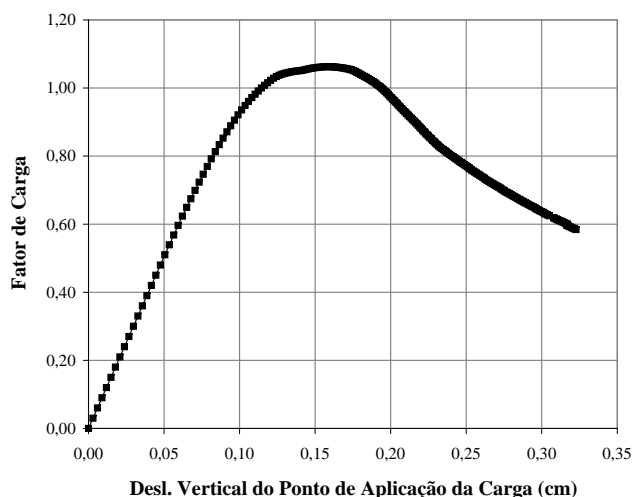
**Figura 8.60:** Trajetórias de equilíbrio correspondentes ao deslocamento horizontal da face de aplicação da carga no cisalhamento puro utilizando microplanos para o contínuo com microexpansão

### 8.6.2 Flexão em Três Pontos

Para simular este ensaio por meio do Modelo de Microplanos para o Contínuo com Microexpansão, adota-se a geometria da viga mostrada na figura 8.22. Sem considerar a simetria do problema, a viga é discretizada em 60 elementos finitos quadrilaterais de 8 nós, em estado plano de tensões, com ordem de integração  $3 \times 3$ .

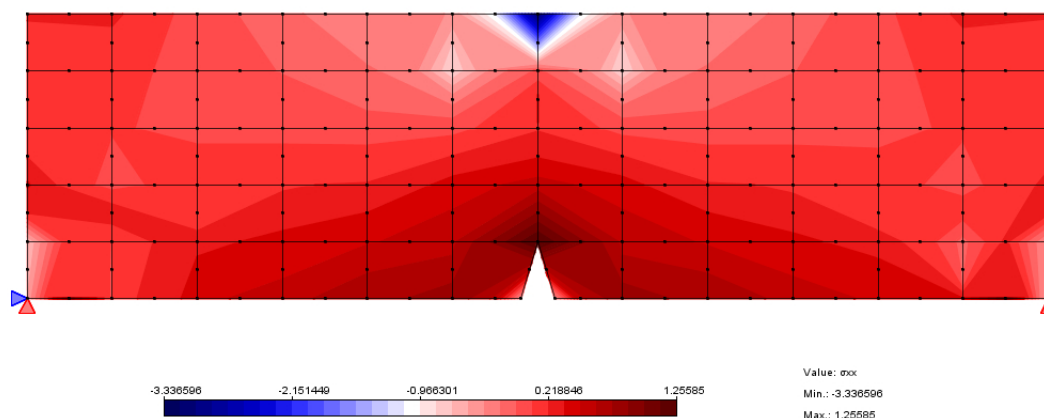
Os parâmetros do material utilizados são os mesmos apresentados na tabela 8.10, exceto  $\beta_{\varphi\gamma}^{mic} = 80$ .

Considerando-se a carga de referência  $P_0 = 680 \text{ kN}$  e admitindo-se uma tolerância para a convergência em força de  $10^{-3}$ , foi obtida a trajetória de equilíbrio da figura 8.61, adotando-se o controle de deslocamento generalizado e fator de carga externa inicial de 0,01.



**Figura 8.61:** Trajetória de equilíbrio correspondente ao deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga na flexão em três pontos utilizando microplanos para o contínuo com microexpansão

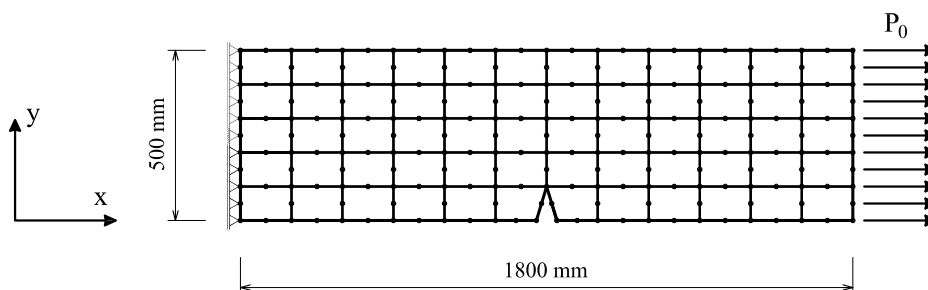
A distribuição de tensões normais  $\sigma_{xx}$  associada ao ponto limite de carga está mostrada na figura 8.62. Pode-se notar que a região mais tracionada da viga encontra-se logo acima da fissura inicial considerada.



**Figura 8.62:** Distribuição de tensões normais  $\sigma_{xx}$  para a flexão em três pontos utilizando microplanos para o contínuo com microexpansão

### 8.6.3 Tração Axial com Entalhe Assimétrico

Para esta simulação numérica, utiliza-se a configuração geométrica e de cargas mostrada na figura 8.63. A peça foi discretizada em 60 elementos finitos quadriláteros de 8 nós, em estado plano de tensões, com ordem de integração  $3 \times 3$ . A fissura inicial apresenta  $60 \text{ mm}$  de abertura e  $100 \text{ mm}$  de altura.



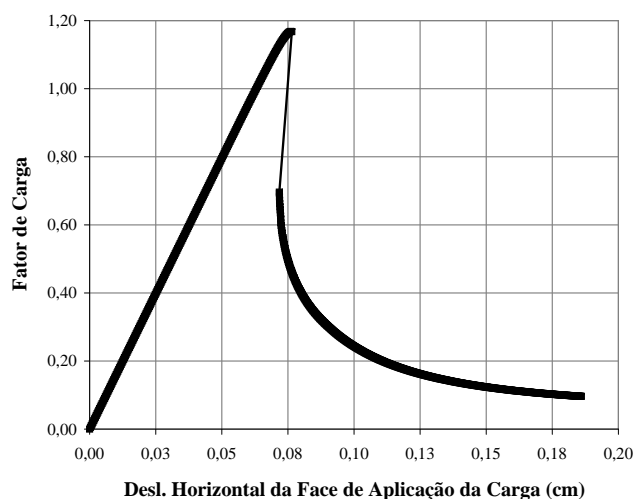
**Figura 8.63:** Geometria e discretização em 60 elementos finitos para a tração axial com entalhe assimétrico

O problema é analisado por meio do Modelo de Microplanos para o Contínuo com Microexpansão e os parâmetros do material são aqueles da tabela 8.10, exceto  $\kappa_{0\kappa}^{mic} = 0,01$ .

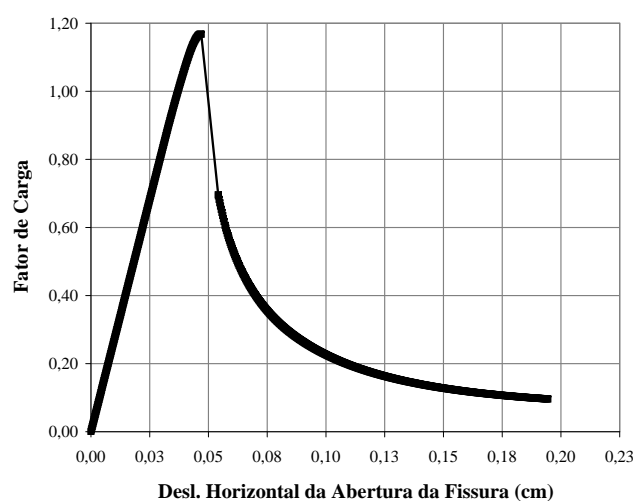
Considerando-se a carga de referência  $P_0 = 12 \text{ kN/cm}$  e admitindo-se uma tolerância para a convergência em força de  $10^{-3}$ , foram obtidas as trajetórias de



equilíbrio das figuras 8.64 e 8.65, adotando-se o controle de deslocamento generalizado e fator de carga externa inicial de 0,005. Percebe-se a existência de um “salto” em ambas as curvas obtidas, indicando a ocorrência de possíveis pontos limites de deslocamento, os quais não conseguiram ser representados pelo método de controle adotado para descrever os caminhos de equilíbrio.

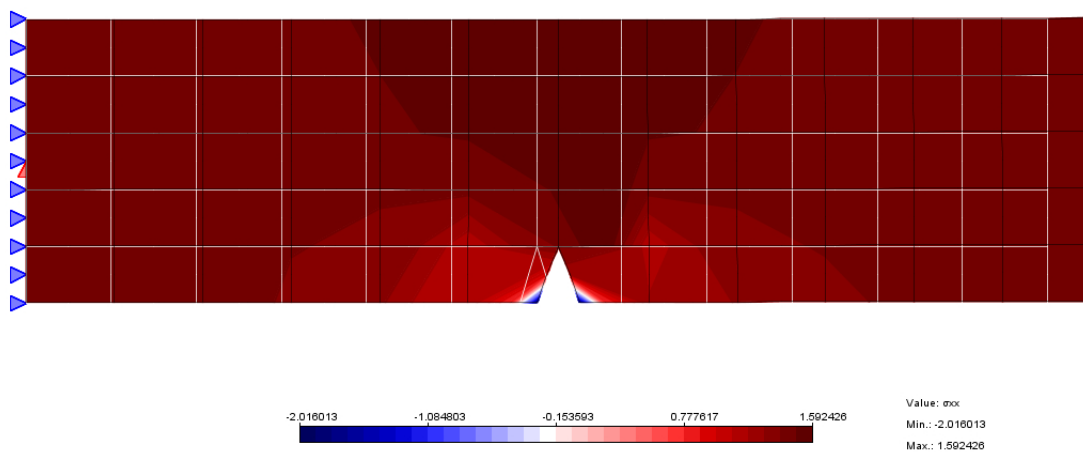


**Figura 8.64:** Trajetória de equilíbrio correspondente ao deslocamento horizontal da face de aplicação da carga na tração axial com entalhe assimétrico

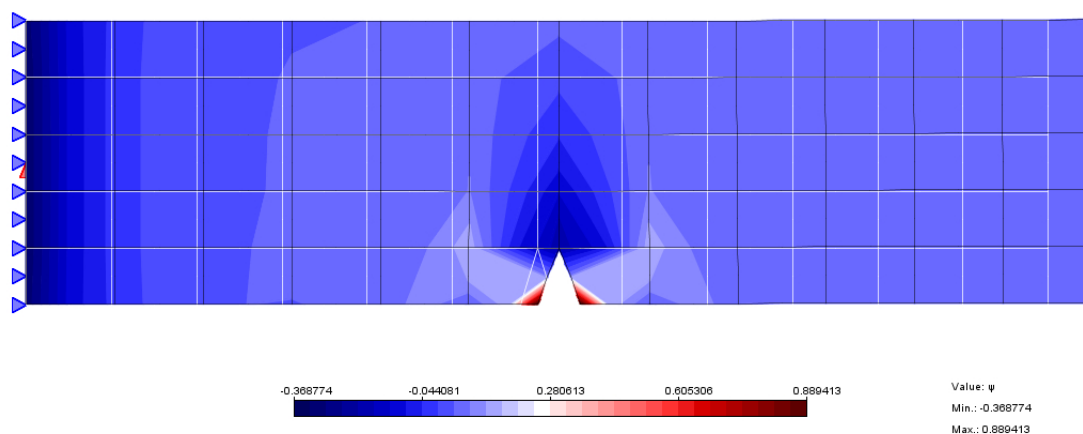


**Figura 8.65:** Trajetória de equilíbrio correspondente ao deslocamento horizontal da abertura da fissura na tração axial com entalhe assimétrico

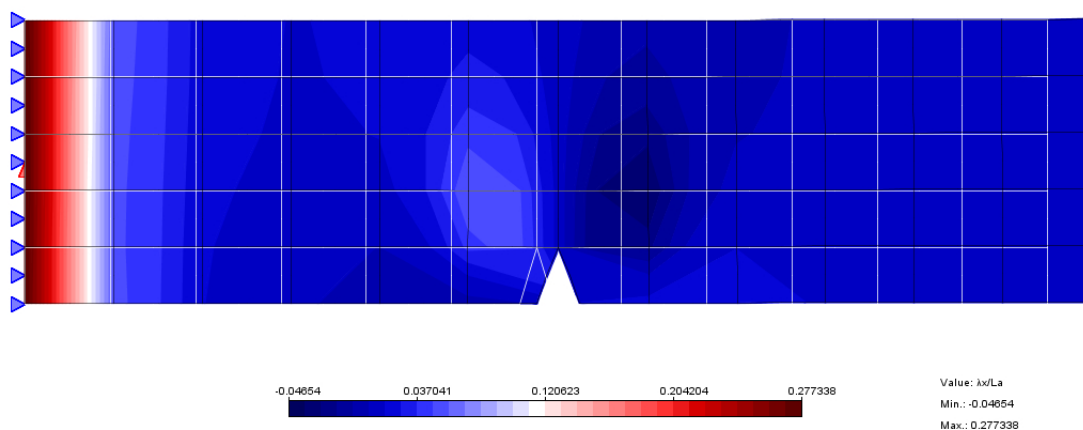
As distribuições dos campos de tensões  $\sigma_{xx}$ ,  $\psi$  e  $\lambda_x/L_a$  são mostradas nas figuras 8.66, 8.67 e 8.68.



**Figura 8.66:** Distribuição de tensões normais  $\sigma_{xx}$  para a tração axial com entalhe assimétrico



**Figura 8.67:** Distribuição de microtensões  $\psi$  para a tração axial com entalhe assimétrico



**Figura 8.68:** Distribuição de  $\lambda_x/L_a$  para a tração axial com entalhe assimétrico

## 8.7 Discussão dos Resultados

Nesta seção, são discutidos os resultados dos exemplos apresentados neste capítulo seguindo o agrupamento adotado na apresentação dos mesmos.

### 8.7.1 Elasticidade para Contínuos Generalizados

Os resultados dos exemplos elásticos lineares para contínuos generalizados validam a implementação destes modelos, uma vez que os resultados numéricos apresentados para o exemplo de flexão pura coincidem com os seus correspondentes analíticos.

Mesmo para o exemplo da barra tracionada composta por dois materiais, cuja solução analítica apresenta parcelas exponenciais (ver apêndice A), difíceis de serem representadas pelas funções de interpolação polinomiais de elementos finitos, percebe-se que os resultados numéricos estão próximos aos analíticos.

Estes exemplos lineares também mostram claramente que os comprimentos característicos intrínsecos aos contínuos generalizados permitem transitar entre vários níveis de observação. Isto pode ser percebido nas análises realizadas no apêndice A, onde também são comentadas as diferenças das soluções obtidas em relação àquelas do contínuo clássico.

### 8.7.2 Plasticidade para o Contínuo de Cosserat

No exemplo de tração pura com o modelo de plasticidade para o contínuo de Cosserat, observa-se que a curva fator de carga  $\times$  deslocamento é precocemente interrompida para a quarta malha adotada (figura 8.20(d)). Para as malhas de 256 (figura 8.20(e)) e 1024 (figura 8.20(f)) elementos, as trajetórias voltaram a ser descritas quase completamente, mostrando que o modelo apresenta instabilidades numéricas dependentes da malha de elementos finitos adotada. Para estas malhas, analisando-se os pontos de equilíbrio próximos ao último ponto obtido, observou-se que o estado de tensão deixa de ser uniforme, revelando a ocorrência de localização

de deformações numericamente induzida.

Entretanto, a referida localização não ocorreu para o exemplo de cisalhamento puro (figura 8.21). Este fato deve estar associado à presença do comprimento característico à flexão do contínuo de Cosserat, que auxilia na objetividade da malha de elementos finitos.

Para o exemplo de compressão pura, os resultados não foram apresentados, pois são idênticos (em módulo) aos do exemplo de tração pura, mostrando a inadequação deste modelo para materiais parcialmente frágeis, cujas diferenças de comportamento à tração e à compressão necessitam ser evidenciadas. No exemplo de flexão em três pontos, observa-se que a trajetória de equilíbrio não pôde ser completamente descrita (figura 8.24), mostrando a instabilidade deste modelo para estados de tração ou compressão dominantes. Isto pode estar associado à ausência, neste contínuo, de um comprimento intrínseco que regularize a solução nestes casos, diferentemente do que foi observado no exemplo de cisalhamento em quatro pontos, onde o comprimento característico à flexão do contínuo de Cosserat parece ter contribuído para a descrição do regime pós-crítico (figuras 8.26 e 8.27).

O problema da camada infinita sob cisalhamento, se analisado adotando-se o contínuo clássico, apresenta um estado de tensão uniforme. Para o desencadeamento do processo de localização de deformações, utilizando este contínuo, é necessário a introdução de uma imperfeição no modelo como, por exemplo, uma pequena redução no valor do escoamento inicial em uma determinada região da malha. Isto foi feito por de Borst (1991), onde tal região corresponde aos dois elementos finitos centrais de cada malha, observando que, para o contínuo clássico, todas as deformações localizam-se nestes dois elementos, independente do refinamento da malha, ou seja, a localização de deformações não se propaga e a extensão de sua zona não se amplia, ficando inteiramente governada pelo espaçamento da malha de elementos finitos. Além disso, ao se refinar a malha de elementos finitos, a solução torna-se instável no regime elastoplástico.

Como o contínuo micropolar permite a restrição adicional em microrrotações, observa-se a ocorrência, já na fase elástica, de uma distribuição não uniforme das deformações ao longo da altura da camada. Assim, não é necessário introduzir imperfeições ao modelo, o processo de localização de deformações ocorre naturalmente e desenvolve-se no eixo central da camada.

Ao contrário do contínuo clássico, quando a malha de elementos finitos é refinada, a extensão da zona de localização abrange uma determinada região e permanece constante. Isto pode ser percebido na figura 8.30, onde o estado deformado e a distribuição de deformações cisalhantes  $\gamma_{yx}$  são mostradas para as quatro discretizações adotadas, correspondentes ao último passo da análise. Na figura 8.29, são mostradas as curvas fator de carga  $\times$  deslocamento horizontal da borda superior da camada. Observa-se que, com o refinamento da malha, elas convergem para uma única solução. Percebe-se que a curva obtida para a discretização de 10 elementos finitos (malha mais grosseira) é um pouco diferente das demais, esta diferença é refletida na configuração deformada da camada e no tamanho da zona de localização, como pode ser visto na figura 8.30.

Por meio das figuras 8.31 e 8.32, percebe-se que o comprimento característico à flexão ( $L_f$ ) controla o comportamento frágil (ou dúctil) do material, bem como a extensão da zona de localização. Um valor pequeno para  $L_f$  implica numa extensão menor da zona de localização e a uma resposta mais frágil do comportamento do material.

Segundo de Borst (1991), os resultados obtidos não são frutos das condições de contorno adotadas, os principais fatores são a presença de um comprimento característico nas relações constitutivas e também o fato das equações que governam o problema permanecerem elípticas depois que o maior nível de carga é alcançado. Assim, é mostrado que a extensão da zona de localização é uma propriedade, agora, contida na descrição do contínuo.

O exemplo da camada infinita também é analisado por Li e Tang (2005),

porém o critério de escoamento de Drucker-Prager e a regra de fluxo plástico não-associada são utilizados para a análise do problema. Percebe-se que os resultados obtidos são bastante semelhantes aos aqui apresentados, apesar das diferenças do modelo de plasticidade adotado em ambos os casos.

Também para o exemplo de compressão com banda de cisalhamento, a utilização do contínuo clássico resulta numa zona de localização de deformações cada vez menor à medida que a malha de elementos finitos é refinada como mostram os autores Lages (1997) e de Borst (1991, 1993). Enquanto, para o contínuo micropolar, através destes trabalhos, percebe-se que, com o refinamento da malha, ocorre uma estabilização da zona de localização e das trajetórias de equilíbrio obtidas para o problema.

A implementação do modelo de plasticidade para o contínuo de Cosserat fica validada pelos resultados obtidos para os exemplos da camada infinita, iguais aos obtidos por de Borst (1991, 1993), e da compressão com banda de cisalhamento, iguais aos obtidos por Lages (1997).

### **8.7.3 Microplanos com Relaxação Cinemática para o Contínuo Clássico**

Para este modelo, o exemplo de tração pura apresentou localização de deformações numericamente induzida a partir da terceira malha (figura 8.37(c)), interrompendo o processo antes da trajetória de equilíbrio ser completamente descrita. O mesmo ocorreu para o exemplo de compressão pura, a partir da quarta malha (figura 8.38(d)) e para o exemplo de cisalhamento puro já a partir da segunda malha (figura 8.39(b)). Essas localizações foram observadas analisando-se os pontos de equilíbrio próximos ao último ponto obtido e percebendo-se que o estado de tensão deixa de ser uniforme.

O uso de leis tensão  $\times$  deformação locais e a ausência de qualquer mecanismo de regularização na cinemática do contínuo clássico parecem contribuir para

a instabilidade do modelo, como mostram os exemplos de tração, compressão e cisalhamento puros. Contudo, os resultados apresentados para os exemplos de flexão em três pontos e cisalhamento em quatro pontos (figuras 8.41, 8.44 e 8.45) estão de acordo com aqueles observados na literatura (Ozbolt e Bazant, 1992; Silva, 2002), mas não há garantias de que os mesmos são reproduzidos em quaisquer situações.

Uma desvantagem clara dos modelos de microplano que usam relações tensão  $\times$  deformação obtidas experimentalmente é a quantidade e dificuldade de obtenção dos parâmetros que descrevem tais relações.

#### **8.7.4 Microplanos com Deformação Equivalente para o Contínuo Clássico**

Este modelo de microplanos, que considera deformações equivalentes como controladoras do dano, mostrou-se satisfatório quanto aos resultados obtidos com o refinamento da malha para os exemplos de tração e compressão puros (figuras 8.46 e 8.47), não apresentando indícios de localização de deformações numericamente induzida. Este fato parece estar associado à substituição de leis tensão  $\times$  deformação locais pelo uso de deformações equivalentes.

Entretanto, no exemplo de cisalhamento puro, a partir da quarta malha (figura 8.48(d)), a trajetória de equilíbrio começa a ser interrompida, mostrando a instabilidade do modelo quanto ao estado de deformações cisalhantes, bem como a presença de localização de deformações numericamente induzidas observada nos últimos pontos de equilíbrio obtidos por meio de um estado de tensão não-uniforme.

Apesar do exemplo de flexão em três pontos ter sido descrito (figura 8.49), observam-se nas trajetórias de equilíbrio obtidas para o exemplo de cisalhamento em quatro pontos (figuras 8.51 e 8.52) que o modelo torna-se instável na iminência do processo de amolecimento. Este fato concorda com os resultados obtidos para os ensaios de tração, compressão e cisalhamento puros, visto que no exemplo de flexão em três pontos tem-se estado de tração dominante, enquanto no exemplo de cisalhamento em quatro pontos altas tensões de cisalhamento necessitam ser

representadas.

Isto vem confirmar que algum mecanismo de regularização necessita ser adicionado a este modelo de microplanos, conforme afirma Leukart e Ramm (2006). Neste caso, o autor defende a utilização de formulações não-locais para se resolver o problema. De forma análoga, nesta Tese, sugere-se que os contínuos generalizados sejam capazes de servir como agentes estabilizadores em problemas desta natureza para meios parcialmente frágeis.

### **8.7.5 Microplanos para Contínuos Generalizados**

Segundo alguns autores (de Borst, 1991, 1993; Lages, 1997; Peerlings et al., 1998; Li e Tang, 2005; Leukart e Ramm, 2006), a utilização de modelos constitutivos locais em simulações numéricas de problemas com localização de deformações é inadequada, pois as deformações tendem a se localizar numa região de dimensão nula, conforme a malha de elementos finitos é refinada, ou seja, nenhuma energia é dissipada durante este processo. Dessa forma, a descrição do fenômeno de localização de deformações é totalmente influenciada pela discretização do problema. Observa-se que este comportamento patológico não é devido ao tratamento numérico, mas à negligência na modelagem contínua do meio analisado.

Os modelos de microplanos para os contínuos de Cosserat e com microexpansão, propostos nesta Tese, mostraram-se muito eficientes no que diz respeito aos resultados obtidos com o refinamento da malha nos ensaios de tração, compressão e cisalhamento puros (figuras 8.53, 8.54, 8.55, 8.58, 8.59 e 8.60), não apresentando localização de deformações numericamente induzida.

Estes modelos parecem conseguir reproduzir também resultados com estados de tensões conjugados, como mostram os exemplos apresentados de flexão em três pontos (figura 8.61) e tração com entalhe assimétrico (figuras 8.64 e 8.65). Entretanto, a definição dos parâmetros dos modelos utilizados nestes casos, partiu daqueles encontrados na literatura (Leukart e Ramm, 2006; Peerlings et al., 1998) para o



contínuo clássico e de investigações realizadas durante as simulações apresentadas, não podendo-se afirmar até que ponto eles se mostram adequados.

No exemplo de tração com entalhe assimétrico, os “saltos” observados nas trajetórias de equilíbrio das figuras 8.64 e 8.65 talvez consigam ser descritos se for realizado um refinamento da malha de elementos finitos em torno da fissura inicial da peça analisada.

A comparação dos resultados obtidos para os ensaios de tração e compressão puros do modelo de Leukart e Ramm (2006) (figuras 8.46 e 8.47) com os dos modelos propostos nesta Tese (figuras 8.53, 8.54, 8.58, e 8.59) só permite concluir que o uso de deformações equivalentes oferece mais estabilidade ao processo numérico. Outras conclusões não podem ser retiradas, pois não se pode garantir que todas as parcelas de dano foram ativadas nestes modelos para contínuos generalizados.

Quanto à comparação dos resultados obtidos para o exemplo de cisalhamento puro do modelo de Leukart e Ramm (2006) (figura 8.48) com os dos modelos propostos nesta Tese (figuras 8.55 e 8.60), pode-se dizer que o comprimento característico à flexão, intrínsecos aos contínuos generalizados, parece promover a regularização da solução, o que não ocorre no modelo com contínuo clássico.

Não foi possível avaliar o comportamento dos modelos formulados para estados combinados de tensão, nos exemplos de flexão em três pontos e cisalhamento em quatro pontos, uma vez que, nestes casos, é fundamental que se disponha dos valores corretos das variáveis que controlam a degradação do meio ( $\kappa_0^{mic}$ ,  $\kappa_0^{\kappa}$ ,  $\kappa_0^{\varphi_g}$ ,  $\beta_{\varphi\gamma}^{mic}$ ,  $\beta_{\kappa}^{mic}$ ,  $\beta_{\varphi_g}^{mic}$ ,  $\alpha_{\varphi\gamma}^{mic}$ ,  $\alpha_{\kappa}^{mic}$  e  $\alpha_{\varphi_g}^{mic}$ ). Dentre estas variáveis, acredita-se que  $\kappa_0$  seja a mais importante, visto que é esta que define a ativação ou não do processo de dano. Uma proposta de obtenção desses parâmetros, para trabalhos futuros, encontra-se no apêndice B.

# Capítulo 9

## Conclusões

Neste trabalho, utilizou-se o método dos elementos finitos como ferramenta para a modelagem e análise de estruturas submetidas a fenômenos fisicamente não-lineares. A utilização deste recurso por muitos pesquisadores, em vários segmentos da engenharia, tem sido amplamente difundida, principalmente em engenharia de estruturas, onde muitos dos referidos fenômenos são melhor compreendidos com a aplicação deste método.

Em uma modelagem computacional por meio do método dos elementos finitos, alguns aspectos precisam ser investigados e implementados de forma eficiente para melhor compreensão dos mecanismos de funcionamento e colapso das estruturas em materiais parcialmente frágeis. Dessa forma, são de importância fundamental as técnicas de solução das equações não-lineares de equilíbrio e as hipóteses relativas à obtenção das deformações (descrição cinemática do meio) e aquelas necessárias à obtenção do tensor constitutivo do material (descrição estática do meio).

O programa **INSANE**, contemporâneo deste trabalho, necessitou das implementações que se referem ao processo incremental-iterativo para a solução de equações não-lineares, em que alguns métodos de obtenção de trajetórias de equilíbrio foram inseridos no programa (capítulo 2).

Uma vez que a modelagem constitutiva de meios parcialmente frágeis ainda tem sido alvo de muitos estudos encontrados na literatura, este trabalho teve por objetivo esclarecer a evolução dessas teorias, e principalmente, propor e formular

novos modelos constitutivos que utilizem as teorias mais promissoras neste ramo do conhecimento. Também foi objetivo deste trabalho, disponibilizar os modelos propostos em um programa de elementos finitos e testá-los.

Neste sentido, o trabalho que aqui se apresenta realizou uma significativa revisão da descrição dos contínuos micropolar e com microexpansão (capítulos 3 e 4), a fim de compreender sua cinemática e suas demandas em relação à formulação de elementos finitos. A utilização destes contínuos em um processo de análise não-linear foi iniciada com o modelo de plasticidade associada para o contínuo micropolar.

O modelo constitutivo de microplanos (capítulo 5) também exigiu o entendimento de seu funcionamento, principalmente ao que se refere às hipóteses adotadas para a sua concepção, ou seja, à restrição aplicada para decomposição das deformações nos microplanos, à definição do modelo constitutivo nos microplanos, incluindo a escolha das grandezas que controlam a degradação do meio, e ao processo de homogeneização para obtenção das grandezas macroscópicas.

A principal contribuição deste trabalho e que, sem dúvida, ainda necessita ser aperfeiçoada, é a formulação que acopla a modelagem de microplanos com a descrição cinemática dos contínuos generalizados (micropolar e com microexpansão).

Sendo o programa **INSANE** baseado no paradigma de programação orientada a objetos, sua expansão foi feita sem alterações nas ferramentas básicas já existentes. Assim, todos os recursos necessários para a utilização dos modelos supracitados foram implementados, de maneira a interagirem com o restante do programa e permitir o processamento de problemas que os utilizem (capítulo 7).

A análise dos resultados obtidos nas simulações numéricas apresentadas no capítulo 8 permitem algumas conclusões.

Os exemplos numéricos lineares desenvolvidos com os contínuos generalizados mostraram que o método dos elementos finitos é capaz de reproduzir os campos de tensões e deslocamentos de problemas onde esses contínuos são utilizados. O exemplo de flexão pura com o contínuo de Cosserat mostrou que os resultados numéricos

reproduzem com alta precisão os resultados analíticos apresentados no apêndice A, mesmo adotando-se uma malha grosseira de elementos finitos. Para o exemplo da barra tracionada composta por dois materiais, bons resultados foram obtidos em relação aos analíticos, apesar dos campos de tensões e deslocamentos apresentarem parcelas exponenciais, que dificultam a reprodução de comportamentos por meio de elementos finitos, cujas funções de interpolação são polinomiais.

Os exemplos apresentados de plasticidade com o contínuo de Cosserat estão de acordo com aqueles expostos na literatura (de Borst, 1991, 1993; Lages, 1997) e confirmam a importância de uma grandeza com dimensão de comprimento nas relações constitutivas. Estes exemplos mostraram que o comprimento característico à flexão, presente no contínuo de Cosserat, auxilia na objetividade da malha de elementos finitos, bem como na determinação da extensão da zona de localização de deformações, pelo menos quando há predominância do modo de cisalhamento.

Os exemplos de microplanos com o contínuo clássico também se mostraram de acordo com aqueles encontrados na literatura (Ozbolt e Bazant, 1992; Silva, 2002; Leukart e Ramm, 2006), porém quando a malha de elementos finitos é refinada, estes modelos de microplanos apresentam-se instáveis, propiciando a ocorrência de localização de deformações numericamente induzida. Em geral, o modelo de microplanos com deformação equivalente (Leukart e Ramm, 2006) mostrou-se mais estável do que aquele com relaxação cinemática (Ozbolt et al., 2001). Entretanto, a adequação destes modelos a meios parcialmente frágeis é discutida por alguns autores (Bazant e Ozbolt, 1990; Bazant e Luzio, 2004; Leukart e Ramm, 2006) que defendem o uso de formulações não-locais juntamente com o modelo constitutivo de microplanos.

Os modelos constitutivos aqui desenvolvidos garantem a correta descrição do contínuo utilizado, ou seja, a formulação de microplanos com o contínuo de Cosserat é capaz de se comportar como o contínuo clássico quando o comprimento característico à flexão é reduzido a zero, assim como, o modelo de microplanos para o

contínuo com microexpansão é capaz de reproduzir os resultados dos contínuos micropolar e clássico quando alguns dos seus parâmetros elásticos são alterados. Isto foi constatado em diversos testes, alguns dos quais documentados no apêndice A.

A exigência básica de que os modelos de microplanos devem reproduzir as respostas lineares dos materiais também foi alcançada, tanto para o contínuo micropolar quanto para o com microexpansão.

Os ensaios de tração, compressão e cisalhamento puros para estudo de dependência de malha foram realizados para todos os modelos constitutivos implementados e constatou-se que, a partir de um determinado refinamento da malha de elementos finitos, localização de deformações numericamente induzida ocorre nos modelos de plasticidade com o contínuo de Cosserat e nos modelos de microplanos com o contínuo clássico. Essas localizações impedem que a resposta do material seja corretamente obtida e, na maioria dos casos, o processo de solução é interrompido prematuramente. Os modelos de microplanos com contínuos generalizados mostraram-se satisfatórios em relação a esta análise, permitindo que seus comprimentos característicos agissem para impedir que tais localizações ocorressem.

Apesar de ter havido uma constante preocupação em reduzir o número de parâmetros do material durante o desenvolvimento das formulações propostas, bem como de adotar, na medida do possível, aqueles com sentidos físicos mais claros e intuitivos, sem dúvida, a maior dificuldade de obtenção de resultados com os modelos aqui propostos é a determinação desses parâmetros, em menor escala aqueles que se referem à descrição do contínuo e em maior escala aqueles que tratam da degradação do meio. Ainda é preciso fazer investigações neste sentido, mas uma metodologia para obtenção dos parâmetros destes modelos foi proposta no apêndice B para trabalhos futuros. Dessa forma, algumas sugestões para continuação da pesquisa são listadas a seguir.

## 9.1 Sugestão para Trabalhos Futuros

Para dar continuidade ao trabalho aqui realizado, sugere-se uma minuciosa pesquisa dos parâmetros do material necessários à utilização dos modelos constitutivos aqui propostos e, conseqüentemente, a investigação do desempenho desses modelos quando aplicados a problemas diversos.

Tendo em vista que as formulações dos modelos constitutivos propostos foram desenvolvidas no formato tridimensional, sugere-se a implementação de modelos de análises tridimensionais para os contínuos micropolar e com microexpansão.

Uma vez que a plasticidade associada foi implementada para o contínuo de Cosserat, sugere-se tal implementação para o contínuo com microexpansão. Adicionalmente, outros critérios de escoamento podem ser desenvolvidos para estes contínuos.

Sugere-se que o método de controle de deformações, desenvolvido por Fuina (2004), seja implementado no sistema **INSANE** e possa ser utilizado juntamente com os modelos constitutivos aqui propostos, devido à grande importância que as estratégias de solução desempenham no processo de análise não-linear.

Sugere-se também a utilização de modelos com contínuo generalizado para simular o efeito de tamanho em problemas estruturais.

# Apêndice A

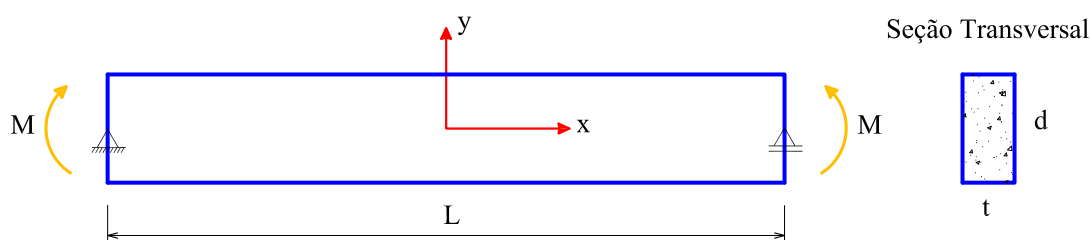
## Exemplos Lineares Analíticos com Contínuos Generalizados

A seguir, são apresentados os exemplos de uma viga biapoiada sob flexão pura e de uma viga engastada sob flexão simples com soluções analíticas que permitem comparar a teoria da elasticidade para o Contínuo de Cosserat em relação ao Contínuo Clássico. Em seguida, a solução analítica de uma barra tracionada constituída por dois materiais diferentes é apresentada, aplicando-se a teoria da elasticidade para o Contínuo com Microexpansão, onde são feitos alguns comentários em relação ao Contínuo Clássico.

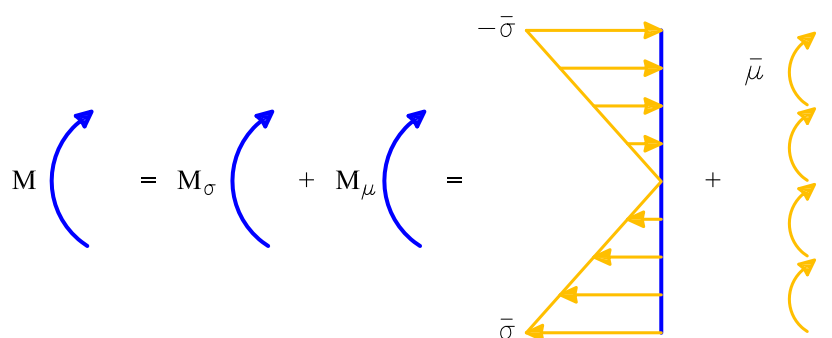
### A.1 Viga Biapoiada sob Flexão Pura

Neste exemplo, deseja-se determinar o campo de tensões que garante um estado de flexão pura para a viga biapoiada, bem como a influência do comprimento característico do material à flexão na solução do problema, com relação à solução clássica.

A figura A.1 mostra a viga sob flexão pura, onde o momento fletor  $M$  é constante ao longo da peça. Supõe-se que este momento seja causado por duas parcelas:  $M_\sigma$ , resultante de uma distribuição linear das tensões  $\sigma_{11}$ , e  $M_\mu$ , resultante de uma distribuição uniforme das tensões-momento  $\mu_{13}$  (figura A.2).



**Figura A.1:** Viga biapoiada sob flexão pura



**Figura A.2:** Particionamento do momento fletor e as correspondentes distribuições das tensões e tensões-momento

Por meio das figuras A.1 e A.2 pode-se obter

$$M_{\sigma} = \frac{\bar{\sigma} d^2 t}{6} \quad (\text{A.1})$$

com o momento de inércia dado por

$$I = \frac{t d^3}{12} \quad (\text{A.2})$$

Assim, as distribuições de tensão e tensão-momento ficam

$$\sigma_{11}(x, y) = -\frac{M_{\sigma} y}{I} = -\frac{2\bar{\sigma} y}{d} \quad (\text{A.3})$$

$$\mu_{13}(x, y) = \frac{M_{\mu}}{A} = \bar{\mu} \quad (\text{A.4})$$

onde  $A$  é a área da seção transversal da viga.

As distribuições acima satisfazem às equações de equilíbrio do contínuo de Cosserat. Através das relações constitutivas, chega-se às seguintes distribuições das deformações.

$$\gamma_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} = -\frac{2\bar{\sigma} y}{Ed} \quad (\text{A.5})$$



$$\gamma_{22} = -\frac{\nu\sigma_{11}}{E} = \frac{2\nu\bar{\sigma}y}{Ed} \quad (\text{A.6})$$

$$\gamma_{12} = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$\gamma_{21} = 0 \quad (\text{A.8})$$

$$\kappa_{13} = \frac{\mu_{13}}{2GL_f^2} = \frac{\bar{\mu}}{2GL_f^2} \quad (\text{A.9})$$

$$\kappa_{23} = 0 \quad (\text{A.10})$$

Com o campo de deformações assim definido e utilizando-se as equações 3.31 e 3.32, obtém-se

$$u_{1,1} = -\frac{2\bar{\sigma}y}{Ed} \quad (\text{A.11})$$

$$u_{2,2} = \frac{2\nu\bar{\sigma}y}{Ed} \quad (\text{A.12})$$

$$u_{2,1} - \phi_3 = 0 \quad (\text{A.13})$$

$$u_{1,2} + \phi_3 = 0 \quad (\text{A.14})$$

$$\phi_{3,1} = \frac{\bar{\mu}}{2GL_f^2} \quad (\text{A.15})$$

$$\phi_{3,2} = 0 \quad (\text{A.16})$$

onde  $u_1$ ,  $u_2$  e  $\phi_3$  correspondem, respectivamente, aos campos de deslocamento horizontal, de deslocamento vertical e da microrrotação em torno do eixo perpendicular ao plano da viga.

Ao integrar as equações A.11 a A.16 e considerar as condições de contorno da figura A.1, determinam-se os campos de deslocamentos e microrrotação. Dessa forma, obtém-se a seguinte restrição entre  $\bar{\sigma}$  e  $\bar{\mu}$  para que a distribuição adotada seja possível:

$$\bar{\sigma} = \frac{6\bar{\mu}}{dr^2} \quad (\text{A.17})$$

onde

$$r = \frac{2d_f}{d} \quad (\text{A.18})$$

representa um fator de escala entre a dimensão do volume de controle e a altura da viga. Conforme a equação A.18, quanto maior a altura da viga, menor o valor de  $r$ , fazendo mais sentido a utilização da elasticidade clássica, que considera o material homogêneo.

A restrição imposta pela equação A.17 surge quando se assume um valor não nulo para o parâmetro  $\alpha$ . Caso contrário, o problema admitiria infinitos particionamentos de  $M_\sigma$  e  $M_\mu$  (Lages, 1997). Isto ocorre porque, conforme explicado anteriormente, a condição  $\alpha > 0$  é que garante o acoplamento dos campos de deslocamentos e de microrrotações nas equações diferenciais de equilíbrio.

Com a utilização do campo de tensões (equações A.3 e A.4) e manipulando-se as equações A.11 a A.18, chega-se a

$$M_\sigma = \frac{M}{1 + r^2} \quad (\text{A.19})$$

$$M_\mu = \frac{Mr^2}{1 + r^2} \quad (\text{A.20})$$

$$\bar{\sigma} = \frac{Md}{2I(1 + r^2)} \quad (\text{A.21})$$

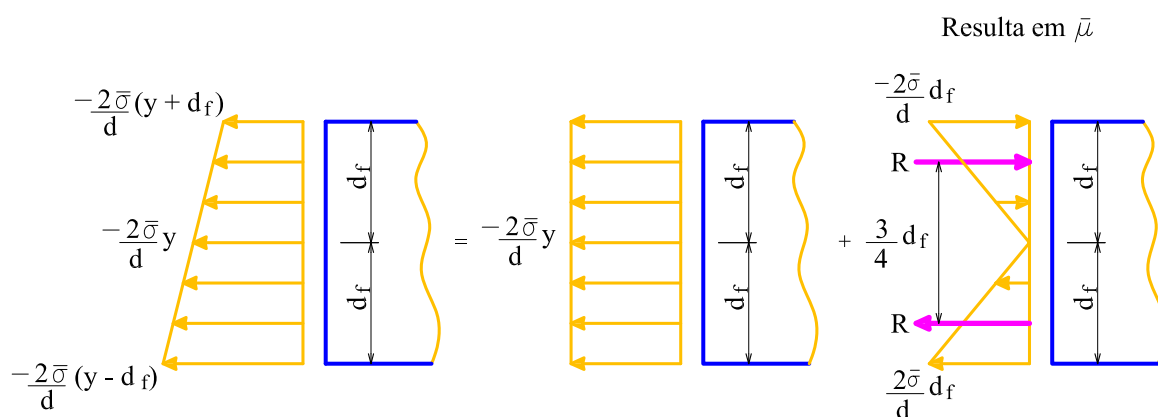
$$\bar{\mu} = \frac{Mr^2}{A(1 + r^2)} \quad (\text{A.22})$$

$$u_1(x, y) = -\frac{Mxy}{EI(1 + r^2)} \quad (\text{A.23})$$

$$u_2(x, y) = \frac{M}{8EI(1 + r^2)}(4\nu y^2 + 4x^2 - L^2) \quad (\text{A.24})$$

$$\phi_3(x, y) = \frac{Mx}{EI(1 + r^2)} \quad (\text{A.25})$$

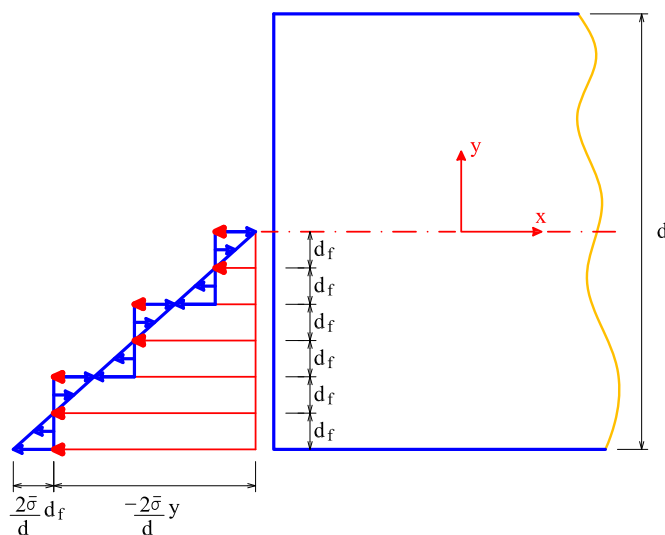
Considerando-se a distribuição linear das tensões  $\sigma_{11}$  ao longo de uma faixa de espessura  $2d_f$ , como mostra a figura A.3, é possível interpretar o surgimento da tensão-momento.



**Figura A.3:** Tensão-momento  $\bar{\mu}$  resultante da distribuição linear da tensão  $\sigma_{11}$

Na figura A.3, a expressão “resulta em  $\bar{\mu}$ ” pode ser verificada calculando-se as resultantes R e o momento causado por este binário. Dividindo-se este momento pela área da seção transversal, obtém-se  $\bar{\mu}$ , cujo valor é confirmado pela equação A.22.

A figura A.4 foi feita para esclarecer melhor a relação entre a cinemática e a distribuição de tensões e tensões-momento numa viga de altura d, para o caso em estudo. Percebe-se, então, que as microrrotações que aparecem numa faixa  $2d_f$  não são consideradas pela solução clássica, apesar de influenciar na cinemática da viga.



**Figura A.4:** Cinemática e distribuição de tensões e tensões-momento numa viga

A seguir, são apresentados alguns gráficos dos campos de tensões e de deslocamentos, de acordo com as equações A.3, A.4 e de A.19 a A.25. Estes gráficos foram

feitos aumentando-se a altura da viga ( $d$ ), ou seja, diminuindo-se  $r$ , fazendo com que a peça fique mais homogênea e o resultado obtido possa ser comparado à solução clássica.

Os valores dos parâmetros utilizados para se fazer os gráficos estão listados nas tabelas A.1 e A.2, em unidades de força ( $uf$ ) e unidades de comprimento ( $uc$ ) compatíveis.

**Tabela A.1:** Valores adotados para  $d$  e correspondentes valores de  $r$

| $d$ ( $uc$ ) | $r$ | $d$ ( $uc$ ) | $r$   |
|--------------|-----|--------------|-------|
| 2            | 1   | 10           | 0,2   |
| 2,5          | 0,8 | 30           | 0,067 |
| 10/3         | 0,6 | 50           | 0,04  |
| 5            | 0,4 | 100          | 0,02  |

**Tabela A.2:** Parâmetros da análise para o exemplo de flexão pura

| Parâmetros | Valores   | Parâmetros | Valores           |
|------------|-----------|------------|-------------------|
| $d_f$      | 1 $uc$    | $L_f$      | $\sqrt{0,4}$ $uc$ |
| M          | 2 $uf.uc$ | E          | 1 $uf/uc^2$       |
| t          | 1,5 $uc$  | G          | 1/2,4 $uf/uc^2$   |
| $\nu$      | 0,2       | L          | 10 $uc$           |

De acordo com os gráficos apresentados na figura A.5 e suas correspondentes equações, pode-se fazer as seguintes observações:

1. constata-se que a solução clássica é reproduzida, com exceção do coeficiente de redução ( $1/(1+r^2)$ ) do momento fletor, o qual vale 1 fazendo-se  $r$  tender a zero (solução clássica), o que tornaria  $\phi_3$  (equação A.25) igual à macrorrotação;
2. à medida que  $r \rightarrow 0$  os valores de  $\mu_{13}$  e de  $\phi_3$  tendem a zero, pois estas grandezas não existem na análise clássica;
3. assim como na análise clássica, quanto maior o valor de  $d$  (ou menor o valor de  $r$ ), a viga apresenta maior inércia à flexão, resultando em valores menores

de tensões e deslocamentos.

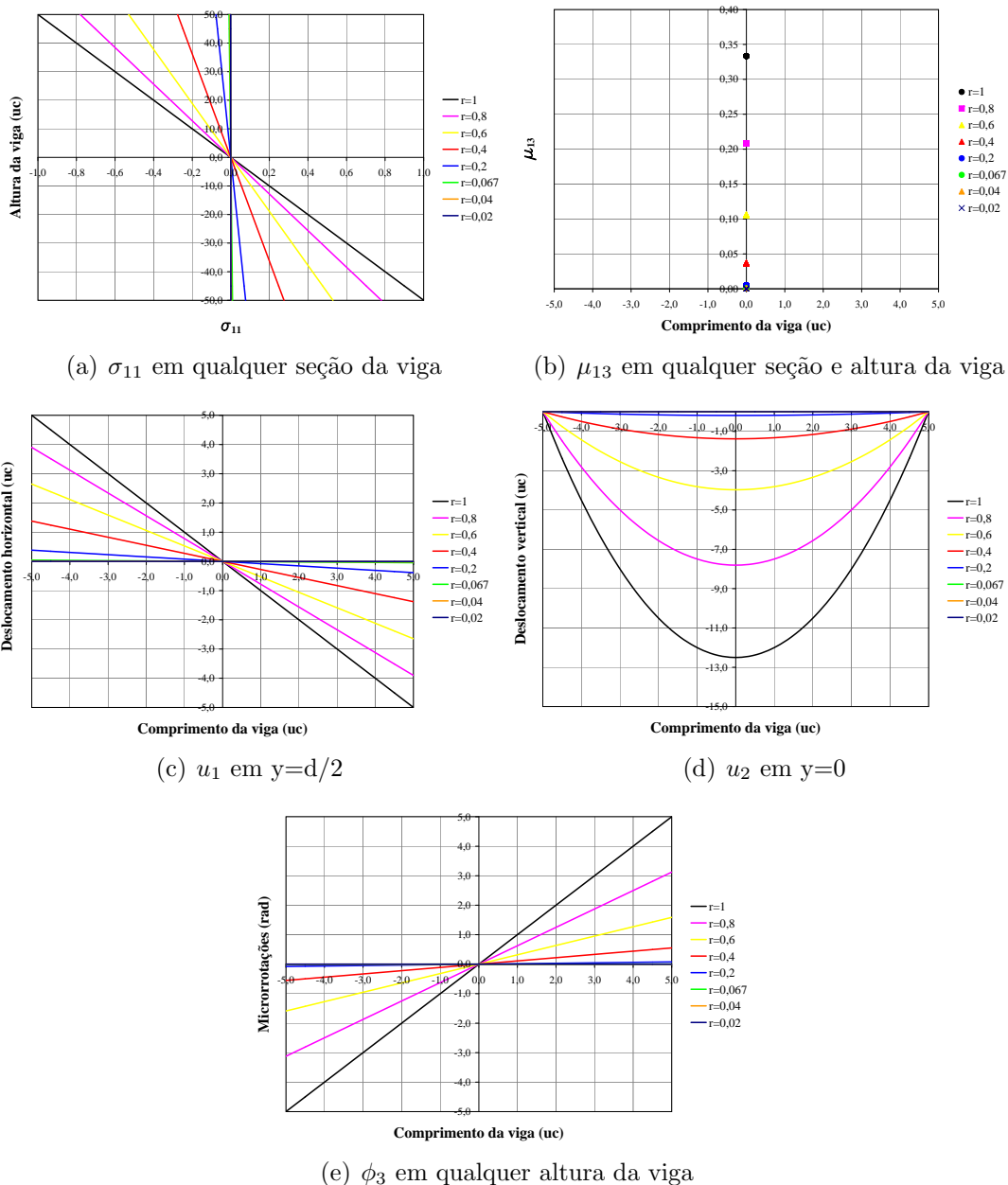
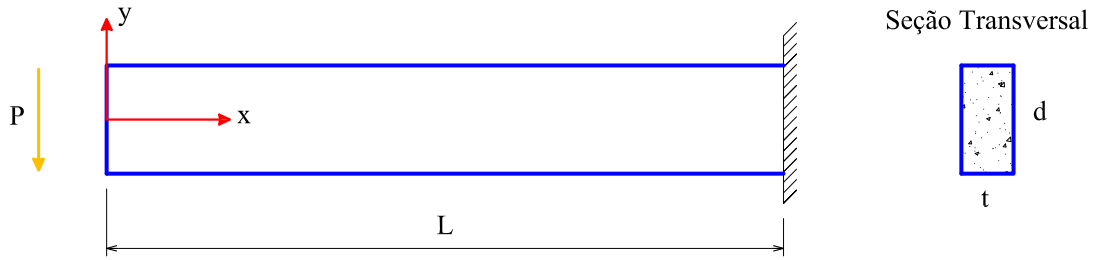


Figura A.5: Campos de tensões e de deslocamentos para o exemplo de flexão pura

## A.2 Viga Engastada sob Flexão Simples

Neste exemplo, deseja-se determinar os campos de deslocamentos e de microrrotação, bem como as distribuições de tensões e deformações para uma viga engastada sob flexão simples, mostrada na figura A.6.



**Figura A.6:** Viga engastada sob flexão simples

Admite-se como válido, ao longo do comprimento da viga, o particionamento do momento fletor e considera-se a superposição de efeitos: flexão pura + cisalhamento. No caso da flexão pura (exemplo anterior) mostrou-se que os momentos são dados pelas equações A.19 e A.20. Dessa forma, estas são utilizadas neste exemplo, como mostram as equações A.26 e A.27.

$$M_{\sigma}(x) = \frac{M(x)}{1+r^2} = -\frac{Px}{1+r^2} = -\bar{P}x \quad (\text{A.26})$$

$$M_{\mu}(x) = \frac{M(x)r^2}{1+r^2} = -\frac{Pr^2x}{1+r^2} = -\bar{P}r^2x \quad (\text{A.27})$$

onde

$$\bar{P} = \frac{P}{1+r^2} \quad (\text{A.28})$$

Observa-se, nesta equação, que quando  $r$  tender a zero,  $\bar{P} = P$ , recaindo na solução clássica.

Inicialmente, dispõe-se das seguintes distribuições de tensões:

$$\sigma_{11}(x, y) = -\frac{M_{\sigma}y}{I} = -\frac{(-\bar{P}x)y}{I} = \frac{\bar{P}xy}{I} \quad (\text{A.29})$$

$$\mu_{13}(x, y) = \frac{M_{\mu}}{A} = -\frac{\bar{P}r^2x}{A} \quad (\text{A.30})$$

Utilizando-se a equação diferencial de equilíbrio (3.93) correspondente à direção  $x$  e aplicando-se a condição natural de contorno  $\sigma_{21} = 0$  para as bordas superior e inferior da viga, chega-se à expressão

$$\sigma_{21}(x, y) = \frac{3\bar{P}}{2A} \left[ 1 - \left( \frac{2y}{d} \right)^2 \right] \quad (\text{A.31})$$

Desenvolvendo-se a equação constitutiva referente a  $\mu_{13}$  (3.46) com a ajuda das equações 3.32, 3.81, 3.83 e combinando-se o resultado à equação A.30, obtém-se

$$\phi_3(x, y) = -\frac{\bar{P}x^2}{2EI} + Y_1(y) \quad (\text{A.32})$$

onde  $Y_1(y)$  é uma função da variável  $y$  resultante da integração de  $\frac{\partial \phi_3}{\partial x}$ .

Utilizando-se o raciocínio anterior para obter a relação constitutiva correspondente a  $\mu_{23}$  e considerando-se a equação anterior, conclui-se que

$$\mu_{23}(x, y) = 2GL_f^2 \frac{dY_1}{dy} \quad (\text{A.33})$$

Substituindo-se A.30, A.31 e A.33 na equação diferencial de equilíbrio (3.94) referente à rotação em torno do eixo z, tem-se

$$\sigma_{12}(x, y) = \frac{3\bar{P}}{2A} \left[ 1 - \left( \frac{2y}{d} \right)^2 \right] + \frac{\bar{P}r^2}{A} - 2GL_f^2 \frac{d^2 Y_1}{dy^2} \quad (\text{A.34})$$

Atribuindo-se o resultado anterior na equação diferencial de equilíbrio (3.93) correspondente à direção  $y$  e aplicando-se a condição natural de contorno  $\sigma_{22} = 0$  para as bordas superior e inferior da viga, chega-se à expressão

$$\sigma_{22}(x, y) = 0 \quad (\text{A.35})$$

Das equações constitutiva (3.45) e cinemática (3.31) referentes à  $\gamma_{11}$ , tem-se

$$u_1(x, y) = \frac{\bar{P}x^2 y}{2EI} + Y_2(y) \quad (\text{A.36})$$

onde  $Y_2(y)$  é uma função da variável  $y$  resultante da integração de  $\frac{\partial u_1}{\partial x}$ .

Aplicando-se o raciocínio análogo para  $\gamma_{22}$  e  $\sigma_{12}$  e também a condição  $u_2(L, 0) = 0$ , tem-se

$$u_2(x, y) = \frac{\bar{P}}{6EI} (L^3 - x^3) - \frac{\nu \bar{P} x y^2}{2EI} + C_1(x - L) \quad (\text{A.37})$$

Utilizando-se as relações constitutivas de  $\sigma_{12}$  e  $\sigma_{21}$  e resolvendo-se a equação diferencial resultante, chega-se a

$$Y_1(y) = K_1 e^{\beta y} + K_2 e^{-\beta y} + \frac{\bar{P}y^2}{2EI} - \frac{3\bar{P}}{4GA} + C_1 \quad (\text{A.38})$$

onde

$$\beta = \frac{1}{L_f} \sqrt{\frac{2\alpha}{G + \alpha}} \quad (\text{A.39})$$

Retornando-se à equação A.33 e aplicando-se a condição natural de contorno  $\mu_{23} = 0$  para as bordas superior e inferior da viga, obtém-se

$$K_1 = K_2 = K = \frac{\bar{P}d}{2EI\beta} \frac{1}{e^{-\frac{\beta d}{2}} - e^{\frac{\beta d}{2}}} \quad (\text{A.40})$$

Substituindo-se este resultado na equação A.38, tem-se

$$Y_1(y) = K(e^{\beta y} + e^{-\beta y}) + \frac{\bar{P}y^2}{2EI} - \frac{3\bar{P}}{4GA} + C_1 \quad (\text{A.41})$$

Com o valor de  $Y_1$  determinado, pode-se calcular  $\sigma_{12}$  (equação A.34),  $\mu_{23}$  (equação A.33) e  $\phi_3$  (equação A.32).

Aplicando-se, novamente, as relações constitutivas para  $\sigma_{12}$  e  $\sigma_{21}$ , chega-se a

$$Y_2(y) = \frac{3\bar{P}y}{2GA} - \frac{\bar{P}y^3}{6EI}(2 + \nu) - \frac{2K\alpha}{\beta(G + \alpha)}(e^{\beta y} - e^{-\beta y}) - C_1y + C_2 \quad (\text{A.42})$$

Considerando-se que a linha neutra não apresenta deslocamento horizontal, conclui-se que  $C_2 = 0$ , podendo-se obter  $u_1$  da equação A.36.

Em resumo, os resultados obtidos são:

$$\sigma_{11}(x, y) = \frac{\bar{P}xy}{I} \quad (\text{A.43})$$

$$\sigma_{22}(x, y) = 0 \quad (\text{A.44})$$

$$\sigma_{12}(x, y) = \frac{3\bar{P}}{2A} \left[ 1 - \left( \frac{2y}{d} \right)^2 \right] - \frac{4KG\alpha}{G + \alpha} (e^{\beta y} + e^{-\beta y}) \quad (\text{A.45})$$

$$\sigma_{21}(x, y) = \frac{3\bar{P}}{2A} \left[ 1 - \left( \frac{2y}{d} \right)^2 \right] \quad (\text{A.46})$$

$$\mu_{13}(x, y) = -\frac{\bar{P}r^2x}{A} \quad (\text{A.47})$$

$$\mu_{23}(x, y) = \frac{\bar{P}r^2y}{A} + \frac{4KG\alpha}{\beta(G + \alpha)} (e^{\beta y} - e^{-\beta y}) \quad (\text{A.48})$$



$$u_1(x, y) = \frac{\bar{P}x^2y}{2EI} + \frac{3\bar{P}y}{2GA} - \frac{\bar{P}y^3}{6EI}(2 + \nu) - \frac{2K\alpha}{\beta(G + \alpha)}(e^{\beta y} - e^{-\beta y}) - C_1y \quad (\text{A.49})$$

$$u_2(x, y) = \frac{\bar{P}}{6EI}(L^3 - x^3) - \frac{\nu\bar{P}xy^2}{2EI} + C_1(x - L) \quad (\text{A.50})$$

$$\phi_3(x, y) = \frac{\bar{P}(y^2 - x^2)}{2EI} - \frac{3\bar{P}}{4GA} + K(e^{\beta y} + e^{-\beta y}) + C_1 \quad (\text{A.51})$$

Comparando-se as expressões acima de  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  e  $\sigma_{21}$  com a solução analítica (Timoshenko e Goodier, 1970), verifica-se uma semelhança entre elas, com exceção do coeficiente de redução ( $1/(1+r^2)$ ) da carga concentrada. Assim, fazendo-se  $r$  tender a zero,  $\bar{P}$  tende a  $P$  (como na solução clássica).

A clássica distribuição parabólica das tensões de cisalhamento  $\sigma_{12}$  ao longo da altura da seção transversal é acrescida de uma parcela exponencial, cujos valores nas bordas extremas podem não ser nulos (ver equação A.45).

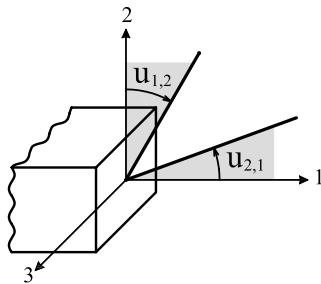
Análogo ao que foi feito para o primeiro exemplo, o aparecimento das tensões-momento  $\mu_{13}$  e  $\mu_{23}$  pode ser compreendido pela análise das distribuições das tensões  $\sigma_{11}$  e  $\sigma_{12}$ , respectivamente, ao longo de uma faixa de espessura  $2d_f$ .

Verifica-se a presença de uma distribuição exponencial ao longo da altura da seção transversal também para o campo de deslocamento horizontal.

A diferença existente entre a macro e a microrrotação ocorre devido à assimetria do tensor de tensões ( $\sigma_{12}$  e  $\sigma_{21}$ ), provocando o aparecimento da tensão-momento  $\mu_{23}$ . Timoshenko e Goodier (1970) também comentam a existência de uma rotação adicional e atribuem o fato ao efeito da força cortante sobre as deflexões da viga.

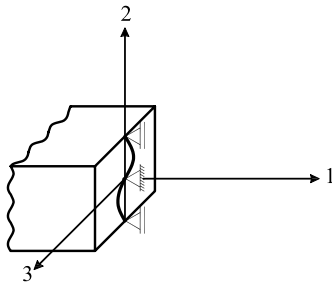
A constante de integração  $C_1$ , presente nas expressões dos campos de deslocamentos e da microrrotação, é definida a partir da condição de contorno estabelecida no engaste. A seguir, expressa-se esta constante de integração a partir de algumas condições de contorno impostas no engaste. Além do já mencionado fator redutor da carga aplicada, são destacadas as novas parcelas da solução de Cosserat em relação à solução clássica.

Condição de contorno 1:  $\phi_3(L, 0) = 0$



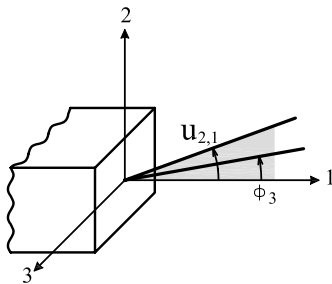
$$C_1 = \frac{\bar{P}L^2}{2EI} + \frac{3\bar{P}}{4GA} - 2K$$

Condição de contorno 2:  $u_1(L, \pm H/2) = 0$



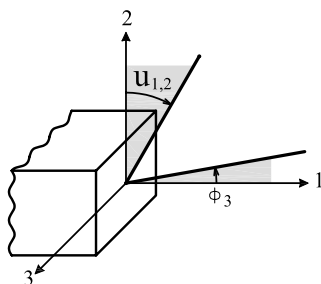
$$C_1 = \frac{\bar{P}L^2}{2EI} + \frac{3\bar{P}}{2GA} - \frac{\bar{P}(2+\nu)}{2EA} + \underbrace{\frac{\bar{P}r^2}{2GA}}_{\text{Cosserat}}$$

Condição de contorno 3:  $u_{1,2}(L, 0) = 0$



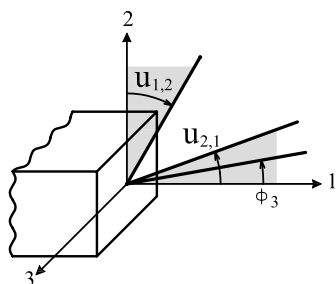
$$C_1 = \frac{\bar{P}L^2}{2EI} + \frac{3\bar{P}}{2GA} - \underbrace{\frac{4K\alpha}{G+\alpha}}_{\text{Cosserat}}$$

Condição de contorno 4:  $u_{2,1}(L, 0) = 0$



$$C_1 = \frac{\bar{P}L^2}{2EI}$$

Condição de contorno 5:  $\frac{u_{1,2}(L,0) - u_{2,1}(L,0)}{2} = 0$



$$C_1 = \frac{\bar{P}L^2}{2EI} + \frac{3\bar{P}}{4GA} - \underbrace{\frac{2K\alpha}{G + \alpha}}_{\text{Cosserat}}$$

Condição de contorno 6: Rotação média da seção:  $\bar{\omega}_{xy} \Big|_{x=L} = 0$

Esta condição é calculada utilizando-se o valor médio de uma função:

$$\bar{\omega}_{xy} \Big|_{x=L} = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} \omega_{xy} \Big|_{x=L} dy$$

onde

$$\omega_{xy} \Big|_{x=L} = (u_{1,2}(x, y) - u_{2,1}(x, y)) \Big|_{x=L}$$

obtendo-se

$$C_1 = \frac{\bar{P}L^2}{2EI} + \frac{3\bar{P}}{4GA} - \frac{\bar{P}}{2EA} + \underbrace{\frac{\bar{P}r^2}{4GA}}_{\text{Cosserat}}$$

A seguir, são apresentados alguns gráficos dos campos de tensões e de deslocamentos, de acordo com as equações de A.43 a A.51. Os gráficos de  $u_1$ ,  $u_2$  e  $\phi_3$  foram obtidos com  $C_1$  encontrado aplicando-se a condição de contorno 2, mostrada acima.

Os valores dos parâmetros utilizados para se fazer os gráficos estão na tabela A.3 e a variação dos valores de  $r$  ocorre conforme adotado na tabela A.1. As unidades do problema são todas consideradas compatíveis.

**Tabela A.3:** Parâmetros da análise para o exemplo de flexão simples

| Parâmetros | Valores | Parâmetros | Valores                  |
|------------|---------|------------|--------------------------|
| $d_f$      | 1 uc    | $L_f$      | $\sqrt{0,4}$ uc          |
| P          | 2 uf    | E          | 1 uf/uc <sup>2</sup>     |
| t          | 1,5 uc  | $\alpha$   | 1/4,8 uf/uc <sup>2</sup> |
| $\nu$      | 0,2     | L          | 10 uc                    |

De acordo com os gráficos apresentados na figura A.7 e suas correspondentes equações, pode-se fazer as seguintes observações:

1. quando  $r \rightarrow 0$  nas equações de  $\sigma_{11}$  e  $\sigma_{21}$ , a solução analítica micropolar se aproxima da solução clássica, pois  $\bar{P} \rightarrow P$ . Para um mesmo ponto de coordenadas  $(x, y)$  em ambas as soluções, quanto maior o valor de  $d$  (ou menor o valor de  $r$ ), menor o valor dessas tensões, como pode ser visto nos gráficos A.7(a) e A.7(c);
2. quando  $r \rightarrow 0$ , o valor de  $K$  na parcela exponencial de  $\sigma_{12}$  também tende a zero, restando apenas a parcela parabólica, a qual coincide com a clássica quando  $\bar{P} \rightarrow P$ , retornando à igualdade entre  $\sigma_{12}$  e  $\sigma_{21}$ . Isto pode ser percebido através dos gráficos A.7(b) e A.7(c);
3. na solução analítica de  $\mu_{13}$ ,  $\mu_{23}$  e  $\phi_3$  pode-se notar que, quando  $r \rightarrow 0$ ,  $\bar{P} \rightarrow P$  e cada termo dessas soluções tendem a zero, como mostram os gráficos A.7(d), A.7(e) e A.7(h). Isto ocorre porque, na análise clássica, estas grandezas não existem. Percebe-se ainda que, no gráfico de  $\mu_{23}$ , quando  $2d_f$  já representa 60% de  $d$  ( $r \geq 0,6$ ), o valor de  $\mu_{23}$  decresce com o aumento de  $r$ . Acredita-se que, neste momento, a influência dos módulos cisalhantes presentes na equação de  $\mu_{23}$ , e que estão diretamente ligados com a diferença entre a macro e a microrrotação, seja maior do que a influência de  $r$ ;
4. percebe-se que, aumentando-se a altura da viga (ou diminuindo-se  $r$ ), as tensões e os deslocamentos tendem a zero, pois a viga apresenta maior inércia à flexão, assim como ocorre na solução clássica.

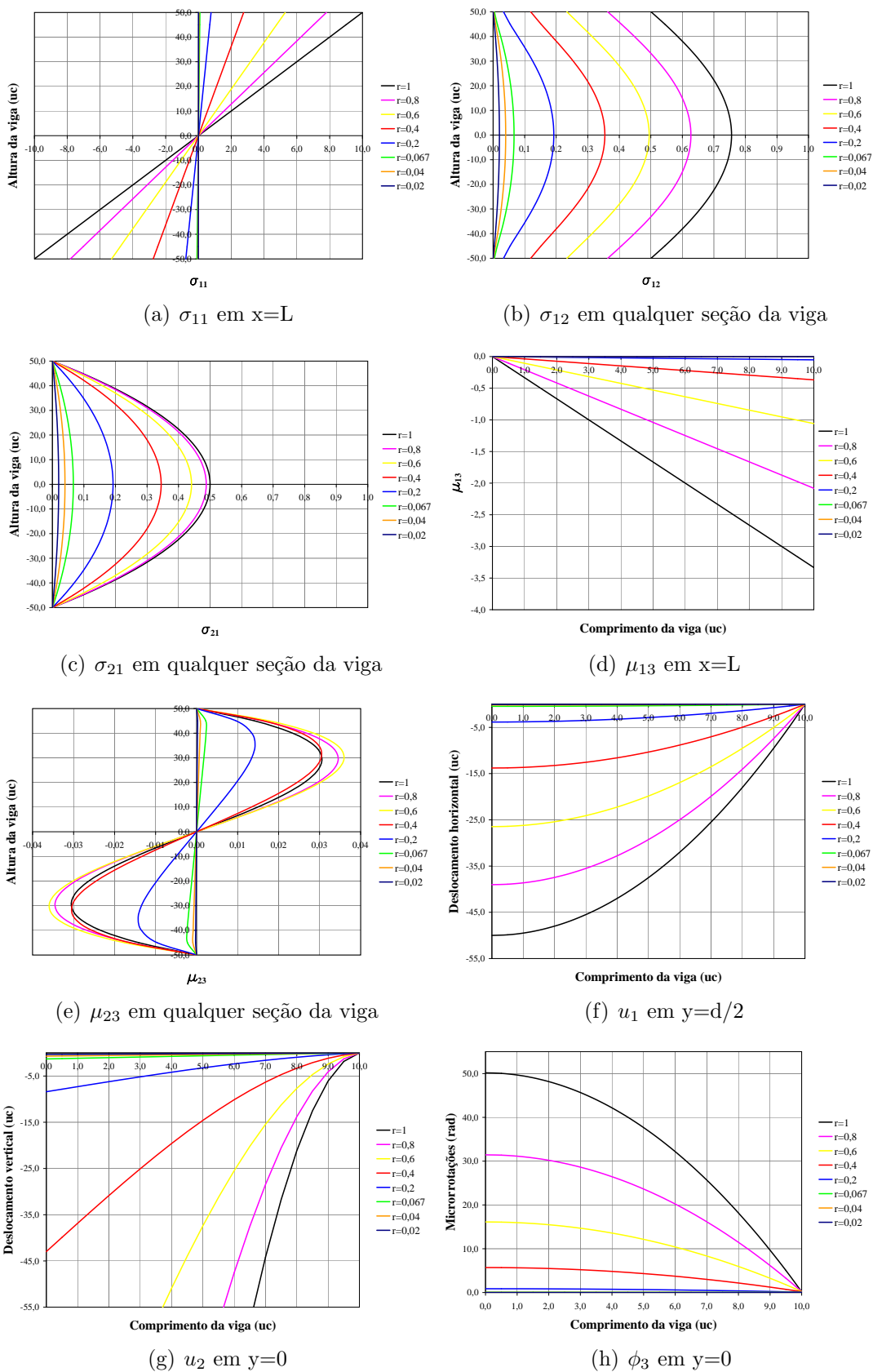
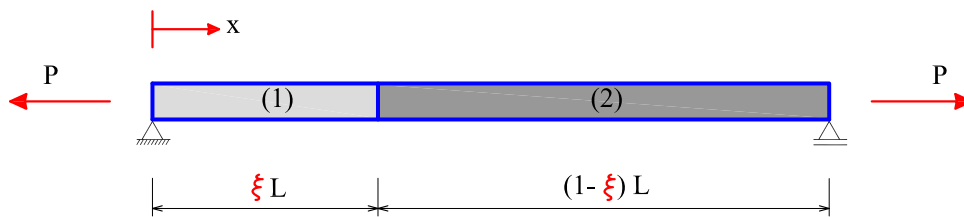


Figura A.7: Campos de tensões e de deslocamentos para o exemplo de flexão simples

### A.3 Barra Tracionada Composta por Dois Materiais

A figura A.8 mostra uma barra tracionada composta por dois trechos, cujos materiais são diferentes. A barra está submetida a estados de tensão normal constante, equivalentes a cargas concentradas aplicadas em suas extremidades livres.



**Figura A.8:** Barra tracionada constituída por dois materiais

Este exemplo é analisado aplicando-se a teoria da elasticidade para o contínuo com microexpansão, estudada na seção 4.2. Os parâmetros elásticos dos materiais e a área das seções transversais dos dois trechos da barra são definidos segundo as relações apresentadas na tabela A.4

**Tabela A.4:** Parametrização dos dados do problema

| Trecho 1                          | Trecho 2                          |
|-----------------------------------|-----------------------------------|
| $E^{(1)} = z^{(1)} E u f / u c^2$ | $E^{(2)} = z^{(2)} E u f / u c^2$ |
| $\nu^{(1)} = \nu$                 | $\nu^{(2)} = \nu$                 |
| $H^{(1)} = h E u f / u c^2$       | $H^{(2)} = h E u f / u c^2$       |
| $C^{(1)} = -c E u f / u c^2$      | $C^{(2)} = -c E u f / u c^2$      |
| $L_a^{(1)} = r L u c$             | $L_a^{(2)} = r L u c$             |
| $A^{(1)} = A u c^2$               | $A^{(2)} = A u c^2$               |

Para o exemplo analisado, as equações diferenciais de equilíbrio (equações 4.51 a 4.53) se reduzem a

$$\sigma_{11,1}^{(i)} = 0 \quad (\text{A.52})$$

$$\lambda_{1,1}^{(i)} - \psi^{(i)} = 0 \quad (\text{A.53})$$

onde (i) corresponde aos trechos 1 e 2 da barra.

Adicionalmente, aplicando-se as equações constitutivas de 4.17 a 4.20, juntamente com a equação 4.7 chega-se a

$$\sigma_{11} = \left[ z^{(i)} E + \frac{(1-2\nu)c^2 E}{h} \right] u_{1,1} - cE\varphi \quad (\text{A.54})$$

$$\psi = -cE(1-2\nu)u_{1,1} + hE\varphi \quad (\text{A.55})$$

$$\lambda_1 = \frac{z^{(i)} E}{(1+\nu)} (rL)^2 \varphi_{,1} \quad (\text{A.56})$$

Substituindo-se A.54 em A.52 e A.55 e A.56 na equação A.53 obtém-se

$$\left[ z^{(i)} E + \frac{(1-2\nu)c^2 E}{h} \right] u_{1,11} - cE\varphi_{,1} = 0 \quad (\text{A.57})$$

$$\frac{z^{(i)} E}{(1+\nu)} (rL)^2 \varphi_{,11} - cE(1-2\nu)u_{1,1} - hE\varphi = 0 \quad (\text{A.58})$$

Ao resolver este sistema de equações para as variáveis  $u$  e  $\varphi$ , uma equação diferencial linear de segunda ordem necessita ser solucionada, resultando em

$$u_1^{(i)} = \frac{c(rL)^2}{h(1+\nu)} (k_1^{(i)} e^{-\rho^{(i)} x} + k_2^{(i)} e^{\rho^{(i)} x}) + \frac{h}{c(1-2\nu)} k_4^{(i)} x + k_3^{(i)} \quad (\text{A.59})$$

$$\varphi^{(i)} = \frac{1}{\rho^{(i)}} (-k_1^{(i)} e^{-\rho^{(i)} x} + k_2^{(i)} e^{\rho^{(i)} x}) + k_4^{(i)} \quad (\text{A.60})$$

onde

$$\rho^{(i)} = \frac{h}{rL} \sqrt{\frac{1+\nu}{z^{(i)} h + c^2(1-2\nu)}} \quad (\text{A.61})$$

e  $k_1^{(i)}$ ,  $k_2^{(i)}$ ,  $k_3^{(i)}$  e  $k_4^{(i)}$  são constantes de integração a serem definidas a partir das condições de contorno e de continuidade do problema. Para o exemplo em questão, estas condições são:

$$u_1^{(1)} = 0 \quad \text{em } x=0 \quad (\text{A.62})$$

$$\lambda_1^{(1)} A^{(1)} = 0 \quad \text{em } x=0 \quad (\text{A.63})$$

$$u_1^{(1)} = u_1^{(2)} \quad \text{em } x=\xi L \quad (\text{A.64})$$

$$\varphi^{(1)} = \varphi^{(2)} \quad \text{em } x=\xi L \quad (\text{A.65})$$

$$\sigma_{11}^{(1)} A^{(1)} = \sigma_{11}^{(2)} A^{(2)} \quad \text{em } x=\xi L \quad (\text{A.66})$$

$$\lambda_1^{(1)} A^{(1)} = \lambda_1^{(2)} A^{(2)} \quad \text{em } x=\xi L \quad (\text{A.67})$$

$$\sigma_{11}^{(2)} A^{(2)} = P \quad \text{em } x=L \quad (\text{A.68})$$

$$\lambda_1^{(2)} A^{(2)} = 0 \quad \text{em } x=L \quad (\text{A.69})$$

Aplicando-se estas condições às grandezas do problema, obtém-se um sistema de equações lineares cujas incógnitas são as constantes de integração. Estas constantes foram determinadas, neste trabalho, com o auxílio da ferramenta matemática Maple, onde constatou-se a inviabilidade de reproduzi-las aqui, dado seu extenso e complexo valor analítico. Determinadas estas constantes, tem-se definidas a partir de A.59 e A.60 as variáveis cinemáticas do problema. Através das relações constitutivas (equações A.54 a A.56), define-se todo o estado de tensão ao longo do comprimento da barra.

Realizando-se esses cálculos, percebe-se que a tensão normal  $\sigma_{11}$  é constante para toda a barra, cujo valor se iguala ao da solução clássica, ou seja,

$$\sigma_{11}^{(i)} = \frac{P}{A} \quad (\text{A.70})$$

Percebe-se que, como nos exemplos anteriores, o fator de escala  $r$  define a razão entre a dimensão do volume de controle e o comprimento da barra.

$$r = \frac{L_a}{L} \quad (\text{A.71})$$

A seguir, são apresentados nas figuras A.9 e A.10 os gráficos dos campos de tensões e de deslocamentos. Estes gráficos são feitos alterando-se o valor de  $r$  (ou aumentado-se  $L$ ), a fim de analisar a influência do comprimento característico do material à tração na resposta do problema. Os valores adotados para  $r$  são 0, 1; 0, 05 e 0, 025.

As seguintes grandezas adimensionais são analisadas ao longo do comprimento da viga:

$$\Delta\psi = 100 \frac{\psi}{\sigma_{11}} \quad (\text{A.72})$$



$$\Delta\lambda = 100 \frac{\lambda_1}{\sigma_{11}L} \quad (\text{A.73})$$

$$\Delta u_1 = 100 \frac{u_1(\text{ms}) - u_1(\text{cl})}{u_1(\text{cl})} \quad (\text{A.74})$$

$$\Delta\varphi = 100 \frac{\varphi}{\varepsilon_v} \quad (\text{A.75})$$

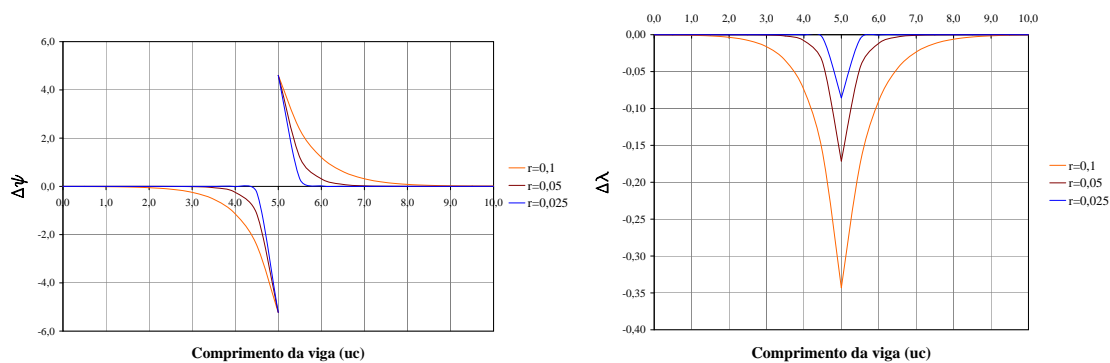
onde (ms) e (cl) referem-se às soluções com microexpansão e clássica, respectivamente, e  $\varepsilon_v$  é a deformação volumétrica clássica.

Os valores dos parâmetros utilizados para se fazer os gráficos estão listados na tabela A.5 e suas unidades são todas consideradas compatíveis.

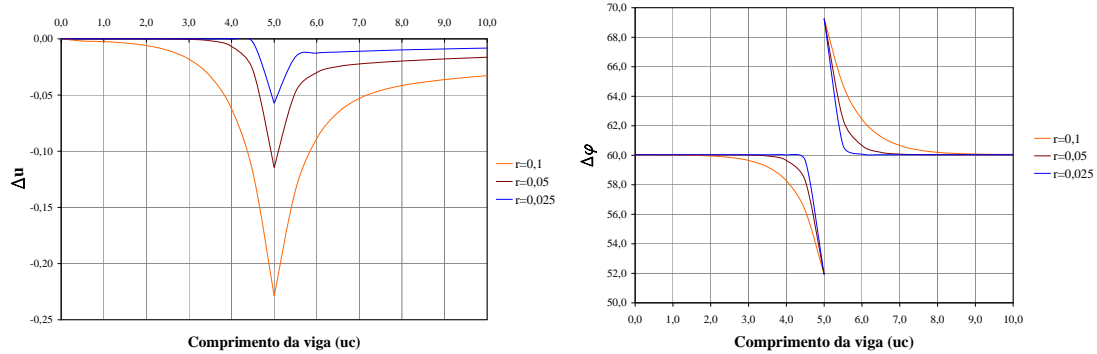
**Tabela A.5:** Parâmetros da análise para o exemplo da barra tracionada composta por dois materiais

| Parâmetros | Valores | Parâmetros | Valores              |
|------------|---------|------------|----------------------|
| $z^{(1)}$  | 0,75    | $z^{(2)}$  | 1                    |
| $\nu$      | 0,2     | E          | 1 uf/uc <sup>2</sup> |
| h          | 1,667   | c          | 0,556                |
| $\xi$      | 0,5     | L          | 10 uc                |
| P          | 15 uf   | A          | 1 uc <sup>2</sup>    |

Constata-se, através dos gráficos obtidos, que o comprimento característico do material à tração ( $L_a$ ) influencia regiões cada vez maiores, à medida que seu valor aumenta. Assim, para  $L_a \rightarrow 0$  os resultados obtidos se aproximam da solução clássica.



**Figura A.9:** Campos de tensões para o exemplo da barra composta por dois materiais



**Figura A.10:** Campos de deslocamento e microexpansão para o exemplo da barra composta por dois materiais

## Apêndice B

# Metodologia de Obtenção dos Parâmetros dos Modelos Propostos

Apresenta-se aqui um encaminhamento para obtenção dos parâmetros dos modelos constitutivos propostos nesta Tese.

Tomando-se uma simulação numérica da qual se tenha o histórico de todas as grandezas estáticas e cinemáticas, obtido com a utilização de outro modelo constitutivo que utilize contínuos micropolar ou com microexpansão, pode-se obter os parâmetros que descrevem a degradação do meio como se segue.

1. Escolher um ponto de Gauss da malha de elementos finitos que melhor represente a degradação da peça analisada;
2. Para este ponto de Gauss obter os tensores de deformação generalizados e obter para cada um deles os invariantes  $I_1$  e  $J_2$ ;
3. Calcular a deformação equivalente macroscópica  $\eta^{mac} = k_0 I_1 + \sqrt{k_1^2 I_1^2 + k_2 J_2}$ , onde  $k_0$ ,  $k_1$  e  $k_2$  dependem dos parâmetros do material ( $r = f_c/f_t$  e  $\nu$ ).  $f_t$  e  $f_c$  são as resistências do material à tração e à compressão, respectivamente. Isto significa que os parâmetros nos microplanos serão obtidos com base na deformação equivalente macroscópica, o que é razoável, pois ao se fazer a igualdade entre as variáveis de dano macroscópicas e nos microplanos ( $d^{mic} = d^{mac}$ ),

implicitamente, está se igualando as deformações equivalentes macroscópicas e nos microplanos ( $\eta^{mic} = \eta^{mac}$ )(ver Leukart e Ramm (2006));

4. Para a obtenção de  $\kappa_{0\varphi\gamma}^{mic}$ ,  $\kappa_{0\kappa}^{mic}$  e  $\kappa_{0\varphi_g}^{mic}$  (deformações equivalentes iniciais), toma-se o estado de deformação do ponto de Gauss escolhido no passo que determina o início do processo de amolecimento, neste passo  $\eta^{mac} = \kappa_0^{mic}$ , então, com os valores de  $\eta^{mac}$  calculados no item 3, obtém-se as deformações equivalentes iniciais para cada tipo de deformação generalizada.
5. O procedimento acima pode ser feito não só para a obtenção de  $\kappa_0^{mic}$ , mas também para obter qualquer  $\eta^{mac}$  associado a um estado de deformação, ou equivalentemente, a um ponto de equilíbrio do processo não-linear. Assim, para o ponto de Gauss escolhido, tem-se tantos  $\eta$ 's quantos forem os pontos de equilíbrio da curva não-linear obtida.
6. Para a obtenção dos parâmetros  $\beta^{mic}$ , propõe-se um ajuste por meio da curva de dano que depende de  $\kappa_0^{mic}$ ,  $\alpha^{mic}$  e  $\beta^{mic}$ . Os valores de  $\kappa_0^{mic}$  já foram determinados acima e  $\alpha^{mic}$  pode ser definido de forma mais intuitiva, pois representa a máxima degradação do material e seu valor na literatura varia em torno de 0,95, então propõe-se este valor para os parâmetros  $\alpha^{mic}$ . A curva de dano pode ser escrita na forma:

$$1 - d^{mic} = \frac{\kappa_0^{mic}}{\kappa^{mic}} \{1 - \alpha^{mic} + \alpha^{mic} e^{[\beta^{mic}(\kappa_0^{mic} - \kappa^{mic})]}\} \quad (B.1)$$

Entretanto, também pode-se escrever

$$1 - d = \frac{E_s}{E_0} \quad (B.2)$$

onde  $E_0$  é o módulo elástico do material e  $E_s = \frac{\sigma}{\varepsilon}$  pode ser obtido ponto a ponto. Dessa forma, tem-se tantos valores de  $1 - d$  quantos forem os valores de  $E_s$ . Obtém-se a curva de  $1 - d$  em função de  $\eta^{mac}$  para ser comparada com a equação B.1. Assim, tem-se um conjunto de valores  $1 - d$  para cada curva  $\sigma \times \varepsilon$

existente, ou seja, para cada componente de tensão-deformação que existir no problema.

7. Supondo que em um problema exista as relações  $\sigma_{xx} \times \varepsilon_{xx}$ ,  $\sigma_{yy} \times \varepsilon_{yy}$  e  $\sigma_{xy} \times \varepsilon_{xy}$ , tem-se três conjuntos de pontos  $1 - d$  para um único conjunto de pontos de  $\eta^{mac}$ . Então, neste caso, deveriam ser obtidas três curvas  $(1 - d) \times \eta^{mac}$ . Assim, a curva da equação B.1 pode ser ajustada com estas, alterando-se o valor de  $\beta^{mic}$ , de forma que se obtenha a melhor aproximação da três curvas acima, procurando-se obter uma curva média, definindo-se, assim, o valor de  $\beta^{mic}$ .

# Referências Bibliográficas

- Adhikary, D. P. e Dyskin, A. V., 1998. A continuum model of layered rock masses with non-associative joint plasticity. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 22, pp. 245–261.
- Aifantis, E. C., 1984. On the microstructural origin of certain inelastic models. *ASME J. Eng. Mater. Technol.*, vol. 106, pp. 326–330. (apud Liu e Hu (2005)).
- Batdorf, S. B. e Budianski, B., 1949. A mathematical theory of plasticity based on the concept of slip. Technical Note No. 1871, Washington, DC. (apud Carol et al. (2001)).
- Batoz, J. L. e Dhat, G., 1979. Incremental displacement algorithms for nonlinear problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 14, pp. 1262–1267.
- Bazant, Z. P., 1986. Mechanics of distributed cracking. *Applied Mechanics Review*, vol. 39, n. 5, pp. 675–705.
- Bazant, Z. P. e Gambarova, P. G., 1984. Crack shear in concrete: Crack band microplane model. *Journal of Structural Engineering*, vol. 110, n. 9, pp. 2015–2035.
- Bazant, Z. P. e Lin, F. B., 1988. Nonlocal smeared cracking model for concrete fracture. *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, vol. 114, n. 11, pp. 2493–2510.
- Bazant, Z. P. e Luzio, G. D., 2004. Nonlocal microplane model with strain-softening yield limits. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 41, pp. 7209–7240.

- Bazant, Z. P. e Oh, B. H., 1983. Crack band theory for fracture of concrete. *Matériaux et Constructions*, vol. 16, n. 93, pp. 155–177.
- Bazant, Z. P. e Oh, B. H., 1985. Microplane model for progressive fracture of concrete and rock. *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, vol. 111, n. 4, pp. 559–583.
- Bazant, Z. P. e Ozbolt, J., 1990. Nonlocal microplane model for fracture, damage and size effect in structures. *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, vol. 116, n. 11, pp. 2485–2505.
- Bazant, Z. P. e Pijaudier-Cabot, G., 1988. Nonlocal continuum damage, localization instability and convergence. *ASME Journal Applied Mechanics*, vol. 55, pp. 287–293. (apud de Borst (1991, 1993); Liu e Hu (2005)).
- Bazant, Z. P. e Prat, P. C., 1988. Microplane model for brittle-plastic material: I - theory. *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, vol. 114, n. 10, pp. 1672–1688.
- Bazant, Z. P., Xiang, Y., e Prat, P. C., 1996. Microplane model for concrete: I - stress-strain boundaries and finite strain. *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, vol. 122, n. 3, pp. 245–254.
- Carol, I., Bazant, Z. P., e Prat, P. C., 1992. New explicit microplane model for concrete: Theoretical aspects and numerical implementation. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 29, n. 9, pp. 1173–1191.
- Carol, I., Jirásek, M., e Bazant, Z. P., 2001. A thermodynamically consistent approach to microplane theory. part i. free energy and consistent microplane stress. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 38, pp. 2921–2931.
- Carol, I., Jirásek, M., e Bazant, Z. P., 2004. A framework for microplane models at large strain, with application to hyperelasticity. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 41, pp. 511–557.
- Chen, Z. e Schreyer, H. L., 1990. A numerical solution scheme for softening problems involving total strain control. *Computers & Structures*, vol. 37, pp. 1043–1050.
- Cosserat, E. F., 1909. *Theorie des Corps Deformables*. Paris. (apud Eringen (1968a); de Borst (1993); Lages (1997); Liu e Hu (2005)).

- Crisfield, M. A., 1981. A fast incremental-interactive solution procedure that handles snap-through. *Computers & Structures*, vol. 13, pp. 55–62.
- Crisfield, M. A., 1983. An arc length method including line searches and accelerations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 19, pp. 1269–1289.
- de Borst, R., 1986a. Computational aspects of smeared crack analysis. In *Constitutive Modelling of Concrete Structures*.
- de Borst, R., 1991. Simulation of strain localization: A reappraisal of the cosserat continuum. *Engineering Computations*, vol. 8, pp. 317–332.
- de Borst, R., 1993. A generalisation of  $j_2$ -flow theory for polar continua. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 103, pp. 347–362.
- de Borst, R. e Mühlhaus, H.-B., 1992. Gradient-dependent plasticity: Formulation and algorithmic aspects. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 35, pp. 521–539.
- de Borst, R. e Sluys, L. J., 1991. Localisation in a cosserat continuum under static and dynamic loading conditions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 90, pp. 805–827.
- de Vree, J. H. P., Brekelmans, W. A. M., e van Gils, M. A. J., 1995. Comparison of nonlocal approaches in continuum damage mechanics. *Computers & Structures*, vol. 55, n. 4, pp. 581–588.
- Eringen, A. C., 1966. Linear theory of micropolar elasticity. *Journal of Mathematics and Mechanics*, vol. 15.
- Eringen, A. C., 1968a. Mechanics of micromorphic continua. In Kröner, E., ed, *IUTAM Symposium on Generalized Continuum*, pp. 18–35, Nova Iorque. Springer-Verlag.
- Eringen, A. C., 1968b. *Theory of Micropolar Elasticity*, volume II - Mathematical Fundamentals, chapter 7, pp. 621–729. Fracture, An Advanced Treatise, Academic



- Press, Nova Yorque. (apud Eringen (1968a); Lakes (1985); de Borst (1993); Lages (1997); Liu e Hu (2005)).
- Eringen, A. C., 1990. Theory of thermo-microstretch elastic solids. *International Journal of Engineering Science*, vol. 28, n. 12, pp. 1291–1301. (apud Lages (1997)).
- Eringen, A. C., 1997. A unified continuum theory of electrodynamics of liquid crystals. *International Journal of Engineering Science*, vol. 35, n. 12.
- Feenstra, P. H. E. e de Borst, R., 1993. Aspects of robust computational modeling for plain and reinforced concrete. *Heron*, vol. 38, n. 4, pp. 1–76.
- Feng, Y. T., Peric, D., e Owen, D. R. J., 1996. A new criterion for determination of initial loading parameter in arc-length methods. *Computer & Structures*, vol. 58, n. 3, pp. 479–485.
- Figueiredo, R. P. e Vargas, E. A. J., 2002. O algoritmo de relaxação dinâmica para solução de problemas relativos à mecânica generalizada de cosserat via método dos elementos finitos. In Vaz, L. E., ed, *SIMMEC 2002 - 5º Simpósio Mineiro de Mecânica Computacional*, pp. 25–35, Juiz de Fora, MG, Brasil.
- Fonseca, F. T., 2008. Sistema computacional para análise dinâmica geometricamente não-linear através do método dos elementos finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Fonseca, M. T., 2006. Aplicação orientada a objetos para análise fisicamente não-linear com modelos reticulados de seções transversais compostas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Fuina, J. S., 2004. Métodos de controle de deformações para análise não-linear de estruturas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil.
- Günther, W., 1958. Zur statik und kinematik des cosseratschen kontinuums. *Abhandlungen der Koniglichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, vol. 10, pp. 195–213. (apud Eringen (1968a); Mühlhaus e Vardoulakis (1987); de Borst (1993); Vardoulakis (2004)).

- Green, A. E. e Rivlin, R. S., 1964. Multipolar continuum mechanics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 17, n. 2, pp. 113–147. (apud Eringen (1968a)).
- Groen, A. E., Schellekens, J. C. J., e de Borst, R., 1994. Three-dimensional finite element studies of failure in soil bodies using a cosserat continuum. *Computer Methods and Advances in Geomechanics*, pp. 91–102. (Siriwardane e Zaman, eds.), Rotterdam, (apud Lages (1997)).
- Hillerborg, A., Mod er, M., e Peterson, P., 1976. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of finite mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, vol. 6, pp. 773–782.
- Hu, G., Liu, X., e Lu, T. J., 2005. A variational method for non-linear micropolar composites. *Mechanics of Materials*, vol. 37, pp. 407–425.
- Jog, C. S., 2004. Higher-order shell elements based on a cosserat model, and their use in the topology design of structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 193, pp. 2191–2220.
- Ju, J. W., 1989. On energy-based coupled elastoplastic damage theories: Constitutive modeling and computational aspects. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 25, pp. 803–833.
- Kanatani, K. I., 1984. Distribution of directional data and fabric tensors. *International Journal of Engineering Science*, vol. 22, pp. 149–164.
- Kirchner, N. e Steinmann, P., 2007. Mechanics of extended continua: Modeling and simulation of elastic microstretch materials. *Computational Mechanics*, vol. 40, n. 4, pp. 651–666.
- Krenk, S., 1995. An orthogonal residual procedure for nonlinear finite element equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 38, pp. 823–839.
- Krenk, S. e Hededal, O., 1993. A dual orthogonality procedure for nonlinear finite element equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 123, pp. 95–107.

- Kröner, E., ed, 1968. *Proceedings of the International Union of Theoretical and Applied Mechanics - Symposium on the Generalized Cosserat Continuum and the Continuum Theory of Dislocations with Applications*, Freudenstadt and Stuttgart, Springer-Verlag, Nova Iorque.
- Kuhl, E. e Ramm, E., 2000. Microplane modelling of cohesive frictional materials. *Eur. J. Mechanics A/Solids*, vol. 19, pp. S121–S143.
- Kuhl, E., Ramm, E., e de Borst, R., 2000. An anisotropic gradient damage model for quasi-brittle materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 183, pp. 87–103.
- Kuhl, E., Steinmann, P., e Carol, I., 2001. A thermodynamically consistent approach to microplane theory. part ii. dissipation and inelastic constitutive modelling. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 38, pp. 2933–2952.
- Lages, E. N., 1997. *Modelagem de Localização de Deformações com Teorias de Contínuo Generalizado*. Tese de Doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil.
- Lakes, R. S., 1985. A pathological situation in micropolar elasticity. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 52, pp. 234–235.
- Lemaître, J., 1992. *A Course on Damage Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin.
- Leukart, M. e Ramm, E., 2002. An alternative split within the microplane material model. In H.A. Mang, F.G. Rammerstorfer, J. E., ed, *Fifth World Congress on Computational Mechanics*, Viena, Austria. (<http://wccm.tuwien.ac.at/publications/Papers/fp81184.pdf>).
- Leukart, M. e Ramm, E., 2003. A comparison of damage models formulated on different material scales. *Computational Materials Science*, vol. 28, pp. 749–762.
- Leukart, M. e Ramm, E., 2006. Identification and interpretation of microplane material laws. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 132, n. 3, pp. 295–305.

- Li, X. e Tang, H., 2005. A consistente return mapping algorithm for pressure-dependent elastoplastic cosserat continua and modelling of strain localisation. *Computers & Structures*, vol. 83, pp. 1–10.
- Liu, X. e Hu, G., 2005. A continuum micromechanical theory of overall plasticity for particulate composites including particle size effect. *International Journal of Plasticity*, vol. 21, pp. 777–799.
- Liu, X., Scarpas, A., e Kasbergen, C., 2007. A micropolar formulation of the desai hierarchical model for elastoplastic porous media. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 44, n. 9, pp. 2695–2714.
- Lubarda, V. e Krajcinovic, D., 1993. Damage tensors and the crack density distribution. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 30, pp. 2859–2877.
- Malvern, L. E., 1969. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. New Jersey.
- Mendoza, A. R. B., 2003. *Análise da Instabilidade de Poços de Petróleo associada à Produção de Areia através de um Modelo do Contínuo de Cosserat*. Tese de Doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil.
- Mühlhaus, H. B., 1989. Application of cosserat theory in numerical solutions of limit load problems. *Ing. Archive*, vol. 59, pp. 124–137.
- Mühlhaus, H. B. e Vardoulakis, I., 1987. The thickness of shear bands in granular materials. *Géotechnique*, vol. 37, n. 3, pp. 271–283.
- Mindlin, R. D., 1964. Micro-structure in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 16, pp. 51–78. (apud Eringen (1968a); de Borst (1993); Lages (1997); Liu e Hu (2005)).
- Mindlin, R. D., 1965. Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 1, pp. 417–438.
- Mindlin, R. D. e Tiersten, H. F., 1962. Effects of couple-stresses in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 11, n. 1, pp. 415–448.

- Ortiz, M. e Simo, J. C., 1986. An analysis of a new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 23, pp. 353–366.
- Ozbolt, J. e Bazant, Z. P., 1992. Microplane model for cyclic triaxial behavior of concrete. *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, vol. 118, n. 7, pp. 1365–1386.
- Ozbolt, J., Li, Y., e Kozar, I., 2001. Microplane model for concrete with relaxed kinematic constraint. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 38, pp. 2683–2711.
- Peerlings, R. H. J., de Borst, R., Brekelmans, W. A. M., e Geers, M. G. D., 1998. Gradient-enhanced damage modelling of concrete fracture. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, vol. 3, pp. 323–342.
- Pitangueira, R. L. S., 1998. *Mecânica de Estruturas de Concreto com Inclusão de Efeitos de Tamanho e Heterogeneidade*. Tese de Doutorado, PUC - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.
- Ramm, E., 1981. Strategies for tracing the nonlinear response near limit points, in nonlinear finite element analysis in structural mechanics. pp. 63–83.
- Ricks, E., 1972. The application of newton method to the problem of elastic stability. *Journal of Applied Mechanics*, pp. 1060–1065.
- Ricks, E., 1979. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 15, pp. 529–551.
- Ristinmaa, M. e Vecchi, M., 1996. Use of couple-stress theory in elasto-plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 136, n. 3-4, pp. 205–224.
- Schweizerhof, K. H. e Wriggers, P., 1986. Consistent linearization for path following methods in nonlinear fe analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 59, pp. 261–279.

- Silva, P. P. R., 2002. Implementação de modelos de microplanos para análise não-linear de estruturas de concreto, uma abordagem orientada a objetos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil.
- Simo, J. C. e Hughes, T. J. R., 1988. Elastoplasticity and viscoplasticity - computational aspects. Technical report, Stanford University, Department of Applied Mechanics.
- Simo, J. C. e Ju, J. W., 1987. Strain and stress based continuum damage models: Part i-formulation, part ii-computational aspects. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 23, pp. 821–869.
- Simo, J. C. e Taylor, R. L., 1985. Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 48, pp. 101–118.
- Sluys, L. J., 1992. Wave propagation, localisation and dispersion in softening solids. Dissertação de Mestrado, Delft University of Technology, Delft.
- Taylor, G. I., 1938. Plastic strain in metals. *Journal of the Institute of Metals*, vol. 62, pp. 307–324. (apud Leukart e Ramm (2003), Leukart e Ramm (2006)).
- Timoshenko, S. P. e Goodier, J. N., 1970. *Theory of Elasticity*. Singapura, 3<sup>a</sup> edition.
- Toupin, R. A., 1962. Elastic materials with couple-stresses. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 11, n. 1, pp. 385–414. (apud Eringen (1968a); de Borst (1993); Lages (1997); Liu e Hu (2005)).
- Truesdell, C. e Toupin, R. A., 1960. *The Classical Field Theories*, volume III of 200, 203, 205. Handbuch der Physik, Berlin-Göttingen-Heidelberg. (apud Eringen (1968a); Lages (1997); Adhikary e Dyskin (1998)).
- Valliappan, S. e Doolan, T. F., 1972. Nonlinear stress analysis of reinforced concrete. *Journal of Structural Division (ASCE)*, vol. 98, n. ST4, pp. 885–898.
- Vardoulakis, I., 2004. *Degradations and Instabilities in Geomaterials*, chapter 4. Faculty of Applied Mathematics and Physics, Department of Mechanics National Technical University of Athens, Greece.

- Voigt, W., 1887. Theoretische studien über die elasticitätsverhältnisse der krystalle. *Abhandlungen der Koniglichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, vol. 34. (apud Eringen (1968a); Adhikary e Dyskin (1998)).
- Voyiadjis, G. Z., Alsaleh, M. I., e Alshibli, K. A., 2005. Evolving internal length scales in plastic strain localization for granular materials. *International Journal of Plasticity*, vol. 21, pp. 2000–2024.
- Walsh, S. D. C. e Tordesillas, A., 2004a. A thermomechanical approach to the development of micropolar constitutive models of granular media. *Acta Mechanica*, vol. 167, n. 3-4, pp. 145–169.
- Walsh, S. D. C. e Tordesillas, A., 2004b. A thermomechanical formulation of finite element schemes for micropolar continua. Technical report, Dept. Mathematics & Statistics, The University of Melbourne, Melbourne, Australia.
- Wu, J.-Y. e Li, J., 2008. On the mathematical and thermodynamical descriptions of strain equivalence based anisotropic damage model. *Mechanics of Materials*, vol. 40, pp. 377–400.
- Yang, Y. B. e Kuo, S. R., 1994. *Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures*. Prentice-Hall, Singapura.
- Yang, Y. B. e McGuire, W., 1985. A work control method for geometrically nonlinear analysis. *Proceedings of the International Conference on Numerical Methods in Engineering: Theory and Application*, pp. 913–921.
- Yang, Y. B. e Shieh, M. S., 1990. Solution method for nonlinear problems with multiple critical points. *AIAA Journal*, vol. 28, n. 12, pp. 2110–2116.
- Yang, Z. J. e Chen, J., 2004. Fully automatic modelling of cohesive discrete crack propagation in concrete beams using local arc-length methods. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 41, pp. 801–826.
- Yang, Z. J. e Proverbs, D., 2004. A comparative study of numerical solutions to non-linear discrete crack modelling of concrete beams involving sharp snap-back. *Journal of Engineering Fracture Mechanics*, vol. 71, pp. 81–105.