

**INTEGRAÇÃO NUMÉRICA POR
DECOMPOSIÇÃO DE ELEMENTOS NO
CONTEXTO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS
FINITOS GENERALIZADOS**

Bruna Caroline Campos


UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

**"INTEGRAÇÃO NUMÉRICA POR DECOMPOSIÇÃO DE
ELEMENTOS NO CONTEXTO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS
FINITOS GENERALIZADOS"**

Bruna Caroline Campos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de "Mestre em Engenharia de Estruturas".

Comissão Examinadora:


Prof. Dr. Felício Bruzzi Barros
DEES - UFMG (Orientador)


Prof. Dr. Samuel Silva Penna
DEES - UFMG (Coorientador)


Prof. Dr. Rodrigo Guerra Peixoto
DEES - UFMG


Prof. Dr. Marcos Arndt
UFPR

Belo Horizonte, 21 de fevereiro de 2020.

C198i Campos, Bruna Caroline.
Integração numérica por decomposição de elementos no contexto do método dos elementos finitos generalizados [recurso eletrônico] / Bruna Caroline Campos. – 2020.
1 recurso online (xv, 162 f. : il., color.) : pdf.

Orientador: Felício Bruzzi Barros.
Coorientador: Samuel Silva Penna.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Bibliografia: f. 155-162.
Exigências do sistema: Adobe Acrobat Reader.

1. Engenharia de estruturas - Teses. 2. Método dos elementos finitos - Teses. 3. Mecânica da fratura - Teses. 4. Integração numérica - Teses.
I. Barros, Felício Bruzzi. II. Penna, Samuel Silva. III. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. IV. Título.

CDU: 624(043)

Mestre não é quem sempre ensina, mas quem de repente aprende.

Guimarães Rosa

Índice

Índice	iii
Lista de Tabelas	vi
Lista de Figuras	xii
Resumo	xiii
Abstract	xiv
Agradecimentos	xv
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Objetivos	5
1.1.1 Objetivo Geral	5
1.1.2 Objetivos Específicos	6
1.2 Organização do Texto	6
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	8
2.1 Método dos Elementos Finitos Generalizados	8
2.1.1 Formulação do MEFG	9
2.1.2 Representação de trincas no MEFG	11
2.1.3 Método dos Elementos Finitos Generalizados Estável	21
2.1.4 Metodologia Global-Local	24
2.2 Análise Fisicamente Não Linear	25
2.2.1 Obtenção de Trajetórias de Equilíbrio	26
2.2.2 Modelos Constitutivos para o Concreto	27
2.2.3 Formulação Não Local	28
2.3 Integração Numérica no MEFG	31
2.3.1 Integração Numérica para Enriquecimentos Descontínuos	31
2.3.2 Integração Numérica para Enriquecimentos Singulares	35
3 ASPECTOS COMPUTACIONAIS	39
3.1 Técnicas de Integração Numérica Adotadas	39
3.1.1 Elementos totalmente atravessados pela trinca	39

3.1.2	Elementos contendo a ponta da trinca em seu interior	40
3.2	Implementação Computacional	42
3.2.1	Classe <code>SubdivisionOfElements</code>	47
3.2.2	Classe <code>MappingAndSubdivisionOfElements</code>	54
3.2.3	Armazenamento de Dados para a Análise Fisicamente Não	
	Linear	56
4	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	60
4.1	Influência do Posicionamento da Trinca no Elemento	62
4.1.1	Altura da trinca	63
4.1.2	Posição da ponta da trinca	66
4.2	Modelos sem Propagação	71
4.2.1	Chapa em Modo I de Abertura e $a = 1,0$	72
4.2.2	Chapa em Modo I de Abertura e $a = 2,8$	76
4.2.3	Chapa em Modo I de Abertura e $a = 3,5$	79
4.2.4	Chapa em Modo Misto de Abertura e $a = 3,5$	84
4.2.5	Chapa com Trinca Inclinada	89
4.2.6	Chapa com trinca com mudança de direção	93
4.3	Influência da Distorção do Elemento	98
4.3.1	Estratégia de Mapeamento dos Pontos de Integração	98
4.3.2	Estratégia de Subdivisão de Elementos	103
4.4	Modelo com Propagação e Estratégia Global-Local	107
4.5	Modelos com Propagação de Trinca Coesiva	115
4.5.1	Análise em Meio Linear Elástico: Chapa sob tração direta	117
4.5.2	Análise em Meio Linear Elástico: Viga em balanço	119
4.5.3	Análise em Meio Fisicamente Não Linear: Flexão em 3 pontos	132
4.5.4	Análise em Meio Fisicamente Não Linear: Painel em L	143
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	151
5.1	Contribuições deste Trabalho	151
5.2	Sugestões para Trabalhos Futuros	154
	Referências Bibliográficas	155

Lista de Tabelas

3.1	Coordenadas para integração com três pontos.	53
4.1	Variação da altura da trinca: dados para subdivisão de elementos.	64
4.2	Variação da altura da trinca: dados para integração convencional.	65
4.3	Variação da posição da ponta da trinca: dados para integração con-	
	vencional.	68
4.4	Variação da posição da ponta da trinca: dados para estratégia imple-	
	mentada.	69
4.5	Resultados de U , K_I e tempo de processamento t para $a = 1, 0$.	75
4.6	Comparação das estratégias de integração para trinca $a = 1, 0$.	75
4.7	Resultados de U , K_I e t para $a = 2, 8$.	78
4.8	Comparação das estratégias de integração para trinca $a = 2, 8$.	79
4.9	Comparação das estratégias de integração para trinca $a = 3, 5$ e Modo	
	I de abertura.	84
4.10	Resultados de U , K_I , K_{II} e tempo de processamento t para integração	
	convencional, $a = 3, 5$ e Modo Misto de abertura.	88
4.11	Resultados de U , K_I , K_{II} e tempo de processamento t para estratégia	
	implementada, $a = 3, 5$ e Modo Misto de abertura.	88
4.12	Comparação das estratégias de integração para trinca $a = 3, 5$ e Modo	
	Misto de abertura.	89
4.13	Resultados de U , K_I , K_{II} e tempo de processamento t para integração	
	convencional e $a = 5, 0$.	92
4.14	Resultados de U , K_I , K_{II} e tempo de processamento t para estratégia	
	implementada e $a = 5, 0$.	93
4.15	Comparação das estratégias de integração para trinca $a = 5, 0$.	93
4.16	Resultados de U , K_I , K_{II} e tempo de processamento t para chapa	
	com trinca e quina inicial e integração convencional.	97

4.17 Resultados de U , K_I , K_{II} e tempo de processamento t para chapa	
com trinca e quina inicial e estratégia implementada.	97
4.18 Dados coletados a cada passo de propagação para as séries IC e SM .	112
4.19 Passo 1 de propagação: resultados para diferentes parâmetros de con-	
vergência e integração convencional.	114
4.20 Passo 1 de propagação: resultados para diferentes parâmetros de con-	
vergência e estratégia implementada.	114
4.21 Quantidade de passos do processo incremental-iterativo considerando	
a estratégia de subdivisão de elementos.	134

Lista de Figuras

2.1	Estratégia de enriquecimento da nuvem ω_j (Alves, 2012).	10
2.2	Chapa com trinca centrada e distribuição de tensões segundo o critério de Griffith (1920).	13
2.3	Modelo de trinca coesiva de Hillerborg et al. (1976) com trinca real de dimensão a_0 e trinca fictícia de dimensão l_p .	14
2.4	Classificação dos métodos numéricos baseados em MEF segundo a representação da propagação da fissuração (Wolff, 2010) apud (Ingraffea e Wawrzynek, 2004).	15
2.5	Eixo local de elemento de trinca.	17
2.6	Parâmetros para propagação da trinca pelo método de mapeamento de segmentos.	19
2.7	Representação da trinca pelo método de <i>Level-Set</i> .	20
2.8	Representação do incremento de trinca e da nova orientação θ_c (Adaptado de Malekan (2017)).	21
2.9	Cálculo da função de enriquecimento do MEFGE (Gupta et al., 2013).	23
2.10	Representação esquemática do enriquecimento Global-Local para um problema bidimensional genérico Alves (2012).	25
2.11	Obtenção de trajetória de equilíbrio com controle de carga (Fuina, 2004).	26
2.12	Propagação de fissuras em modelos distribuídos (Penna, 2011).	28
2.13	Volume representativo do material e exemplo de utilização da função de distribuição de sino (Bazant e Jirásek, 2002).	30
2.14	Geração de subpolígonos para quadratura da forma fraca (Moës et al., 1999).	31
2.15	Subdivisão de elementos em um modelo tridimensional (Sukumar et al., 2000).	32

2.16 Função de Heaviside regularizada com parâmetro ρ (Ventura e Ben-venuti, [2015]).	34
2.17 Pontos de integração polar em elemento contendo singularidade (Fries e Belytschko, [2010]).	36
2.18 Comparação dos métodos de integração numérica envolvendo funções singulares para trinca indicada em vermelho: (a) subdivisão de elementos e uso da quadratura de Gauss, (b) mapeamento dos pontos de integração e (c) integral de contorno.	37
3.1 Método de mapeamento dos pontos de integração.	41
3.2 Posicionamento dos pontos de integração: à esquerda, quadratura de Gauss; à direita, estratégia de mapeamento aplicada.	42
3.3 Notação UML utilizada nos diagramas de classes.	43
3.4 Modificações na classe <code>PersistenceAsXml</code>	44
3.5 Modificações nas classes <code>Element</code> e <code>ParametricElement</code>	45
3.6 Seleção de nós do método <code>getCornerVertices()</code> : para a trinca representada, a subdivisão é indicada pelas linhas pontilhadas, enquanto os nós dos vértices são selecionados para a triangulação, não sendo utilizados os nós das arestas.	46
3.7 Criação da classe <code>NumericalIntegrationDataManager</code>	46
3.8 Criação das classes do pacote <code>numericalintegrationredefinition</code>	47
3.9 Avaliação do posicionamento das interseções e extensões do segmento de trinca para armazenamento nas listas de nós para triangulação.	48
3.10 Modificação da classe <code>ComputationalGeometry</code>	49
3.11 Tipos de triangulação geradas.	50
3.12 Exemplos de triangulação em elemento triangular.	51
3.13 Integração com 3 pontos: à esquerda, coordenadas de área; à direita, coordenadas paramétricas.	53
3.14 Triangulações obtidas para diferentes ordenações da lista de nós.	54
3.15 Células de integração originadas da subdivisão e mapeamento dos pontos de integração.	55
3.16 Ponderação das variáveis constitutivas para os novos pontos de integração.	57

3.17 Variáveis constitutivas extrapoladas para o modelo de fissuração dis-	
tribuída.	58
4.1 Subdivisão do elemento (a) sem considerar e (b) considerando o ponto	
advindo da extensão do segmento de trinca.	61
4.2 Diferentes alturas da trinca no elemento.	63
4.3 Influência da altura da trinca na obtenção da matriz de rigidez do	
elemento pela quadratura de Gauss.	66
4.4 Diferentes tamanhos da trinca no elemento.	66
4.5 Influência do tamanho da trinca na obtenção da matriz de rigidez do	
elemento na integração convencional.	69
4.6 Influência do tamanho da trinca na obtenção da matriz de rigidez do	
elemento na integração com mapeamento e subdivisão de elementos.	70
4.7 Convergência relativa da norma da matriz de rigidez para integração	
convencional.	70
4.8 Dados comuns aos exemplos sem propagação.	71
4.9 Disposição da trinca $a = 1,0$ na malha adotada.	73
4.10 Energia de deformação U para chapa com trinca $a = 1,0$.	73
4.11 Fator de intensidade de tensão K_I para chapa com trinca $a = 1,0$.	74
4.12 Tempo de processamento t para chapa com trinca $a = 1,0$.	74
4.13 Disposição da trinca $a = 2,8$ na malha adotada.	76
4.14 Energia de deformação U para chapa com trinca $a = 2,8$.	77
4.15 Fator de intensidade de tensão K_I para chapa com trinca $a = 2,8$.	77
4.16 Tempo de processamento t para chapa com trinca $a = 2,8$.	78
4.17 Disposição da trinca $a = 3,5$ na malha adotada.	80
4.18 Malha adotada para obtenção da energia de deformação de referência	
para trinca $a = 3,5$.	81
4.19 Energia de deformação U para chapa com trinca $a = 3,5$ e Modo I	
de abertura.	82
4.20 Fator de intensidade de tensão K_I para chapa com trinca $a = 3,5$ e	
Modo I de abertura.	83
4.21 Tempo de processamento t para chapa com trinca $a = 3,5$ e Modo I	
de abertura.	83

4.22 Energia de deformação U para chapa com trinca $a = 3,5$ e Modos I e II de abertura.	85
4.23 Fator de intensidade de tensão K_I para chapa com trinca $a = 3,5$ e Modos I e II de abertura.	86
4.24 Fator de intensidade de tensão K_{II} para chapa com trinca $a = 3,5$ e Modos I e II de abertura.	86
4.25 Tempo de processamento t para chapa com trinca $a = 3,5$ e Modos I e II de abertura.	87
4.26 Disposição da trinca $a = 5,0$ na malha adotada.	89
4.27 Energia de deformação U para chapa com trinca $a = 5,0$.	90
4.28 Fator de intensidade de tensão K_I para chapa com trinca $a = 5,0$.	91
4.29 Fator de intensidade de tensão K_{II} para chapa com trinca $a = 5,0$.	91
4.30 Tempo de processamento t para chapa com trinca $a = 5,0$.	92
4.31 Disposição da trinca com quina na malha adotada.	94
4.32 Energia de deformação U para chapa com trinca e quina inicial.	95
4.33 Fator de intensidade de tensão K_I para chapa com trinca e quina inicial.	95
4.34 Fator de intensidade de tensão K_{II} para chapa com trinca e quina inicial.	96
4.35 Tempo de processamento t para chapa com trinca e quina inicial.	96
4.36 Distorções adotadas para elementos com enriquecimento singular.	99
4.37 Células triangulares geradas para cada distorção.	99
4.38 Energia de deformação U da chapa para distorção P .	100
4.39 Energia de deformação U da chapa para distorção M .	100
4.40 Energia de deformação U da chapa para distorção G .	101
4.41 Norma da matriz de rigidez $\ K\ $ do elemento E25 para distorção P .	102
4.42 Norma da matriz de rigidez $\ K\ $ do elemento E25 para distorção M .	102
4.43 Norma da matriz de rigidez $\ K\ $ do elemento E25 para distorção G .	103
4.44 Distorções adotadas para elementos com enriquecimento descontínuo.	104
4.45 Energia de deformação U da chapa para distorção P .	104
4.46 Energia de deformação U da chapa para distorção M .	105
4.47 Energia de deformação U da chapa para distorção G .	105
4.48 Norma da matriz de rigidez $\ K\ $ do elemento E25 para distorção P .	106
4.49 Norma da matriz de rigidez $\ K\ $ do elemento E25 para distorção M .	106
4.50 Norma da matriz de rigidez $\ K\ $ do elemento E25 para distorção G .	107

4.51 Chapa com trinca centrada.	108
4.52 Malhas para o primeiro passo de propagação: (a) malha global inicial, (b) malha local gerada, (c) malha global com nós enriquecidos com a solução local em amarelo (Fonseca, 2019).	109
4.53 Trajetória da trinca para os 10 passos de propagação.	110
4.54 Tempo acumulado dos ciclos para os 10 passos de propagação.	112
4.55 Quantidade de ciclos por passo de propagação.	113
4.56 Tempo acumulado dos ciclos para os 10 passos de propagação consi- derando convergência dos ciclos por energia de deformação.	115
4.57 Chapa submetida a tração direta (Wolff, 2010).	117
4.58 Disposição dos pontos de integração antes e após o surgimento da trinca.	118
4.59 Chapa sob tração direta: trajetória de equilíbrio do deslocamento de controle D_y	119
4.60 Viga em balanço (Silva, 2016).	120
4.61 Viga em balanço: alterações na trajetória de equilíbrio com variação da quadratura de Gauss na integração convencional.	120
4.62 Viga em balanço: trajetória de equilíbrio do deslocamento de controle D_y	121
4.63 Viga em balanço: configuração deformada para integração convencional.	123
4.64 Viga em balanço: configuração deformada para estratégia implemen- tada.	124
4.65 Viga em balanço: tensão σ_{xx} para (a) integração convencional e (b) estratégia implementada.	125
4.66 Viga em balanço: alterações na trajetória de equilíbrio para elementos quadrilaterais $Q4$ e $Q12$	126
4.67 Viga em balanço: configuração deformada para integração convenci- onal e malha de elementos $Q4$	127
4.68 Viga em balanço: configuração deformada para estratégia implemen- tada e malha de elementos $Q4$	128
4.69 Viga em balanço: alterações na trajetória de equilíbrio para elementos quadrilaterais $Q4$ e $Q12$ e diferentes restrições dos graus de liberdade.	129
4.70 Viga em balanço: configuração deformada para integração convenci- onal e travamento seletivo do enriquecimento polinomial.	130

4.71	Viga em balanço: configuração deformada para estratégia implemen-	
	tada e travamento seletivo do enriquecimento polinomial.	131
4.72	Viga sob flexão em três pontos (Penna, 2011).	132
4.73	Função Gaussiana para l variável e $k = 1, 0$.	133
4.74	Flexão em três pontos: trajetória de equilíbrio do deslocamento de	
	controle D_x .	135
4.75	Flexão em três pontos: configuração deformada para integração con-	
	venicional.	136
4.76	Flexão em três pontos: configuração deformada para estratégia im-	
	plementada.	137
4.77	Flexão em três pontos: distribuição de tensões horizontais σ_{xx} para	
	integração convencional.	138
4.78	Flexão em três pontos: distribuição de tensões horizontais σ_{xx} para	
	estratégia implementada.	139
4.79	Modificação das células de integração para simetrização dos pontos	
	de integração com relação ao eixo tangencial à trinca.	140
4.80	Flexão em três pontos: distribuição de tensões horizontais σ_{xx} para	
	estratégia implementada e simetrização dos pontos de integração.	141
4.81	Flexão em três pontos: trajetória de equilíbrio do deslocamento de	
	controle D_x , comparação com implementação da simetrização dos	
	pontos de integração.	141
4.82	Flexão em três pontos: tempo de processamento acumulado.	142
4.83	Painel em L (Winkler et al., 2004).	143
4.84	Painel em L: trajetórias de equilíbrio para diferentes energias de fra-	
	tura com integração convencional.	145
4.85	Painel em L: trajetória de equilíbrio do deslocamento vertical máximo.	145
4.86	Painel em L: configuração deformada para integração convencional.	146
4.87	Painel em L: configuração deformada para estratégia implementada.	147
4.88	Painel em L: dano na direção de ε_1 para integração convencional.	148
4.89	Painel em L: dano na direção de ε_1 para estratégia implementada.	149
4.90	Painel em L: tempo de processamento acumulado.	150
4.91	Painel em L: padrão de dano experimental (Winkler et al., 2004).	150

Resumo

O presente trabalho apresenta a utilização de estratégias de integração numérica alternativas às convencionais a serem aplicadas no contexto do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), especificamente em modelos bidimensionais da Mecânica da Fratura. Propõe-se o emprego da subdivisão de elementos e mapeamento dos pontos de integração em elementos da malha contendo descontinuidades ou singularidades, representando assim de forma mais realista os campos de deslocamentos e tensões. Busca-se validar as estratégias implementadas por meio da análise da energia de deformação e da rigidez calculadas em exemplos variados, comparando-as com casos onde é empregada a quadratura de Gauss convencional. As estratégias citadas são aplicadas também no âmbito do Método dos Elementos Finitos Generalizados Estável (MEFGE), da metodologia global-local (MEFG^{gl}) e da Análise Fisicamente Não-Linear. Obtém-se resultados mais precisos e tempos de processamento reduzidos devido à diminuição do número de pontos de integração, que passam a ser posicionados levando em conta as especificidades do problema. As implementações computacionais foram realizadas como parte da expansão do sistema INSANE (*INteractive Structural ANalysis Environment*), um projeto de software livre desenvolvido pelo Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais.

Palavras-Chave: Método dos Elementos Finitos Generalizados, Integração Numérica, Mecânica da Fratura.

Abstract

The current work presents the employment of alternative numerical integration strategies over the conventional ones to be applied in the Generalized Finite Element Method context, specifically in two-dimensional Fracture Mechanics models. It is suggested to utilize the subdivision of elements and mapping of the integration points in mesh elements containing discontinuities or singularities, therefore representing the displacements and stress fields more precisely. It is aimed to validate the implemented strategies by analysing the strain energy and stiffness computed in a range of examples, comparing them to conventional Gauss quadrature situations. The cited strategies are also applied in cases modelled by the Stable Generalized Finite Element Method (GFEM), the global-local methodology (GFEM^{gl}) and the Physically Non-Linear Analysis. It is achieved good results and reduced processing times due to the decrease in the number of integration points, which are allocated taking into account problems particularities. Computational implementations were performed as part of the expansion of INSANE (*INteractive Structural ANalysis Environment*), an open-source software project developed by the Structural Department of the Federal University of Minas Gerais.

Keywords: Generalized Finite Element Method, Numerical Integration, Fracture Mechanics.

Agradecimentos

À Deus, por todas as oportunidades que me proporcionou de estar no lugar certo e de conhecer as pessoas certas na hora certa. Agradeço por estar sempre ao meu lado, não importa o quão certa ou errada eu esteja na minha trajetória.

À minha família, por estar comigo e me apoiar incondicionalmente em todas as minhas decisões. Obrigada pelos ensinamentos de vida e por acreditarem em mim mais e mais a cada dia.

Aos meus amigos, sejam eles mais recentes ou de longa data, por existirem. Obrigada por poder sempre contar com vocês, por estarem presentes mesmo a longas distâncias.

Aos meus professores da Universidade Federal de Uberlândia, já que sem eles eu não teria realizado nem um quinto dos objetivos que tenho ou já tive. Obrigada aos professores Jesiel e Maria Cristina, por me incentivarem a buscar o melhor para mim e acreditarem no meu potencial.

Aos professores do Departamento de Engenharia de Estruturas da UFMG, que me receberam de braços abertos e se mostraram sempre prontos a me ajudar e a me ensinar. Obrigada aos professores Felício e Samuel, pela disponibilidade, paciência e simpatia com que me passaram seus conhecimentos e se doaram para que esse trabalho se concretizasse.

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

No estudo do comportamento de estruturas, existem casos em que as variáveis envolvidas em sua modelagem apresentam uma mudança rápida em pequenas escalas do domínio. Nesses casos, a abordagem numérica apropriada deve incluir a utilização de descontinuidades, singularidades e gradientes elevados. Uma situação desse tipo é a propagação de trincas em meios materiais, sendo esse um campo de estudo da Mecânica dos Sólidos (Fries e Belytschko, 2010).

Observa-se que para a solução de problemas não suaves, como no caso da modelagem de trincas, o Método dos Elementos Finitos (MEF) convencional não se adequa perfeitamente devido à necessidade de oneroso processo de geração de malha e perda de precisão na integração da forma discreta do problema de valor de contorno pelas quadraturas convencionais. Nesse contexto, Shepard et al. (1985) e Swenson e Ingraffea (1988) propuseram algoritmos de reconstrução de malha devido ao desconhecimento prévio da trajetória da trinca. Além disso, Portela et al. (1992) e Portela et al. (1993) apresentaram uma formulação dual para lidar com trincas pelo Método dos Elementos de Contorno (MEC). Nesta, um lado da descontinuidade é tratado por uma equação integral – singular – de deslocamentos, enquanto o outro é associado a uma equação integral – hiper-singular – das forças de superfície. Outra alternativa proposta foi o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) (Strouboulis, Babuška, e Copps, 2000), onde as funções de forma tradicionais do MEF são tomadas como uma Partição da Unidade (PU) e associadas a funções de

aproximação local que representam o comportamento assintótico de trincas.

Semelhantemente ao MEFG, formulou-se o Método dos Elementos Finitos Estendido (em inglês *XFEM* e aqui indicado por MEFX), o qual também associa uma PU às funções de enriquecimento (Belytschko e Black, 1999; Moës et al., 1999). Por esse motivo, o MEFG e o MEFX são ditos equivalentes (Fries e Belytschko, 2010). Em ambos os métodos, parte do domínio pode ser enriquecido, simplificando o estudo de comportamentos locais sem ser necessário o refinamento excessivo da malha e consequente significativo aumento do trabalho computacional.

No âmbito do MEFG/MEFX, adotam-se dois tipos de funções enriquecedoras para representação de trincas: descontínuas e singulares. As funções descontínuas indicam o comportamento das interfaces da trinca, onde há uma descontinuidade no campo de deslocamentos. As funções singulares são adotadas na região da ponta da trinca. Segundo estudos na Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE), nessa posição as tensões tendem a infinito, apresentando um elevado gradiente local. As formulações mais utilizadas nesse caso são a função de Heaviside (Moës et al., 1999) e as funções singulares baseadas nas funções de tensão de Westergaard (Park et al., 2009), representando as descontinuidades e singularidades do modelo, respectivamente.

O MEFG tem como desvantagem o fato de que, ao se considerar tanto a PU como as funções de aproximação local como polinômios, o espaço da solução gera dependências lineares no equacionamento associado ao cálculo da matriz de rigidez. Para tal problema, podem ser utilizados procedimentos numéricos como o proposto por Strouboulis, Babuška, e Copps (2000). Alternativamente, Babuška e Banerjee (2012) introduzem o Método dos Elementos Finitos Estável (MEFGE), que propõe, exceto para enriquecimentos lineares, eliminar a dependência linear por meio de uma modificação local do enriquecimento característico do MEFG para o caso unidimensional. Neste trabalho, demonstra-se também, para o caso unidimensional, que o uso dessa modificação recupera a convergência da solução aproximada, que

normalmente é penalizada se elementos de mistura são utilizados (elementos em que diferentes tipos de enriquecimento são empregados).

Apesar de conseguir representar as descontinuidades e singularidades oriundas dos modelos de trinca, erros de integração numérica são inerentes ao MEFG quando a matriz de rigidez é avaliada da mesma forma que no MEF, ou seja, pela regra da quadratura de Gauss. Esse método requer que o integrando seja necessariamente polinomial para que a integração seja exata. Entretanto, as funções descontínuas e singulares não condizem com tal pressuposto. A utilização da quadratura de Gauss para solução de integrandos não polinomiais, além de ser menos precisa quando comparada a integrandos polinomiais, tem baixa taxa de convergência do erro (Béchet et al., 2005).

Constam na literatura variados procedimentos que, aliados ao MEFG na representação e propagação de trincas, conduzem a uma integração mais precisa da matriz de rigidez. Tais procedimentos podem ser divididos segundo o emprego de funções de enriquecimento descontínuas e singulares. No primeiro caso, observa-se a utilização de estratégias como a subdivisão de elementos tomados a partir da interface da trinca, podendo-se trabalhar apenas com dois subdomínios poligonais no processo de mapeamento conforme (Natarajan et al., 2009) ou mesmo com subdivisões triangulares onde é aplicada a quadratura de Gauss com precisão (Moës et al., 1999; Sukumar et al., 2000). Outra opção é a substituição da função descontínua de Heaviside por polinômios de alta ordem que também conduzem à solução exata do campo de deslocamentos (Iarve, 2003; Ventura e Benvenuti, 2015).

No caso do enriquecimento com funções singulares as alternativas apresentadas procuram associar a subdivisão dos elementos que contêm a ponta da trinca com a utilização de estratégias de integração capazes de considerar os elevados gradientes de solução nesta região. O mapeamento dos pontos de integração, por exemplo, utiliza de pontos de integração estrategicamente calculados, concentrando-os na vizinhança da região do campo de tensões singulares (Laborde et al., 2005; Béchet et al., 2005).

e [Park et al., 2009](#)). A integração adaptativa, por sua vez, consiste na subdivisão recursiva do elemento em subcélulas não conformes até que seja atingida a tolerância em um erro pré-determinado ([Strouboulis, Babuška, e Copps, 2000](#)). Ainda nesse contexto, a estratégia de integrais de contorno transforma as integrais no domínio dos elementos em integrais de contorno, reduzindo os erros advindos da integração ([Ventura et al., 2009](#)).

A partir das estratégias de integração numérica citadas, propõe-se neste trabalho a implementação de estratégias para enriquecimentos descontínuos e singulares, no contexto do MEFG, no sistema INSANE.

O sistema computacional INSANE (*INteractive Structural ANalysis Environment*) é um projeto de software livre, implementado em linguagem JAVA segundo o paradigma da Programação Orientada a Objetos e desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais. Dispõe de diversos recursos de análise estrutural, entre os quais pode-se destacar as classes específicas para representação e propagação de trincas via MEFG. Tal plataforma é empregada no presente trabalho como base para implementação de extensões da modelagem de trincas.

Atualmente no ambiente INSANE, ao se tratar de problemas de trincas, é adotado um número significativamente maior de pontos de Gauss nos elementos enriquecidos. Esse processo, além de dispendioso computacionalmente, ainda pode gerar erros significativos na aproximação. Nesse contexto, propõe-se a implementação da integração numérica via subdivisão de elementos e mapeamento dos pontos de integração ([Park et al., 2009](#)), utilizadas para enriquecimentos descontínuos e singulares, respectivamente. Optou-se por estas estratégias visto que, após extensa revisão bibliográfica, constatou-se serem os mais frequentemente adotados em análises via MEFG, tanto em trabalhos precusores ([Moës et al., 1999](#)) como em trabalhos mais recentes ([Gupta e Duarte, 2016](#)).

A implementação computacional é validada para modelos da Mecânica da Fratura Linear Elástica no contexto do MEF_G e do MEF_{GE} para trincas estáticas, modelos da MFLE de propagação de trincas em meios lineares elásticos com o auxílio da metodologia global-local (MEF_G^{gl}), modelos da MFLE de trincas estáticas e elementos distorcidos e modelos de propagação de trincas coesivas em meios lineares elásticos e em meios fisicamente não lineares. Para este último caso, é proposta e validada uma estratégia de transferência de parâmetros para armazenamento das variáveis constitutivas após o reposicionamento dos pontos de integração – advindo das estratégias de integração numérica implementadas.

Considera-se a implementação uma expansão da plataforma INSANE, contribuindo para o arcabouço existente na área do MEF_G, MEF_{GE} e análise Global-Local (MEF_G^{gl}), no que diz respeito à obtenção da solução do problema de valor de contorno de forma mais precisa e eficiente. Este trabalho é vinculado aos desenvolvimentos de Wolff (2010), Alves (2012), Silva (2016), Malekan (2017) e Fonseca (2019) no contexto da nucleação e propagação de trincas. Essa expansão se torna possível já que o sistema INSANE configura um ambiente computacional segmentado, amigável a mudanças e escalável em complexidade (Fonseca, 2008).

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo Geral

Essa dissertação tem como objetivo a implementação e avaliação de técnicas de integração numérica condizentes com modelos contendo descontinuidades e/ou singularidades. Procura-se garantir o aprimoramento da qualidade da solução aproximada via MEF_G, sem o ônus computacional da utilização de um elevado número de pontos de integração.

1.1.2 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos deste trabalho são, considerando como base computacional o ambiente INSANE:

- Implementação, no contexto do MEFG, das estratégias de integração numérica por subdivisão de elementos e mapeamento dos pontos de integração para modelos bidimensionais, levando em consideração as descontinuidades e singularidades próprias da propagação de trincas.
- Expansão da técnica de integração para a propagação de trincas via estratégia global-local e para modelos de propagação de trinca coesiva em meios não-lineares.
- Validação da implementação para modelos bidimensionais, apresentando suas vantagens em relação ao procedimento convencional de integração numérica, atualmente utilizado em elementos enriquecidos no sistema INSANE.

1.2 Organização do Texto

O presente trabalho está organizado em 5 capítulos.

O Capítulo 1 contextualiza o trabalho, apresentando a justificativa de realização do mesmo e os objetivos gerais e específicos traçados.

O Capítulo 2 contém uma revisão bibliográfica, abordando os temas de Método dos Elementos Finitos e afins – Método dos Elementos Finitos Generalizados, Método dos Elementos Finitos Generalizados Estável, Metodologia Global-Local, Representação e Propagação de trincas, Integração Numérica e Análise Fisicamente Não-Linear.

O Capítulo 3 discorre sobre os principais aspectos computacionais do trabalho, explicitando as modificações realizadas no código do sistema INSANE para viabilização das análises aqui apresentadas.

O Capítulo 4 traz as simulações numéricas realizadas a fim de avaliar a metodologia implementada.

O Capítulo 5, por fim, apresenta as considerações finais, ressaltando as contribuições deste trabalho e as sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Método dos Elementos Finitos Generalizados

O MEFG, segundo [Alves \(2012\)](#), pode ser interpretado como uma variação do MEF convencional. De acordo com [Duarte et al. \(2000\)](#), foi proposto de forma independente por I. Babuška e outros pesquisadores sob o nome de “Método dos Elementos Finitos Especiais” [\(Babuška et al., 1994\)](#) e “Método da Partição da Unidade” [\(Melenk e Babuška, 1996\)](#), e por C. A. Duarte e J. T. Oden sob o nome de “Método das Nuvens-*hp*”, uma formulação híbrida do MEF [\(Duarte e Oden, 1995; Duarte e Oden, 1996b; Duarte e Oden, 1996a\)](#).

No MEFG as funções de forma do MEF convencional são utilizadas como funções de Partição da Unidade (PU) e associadas às funções de aproximação local, formando então um novo espaço de solução [\(Barros, 2002\)](#). A escolha das funções convencionais de MEF para representar a PU é vantajosa para a implementação e utilização do MEFG, por já serem conhecidas no âmbito da discretização de estruturas, ao contrário do que ocorre em abordagens análogas dos métodos sem malha, em que as funções são construídas durante a solução do problema. Como as funções do MEF, utilizadas como PU, apresentam a propriedade do Delta de Kronecker, pode-se também garantir uma maior estabilidade ao problema analisado com a verificação direta das condições de contorno essenciais, o que não ocorre em grande parte dos métodos sem malha [\(Alves, 2012\)](#).

Paralelamente ao MEFG, outro método derivado do MEF merece destaque: o Método dos Elementos Finitos Estendido (*eXtended Finite Element Method*) ou MEFX. Esse método, proposto por Belytschko e Black (1999), emprega, a exemplo do MEFG, as funções convencionais de MEF como PU aprimorando-as via estratégia de enriquecimento explícito. O que difere a abordagem do MEFX dos primeiros trabalhos em MEFG é o fato de que naquele somente partes do domínio são enriquecidas. Em Duarte et al. (2000), porém, o MEFG já é citado como estratégia de enriquecimento de apenas alguns nós do domínio. Assim, atualmente tais métodos são considerados equivalentes (Fries e Belytschko, 2010).

2.1.1 Formulação do MEFG

Na estratégia do MEFG é considerado um tipo de enriquecimento extrínseco, ou seja, adicionam-se funções de forma especiais ao espaço de aproximação polinomial, e consequentemente aumentam-se as incógnitas do problema (Fries e Belytschko, 2010). Na Figura 2.1(a) há a utilização do conceito de nuvens, herdado do Método das Nuvens-*hp*, onde a nuvem ω_j indica o conjunto de elementos que compartilham o nó \mathbf{x}_j .

A Partição da Unidade é construída com as funções de Lagrange lineares (para o caso bidimensional) advindas do MEF, dadas por $\mathcal{N}_j(\mathbf{x})$ em um dado nó \mathbf{x}_j do domínio representado. Conforme a Figura 2.1(b), o conjunto das funções que formam a PU é tal que:

$$\sum_{j=1}^n \mathcal{N}_j(\mathbf{x}) = 1, \quad (2.1)$$

onde n é o número de pontos nodais de uma posição qualquer \mathbf{x} do domínio do problema.

As funções enriquecedoras ou *funções de aproximação local* são dadas pelo conjunto I_j , formado por q_j funções linearmente independentes. Cada função q_j é definida para um nó \mathbf{x}_j com suporte na nuvem ω_j (Alves, 2012):

$$I_j \stackrel{def}{=} \{L_{j1}(\mathbf{x}), L_{j2}(\mathbf{x}), \dots, L_{jq_j}(\mathbf{x})\} = \{L_{ji}(\mathbf{x})\}_{i=1}^{q_j}, \quad (2.2)$$

com $L_{j1}(\mathbf{x}) = 1$.

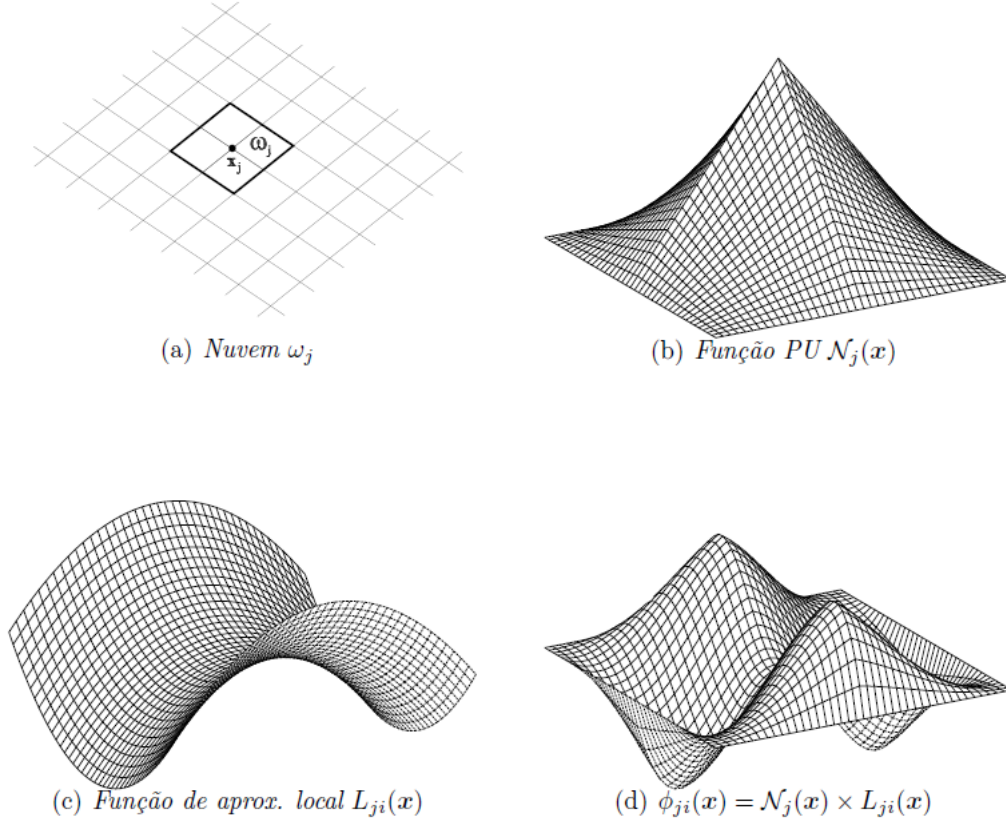


Figura 2.1: Estratégia de enriquecimento da nuvem ω_j (Alves, 2012).

É importante destacar que as funções $L_{ji}(\mathbf{x})$ indicadas na Figura 2.1(c) são quaisquer, podendo ser polinomiais, com singularidades, descontinuidades ou mesmo advindas de um conhecimento *a priori* do problema. As funções de forma do MEFG são, então, formadas pela associação da PU com as funções enriquecedoras:

$$\{\phi_{ji}\}_{i=1}^{q_j} = N_j(\mathbf{x}) \times \{L_{ji}(\mathbf{x})\}_{i=1}^{q_j}, \quad (2.3)$$

sem somatório em j .

A aproximação dos deslocamentos $\tilde{u}(\mathbf{x})$ no MEFG é, conforme Barros (2002):

$$\tilde{u}(x) = \sum_{j=1}^n \mathcal{N}_j(\mathbf{x}) \left\{ u_j + \sum_{i=1}^{q_j} L_{ji}(\mathbf{x}) b_{ji} \right\}, \quad (2.4)$$

onde u_j e b_{ji} são parâmetros nodais associados a cada componente $\mathcal{N}_j(\mathbf{x})$ do MEF e $\mathcal{N}_j(\mathbf{x}) \cdot L_{ji}(\mathbf{x})$ do MEFG, respectivamente.

Quando as funções de aproximação local escolhidas são polinômios, pode-se obter um sistema de equações linearmente dependentes ao associá-las com a PU, que também é da forma polinomial. A matriz de rigidez calculada a partir desse sistema é positiva semi-definida, mesmo após a eliminação dos movimentos de corpo rígido (Barros, 2002). Esse mau condicionamento gerado na rigidez pode, entretanto, ser resolvido através de métodos numéricos como o proposto por Strouboulis, Babuška, e Copps (2000).

Mesmo com a possibilidade de dependências lineares e consequente obtenção de matrizes de rigidez singulares, a estratégia do MEFG ainda se mostra vantajosa, uma vez que pode-se tratar a aproximação de forma específica a cada situação, viabilizando a modelagem de problemas nos quais o campo de tensões apresente singularidades (Barros, 2002).

Segundo Fries e Belytschko (2010) o uso de funções de enriquecimento especiais na aproximação do MEFG contendo saltos, quinas ou altos gradientes têm consequências importantes na integração numérica da matriz de rigidez. A exatidão da quadratura de Gauss como método de solução não é mais garantida, e torna-se necessário a utilização de procedimentos alternativos. Na seção 2.3 são descritas algumas dessas estratégias.

2.1.2 Representação de trincas no MEFG

A Mecânica da Fratura é o campo de estudo de falhas e fissuras que podem surgir nas estruturas durante sua vida útil. Abrange desde o estudo dos fenômenos físicos envolvidos no surgimento da fissuração até sua formação e propagação completa. De forma sucinta, a Mecânica da Fratura tem como objetivo descrever a relação de três

fatores envolvidos no processo mecânico da fissuração: tensão, tenacidade do material à fratura e tamanho da fissura. Tais fatores estão diretamente relacionados ao comportamento dos materiais, sendo, portanto, a resposta estrutural condicionada à constituição dos materiais envolvidos (Wolff, 2010).

O surgimento de trincas pode ocorrer devido a diferentes modos de aplicação de tensões, sendo eles: modo I ou modo de abertura (existência de tensões normais), modo II ou modo de deslizamento (existência de cisalhamento no plano) e modo III ou modo de rasgamento (existência de cisalhamento fora do plano). A abordagem da Mecânica da Fratura, por sua vez, pode ser analisada segundo duas linhas distintas: Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE) e Mecânica da Fratura Não linear (MFNL).

A MFLE teve origem com Griffith (1920), que buscou justificar o comportamento de materiais frágeis, que apresentam discrepância entre as tensões teoricamente previstas e aquelas obtidas experimentalmente. Observou-se que o aparecimento de trincas introduzia altas concentrações de tensão na proximidade da ponta da trinca, fazendo com que o campo de tensões nessa região tendesse a infinito, conforme Figura 2.2. Nesta, a chapa de comprimento L e espessura t ($L \gg t$) é submetida à tensão de tração nominal σ_N e, para $b \rightarrow 0$, $\sigma \rightarrow \infty$.

Para descrever o comportamento de uma estrutura contendo trincas e composta por material frágil, são levados em consideração dois parâmetros: o fator de intensidade de tensão K e a energia de fratura G_f . O parâmetro K depende da geometria da estrutura e da maneira com que o carregamento é aplicado na mesma a fim de criar condições do modo I nas faces da trinca. O parâmetro G_f , por sua vez, define a energia necessária para criar uma trinca de dimensão unitária.

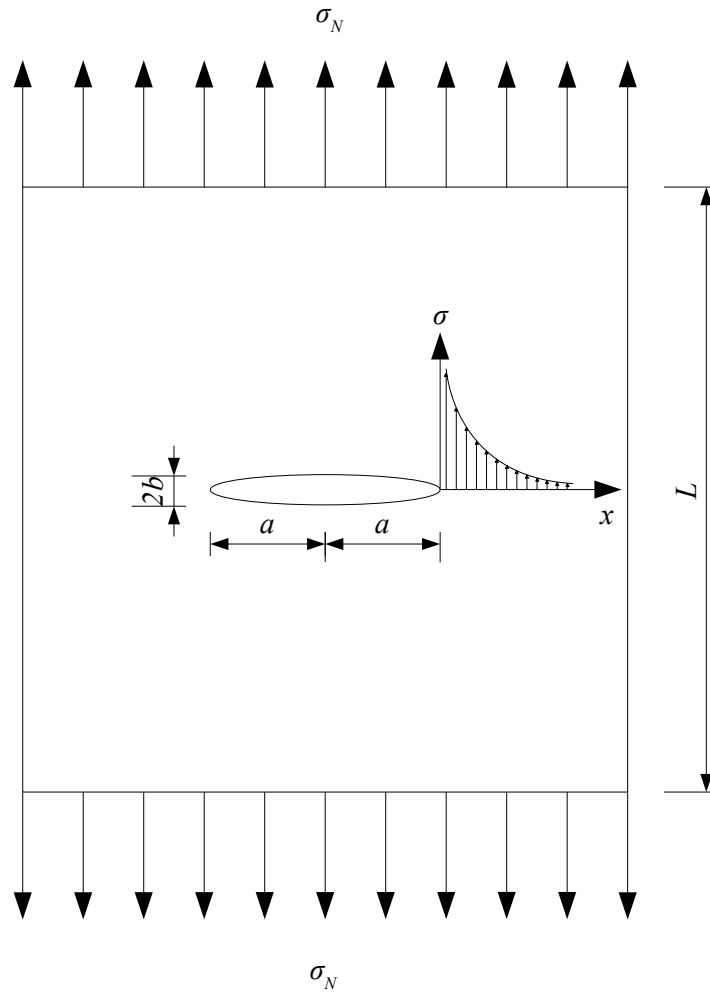


Figura 2.2: Chapa com trinca centrada e distribuição de tensões segundo o critério de [Griffith \(1920\)](#).

Ao se aplicar a teoria da MFLE às estruturas de concreto, observou-se que o comportamento desse material desviou-se das previsões da MFLE, por se tratar essencialmente de um material parcialmente frágil. Uma das principais razões para tal é o aparecimento de uma zona de processo de fratura (ZPF), onde há um amolecimento (em inglês, *softening*) do material. Com o intuito de prever mais precisamente o comportamento do concreto, pode-se associá-lo à teoria da Mecânica da Fratura Não Linear (MFNL). A consideração da não linearidade na Mecânica da Fratura é associada tanto a materiais dúcteis quanto a materiais parcialmente frágeis. Para o primeiro caso, a ZPF é pequena e circundada por uma grande zona plástica não

A propagação de trincas, por sua vez, pode ser denominada *geométrica* ou *não geométrica*. A Figura 2.4 representa uma classificação dos modelos numéricos baseados em MEF.

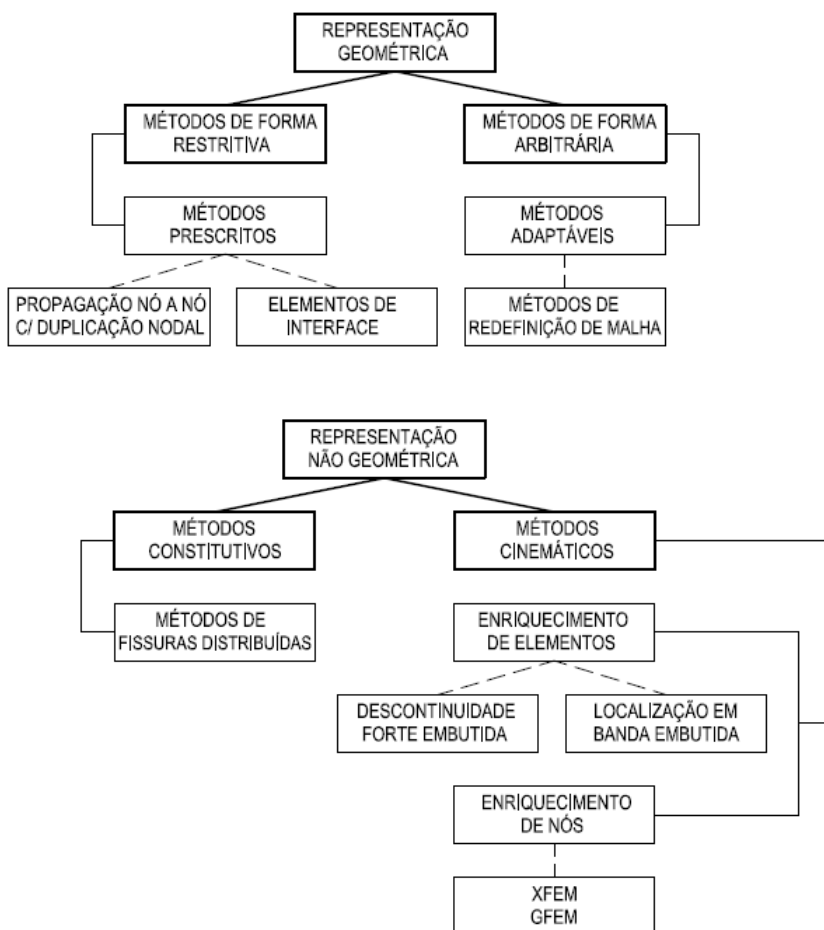


Figura 2.4: Classificação dos métodos numéricos baseados em MEF segundo a representação da propagação da fissuração (Wolff, 2010) apud (Ingraffea e Wawrzynek, 2004).

Nos métodos de representação *geométrica* a fissura depende do tamanho dos elementos, enquanto seu caminho de propagação limita-se à discretização da malha. Já a representação *não geométrica* é dividida nos casos em que a fissuração é representada no modelo constitutivo ou através de campos cinemáticos. Nesse último, as descontinuidades são incorporadas no campo de deslocamentos (Wolff, 2010).

No caso do MEEG, o processo de fissuração é representado de forma não geométrica, sendo embutido nas funções de aproximação local dos elementos. Assim, os elementos atravessados pela trinca precisam ser enriquecidos com funções que indicam descontinuidades fortes (saltos). Um exemplo de função descontínua usado nesse tipo de situação é a função de Heaviside (Pereira et al., 2009):

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{para } x \geq 0 \\ 0, & \text{para } x < 0 \end{cases}, \quad (2.5)$$

onde x é a posição em relação à descontinuidade (localizada em $x = 0$).

Além da descontinuidade apresentada em modelos de trincas, no caso particular da Mecânica da Fratura Linear Elástica, deve-se atentar à singularidade na região da ponta onde o campo de tensões tende a infinito, indicando um alto gradiente local. Para representação desse fenômeno podem ser utilizadas funções de enriquecimento a exemplo da proposição de Szabó e Babuška (1991), indicando o primeiro termo da série que reproduz a solução exata dos deslocamentos na vizinhança de uma singularidade:

$$u_{xi}^{(1)} = \frac{1}{2G} r^{\lambda_i^{(1)}} [(\kappa - Q_i^{(1)}(\lambda_i^{(1)} + 1)) \cos \lambda_i^{(1)} \theta - \lambda_i^{(1)} \cos(\lambda_i^{(1)} - 2)\theta], \quad (2.6)$$

$$u_{yi}^{(1)} = \frac{1}{2G} r^{\lambda_i^{(1)}} [(\kappa + Q_i^{(1)}(\lambda_i^{(1)} + 1)) \sin \lambda_i^{(1)} \theta + \lambda_i^{(1)} \sin(\lambda_i^{(1)} - 2)\theta], \quad (2.7)$$

$$u_{xi}^{(2)} = \frac{1}{2G} r^{\lambda_i^{(2)}} [(\kappa - Q_i^{(2)}(\lambda_i^{(2)} + 1)) \sin \lambda_i^{(2)} \theta - \lambda_i^{(2)} \sin(\lambda_i^{(2)} - 2)\theta], \quad (2.8)$$

$$u_{yi}^{(2)} = \frac{1}{2G} r^{\lambda_i^{(2)}} [(\kappa + Q_i^{(2)}(\lambda_i^{(2)} + 1)) \cos \lambda_i^{(2)} \theta + \lambda_i^{(2)} \cos(\lambda_i^{(2)} - 2)\theta], \quad (2.9)$$

onde:

- G é o Módulo de Elasticidade Transversal;

- $\kappa = (3 - 4\nu)$ para Estado Plano de Deformações e $\frac{(3-\nu)}{1+\nu}$ para Estado Plano de Tensões, sendo ν o coeficiente de Poisson;
- λ e Q são constantes determinadas para que a solução satisfaça ao equilíbrio e condições de contorno do problema (na representação de trincas (Oden e Duarte, 1997), $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = 0,5$, $Q^{(1)} = 0,333$ e $Q^{(2)} = -1,0$);
- r e θ variam conforme a posição onde as funções são calculadas, sendo sua referência o sistema de eixos local com origem na ponta da trinca, conforme ilustrado na Figura 2.5.

Tais funções são aplicáveis na representação de qualquer geometria em que se tem um ponto angular no contorno, como um ângulo menor do que 180 graus. As Equações 2.6 e 2.7 se aplicam às solicitações em modo I de abertura e as Equações 2.8 e 2.9 referem-se ao modo II.

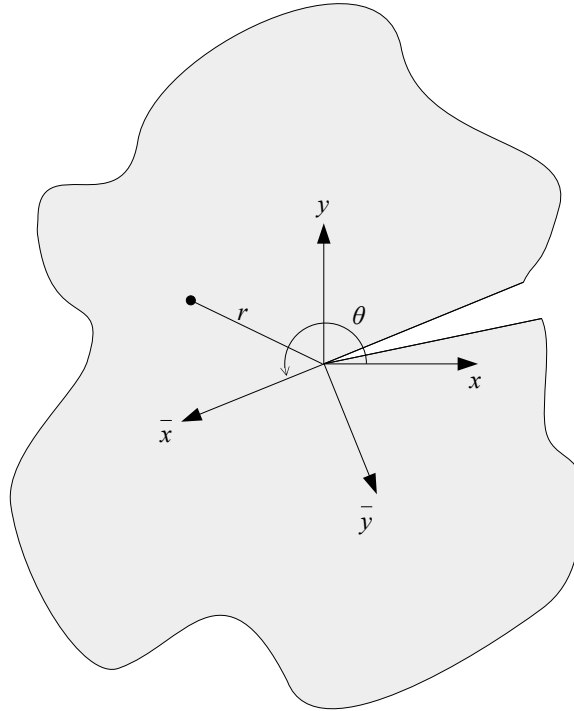


Figura 2.5: Eixo local de elemento de trinca.

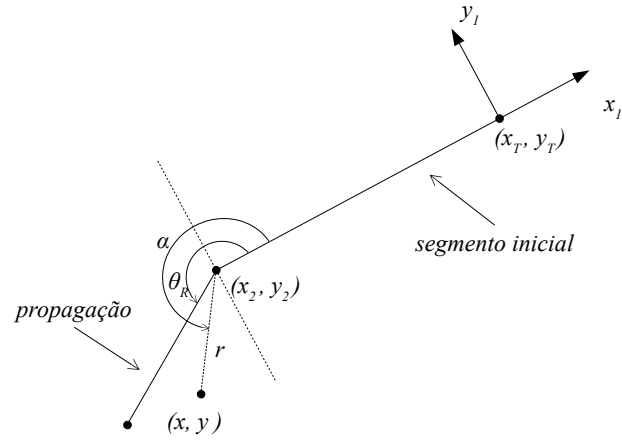
Juntamente com a representação feita pelas Equações (2.5) a (2.9), é necessário representar a movimentação da frente de trinca, ou seja, sua propagação com o

tempo. Para tal, pode-se citar duas técnicas frequentemente utilizadas: o Mapeamento por Segmentos e o Método de *Level-Set*.

O Mapeamento por Segmentos foi proposto por Belytschko e Black (1999) e representa a propagação da trinca com um segmento em cada intervalo de tempo. Considerando que a propagação pode não ocorrer na mesma direção que o segmento anterior, é necessário que os segmentos sejam rotacionados para o sistema de coordenadas da trinca inicial. Na Figura 2.6 o segmento inicial de trinca tem coordenadas em (x_T, y_T) , que definem a ponta da trinca, e (x_2, y_2) no sistema de coordenadas x_1, y_1 . O segmento originado da propagação é definido pelo ângulo θ_R . Para um ponto qualquer onde se deseja calcular as funções de enriquecimento (Equações 2.6 a 2.9), definido por r e α e com coordenadas (x, y) , obtém-se o ponto mapeado (x^*, y^*) de forma que os parâmetros $\bar{\theta}$ e \bar{r} sejam compatíveis com o sistema de coordenadas previamente adotado.

A desvantagem desse método consiste no fato de que, quando a trinca é longa ou o incremento de propagação é relativamente pequeno e há vários segmentos a serem mapeados, a execução consecutiva do processo leva a uma perda de qualidade na representação da trinca e aumento do tempo de processamento computacional.

O Método de *Level-Set* foi associado ao MEFG primeiramente por Stolarska et al. (2001). A interface é representada por uma ou mais funções de distância (*signed distance functions*), dependendo de sua condição – fechada, aberta com uma ou duas pontas. Para a trinca definida em $\psi = 0$ na Figura 2.7 e segundo as extensões da mesma ao longo do domínio considerado (obtidas a partir de um vetor unitário tangente às pontas da trinca), o sinal de ψ depende do lado da trinca onde o ponto em análise está posicionado. Considerando agora as pontas da trinca (aqui representadas duas a fim de generalização do método), são obtidas retas ortogonais às tangentes já traçadas, representadas por $\varphi_1 = 0$ e $\varphi_2 = 0$. Os sinais de φ_1 e φ_2 também são alternados conforme a posição do ponto em análise.



(a) Geometria inicial

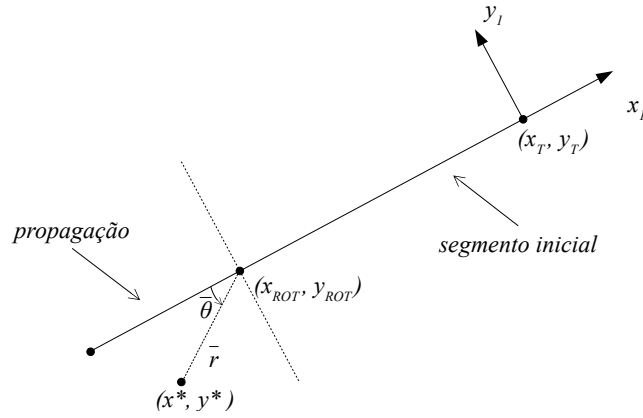
(b) Ponto mapeado (x^*, y^*)

Figura 2.6: Parâmetros para propagação da trinca pelo método de mapeamento de segmentos.

A propagação de frente de trinca é dada pela atualização de tais funções, as quais são avaliadas nos nós do elemento. Devido a esse fato a trinca é suave em cada domínio, não sendo possível haver mudança de direção da trinca no interior de um elemento. Contudo, o método simplifica a seleção dos nós enriquecidos e a definição do tipo de função de enriquecimento a se adotar em cada caso, visto que tal escolha depende apenas da avaliação dos valores nodais das *signed distance functions*. A comparação de exemplos numéricos indica que os fatores de intensidade de tensão e as posições da ponta da trinca são quase idênticos quando calculados pela representação explícita da trinca ou pelo Método de *Level-Set* (Stolarska et al.,

2001).

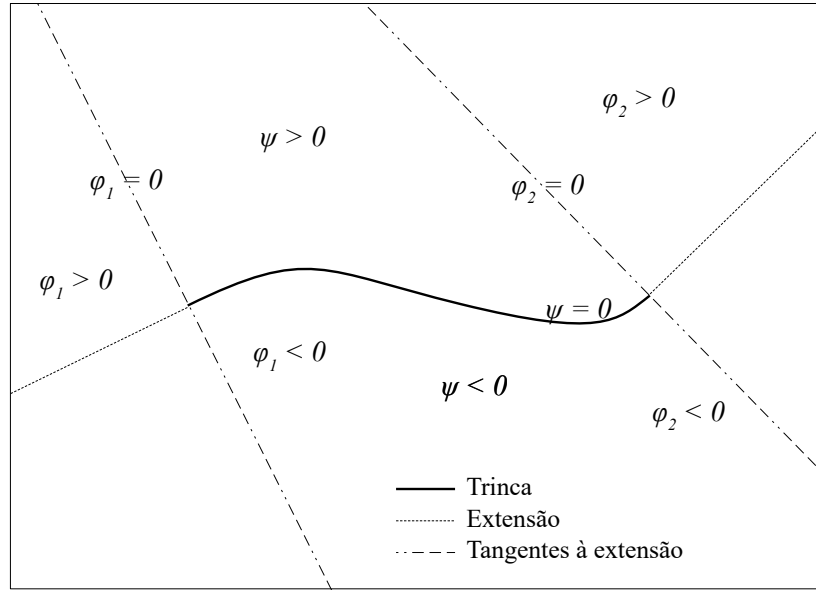


Figura 2.7: Representação da trinca pelo método de *Level-Set*.

A propagação da trinca em determinado meio, independentemente do método selecionado, deve ser analisada segundo dois critérios a cada passo de pseudo-tempo t : o *status* da propagação e a direção de propagação (Malekan, 2017).

1. O *status* da propagação consiste na possibilidade ou não de que a trinca se propague. Essa análise pode ser associada a diferentes condicionantes, como por exemplo, no caso da MFLE, o fator de intensidade de tensão, a taxa de liberação de energia e a densidade da energia de deformação.
2. A direção da propagação pode ser determinada, no caso da MFLE, baseada na tenacidade à fratura do material, quando essa é comparada ao fator de intensidade de tensão. Os critérios para determinação do ângulo de propagação encontrados na literatura são diversos. Um dos mais empregados, adotado por Malekan (2017), é relativo à máxima tensão circunferencial, proposto inicialmente por Erdogan e Sih (1963). Nesse critério utiliza-se o sistema de coordenadas polares r, θ para representação do campo de tensões e assume-se

que a trinca propaga-se perpendicularmente à direção da máxima tensão. O ângulo de propagação θ_c é representado na Figura 2.8 e dado por:

$$\theta_c = 2 \arctan \left[\frac{-2K_{II}/K_I}{1 + \sqrt{1 + 8 \left(\frac{K_{II}}{K_I} \right)^2}} \right], \quad (2.10)$$

onde K_I e K_{II} são os fatores de intensidade de tensão para os modos I e II de abertura de trinca, respectivamente.

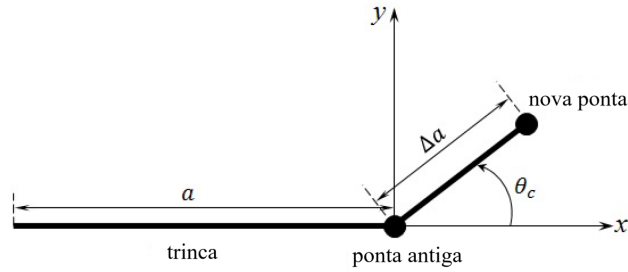


Figura 2.8: Representação do incremento de trinca e da nova orientação θ_c (Adaptado de Malekan (2017)).

O incremento de trinca Δa indicado na Figura 2.8 é escolhido de modo que a propagação resulte de um processo estável. De acordo com Huang et al. (2003), o tamanho do incremento é determinado segundo o tipo de propagação (por exemplo, trincas curvas ou retas) e o tamanho da malha.

2.1.3 Método dos Elementos Finitos Generalizados Estável

Para se solucionar o problema do mau condicionamento da matriz de rigidez ocasionado em algumas aplicações do MEFG, foi proposto por Babuška e Banerjee (2012) o *Stable Generalized Finite Element Method (SGFEM)* ou Método dos Elementos Finitos Generalizados Estável (MEFGE). Esse método propõe uma modificação local do enriquecimento característico do MEFG, geralmente eliminando a dependência linear gerada no sistema de equações.

O grau de condicionamento de uma matriz \mathbf{K} pode ser indicado por um escalar denominado número de condição, definido como a razão entre o maior (λ_{max}) e o menor (λ_{min}) dos autovalores da matriz (Szabó e Babuška, 1991):

$$C(\mathbf{K}) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \geq 1, \quad (2.11)$$

O condicionamento da matriz deteriora-se, ou seja, o número de condição torna-se maior, à medida que esse escalar aumenta. No MEF convencional a taxa de variação do número de condição à medida que a malha é refinada é da ordem de h^{-2} , sendo h o tamanho característico do elemento. Babuška e Banerjee (2012) mostram que essa taxa de variação associada à matriz do MEFGE é da ordem de h^{-4} . No MEFGE, a mesma decresce para h^{-2} no caso unidimensional, conforme demonstrado pelos autores. Já para os casos bi e tridimensionais esse decréscimo é verificado em exemplos numéricos por Gupta et al. (2013) e Gupta et al. (2015), respectivamente, embora tenham sido necessárias adaptações nas funções de enriquecimento.

O MEFGE também se mostrou útil ao lidar com outro fator: na aplicação do MEFGE em parte do domínio global percebe-se que, ao serem enriquecidos apenas alguns nós, certos elementos ficam parcialmente enriquecidos. Esses elementos são denominados *blending elements* ou elementos de mistura, e podem gerar na análise erros superiores aos dos demais elementos, afetando as taxas de convergência do erro relativo do método (Chessa et al., 2003). Tais erros são amenizados ao se utilizar da estratégia do MEFGE.

A citada modificação do MEFGE consiste na eliminação dos termos redundantes que aparecem na estrutura da PU. Esse processo pode ser observado na Figura 2.9; na esquerda está indicada a construção de uma função de forma do MEFGE, e no centro \tilde{L}_{ji} é a função de enriquecimento modificada do MEFGE, dada por (Gupta et al., 2013):

$$\tilde{L}_{ji}(\mathbf{x}) = L_{ji}(\mathbf{x}) - I_{\omega_j}(L_{ji}(\mathbf{x})), \quad (2.12)$$

onde $I_{\omega_j}(L_{ji}(\mathbf{x}))$ é a função interpoladora definida por:

$$I_{\omega_j}(L_{ji}(\mathbf{x})) = \sum_{k=1}^n N_k(\mathbf{x})(L_{ji}(\mathbf{x}_k)). \quad (2.13)$$

onde \mathbf{x}_k é o vetor de coordenadas do nó k do elemento que contém a posição de cálculo \mathbf{x} , n é o número de pontos nodais do elemento que contém a posição de cálculo \mathbf{x} , $L_{ji}(\mathbf{x}_k)$ é a função enriquecedora original da Equação 2.2 e $N_k(\mathbf{x})$ é uma PU (não necessariamente a mesma definida na Equação 2.1).

As funções de forma do MEFGE são, então:

$$\{\tilde{\phi}_{ji}\}_{i=1}^{q_j} = \mathcal{N}_j(\mathbf{x}) \times \{\tilde{L}_{ji}(\mathbf{x})\}_{i=1}^{q_j}, \quad (2.14)$$

sem somatório em j .

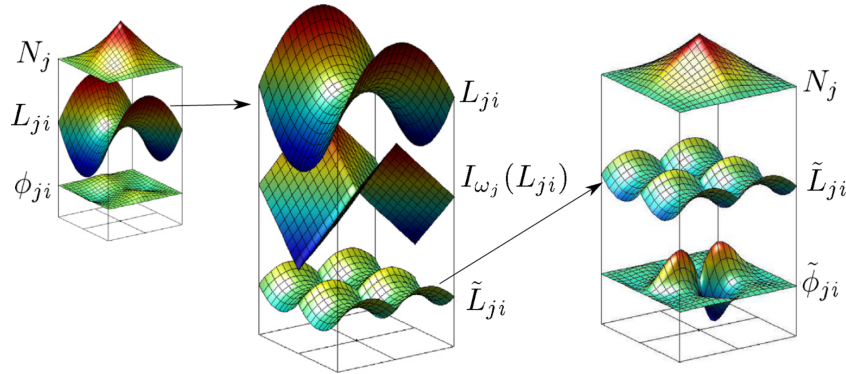


Figura 2.9: Cálculo da função de enriquecimento do MEFGE (Gupta et al., 2013).

Gupta et al. (2013) mostram com resultados de diversos experimentos que, após uma seleção adequada dos nós a serem enriquecidos, o erro relativo na norma de energia calculado pelo MEFGE tem ótima taxa de convergência mesmo na presença dos elementos de mistura. A precisão na zona de enriquecimento, tanto do MEFGE quanto do MEFGE, se mostra de grande importância principalmente para problemas de MFLE.

2.1.4 Metodologia Global-Local

Conforme citado anteriormente, as funções de aproximação local utilizadas na construção do espaço solução do MEFG podem ter origens diversas. Um exemplo é a utilização de funções advindas da aplicação do MEFG com enriquecimento Global-Local, ou MEFG^{gl}. Proposto por Duarte e Kim (2008), essa abordagem consiste na associação do MEFG com a metodologia global local (Noor, 1986), de maneira que as funções enriquecedoras são obtidas via solução de um problema local definido segundo as especificidades do problema (trincas, furos, singularidades em geral, entre outras).

No MEFG^{gl} é utilizada uma malha grosseira para o problema inicial a ser resolvido, denominado *global*. O problema *local* é definido como o conjunto de elementos que abrangem, como no caso da Mecânica da Fratura, uma trinca. As condições de contorno nele aplicadas (sejam de deslocamentos e/ou forças) são retiradas do problema global, ao passo que a fissura é considerada no campo cinemático apenas do problema local.

Após resolvidas as equações de equilíbrio referentes ao problema local e determinado o vetor de deslocamentos incógnitos, tal solução é levada ao problema global na forma de enriquecimento dos nós cujo suporte está contido no domínio local. O problema global é enriquecido e, assim, solucionado. Segundo Duarte e Kim (2008) o erro relativo do problema global é reduzido significativamente após o enriquecimento com as soluções locais. Na Figura 2.10 observa-se um esquema da metodologia Global-Local.

Ressalta-se que, no contexto do presente trabalho, a aplicação das estratégias propostas de integração numérica é realizada no problema local, uma vez que somente nele é feita a representação não geométrica da trinca – através da adequação do campo de deslocamentos aos fenômenos de descontinuidade e singularidades existentes.

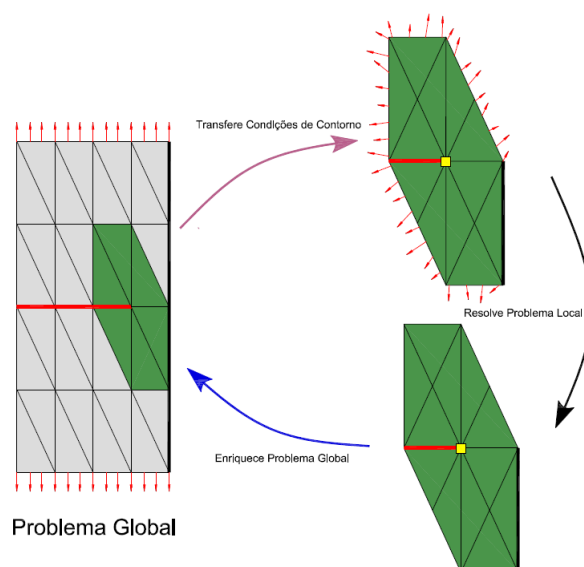


Figura 2.10: Representação esquemática do enriquecimento Global-Local para um problema bidimensional genérico [Alves \(2012\)](#).

2.2 Análise Fisicamente Não Linear

Quando se analisa o comportamento de materiais frágeis ou parcialmente frágeis, estes, a depender do material, podem ser considerados, inicialmente, como homogêneos, elásticos e isotrópicos. À medida que ocorre a aplicação de cargas e consequente surgimento de deformações, passa-se a considerar a heterogeneidade do material, visto que aparece dano em tração e compressão nas regiões mais solicitadas [\(Fuina, 2004\)](#).

Em problemas fisicamente não lineares a natureza não homogênea do material é introduzida no modelo constitutivo, o qual representa as variações das propriedades do material e seus diferentes processos de falha. Nesse contexto, segundo [Fuina \(2004\)](#), um dos objetivos da análise não linear é obter trajetórias de equilíbrio para os graus de liberdade da discretização, executando para isso um processo incremental-iterativo nas variáveis do problema.

2.2.1 Obtenção de Trajetórias de Equilíbrio

A obtenção de uma trajetória de equilíbrio qualquer (Figura 2.11) pode ser assim resumizada: dado um campo de deslocamento $\{U\}$ e um fator de carga proporcional λ , relacionados a um ponto da trajetória de equilíbrio (ponto A na Figura 2.11), deseja-se encontrar outro ponto de equilíbrio (indicado por B na Figura 2.11) de modo que a variação de determinadas grandezas do problema no passo incremental seja controlada.

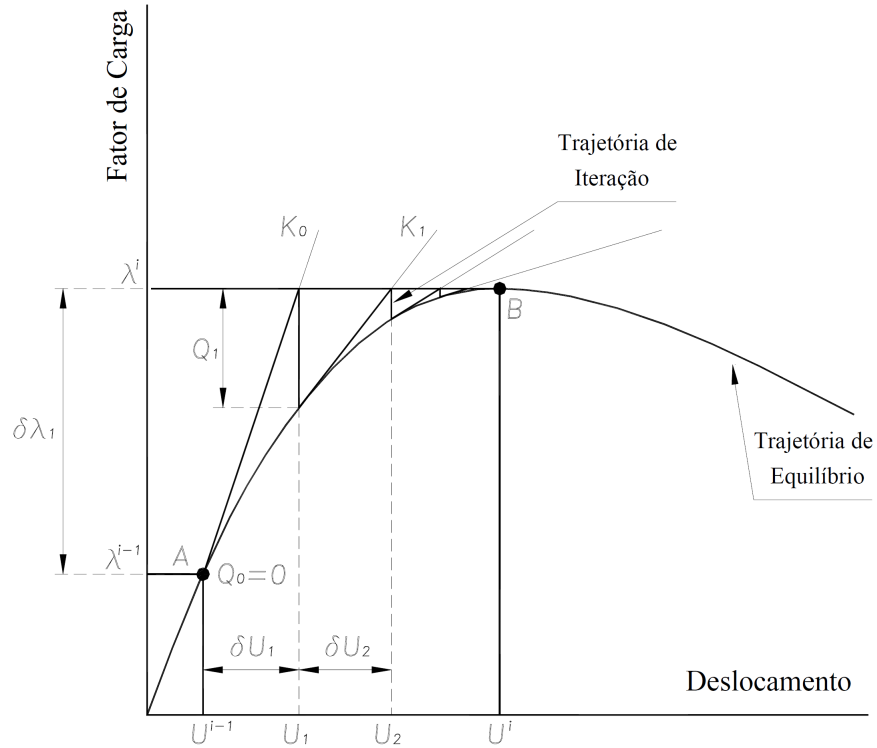


Figura 2.11: Obtenção de trajetória de equilíbrio com controle de carga (Fuina, 2004).

A grandeza a ser controlada pode ser variada conforme o método de controle adotado. Dentre os mais utilizados estão o de controle de carga, controle direto de deslocamentos, controle de comprimento de arco, controle de deslocamento generalizado e controle por trabalho. Uma abordagem da formulação envolvida em cada

método pode ser encontrada em [Fuina \(2004\)](#).

Sabe-se que um ponto da trajetória de equilíbrio depende da matriz de rigidez do modelo, obtida a partir da contribuição da rigidez de cada elemento que compõe a discretização. No processo incremental-iterativo, o equilíbrio da estrutura é obtido a partir da rigidez tangente do modelo. Na análise fisicamente não linear, a rigidez tangente de cada elemento é obtida considerando na sua integração a matriz constitutiva tangente (ou também chamado operador tangente), que está associada ao modelo constitutivo empregado. Neste caso, tem-se o denominado o equilíbrio tangente.

Para simplificar, pode-se substituir o operador tangente pela matriz constitutiva secante ou mesmo pela matriz constitutiva elástica, trabalhando-se então com o equilíbrio secante ou equilíbrio elástico, respectivamente. Em ambos os casos há uma simplificação do modelo constitutivo, porém o processo iterativo pode se tornar mais complicado.

2.2.2 Modelos Constitutivos para o Concreto

Os modelos constitutivos têm o intuito de representar o comportamento de um determinado material. A descrição do comportamento do concreto, por exemplo, é objeto de pesquisa desde o início do século XX, quando surgiram os primeiros fundamentos teóricos ([Penna, 2011](#)). Em suma, foram propostas diferentes formas de se descrever o meio material, podendo ser citados os modelos de fissuração distribuída, modelos de dano, modelos de microplanos e modelos fundamentados na teoria da plasticidade. No presente trabalho, serão apresentadas análises numéricas envolvendo modelos de fissuração distribuída.

Conforme [Penna \(2011\)](#), os modelos de fissuração distribuída são baseados no monitoramento da deterioração das propriedades físicas do material, e o processo de evolução das fissuras é descrito pelo decaimento gradual de tensões com aumento de deformações. [Rashid \(1968\)](#) foi um dos pioneiros na formulação desse tipo de modelo

e, embora ainda apresentasse limitações, a proposta era de fácil implementação e continha a hipótese principal de substituição do meio inicial íntegro, por um meio com propriedades mecânicas modificadas, representando uma região com fissuras uniformemente distribuídas. A descrição do meio material é geralmente associada a parâmetros baseados na Mecânica da Fratura. A Figura 2.12 indica como se dá a propagação de fissuras em modelos distribuídos.

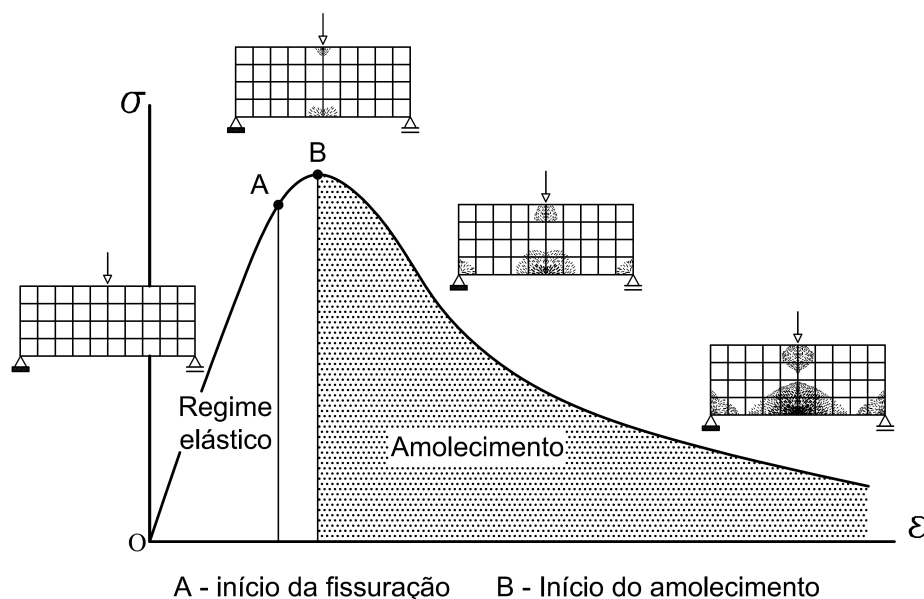


Figura 2.12: Propagação de fissuras em modelos distribuídos (Penna, 2011).

Por hipótese, os modelos de fissuração distribuída ainda podem ser classificados em duas categorias: direção fixa ou variável. No primeiro caso, a partir do momento do seu surgimento, a fissura tem orientação fixa durante todo o processo de propagação. Na segunda hipótese, admite-se que o sistema local das fissuras pode rotacionar segundo, por exemplo, a orientação dos eixos principais de deformação.

2.2.3 Formulação Não Local

Nesta Seção, apresenta-se brevemente o contexto e a formulação de modelos não locais. A justificativa para tal é dada pela posterior utilização dessa formulação para

o armazenamento de variáveis constitutivas nos pontos de integração posicionados em um determinado elemento segundo a estratégia alternativa de integração numérica em estudo neste trabalho. Uma explicação mais detalhada da aplicabilidade deste tópico será dada na Seção 3.2.3.

No contexto da Mecânica do Dano Contínuo, observa-se em certos casos que a distribuição inicial de deformações devido às condições de carregamento impostas passa a se localizar em zonas estreitas, enquanto a maior parte da estrutura sofre descarregamento (Jirásek, 2011). Os modelos de dano “locais” são, em muitos casos, incapazes de descrever padrões de falha de forma objetiva. Uma solução para esse tipo de situação é a reformulação do modelo como não local.

Em modelos não locais, segundo Jirásek (2011), admite-se que a tensão em um determinado ponto não depende unicamente das variáveis de estado nesse ponto, mas sim do estado geral destas variáveis em todo o domínio – ou pelo menos sua distribuição em uma vizinhança finita do ponto em consideração.

A abordagem consiste em substituir uma determinada variável por sua medida não local, obtida por uma média ponderada em uma vizinhança espacial de cada ponto considerado. A escolha da variável a ser ponderada pode ser arbitrária, desde que satisfaça alguns requisitos básicos (Jirásek, 2011). Simplificadamente, uma formulação não local para modelos de dano isotrópico considera a medida de deformação equivalente como grandeza não local. Assim, se $\tilde{\epsilon}(\mathbf{x})$ é a deformação equivalente em um domínio $V(\mathbf{x})$, a correspondente deformação equivalente não local é:

$$\tilde{\epsilon}_{NL}(\mathbf{x}) = \frac{1}{V(\mathbf{x})} \int_V \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \tilde{\epsilon}(\mathbf{s}) dV, \quad (2.15)$$

onde $\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ é a função peso, \mathbf{s} representa a coordenada dos pontos da vizinhança e \mathbf{x} é a coordenada do ponto em que se deseja calcular a variável não local.

A função peso ou função de distribuição pode assumir diferentes formas. Uma das mais utilizadas é a função Gaussiana:

$$\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \exp\left(-k \frac{r^2}{l^2}\right), \quad (2.16)$$

onde r é a distância $\|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|$, k é um parâmetro da função e l é o comprimento interno do domínio não local adotado.

Pode-se citar também as funções de distribuição de sino, exponencial e constante. O parâmetro k tem interpretações distintas para diferentes autores. [Bažant e Jirásek \(2002\)](#) afirmam que k varia com a dimensão do problema tratado – uni, bi ou tridimensional. Para [Jirásek \(2011\)](#), k indica o comportamento da função de distribuição: valores menores dão origem a funções de distribuição mais suaves, ponderando os pontos mais distantes de forma mais significativa.

Com relação ao comprimento l , quanto maior seu valor mais pontos na vizinhança são considerados. Na Figura 2.13 é indicado o emprego de uma função de distribuição de sino, por exemplo, para média ponderada das deformações em um volume representativo do material.

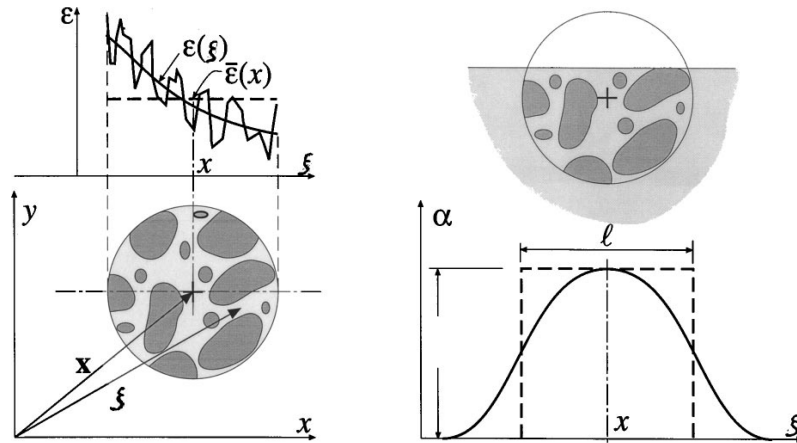


Figura 2.13: Volume representativo do material e exemplo de utilização da função de distribuição de sino ([Bažant e Jirásek, 2002](#)).

2.3 Integração Numérica no MEFG

Conforme citado anteriormente, as funções de enriquecimento especiais utilizadas no MEFG prejudicam a integração numérica da matriz de rigidez, uma vez que a quadratura de Gauss não resulta mais em valores exatos. Na literatura, são propostas diversas estratégias para a solução deste impasse. A seguir, serão apresentadas duas categorias de estratégias que diferenciam-se em função do tipo de enriquecimento adotado.

2.3.1 Integração Numérica para Enriquecimentos Descontínuos

Estratégia de decomposição dos elementos: o enriquecimento descontínuo da função de Heaviside tem características semelhantes a uma função constante e, ao se utilizar a quadratura de Gauss para a integração, há risco de aparecerem modos espúrios de energia. Uma alternativa para se levar em conta a descontinuidade é a subdivisão de elementos segundo a posição da interface, realizando posteriormente a integração pela regra de quadratura em cada subelemento. No caso bidimensional as subdivisões são triangulares, conforme visto na Figura 2.14 e descrito por Moës et al. (1999).

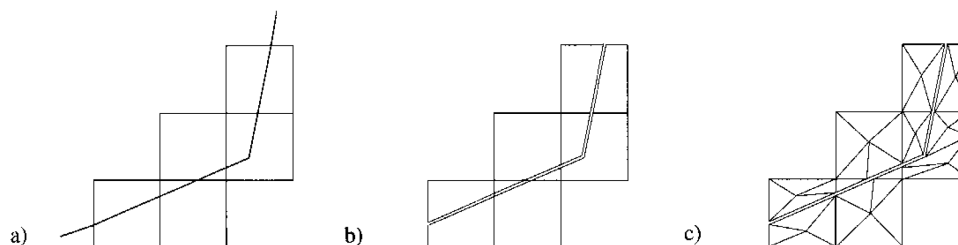


Figura 2.14: Geração de subpolígonos para quadratura da forma fraca (Moës et al., 1999).

A modelagem de problemas tridimensionais consistindo na decomposição dos

elementos em tetraedros é abordada por [Sukumar et al. \(2000\)](#) e indicada na Figura [2.15](#). O processo de subdivisão em ambas dimensões não gera graus de liberdade adicionais e conta com alta precisão dos resultados, porém envolve maior esforço computacional devido ao aumento do número de pontos de integração. Quando comparada à quantidade de pontos de integração que resultam numa solução estável pela quadratura de Gauss, entretanto, a decomposição de elementos requer menos pontos de integração para se obter melhores precisões.

A subdivisão de elementos em células triangulares ou quadrilaterais permite que seja empregada a quadratura de Gauss, com a ressalva de que a integração é exata até uma certa ordem do polinômio no elemento de referência (mapeado). Essa propriedade, entretanto, só é mantida quando os elementos são decompostos em subelementos triangulares. Para o caso de subdivisões quadrilaterais é requerido um mapeamento isoparamétrico, acarretando perda da propriedade de integração exata no elemento de referência [\(Fries e Belytschko, 2010\)](#).

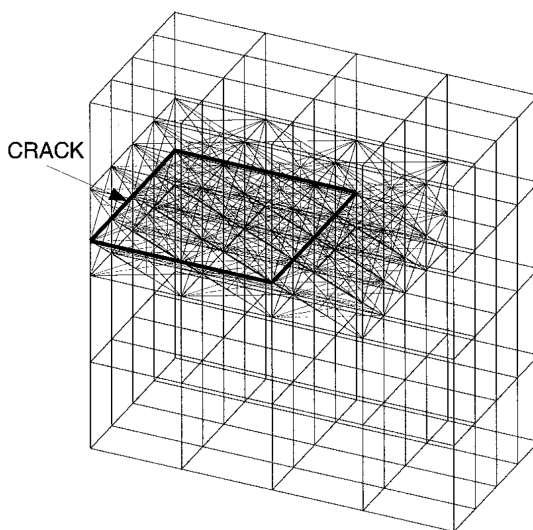


Figura 2.15: Subdivisão de elementos em um modelo tridimensional [\(Sukumar et al., 2000\)](#).

Outra opção advinda da decomposição é a integração em domínios poligonais,

considerando que dois subdomínios são criados a partir da interseção da trinca com o elemento. Assim, não há necessidade de outra repartição e faz-se uso de técnicas de mapeamento alternativas, como por exemplo, a proposta de [Natarajan et al. \(2009\)](#) com a utilização do mapeamento conforme de Schwarz-Christoffel. Através dessa técnica, o domínio é mapeado em um disco unitário, e os pontos de integração podem ser obtidos, por exemplo, pela regra do ponto médio ou pela regra de Gauss-Chebyshev. As análises numéricas presentes no trabalho citado mostram que os resultados obtidos pelo mapeamento de Schwarz-Christoffel são bastante similares aos obtidos pela decomposição em subelementos triangulares. Como desvantagem, ressalta-se que esse método limita-se a domínios bidimensionais.

Estratégia de polinômios equivalentes: a análise da matriz de rigidez por meio da decomposição de elementos pode gerar erros relevantes, dependendo da técnica de quadratura utilizada. Como alternativa à decomposição de elementos foi então proposto o uso de polinômios equivalentes. Nesse método, a função descontínua de Heaviside é substituída por um polinômio equivalente, escolhido de tal maneira que o cálculo da matriz de rigidez através da regra de quadratura de Gauss seja exato. Uma desvantagem do emprego desse método se deve ao fato do mesmo não ser aplicável em elementos onde há mudança de direção da trinca (quina) em seu interior.

Um exemplo de aproximação polinomial foi proposto por [Ventura e Benvenuti \(2015\)](#). Nesse trabalho, deduz-se uma função de Heaviside regularizada por um parâmetro de regularização ρ , por meio do qual pode-se retornar à função descontínua original fazendo-o tender a infinito (Figura [2.16](#)). Se, no caso da subdivisão de elementos, a obtenção da matriz de rigidez é associada a cada subdomínio Ω_e^1 e Ω_e^2 do elemento e , a função de Heaviside equivalente \tilde{H} recupera a possibilidade de integração em um único domínio Ω_e :

$$\int_{\Omega_e} \tilde{H} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} d\Omega = \int_{\Omega_e^1} H \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} d\Omega + \int_{\Omega_e^2} H \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} d\Omega \quad (2.17)$$

onde H é a função de Heaviside padrão definida pela Equação 2.5, \mathbf{B} é a matriz que relaciona deformações e deslocamentos e \mathbf{E} é a matriz contendo as propriedades constitutivas do material.

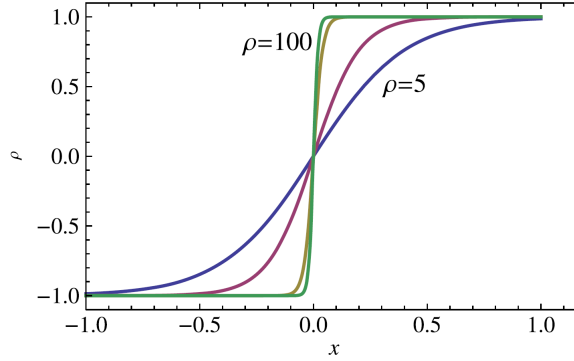


Figura 2.16: Função de Heaviside regularizada com parâmetro ρ (Ventura e Benvenuti, 2015).

Para que a Equação 2.17 seja verdadeira, \tilde{H} precisa ser um polinômio de grau no mínimo igual ao do termo $\mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B}$ (Ventura e Benvenuti, 2015). Por exemplo, para elementos triangulares ou tetraédricos, o termo $\mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B}$ é constante, fazendo com que seja suficiente uma função \tilde{H} constante. Para elementos quadrilaterais com funções de forma lineares, por outro lado, o termo $\mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B}$ é quadrático, requerendo uma função \tilde{H} também quadrática. Em geral, o uso do polinômio equivalente \tilde{H} permite a aplicação da quadratura de Gauss com o custo de duplicar o grau polinomial do integrando. Além disso, outra desvantagem do método é a ausência de um limite formal para o parâmetro de regularização. Ressalta-se também que a formulação desenvolvida é atrelada à representação da trinca pelo Método de *Level-Set*.

Outra proposição foi feita por Iarve (2003) e substitui a função de Heaviside por uma função de forma de alta ordem, construída com uma Partição da Unidade

resultante de funções *B-spline*. Nessa proposta tem-se a desvantagem da necessidade de construção de novas funções de forma, distintas das funções Lagrangeanas utilizadas na formulação convencional do MEF, aumentando assim o esforço computacional envolvido. Todavia, a aproximação mostra erros pequenos, por exemplo, na obtenção do fator de intensidade de tensão em problemas da MFLE.

2.3.2 Integração Numérica para Enriquecimentos Singulares

Estratégia de decomposição dos elementos: similar ao processo de decomposição dos elementos associados a enriquecimentos descontínuos, a subdivisão pode ser feita em elementos onde a ponta da trinca está contida, de maneira que cada subelemento tenha um nó na singularidade. As células triangulares são então integradas com a regra de quadratura de Gauss convencional. Essa estratégia é utilizada por [Moës et al. \(1999\)](#) e, conforme comparações numéricas apresentadas por [Ventura et al. \(2009\)](#), tem precisão menor quando comparada às estratégias de mapeamento dos pontos de integração e integrais de contorno, discutidas a seguir.

Estratégia de mapeamento dos pontos de integração: o processo mapeia a subdivisão triangular (real) em uma célula quadrangular (referência), onde as funções singulares são regularizadas e os pontos de integração, recalculados. Os novos pontos de integração se concentram nas proximidades da singularidade, conforme Figura [2.17](#). O erro da integração é reduzido consideravelmente quando comparado à subdivisão de elementos sem mapeamento e o procedimento não aumenta o esforço computacional envolvido, visto que apenas são utilizados novos pontos de integração com seus respectivos pesos.

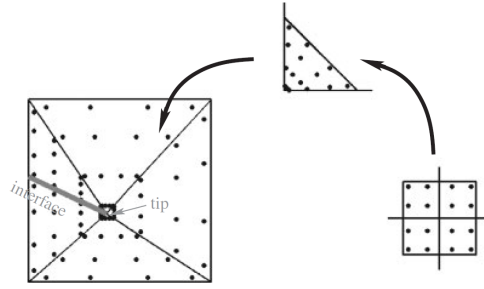


Figura 2.17: Pontos de integração polar em elemento contendo singularidade (Fries e Belytschko, 2010).

Constam na literatura variadas alternativas de mapeamentos. Béchet et al. (2005) propuseram um mapeamento polar que transforma funções singulares em regulares, reconquistando a exatidão da técnica de integração pela quadratura de Gauss. Por meio de exemplos numéricos os autores afirmam que a convergência do erro relativo da norma de energia é mais rápida utilizando a técnica de mapeamento quando comparada à quadratura convencional, considerando o mesmo número de pontos de Gauss. O mapeamento, todavia, não é aplicável diretamente para casos tridimensionais. Laborde et al. (2005) apresentam um mapeamento denominado “quase polar”, também vinculando-o a melhores taxas de convergência do erro da norma de energia quando contraposto com quadraturas convencionais em exemplos bidimensionais.

Park et al. (2009) estendem a estratégia de mapeamento proposta por Nagarajan e Mukherjee (1993) envolvendo singularidades do tipo $1/r$ para casos tridimensionais. Exemplos numéricos indicam que as taxas de convergência do erro obtidas com o mapeamento proposto são iguais ou melhores que aquelas obtidas com integrações convencionais, variando com o formato do integrando singular. Analogamente aos métodos de mapeamento polar, é observado em Cano e Moreno (2015) um mapeamento baseado na transformação de Duffy (1982), o qual também elimina a singularidade do integrando. Este tem melhor taxa de convergência do erro relativo de

integração e tem bom desempenho mesmo quando as células triangulares apresentam algum ângulo interno significativamente pequeno – o que não ocorre em algumas estratégias de integração presentes na literatura. Entretanto, apresenta maior custo computacional devido à complexa formulação por trás do procedimento.

Estratégia de integrais de contorno: transforma-se a integral no domínio do elemento que contém a singularidade em uma integral de contorno. Proposto por Ventura et al. (2009), esse processo também pode ser aplicado em domínios com funções descontínuas. Quando comparado à técnica de mapeamento dos pontos de integração, a integral de contorno apresenta maior precisão com quantidades menores de pontos de integração, assim como indica melhor taxa de convergência do erro da norma de energia. É, entretanto, aplicável apenas a elementos nos quais todos os nós têm o mesmo tipo de enriquecimento. Na Figura 2.18 observa-se a comparação entre as três estratégias de integração numérica citadas para elementos que contém a ponta da trinca.

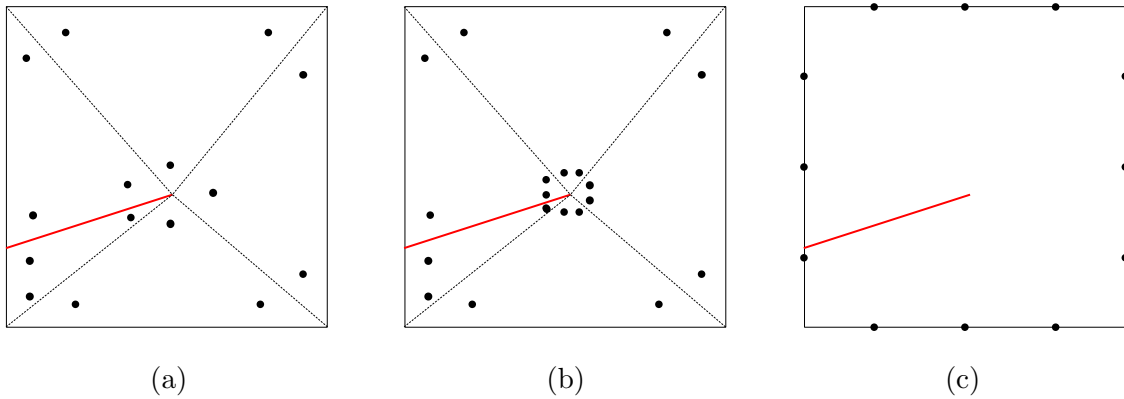


Figura 2.18: Comparação dos métodos de integração numérica envolvendo funções singulares para trinca indicada em vermelho: (a) subdivisão de elementos e uso da quadratura de Gauss, (b) mapeamento dos pontos de integração e (c) integral de contorno.

Estratégia de integração adaptativa: utilizado em Strouboulis, Babuška, e Copps (2000), o algoritmo de integração adaptativa baseia-se na subdivisão recursiva do

elemento em subcélulas não conformes até que seja atingida a tolerância em um erro pré-determinado. No trabalho citado, a integração adaptativa empregada foi o algoritmo DECUHR, onde a singularidade é assumida em um vértice compartilhado pelas subdivisões não uniformes. A integração adaptativa também foi utilizada em [Strouboulis, Copps, e Babuška \(2000\)](#), todavia de forma a atender somente casos de subdivisões quadrilaterais. Uma desvantagem do método é que pode se consumir bastante tempo no controle adaptativo do erro de integração ([Fries e Belytschko, 2010](#)).

Dentre as estratégias apresentadas, foram escolhidas para implementação computacional as estratégias de subdivisão de elementos e mapeamento dos pontos de integração. No próximo capítulo, são apresentados os motivos para escolha das mesmas e faz-se uma descrição mais detalhada de ambas.

Capítulo 3

ASPECTOS COMPUTACIONAIS

Neste capítulo é descrita a metodologia adotada para a integração numérica em elementos contendo descontinuidades ou singularidades, além de ser apresentada a implementação computacional desenvolvida no sistema INSANE. São citados os motivos para adoção das técnicas de integração implementadas, a base de dados computacionais já existente e as modificações feitas a partir dela e, por fim, as novas funcionalidades segundo a lógica desenvolvida no presente trabalho.

3.1 Técnicas de Integração Numérica Adotadas

3.1.1 Elementos totalmente atravessados pela trinca

Após a revisão apresentada no Capítulo 2, definiu-se que em elementos totalmente atravessados pela trinca a técnica adotada é a subdivisão em elementos triangulares. A escolha se deu devido aos diversos trabalhos já publicados sobre o tema (entre eles Moës et al. (1999), Dolbow et al. (2000), Belytschko et al. (2001), Park et al. (2009)) e ao fato de que o arcabouço computacional já existente para a integração por quadratura de Gauss pode ser aqui aproveitado.

Para a subdivisão foi empregada a triangulação de Delaunay em domínios bidimensionais, já implementada no sistema INSANE (Penna, 2007). A triangulação de um dado domínio P consiste em uma subdivisão planar cujas células originadas são triângulos e cujos vértices são pontos pertencentes a P .

3.1.2 Elementos contendo a ponta da trinca em seu interior

Para elementos que contêm a ponta da trinca em seu interior foi empregada a técnica de subdivisão de elementos e mapeamento dos pontos de integração. Dessa forma cria-se apenas uma extensão do método de subdivisão em elementos com descontinuidade, acrescentando o mapeamento dos pontos de integração nas células triangulares geradas com um dos nós contendo a ponta da trinca. O processo de mapeamento reposiciona os pontos de Gauss tradicionais, concentrando-os na região crítica da singularidade e, dessa forma, possibilitando análises mais precisas do comportamento do campo de tensões.

O mapeamento dos pontos de integração empregado foi descrito por [Park et al. \(2009\)](#). Tal mapeamento, proposto inicialmente por [Nagaraajan e Mukherjee \(1993\)](#), tem a finalidade de reduzir os erros advindos da integração numérica nas células que contêm o ponto da singularidade. O mapeamento é dado por:

$$T_M : (\bar{\rho}, \bar{\theta}) \mapsto (\bar{r}, \bar{s}), \quad (3.1)$$

onde $\bar{r} = \bar{\rho} \cos^2 \bar{\theta}$ e $\bar{s} = \bar{\rho} \sin^2 \bar{\theta}$.

Para melhor entendimento, a Figura [3.1](#) ilustra o mapeamento inverso T_M^{-1} , o qual transforma um triângulo em um quadrilátero. Em termos computacionais, o processo de integração numérica passa pelas seguintes mudanças: as coordenadas cartesianas são transformadas em coordenadas paramétricas, acrescentando o Jacobiano J_t à equação. Posteriormente é feita a transformação T_M^{-1} , acrescentando o Jacobiano $J_M = \bar{\rho} \sin(2\bar{\theta})$. Por fim, o integrando é mapeado nas coordenadas naturais (ξ, η) , adicionando o Jacobiano constante $J_q = \frac{\pi}{8}$. A expressão da integração é, portanto:

$$\begin{aligned} I &= \int_A f(x, y) dA = \int_A \bar{f}(\bar{r}, \bar{s}) J_t d\bar{r} d\bar{s} \\ &= \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \hat{f}(\bar{\rho}, \bar{\theta}) J_t J_M d\bar{\rho} d\bar{\theta} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{f}(\xi, \eta) J_t \tilde{J}_M(\xi, \eta) J_q d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (3.2)$$

A aproximação numérica é:

$$I \approx \sum_{i=1}^{n_{q1}} \sum_{j=1}^{n_{q1}} \tilde{f}(\xi_i, \eta_j) J_t \tilde{J}_M(\xi_i, \eta_j) J_q W_i W_j, \quad (3.3)$$

onde n_{q1} é o número de pontos de Gauss em uma direção e W_i, W_j são os respectivos pesos.

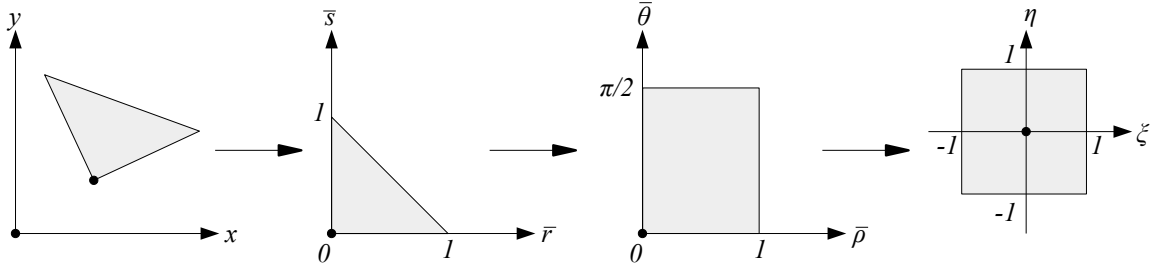


Figura 3.1: Método de mapeamento dos pontos de integração.

Para fins de implementação computacional, a Equação [3.3](#) pode ser escrita da forma:

$$\sum_{i=1}^{n_{q1}} \sum_{j=1}^{n_{q1}} \tilde{f}(\xi_i, \eta_j) J_t \tilde{J}_M(\xi_i, \eta_j) J_q W_i W_j = \sum_{i=i}^{n_q} \bar{f}(\bar{r}_i, \bar{s}_i) J_t \tilde{W}_i, \quad (3.4)$$

onde n_q é o número de pontos de integração para o método de mapeamento e $\tilde{W}_i = \tilde{J}_M(\xi_i, \eta_j) J_q W_i W_j$.

Os pesos modificados \tilde{W}_i e as coordenadas (\bar{r}_i, \bar{s}_i) que satisfazem $\tilde{f}(\xi_i, \eta_j) = \bar{f}(\bar{r}_i, \bar{s}_i)$ foram implementados segundo a lógica apresentada em [Park et al. \(2009\)](#). Assim, quando se torna necessária a redefinição dos pontos de integração em um elemento, o programa acessa esses dados, não sendo inicializada uma nova transformação e, conseqüentemente, diminuindo o tempo de processamento.

É exemplificado na Figura [3.2](#) a mudança no posicionamento dos pontos de integração. À esquerda pode ser observado um elemento não distorcido contendo a ponta da trinca em seu interior e, portanto, com nós enriquecidos com funções singulares. À direita, no mesmo elemento, é aplicada a estratégia de mapeamento,

considerando 4x4 pontos por célula. O nó obtido pelo cruzamento da extensão do segmento de trinca e a aresta por ela interseccionada é criado a fim de se obter a divisão do elemento em 6 células triangulares.

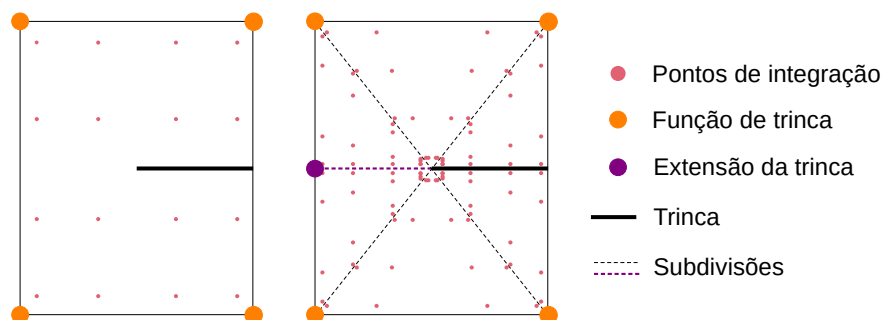


Figura 3.2: Posicionamento dos pontos de integração: à esquerda, quadratura de Gauss; à direita, estratégia de mapeamento aplicada.

É importante ressaltar que, após o mapeamento, a soma dos pesos modificados não é exatamente 1 – valor adotado via escalonamento dos pesos para garantir que a regra de quadratura integre exatamente ao menos uma função constante – embora convirja para tal. Assim, é necessária a utilização de uma quantidade maior de pontos de integração em cada célula a fim de se obter melhores resultados.

Após estudos apresentados em [Park et al. \(2009\)](#), os autores afirmam que o método de mapeamento fornece uma convergência mais monotônica se comparada à integração convencional. Além disso, para mais pontos de integração o mapeamento resulta em uma precisão significativamente maior.

3.2 Implementação Computacional

A implementação computacional foi realizada no sistema INSANE (*INteractive Structural ANalysis Environment*), um projeto de software livre implementado em linguagem JAVA segundo o paradigma da Programação Orientada a Objetos (POO)

e desenvolvido no departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais.

O INSANE possui três núcleos principais: pré-processador, processador e pós-processador. O pré e o pós-processador são interfaces gráficas através das quais podem-se construir representações discretas de um modelo estrutural e visualizar resultados. O processador é o núcleo numérico da plataforma, responsável pela solução dos modelos.

Para melhor compreensão das modificações ou adições realizadas no código serão apresentados diagramas UML (*Unified Modelling Language*), linguagem padrão utilizada para descrição de sistemas baseados em linguagens de programação orientada a objetos. É mostrado na Figura 3.3 a legenda adotada na descrição da implementação: classes não modificadas (em branco), classes alteradas (em amarelo) e classes criadas (em verde).

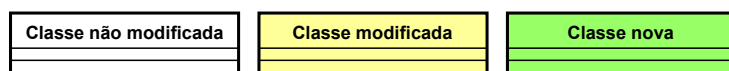


Figura 3.3: Notação UML utilizada nos diagramas de classes.

Na etapa de pré-processamento, passou-se a solicitar ao usuário via arquivo de entrada as seguintes informações: tipo de estratégia para elementos com descontinuidade e com singularidade e o número de pontos de integração a ser utilizado em cada caso. A leitura desses dados é feita na classe `PersistenceAsXml` através do método implementado `fillNumIntegrationRedefinitionFromFile()` (Figura 3.4).

Faz-se necessário esclarecer que o termo *degeneração* que será aqui citado refere-se a um ponto material pertencente a um elemento, contendo informações sobre o mesmo. São armazenados, por exemplo, variáveis constitutivas, coordenadas e pesos para integração numérica.

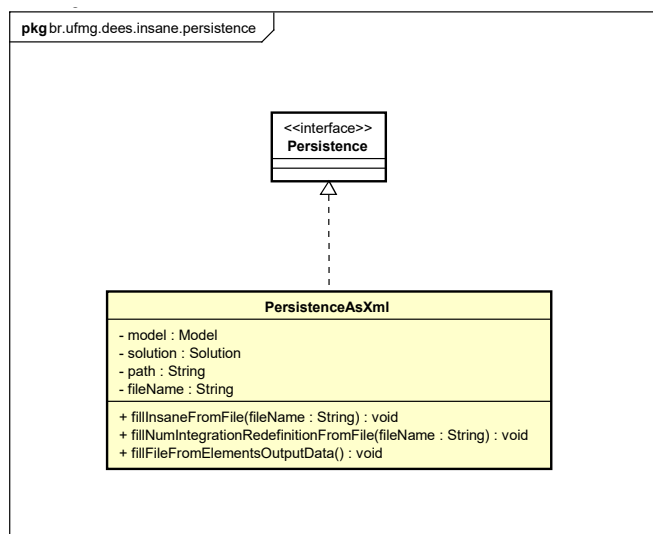


Figura 3.4: Modificações na classe `PersistenceAsXml`.

As técnicas de integração numérica são acessadas após os elementos serem inicializados (trinca estática) ou atualizados (nucleação e propagação de trinca) na classe `GFemModel`. Em ambas as situações, as degenerações anteriores são excluídas e as novas são posicionadas segundo os novos requisitos. O código foi adaptado para que, caso os dados de redefinição da integração numérica não constem no arquivo de entrada, o programa possa proceder para a solução do problema com a integração convencional.

Ao se inicializar um segmento de trinca no processo de propagação, a classe responsável (*DiscontinuityByGfem* ou *LefmCrackGrowthByGfem*) recebe como parâmetros os pontos inicial e final da trinca. Com a trinca estabelecida, verifica-se em quais elementos a descontuidade passa e, naqueles que a contém, é armazenada a seguinte informação (em forma de *boolean*): elemento totalmente dividido, elemento totalmente dividido com quina (mudança de direção da trinca) em seu interior ou elemento contendo ponta de trinca. Para tanto, a classe `Element` foi alterada para armazenar os dados referentes à trinca, conforme ilustrado na Figura 3.5.

Observa-se também na Figura 3.5 a implementação do método *getCornerVertices()*, sobrescrito na classe *ParametricElement*. Esse método seleciona e retorna

apenas os nós de extremidade de um determinado elemento (aqui acessado através de sua lista de nós). Tal processo é necessário nas situações em que o modelo possui elementos de ordens superiores, visto que para a triangulação utiliza-se apenas os nós de extremidade.

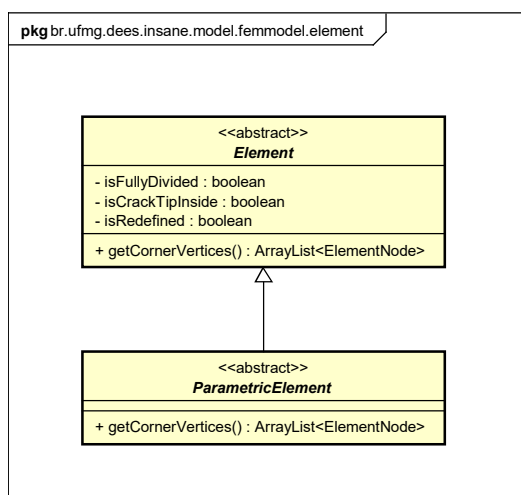


Figura 3.5: Modificações nas classes `Element` e `ParametricElement`.

A Figura 3.6 ilustra o processo de seleção de nós: para um elemento paramétrico de quatro nós $Q4$ ou de três nós $T3$, todos os nós são necessários à triangulação. Para um elemento paramétrico de doze nós $Q12$ ou de seis nós $T6$, por exemplo, apenas os nós de extremidades são retornados.

A classe `NumericalIntegrationDataManager`, criada dentro do pacote já existente `ModelDataManager` (Figura 3.7), é acionada pela classe `GFemModel`. Nela há o redirecionamento para a redefinição dos pontos de integração após a identificação da situação da trinca no elemento. As classes responsáveis pela efetivação das técnicas correspondentes são `SubdivisionOfElements` e `MappingAndSubdivisionOfElements`. Ambas estão contidas no novo pacote `numericalintegrationredefinition`, pertencente ao pacote `model`. A implementação do pacote citado pode ser vista na Figura 3.8.

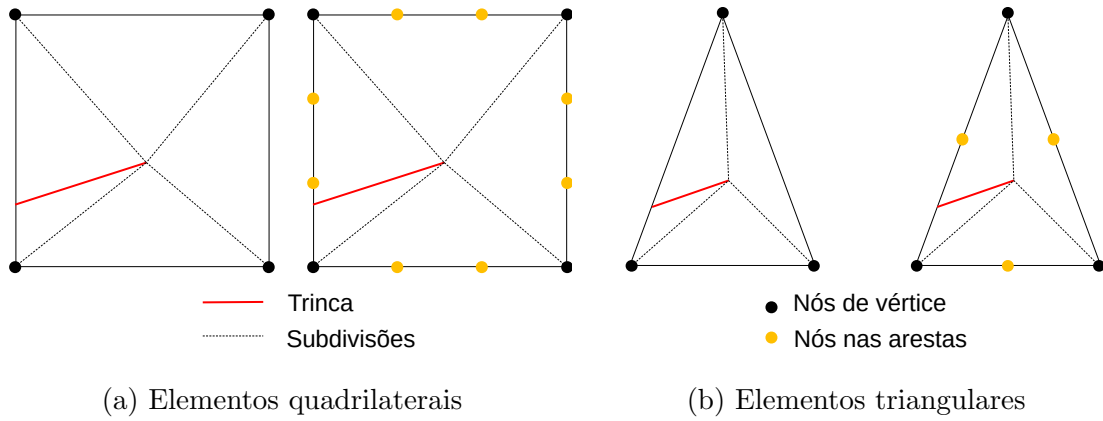


Figura 3.6: Seleção de nós do método *getCornerVertices()*: para a trinca representada, a subdivisão é indicada pelas linhas pontilhadas, enquanto os nós dos vértices são selecionados para a triangulação, não sendo utilizados os nós das arestas.

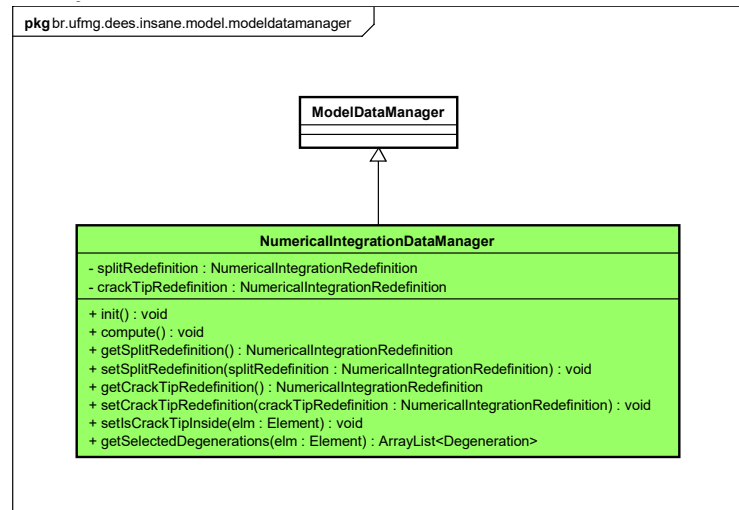


Figura 3.7: Criação da classe *NumericalIntegrationDataManager*.

Os métodos implementados em cada classe de redefinição dos pontos de integração serão abordados nas seções [3.2.1](#) e [3.2.2](#). Foram atribuídos valores *default* para a quantidade de pontos de integração a ser adotada. Caso o usuário não entre com esses dados, em elementos totalmente atravessados pela trinca são utilizados 3 pontos de Gauss em cada célula. Já em elementos contendo a ponta da trinca, existem duas situações distintas: se a célula gerada contém um nó na singularidade, são adotados

6x6 pontos de Gauss modificados na mesma; se não, são adotados pontos de Gauss convencionais.

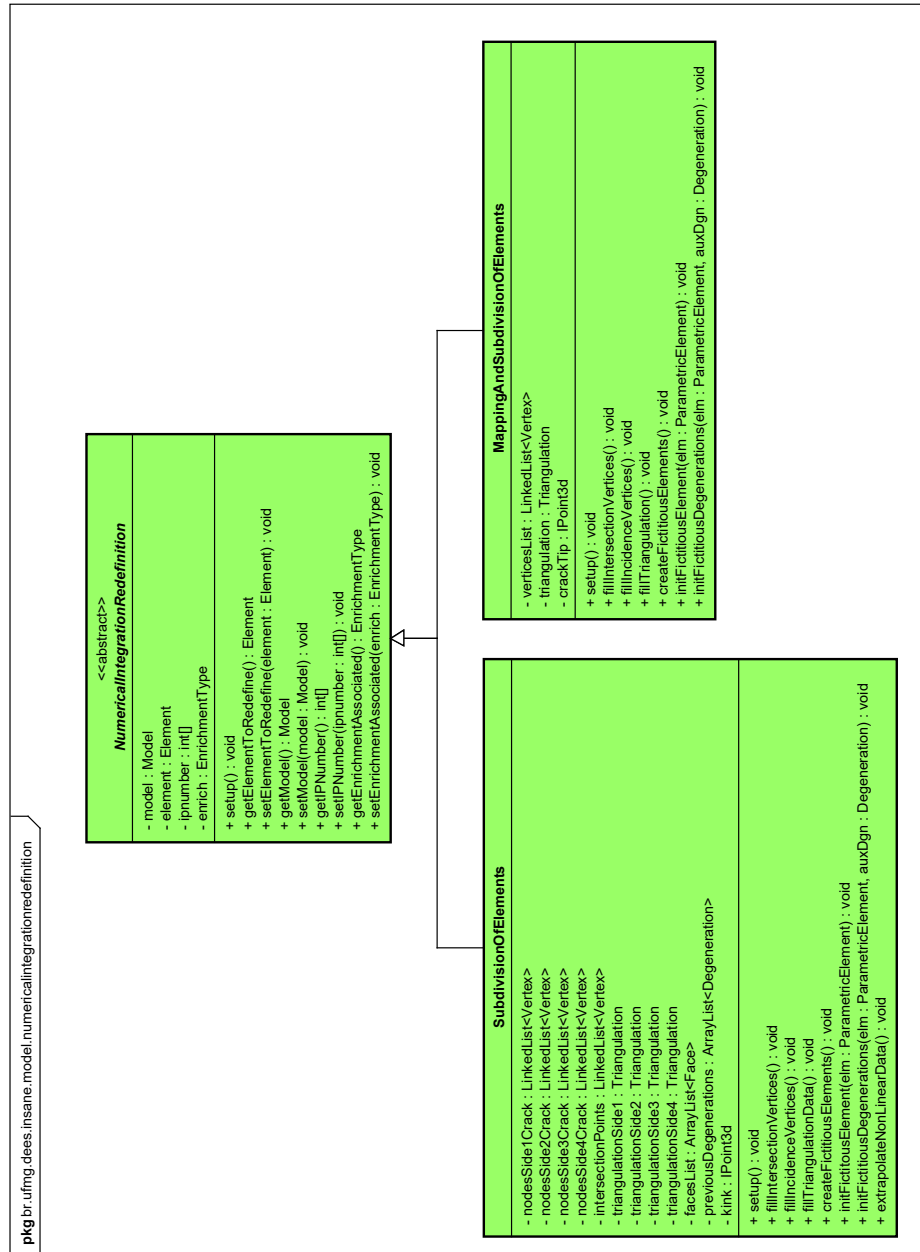


Figura 3.8: Criação das classes do pacote numericalintegrationredefinition.

3.2.1 Classe SubdivisionOfElements

O procedimento de subdivisão dos elementos em células triangulares pode ser descrito nas seguintes etapas:

1. Cria-se uma lista de nós para cada triangulação. No caso do elemento totalmente dividido pela trinca são geradas duas triangulações, uma em cada lado da trinca. Quando há quina no interior do elemento, são geradas 4 triangulações. Esse procedimento é necessário uma vez que a triangulação de Delaunay é válida apenas para regiões convexas. Caso sejam fornecidos pontos delimitadores de uma região côncava, a triangulação pode gerar células fora dessa região, não sendo aplicável na presente situação, onde as células precisam estar contidas no elemento e não podem se sobrepor.
2. Posteriormente, são armazenados na lista de nós os pontos de interseção da trinca com as arestas. Quando não há quina no interior do elemento, as duas interseções são armazenadas nas duas listas de triangulações. Caso contrário, é necessário avaliar o posicionamento do ponto de mudança de direção da trinca em relação às interseções do segmento de trinca (I1 e I2 na Figura 3.9) para que as quatro listas de nós para triangulação recebam os nós de interseção (I1 e I2) e extensão (E1 e E2) corretos.

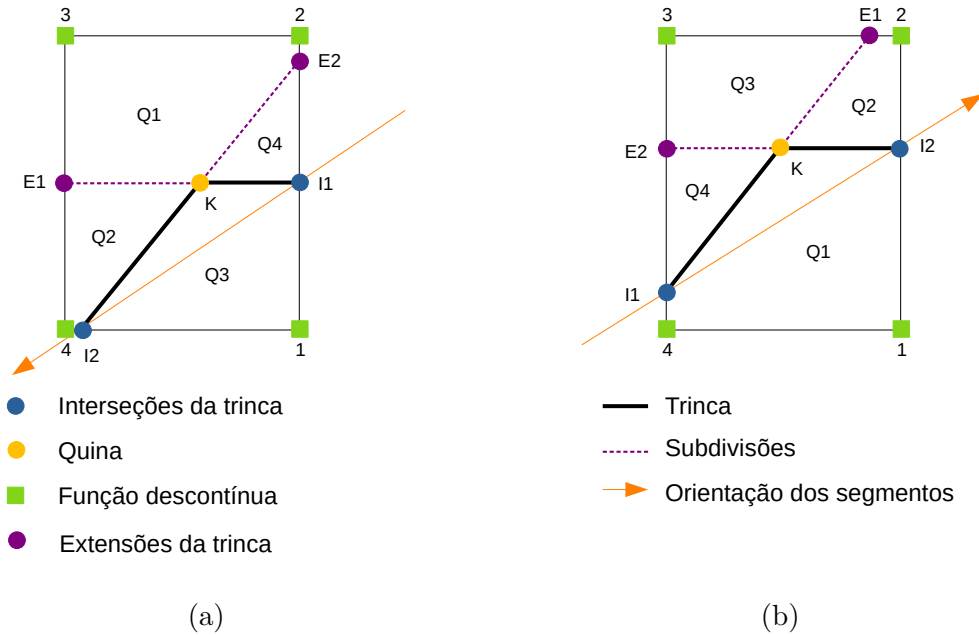


Figura 3.9: Avaliação do posicionamento das interseções e extensões do segmento de trinca para armazenamento nas listas de nós para triangulação.

3. Armazena-se, então, os nós dos vértices do elemento nas listas de nós corretas, conforme a lógica ilustrada na Figura 3.9. Verifica-se a qual dos quatro quadrantes um determinado nó de vértice pertence, sendo cada quadrante correspondente a uma lista de nós para triangulação. Seja a Figura 3.9a, onde o nó K está à direita da linha que intersecta I1 e I2. Observa-se que o nó 1 está à esquerda de ambos os segmentos I1-K e K-I2, pertencendo portanto ao quadrante Q3 e sendo adicionado à lista de nós correspondente. Os nós 2 e 3, por sua vez, estão à direita dos segmentos I1-K e K-I2, sendo alocados no quadrante Q1. O nó 4, estando à esquerda do segmento I1-K e à direita do segmento K-I2, pertence ao quadrante Q2.

Conforme descrito neste item e no anterior, o armazenamento dos nós para triangulação seguiu a lógica de implementação baseada em suas posições relativas. Para isso, fez-se uso do método *isPointRight()*, adicionado à classe já existente `ComputationalGeometry` conforme Figura 3.10.

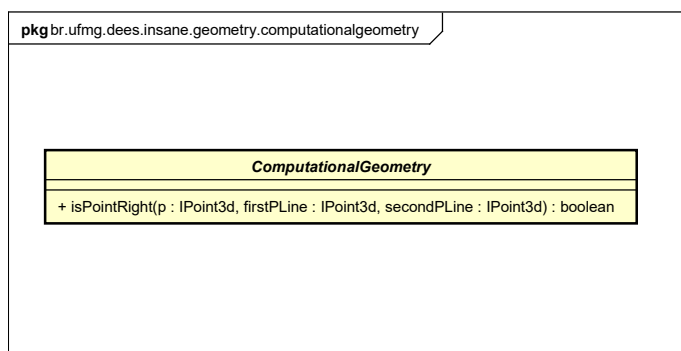


Figura 3.10: Modificação da classe `ComputationalGeometry`.

4. A partir dos nós informados, são criadas triangulações de Delaunay e os dados de subdivisão planar gerados são armazenados em estruturas de semi-arestas. Esse tipo de estrutura permite armazenar as informações hierarquicamente, relacionando faces, vértices e semi-arestas. Dessa forma, é facilitada a pesquisa e manipulação dos dados geométricos, como por exemplo a identificação dos

vértices de uma face ou das faces comuns a um vértice (Penna, 2007).

5. É acionado, então o método que inicializa as células ou *elementos fictícios*. Nele, as faces e vértices criados (entidades geométricas) são atribuídos a elementos e nós (entidades computacionais), respectivamente, a fim de se permitir o acesso às funcionalidades específicas dessas estruturas, tais como funções de forma, coordenadas naturais, dentre outras.

A Figura 3.11 indica exemplos de subdivisão feitas em elementos totalmente atravessados pela trinca sem ou com quina. Para o primeiro caso são obtidas quatro células, enquanto que para o segundo são acrescidos, na lista de nós para triangulação, os nós obtidos a partir da extensão do segmento de trinca em cada uma de suas duas direções resultando, portanto, em oito células. As células geradas são indicadas por S-(número triangulação)-T(número do triângulo).

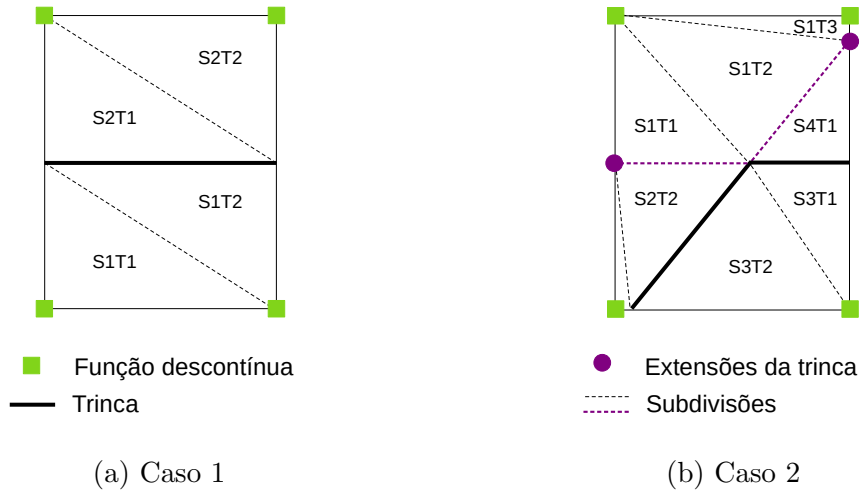


Figura 3.11: Tipos de triangulação geradas.

A estratégia de subdivisão também pode ser empregada em elementos triangulares, como visto na Figura 3.12. Nesta, são exemplificadas duas possíveis subdivisões originadas da triangulação.

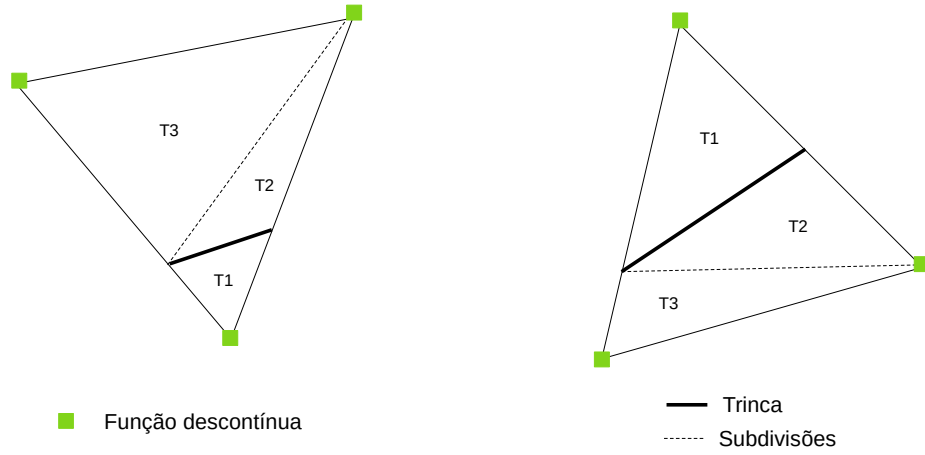


Figura 3.12: Exemplos de triangulação em elemento triangular.

6. Nesse ponto as degenerações anteriores são removidas para armazenamento das novas, de acordo com as células triangulares geradas. Atribui-se aos novos pontos de integração as coordenadas naturais para domínios triangulares e seus respectivos pesos. Sabe-se que a matriz de rigidez de cada elemento K_e é obtida por:

$$K_e = \int_e (B^T C B) t dA = \int_e (B^T C B) t J d\xi d\eta, \quad (3.5)$$

onde:

- B é a matriz que relaciona deslocamentos e deformações;
- C é a matriz que leva em conta as propriedades constitutivas;
- t é a espessura;
- J é o determinante Jacobiano.

Considerando que a parcela $\int_e dA = \int_e J d\xi d\eta$ representa a área do elemento, entende-se que esse cálculo passa a ser uma soma das parcelas de cada célula triangular, ou seja:

$$A_e = \int_e J d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{NT} \int_t J_i^t d\xi_t d\eta_t, \quad (3.6)$$

considerando que NT é o número de células que compõem o elemento, (ξ_t, η_t) são coordenadas paramétricas triangulares e J_i^t é o determinante Jacobiano calculado em cada triângulo i .

Como os pontos de integração estão associados às suas respectivas células triangulares, pode-se rescrever a Equação 3.6 como:

$$A_e = \sum_{i=1}^{NT} \sum_{j=1}^{PG} J_i^t w_j = \sum_{i=1}^{NT} \sum_{j=1}^{PG} J_i^t w_j^t A_i^{\xi_t \eta_t} \quad (3.7)$$

onde:

- PG é o número de pontos de Gauss (modificados ou não) em cada triângulo;
- w_j^t é o peso de cada ponto de integração j na célula triangular;
- $A_i^{\xi_t \eta_t}$ é a área do triângulo i em coordenadas (ξ_t, η_t) .

Nota-se que o peso w de um ponto de integração no elemento passa a ser dado por $w_j^t A_i^{\xi_t \eta_t}$, adaptando-se à transposição da célula para o elemento. Como o determinante Jacobiano é igual à relação entre as áreas real e natural e, para células triangulares, é um valor constante, tem-se:

$$A_e = \sum_{i=1}^{NT} \sum_{j=1}^{PG} \frac{A_i^{xy}}{A_i^{\xi_t \eta_t}} w_j^t A_i^{\xi_t \eta_t} = \sum_{i=1}^{NT} \frac{A_i^{xy}}{A_i^{\xi_t \eta_t}} A_i^{\xi_t \eta_t} \sum_{j=1}^{PG} w_j^t \quad (3.8)$$

com A_i^{xy} sendo a área real da célula i . Logo, a área do elemento é dada finalmente por:

$$A_e = \sum_{i=1}^{NT} \sum_{j=1}^{PG} A_i^{xy} w_j^t \quad (3.9)$$

Conclui-se, assim, que são acessados o peso, as coordenadas paramétricas e a área real das células triangulares. É importante ressaltar que foram utilizadas as coordenadas de área já implementadas no INSANE, exceto para o caso de 3 pontos de integração. Nessa situação os pontos são alocados no meio de cada lado do triângulo, o que gera erros nas células com lados pertencentes à descontinuidade. Foram empregadas, então, as coordenadas paramétricas apresentadas em [Bathe \(2014\)](#). A Figura [3.13](#) e a Tabela [3.1](#) comparam as coordenadas citadas.

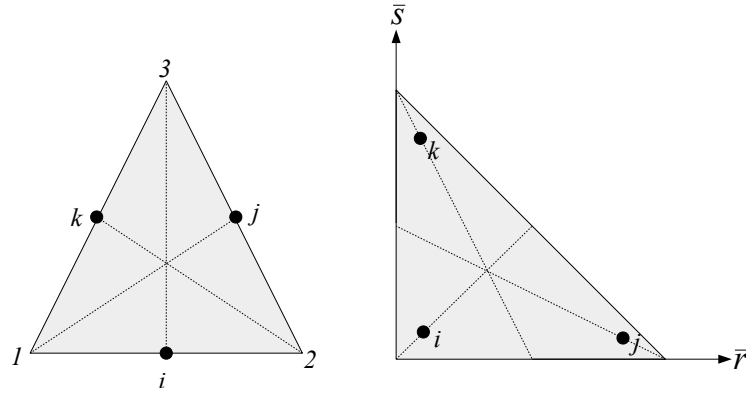


Figura 3.13: Integração com 3 pontos: à esquerda, coordenadas de área; à direita, coordenadas paramétricas.

Tabela 3.1: Coordenadas para integração com três pontos.

Tipo de Coordenadas	Ponto	i	j	k
Área	ξ_1	$1/2$	$1/2$	0
	ξ_2	0	$1/2$	$1/2$
	ξ_3	$1/2$	0	$1/2$
Paramétricas	\bar{r}	$1/6$	$2/3$	$1/6$
	\bar{s}	$1/6$	$1/6$	$2/3$

A ordem de adição dos nós à lista para triangulação modifica a orientação das células triangulares formadas. A fim de verificar a influência dessas alterações, foram

analisadas a matriz de rigidez e a energia de deformação de um mesmo elemento para cada caso ilustrado na Figura 3.14, onde o primeiro caso indica a orientação referente à implementação corrente. Os resultados obtidos mostraram que a orientação das células tem influência mínima nos parâmetros analisados, sendo assim adotada a ordem inicialmente proposta (primeiro adição dos nós de interseção, depois adição dos nós dos vértices do elemento).

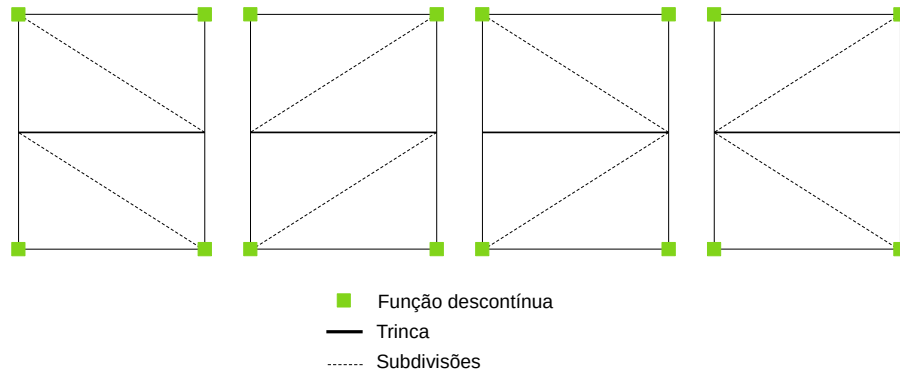


Figura 3.14: Triangulações obtidas para diferentes ordenações da lista de nós.

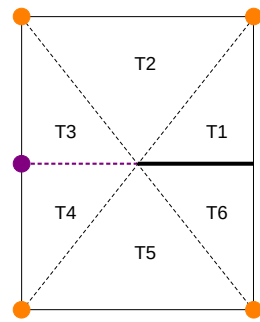
3.2.2 Classe MappingAndSubdivisionOfElements

A subdivisão e mapeamento dos pontos de integração contém as seguintes etapas:

1. Inicializa-se uma lista de nós para a triangulação a ser feita. Nela, são armazenados primeiramente os nós dos vértices do elemento.
2. Armazena-se também o nó correspondente à ponta da trinca, a interseção da mesma com a aresta do elemento e a interseção originada da extensão do segmento de trinca com outra aresta desse mesmo elemento.
3. Após o preenchimento da lista de nós, cria-se a triangulação de Delaunay, armazenando os dados em uma estrutura de semi-arestas.
4. Inicializa-se o método para gerar as células triangulares ou *elementos fictícios*. Da mesma forma que na classe `SubdivisionOfElements`, aqui as faces

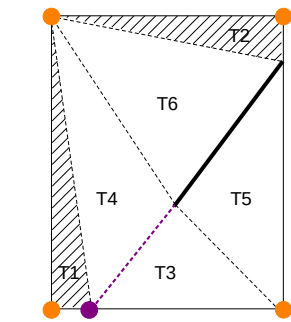
e vértices são associados a elementos e nós.

5. São excluídas as degenerações anteriores e armazenadas as novas. É feita, em cada célula, a verificação se um de seus nós coincide com a ponta da trinca. Em caso afirmativo, os pontos de integração recebem as coordenadas e pesos modificados segundo o método de mapeamento apresentado na Seção 3.1.2. Caso contrário, são utilizados os dados da quadratura de Gauss convencional, assim como é feito para elementos totalmente atravessados pela trinca. A diferenciação do posicionamento e quantidade dos pontos de integração pode ser observada na Figura 3.15. Nela, os nós dos vértices são enriquecidos com funções singulares e, além, deles, é adicionado à lista de nós para triangulação o nó obtido a partir da extensão do segmento de trinca. As linhas tracejadas delimitam as células criadas; no elemento representado à direita, observa-se que as células hachuradas (T1 e T2) não contém um nó na ponta da trinca, sendo portanto empregada a quadratura de Gauss convencional.



● Função singular
● Extensões da trinca

(a) Caso 1



— Trinca
--- Subdivisões
▨ Gauss convencional

(b) Caso 2

Figura 3.15: Células de integração originadas da subdivisão e mapeamento dos pontos de integração.

3.2.3 Armazenamento de Dados para a Análise Fisicamente Não Linear

Na análise fisicamente não linear, as degenerações guardam, além das coordenadas naturais e pesos de integração, as variáveis constitutivas que são atualizadas a cada passo da trajetória de equilíbrio. Esses dados, armazenados nas degenerações ao longo do processo de solução, precisam estar presentes nas novas degenerações criadas em função da criação das células de integração. Entretanto, as mesmas não contêm o histórico das variáveis, sendo necessário recorrer a um processo de atribuição via média ponderada.

Esse armazenamento de dados baseou-se na lógica da formulação não local, apresentada na seção 2.2.3 e comumente empregada em modelos de dano a fim de melhor representar o comportamento do material.

Em modelos não locais a tensão em um ponto depende da distribuição dessa variável em uma vizinhança finita do mesmo, empregando em tal avaliação uma função peso. No contexto da integração numérica, as variáveis constitutivas de uma determinada degeneração (advinda da subdivisão do elemento) dependem de seus valores assumidos nas degenerações prévias (posicionadas segundo a quadratura de Gauss convencional), ponderadas segundo uma função peso. Assim, o domínio da formulação não local é restrito ao próprio domínio do elemento contendo a nova degeneração avaliada.

A ponderação foi feita considerando-se a função de distribuição Gaussiana, dada pela Equação 2.16. A Figura 3.16 ilustra como a formulação não local é empregada no contexto da integração numérica pela subdivisão de elementos. À esquerda, é representado um elemento genérico com pontos de integração posicionados conforme a quadratura de Gauss convencional. Ao meio, o estado de tensões desse elemento induz a propagação de uma trinca em seu domínio (em vermelho), onde é então aplicada a estratégia de subdivisão e os pontos de integração são alocados

segundo as células triangulares obtidas. À direita, é destacado um ponto de integração tomado como a origem da função peso, onde o parâmetro l define seu alcance e, portanto, quais degenerações prévias terão seus valores ponderados para armazenamento na degeneração agora válida. O processo é repetido para cada uma das novas degenerações, até que todas contenham os valores das variáveis constitutivas referentes ao elemento em questão.

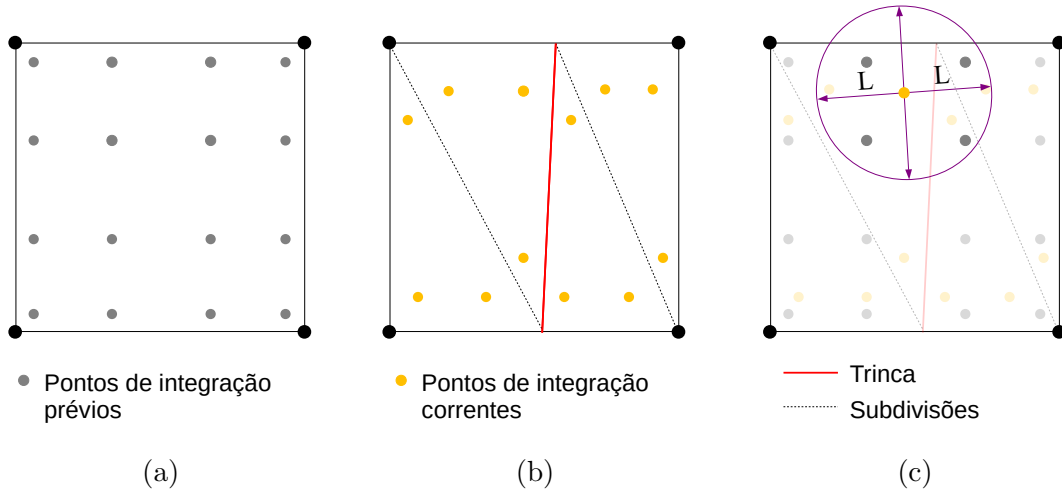


Figura 3.16: Ponderação das variáveis constitutivas para os novos pontos de integração.

Cada modelo constitutivo conta com variáveis específicas, sendo então o processo de média ponderada particular a cada modelo. Para o de fissuração distribuída, as variáveis a serem atualizadas e, por conseguinte, armazenadas nas novas degenerações, podem ser vistas na Figura [3.17](#).

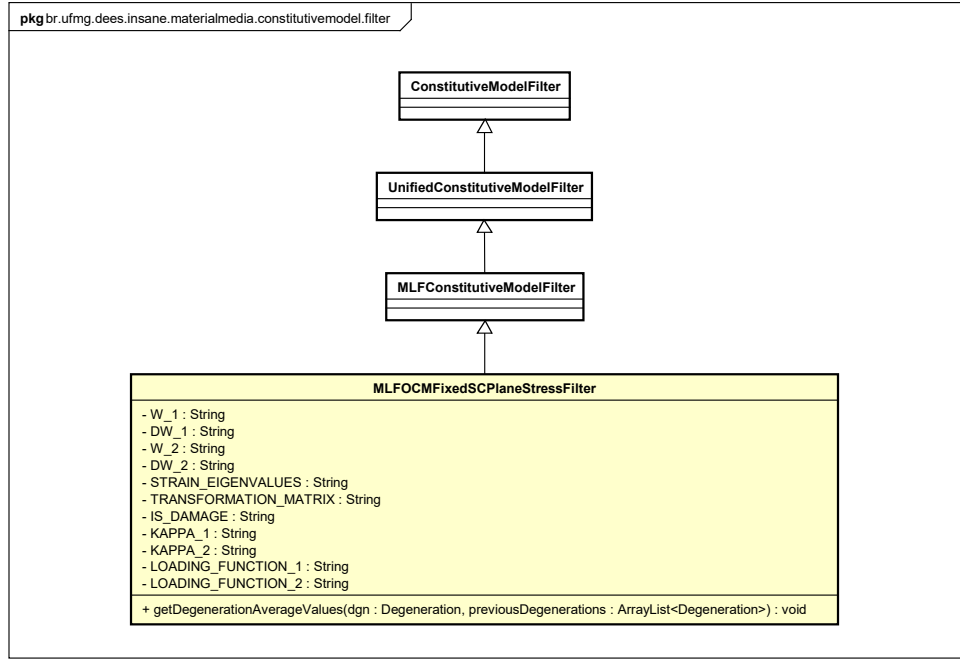


Figura 3.17: Variáveis constitutivas extrapoladas para o modelo de fissuração distribuída.

Para as variáveis do modelo de fissuração distribuída, por exemplo, aquelas passíveis de serem ponderadas (ou seja, escalares) são armazenadas em uma lista de dados:

$$values = \left\{ \begin{array}{c} w_1 \\ dw_1 \\ w_2 \\ dw_2 \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ l_1 \\ l_2 \end{array} \right\} \quad (3.10)$$

onde w_1 e w_2 são as variáveis de dano, dw_1 e dw_2 são as derivadas das variáveis de dano e l_1 e l_2 são as funções de carregamento nas direções 1 e 2, respectivamente.

São armazenados também, em forma de lista de dados, as coordenadas dos pontos de integração prévios e seus respectivos pesos e jacobianos:

$$points = \begin{Bmatrix} (x, y)_1 \\ (x, y)_2 \\ \vdots \\ (x, y)_n \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

onde $(x, y)_i$ é a coordenada de cada degeneração i , com $i = 1, \dots, n$ e n é o número de degenerações prévias do elemento.

$$weights = \begin{Bmatrix} w_1 \cdot j_1 \\ w_2 \cdot j_2 \\ \vdots \\ w_n \cdot j_n \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

onde w_i é o peso e j_i é o jacobiano de cada degeneração i .

Os valores não locais de cada grandeza para a nova degeneração são calculados, então, da seguinte maneira:

$$nonLocalValues = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^n \alpha_i \, values_{(i)} \, weights_{(i)} \quad (3.13)$$

onde α_i é o valor da função de distribuição Gaussiana (Equação 2.16) na degeneração i e V é o domínio local dado por:

$$V = \sum_{i=1}^n \alpha_i \, weights_{(i)} \quad (3.14)$$

Para o caso de variáveis não escalares, como os autovetores que definem a direção de fissuração necessária ao modelo de fissuração distribuída, torna-se inviável empregar a formulação não local. Assim, a média ponderada foi substituída por uma busca da degeneração prévia mais próxima, da qual as variáveis constitutivas são copiadas para a nova degeneração.

Capítulo 4

SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Neste capítulo são apresentados alguns exemplos para validar a implementação da integração numérica via subdivisão de elementos e mapeamento dos pontos de integração. Os resultados obtidos são comparados com aqueles advindos da integração convencional através dos seguintes parâmetros: energia de deformação, rigidez, fatores de intensidade de tensão, tempo de processamento e trajetória de equilíbrio, conforme as características de cada modelo.

Algumas informações comuns à maioria dos exemplos são aqui descritas:

1. Para a estratégia de mapeamento dos pontos de integração foi acrescentado à lista de pontos para triangulação a interseção da extensão do segmento de trinca e a aresta do elemento, gerando assim 6 células de integração em um elemento não distorcido (Figura 4.1). Foram realizados testes com 5 células de integração (portanto não considerando o ponto advindo da extensão do segmento de trinca) e os resultados não foram satisfatórios, apresentando erros significativos. A obtenção de valores estáveis com a estratégia de mapeamento e a convergência da energia de deformação para valores de referência apresentaram melhor comportamento quando empregadas 6 células triangulares.

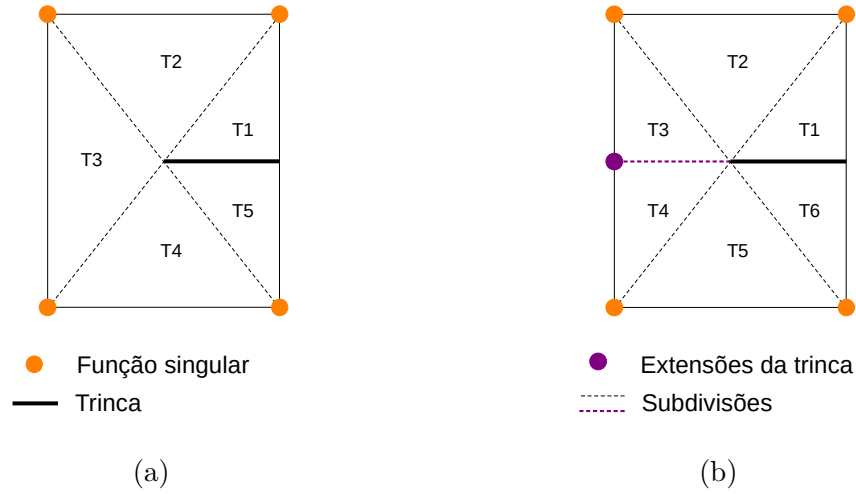


Figura 4.1: Subdivisão do elemento (a) sem considerar e (b) considerando o ponto advindo da extensão do segmento de trinca.

2. Conforme mencionado na Seção 3.1.2, nos elementos contendo a ponta da trinca em seu interior e cuja célula triangular não contenha um nó na ponta (como ilustrado pelas células hachuradas da Figura 3.15b), são adotados pontos de integração convencionais da quadratura de Gauss. Após algumas análises, verificou-se que são obtidos ótimos resultados com 6 pontos de Gauss, quantidade então adotada.
3. Os tempos de processamento citados são médias entre três medições feitas em um mesmo computador com sistema operacional Windows 10 Home de 64 bits, 8GB de memória RAM e processador Intel® Core™ i7-5500U CPU @ 2.40GHz.
4. Os fatores de intensidade de tensão apresentados foram calculados pelo método da integral de interação, proposto inicialmente por Yau et al. (1980) e cuja implementação no software INSANE é descrita por Fonseca (2019).
5. Nos exemplos da seção 4.2 à seção 4.5 os dados relativos ao emprego da quadratura de Gauss convencional são indicados pela série *IC* (integração convencional) e, aqueles relacionados à estratégia implementada, são referenciados

por SM (subdivisão de elementos e mapeamento dos pontos de integração).

É importante destacar que as análises foram feitas de modo a buscar apresentar o comportamento das estratégias de integração implementadas em diversas situações, considerando por exemplo modelos lineares elásticos e com não linearidade física, no contexto do MEF G , MEF G^e e MEF G^{gl} .

4.1 Influência do Posicionamento da Trinca no Elemento

Os pontos de integração, ao serem distribuídos em um elemento contendo trinca, podem ter suas propriedades representadas de maneira mais ou menos precisa conforme o posicionamento dessa descontinuidade. A fim de analisar essa diferença, observou-se o comportamento da matriz de rigidez em elementos com trincas em diferentes condições geométricas. A análise estendeu-se para a comparação de resultados obtidos via integração convencional pela quadratura de Gauss e via subdivisão em células triangulares.

A seção 4.1.1 aborda a variação na altura da trinca que atravessa totalmente um elemento – no qual, por conseguinte, os nós são enriquecidos com funções de Heaviside (Equação 2.5). A seção 4.1.2 trata de situações em que a ponta da trinca está no interior do elemento, e é variada sua posição dentro do elemento. Nesse caso, é empregado o enriquecimento nodal com funções singulares (Equações 2.6 a 2.9).

A análise dos dados foi feita a partir da norma da matriz de rigidez, escolhida devido à facilidade de se comparar os dados na forma de grandezas escalares. Esta foi calculada da seguinte maneira:

$$\| K_e \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{NGL} \sum_{j=1}^{NGL} k_{ij}^2}, \quad (4.1)$$

onde:

- K_e é a matriz de rigidez do elemento e ;
- NGL é o número de graus de liberdade do elemento;
- k_{ij} referencia cada termo da matriz K_e .

Foi tomado um elemento quadrilateral de quatro nós $Q4$ de dimensões $1,4 \times 1,778$, mesmas medidas dos elementos das malhas apresentadas na seção 4.2. Os dados do material utilizados foram, em unidades consistentes, módulo de elasticidade $E = 1,0$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$.

4.1.1 Altura da trinca

Para observação da influência da altura da trinca na rigidez do elemento foram simuladas 3 posições: $d/2$, $d/4$ e $d/8$, onde d é a altura do elemento. As situações descritas estão esquematizadas na Figura 4.2.

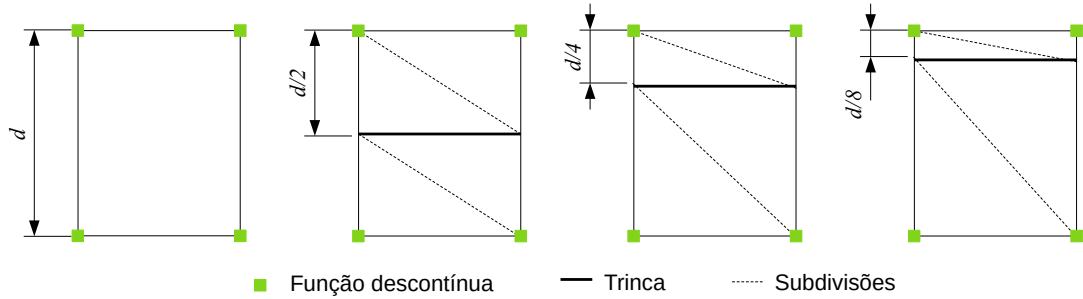


Figura 4.2: Diferentes alturas da trinca no elemento.

A quantidade de pontos de integração da quadratura de Gauss foi variada de 4×4 até 24×24 . As análises feitas com quadraturas 2×2 apresentaram erros significativamente maiores que para os demais casos, por isso foram desconsideradas. Para a estratégia de subdivisão de elementos, como aqui não são levados em conta enriquecimentos singulares, a matriz de rigidez torna-se exata para 3 pontos de integração por célula triangular – garantindo a aproximação quadrática compatível com a formulação do elemento paramétrico de quatro nós $Q4$. A norma da

matriz de rigidez obtida com essa quadratura, então, foi tomada como referência para estimativa do erro gerado pela integração convencional.

A Tabela 4.1 mostra as normas da matriz de rigidez obtidas com a subdivisão de elementos, enquanto a Tabela 4.2 mostra tal variável obtida no uso de cada quadratura de Gauss, assim como o erro relativo entre a integração por quadratura de Gauss e a integração por subdivisão de elementos, calculado como:

$$e^{rel} = \frac{||| K_e |||_G^2 - ||| K_e |||_S^2}{||| K_e |||_S^2}, \quad (4.2)$$

onde:

- $||| K_e |||_G$ é a norma calculada para a integração pela quadratura de Gauss;
- $||| K_e |||_S$ é a norma calculada para a integração pela subdivisão de elementos.

Constata-se que os valores obtidos em quadraturas convencionais ímpares apresentam maior discrepância daqueles obtidos em quadraturas pares. Isso se deve ao fato de que, no primeiro caso, alguns pontos de integração ficam mais próximos da (ou mesmo sobre a) descontinuidade.

Tabela 4.1: Variação da altura da trinca: dados para subdivisão de elementos.

Pontos	$ K_e $		
	$d/2$	$d/4$	$d/8$
12 (3 por célula)	2,8346	2,3372	2,1196

A Figura 4.3 mostra o gráfico do erro relativo calculado nas quadraturas pares com relação à estratégia implementada. Tais valores são menores quando a trinca se encontra na metade do elemento, apresentando maiores variações para $d/4$ e $d/8$.

Tabela 4.2: Variação da altura da trinca: dados para integração convencional.

Pontos	$\ K_e \ $			$e^{rel}(\%)$		
	$d/2$	$d/4$	$d/8$	$d/2$	$d/4$	$d/8$
4	2,8875	2,8875	2,0166	0,2963	2,8266	0,4198
9	3,2879	2,4177	2,4177	2,7180	0,3764	1,3322
16	2,8482	2,2074	2,2074	0,0760	0,5800	0,3739
25	3,1216	2,5621	2,1141	1,6741	1,0837	0,0230
36	2,8407	2,3756	2,0704	0,0343	0,1781	0,2031
49	3,0436	2,2554	2,0485	1,2034	0,3690	0,2921
64	2,8375	2,4771	2,1792	0,0161	0,6624	0,2522
81	2,9981	2,3622	2,1300	0,9341	0,1159	0,0432
100	2,8366	2,2784	2,0975	0,0111	0,2667	0,0922
121	2,9704	2,4382	2,0750	0,7724	0,4743	0,1843
144	2,8358	2,3563	2,1700	0,0068	0,0881	0,2129
400	2,8350	2,3930	2,0887	0,0023	0,2595	0,1282
576	2,8349	2,3466	2,0977	0,0021	0,0433	0,0911

Conclui-se, para os dados relacionados às quadraturas pares, que quando a trinca é posicionada na metade da altura do elemento os erros gerados no cálculo da matriz de rigidez são menores, embora o resultado pela quadratura de Gauss ainda não seja exato. A mudança na altura da trinca gera erros ainda mais significativos na integração convencional. A estratégia de subdivisão de elementos se mostra vantajosa quanto ao fato de manter a exatidão da aproximação numérica independente da posição da trinca, além de ser necessário um número relativamente baixo de pontos de integração.

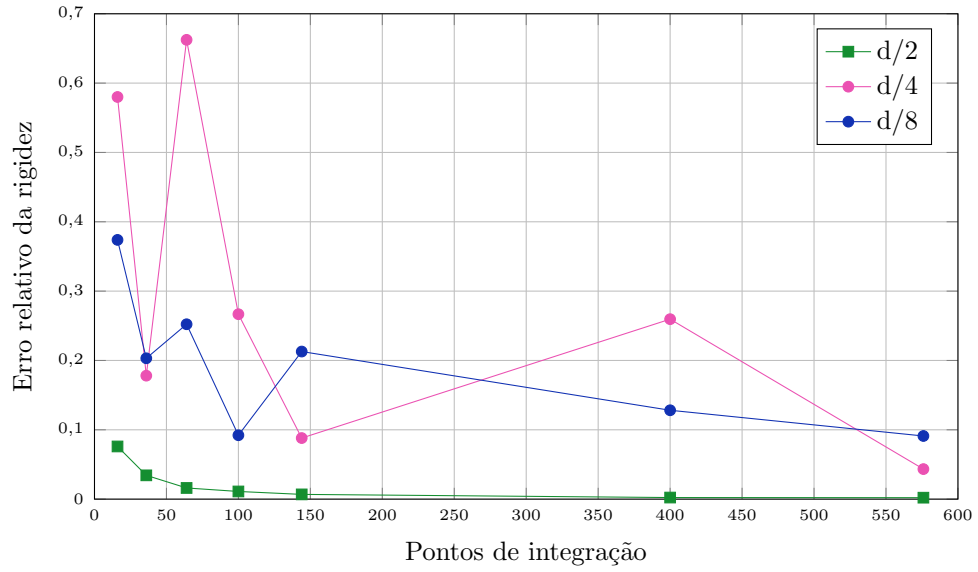


Figura 4.3: Influência da altura da trinca na obtenção da matriz de rigidez do elemento pela quadratura de Gauss.

4.1.2 Posição da ponta da trinca

Com o intuito de analisar, agora, o comportamento de elementos que contêm a ponta da trinca em seu interior, foram simulados casos com diferentes posições da ponta da trinca. Para o elemento de largura l , a dimensão da trinca foi alterada entre $l/7$, $l/2$ e $6l/7$, conforme Figura 4.4. As linhas pontilhadas delimitam as células geradas a partir dos nós do elemento e do ponto advindo da interseção entre a aresta do elemento e a extensão da trinca.

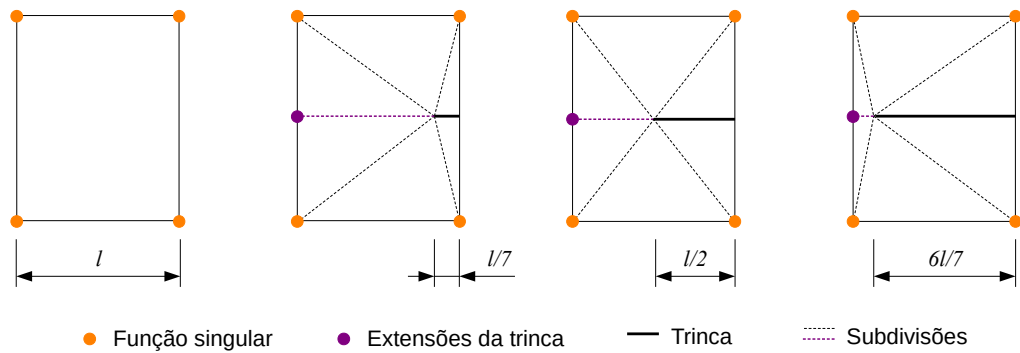


Figura 4.4: Diferentes tamanhos da trinca no elemento.

Os pontos de integração para a quadratura de Gauss foram variados de 4×4 a 24×24 . Na estratégia de mapeamento e subdivisão de elementos, foram considerados de 2×2 a 10×10 pontos de Gauss modificados em cada uma das 6 células geradas. Resultados tanto com 2×2 pontos na integração convencional quanto com 1×1 ponto na estratégia implementada apresentaram erros significativamente maiores que para os demais casos.

Ressalta-se que para a integração convencional, entretanto, foi possível empregar apenas quadraturas pares. Essa limitação ocorre porque, quando a ponta da trinca coincide com um ponto de integração ($r = 0$ nas Equações 2.6 a 2.9), não é possível determinar os parâmetros do enriquecimento singular e, assim, a matriz de rigidez não é calculada. Devido ao enriquecimento adotado, a integração não é exata para ambas as técnicas de integração em comparação. Por isso, foi analisada a convergência relativa da norma da matriz de rigidez associada ao aumento dos pontos de integração:

$$C_i^{rel} = \frac{||| K_e |||_n^2 - ||| K_e |||_i^2}{||| K_e |||_n^2}, \quad (4.3)$$

onde:

- $||| K_e |||_n$ é a norma calculada para a última quadratura considerada n , para cada estratégia, a qual contém o maior número de pontos;
- $||| K_e |||_i$ é a norma calculada para a quadratura i , sendo $i = 0, \dots, n$.

Para a integração convencional, n refere-se à quadratura 24×24 ; já para a subdivisão e mapeamento, n refere-se à quadratura modificada de 10×10 pontos por célula triangular.

Os resultados obtidos para a utilização da quadratura de Gauss estão listados na Tabela 4.3. Para o caso do mapeamento e subdivisão de elementos, os dados estão contidos na Tabela 4.4. Os erros relativos para ambos conjuntos de dados podem ser vistos, respectivamente, nas Figuras 4.5 e 4.6.

Tabela 4.3: Variação da posição da ponta da trinca: dados para integração convencional.

Pontos	$\ K_e \ $			$c^{rel}(\%)$		
	$l/7$	$l/2$	$6l/7$	$l/7$	$l/2$	$6l/7$
16	2,9047	3,2951	3,3338	0,1931	0,3878	0,4653
36	2,9101	3,3247	3,3663	0,1620	0,1968	0,2525
64	2,9233	3,3383	3,3796	0,0867	0,1081	0,1654
100	2,9260	3,3440	3,3866	0,0716	0,0710	0,1187
144	2,9310	3,3433	3,3884	0,0430	0,0754	0,1069
196	2,9333	3,3502	3,3948	0,0296	0,0302	0,0646
256	2,9349	3,3492	3,3965	0,0204	0,0371	0,0530
324	2,9358	3,3561	3,3962	0,0153	0,0081	0,0550
400	2,9380	3,3557	3,3968	0,0025	0,0056	0,0513
484	2,9386	3,3551	3,3961	0,0008	0,0018	0,0561
576	2,9384	3,3549	3,4045	0,0000	0,0000	0,0000

Através dos resultados obtidos, observa-se que a convergência da norma da matriz de rigidez é mais rápida para a estratégia proposta nos três casos analisados. Nota-se, por exemplo, que para a quadratura de Gauss os valores de c^{rel} se estabilizam, na segunda casa decimal, com 256, 324 e 400 pontos de integração para os tamanhos de trinca $6l/7$, $l/2$ e $l/7$, respectivamente. Já para o mapeamento e subdivisão de elementos, isso ocorre considerando 150, 150 e 216 pontos de integração para os respectivos tamanhos anteriormente citados. Assim, obtém-se valores estáveis com menores quadraturas ao se adotar a estratégia de subdivisão e mapeamento.

Tabela 4.4: Variação da posição da ponta da trinca: dados para estratégia implementada.

Pontos	$\ K_e \ $			$c^{rel}(\%)$		
	$l/7$	$l/2$	$6l/7$	$l/7$	$l/2$	$6l/7$
24	2,9241	3,2975	3,3202	0,1163	0,4480	0,6076
54	2,9532	3,3616	3,3898	0,0512	0,0313	0,1514
96	2,9312	3,3625	3,4213	0,0754	0,0253	0,0577
150	2,9508	3,3658	3,4126	0,0371	0,0034	0,0004
216	2,9428	3,3666	3,4125	0,0091	0,0017	0,0011
294	2,9445	3,3663	3,4127	0,0008	0,0002	0,0002
384	2,9446	3,3664	3,4125	0,0015	0,0000	0,0000
486	2,9443	3,3663	3,4126	0,0000	0,0000	0,0000
600	2,9444	3,3663	3,4126	0,0000	0,0000	0,0000

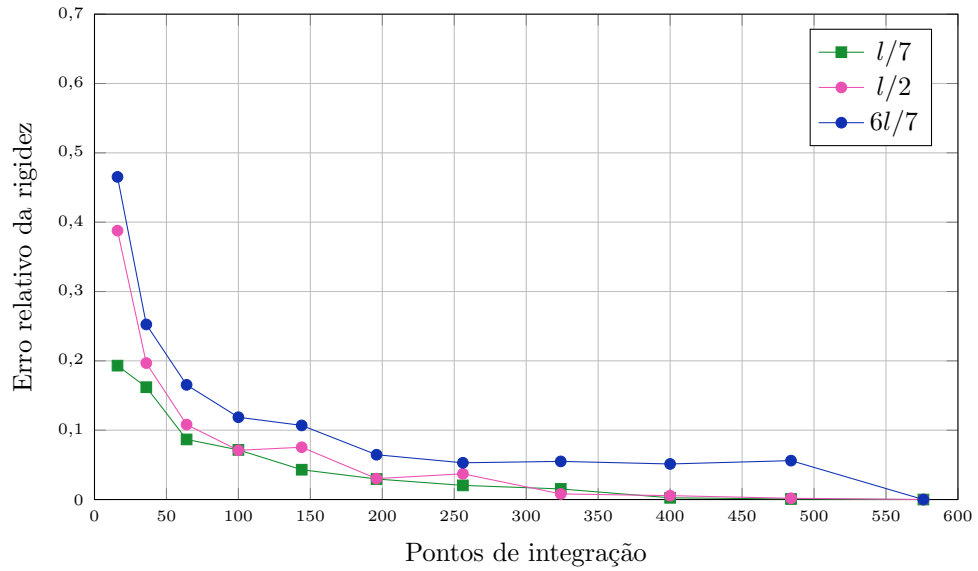


Figura 4.5: Influência do tamanho da trinca na obtenção da matriz de rigidez do elemento na integração convencional.

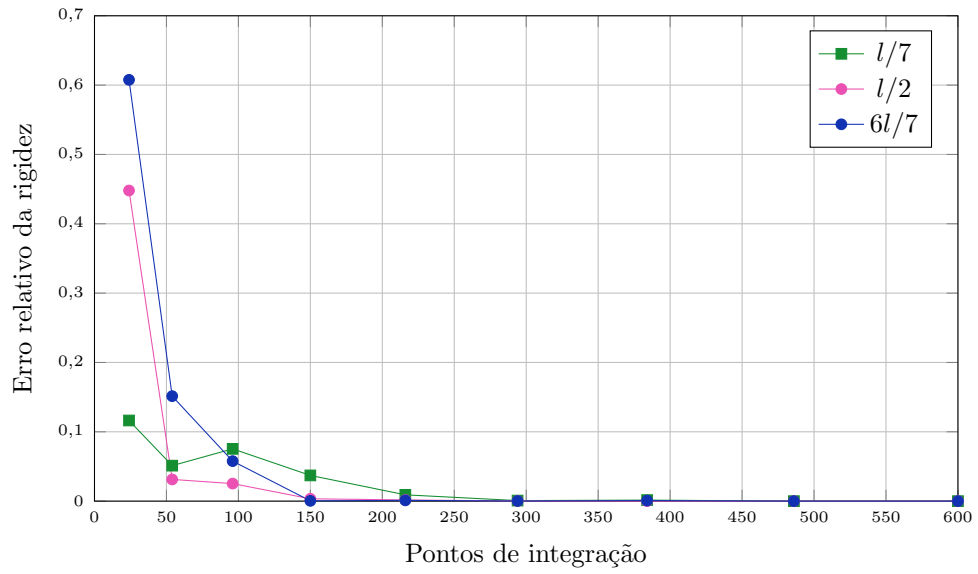


Figura 4.6: Influência do tamanho da trinca na obtenção da matriz de rigidez do elemento na integração com mapeamento e subdivisão de elementos.

Quando observada a convergência relativa da integração convencional em ambos os exemplos, usando a Equação 4.3 (Figura 4.7), nota-se que há maior sensibilidade à altura da trinca dentro do elemento do que à posição da ponta da mesma, especialmente para as alturas de $d/4$ e $d/8$.

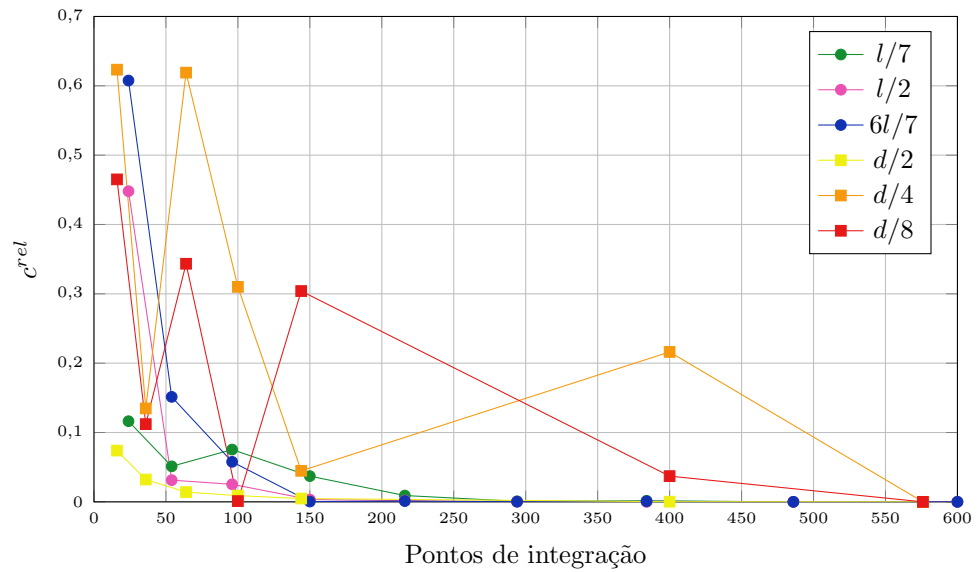


Figura 4.7: Convergência relativa da norma da matriz de rigidez para integração convencional.

4.2 Modelos sem Propagação

Nesta seção é apresentada a aplicação das técnicas de integração numérica em modelos de trinca estática. Utilizou-se a mesma geometria e a mesma malha, conforme Figura 4.8, em todos os casos. As propriedades do material também foram mantidas: módulo de elasticidade $E = 1,0$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$, em unidades consistentes. A chapa apresenta espessura unitária, restrição em y nos nós inferiores e restrição em x e y no nó inferior esquerdo.

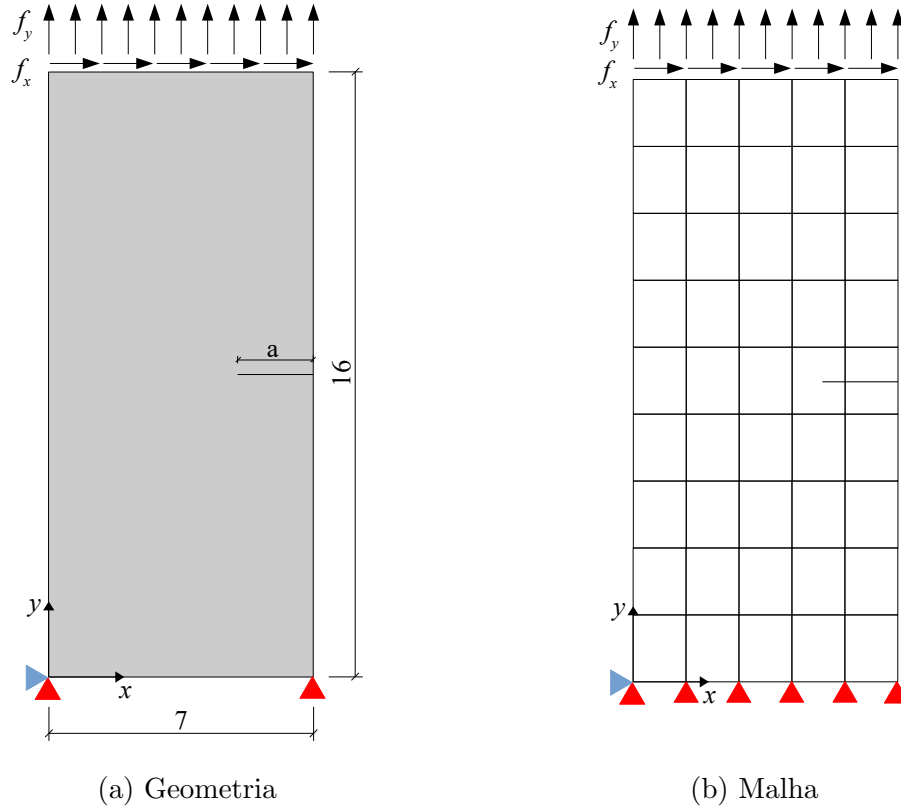


Figura 4.8: Dados comuns aos exemplos sem propagação.

A malha de elementos finitos contém 5 por 9 elementos quadrilaterais de 4 nós $Q4$. A malha grosseira foi adotada com o intuito de evidenciar a integração numérica, uma vez que os elementos têm tamanho significativo com relação ao tamanho da chapa. A quantidade de pontos de Gauss foi alterada entre as quadraturas de 4×4 a 24×24 , e quando aplicadas as estratégias aqui estudadas, os pontos de integração

foram alterados entre 3, 4, 6, 7 e 13 por célula em elementos totalmente atravessados pela trinca. Em situações que o elemento contém a ponta da trinca, alternou-se os pontos de Gauss modificados de 2×2 a 10×10 em cada célula.

Nos elementos da malha que não contêm a descontinuidade foram empregados 2×2 pontos de Gauss, exceto naqueles adjacentes a elementos com a singularidade, onde foi utilizada quadratura 4×4 devido à presença de alguns nós enriquecidos. Ressalta-se que os dois primeiros exemplos foram simulados para representar a influência das estratégias separadamente, enquanto os demais buscam associar diferentes configurações à presença de ambos os tipos de enriquecimento.

Para cada exemplo são apresentados gráficos que relacionam a variação da energia de deformação U e do(s) parâmetro(s) de intensidade de tensão K com o aumento da quantidade de pontos de integração. Além disso, é apresentada a relação do tempo de processamento – tempo gasto na solução da matriz de rigidez, sem levar em conta o processo de triangulação da estratégia de subdivisão – com a respectiva energia de deformação para determinada quadratura de Gauss. O intuito é identificar, de forma rápida e visual, para quais tempos são obtidos valores estáveis do parâmetro U .

4.2.1 Chapa em Modo I de Abertura e $a = 1,0$

Com dimensão da trinca de 1,0 unidade de comprimento, a descontinuidade está contida em somente um elemento, representado na Figura 4.9. Estão indicados os nós enriquecidos do elemento E25 e nos elementos hachurados foram adotados 4×4 pontos de Gauss. O carregamento aplicado é de $f_x = 0$ e $f_y = 1,0$; considerou-se estado plano de tensão e foi empregado enriquecimento com funções singulares do Modo I de abertura (Equações 2.6 e 2.7).

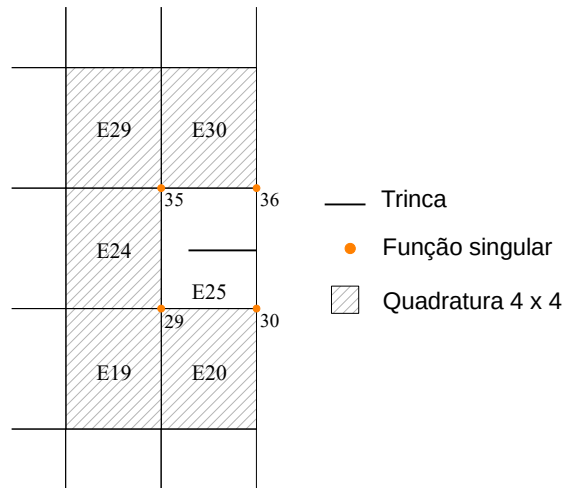


Figura 4.9: Disposição da trinca $a = 1,0$ na malha adotada.

A Figura 4.10 indica a variação da energia de deformação U na chapa, enquanto a Figura 4.11 indica a variação do fator de intensidade de tensão K_I à medida que o número de pontos de integração é aumentado no elemento E25 da Figura 4.9. A convergência de U ocorreu de forma mais lenta na integração convencional IC do que nas estratégias adotadas SM , e comportamento similar é observado para o fator K_I . A Figura 4.12 mostra a variação da energia de deformação com o tempo de processamento, onde é possível observar tempos menores na série de dados SM .

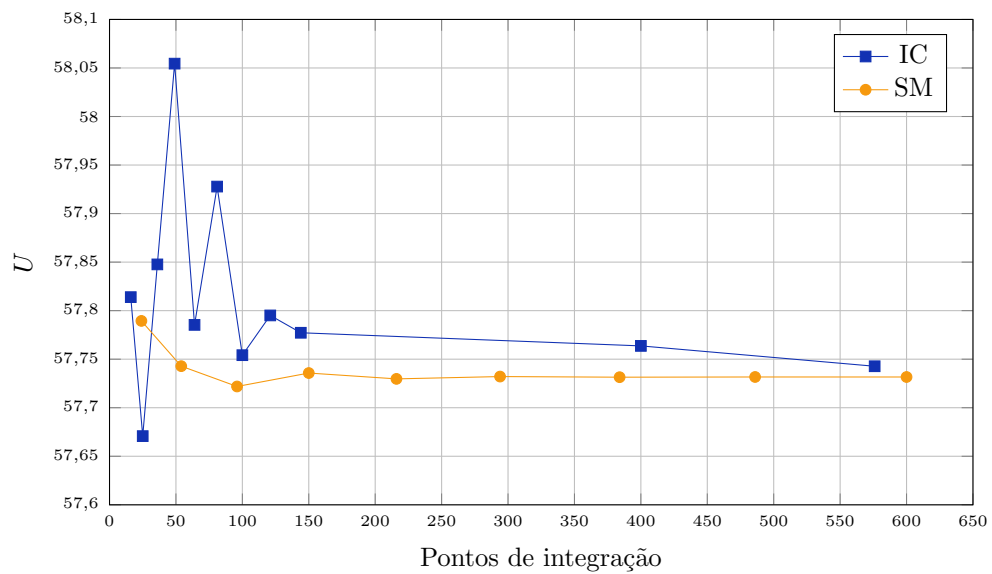


Figura 4.10: Energia de deformação U para chapa com trinca $a = 1,0$.

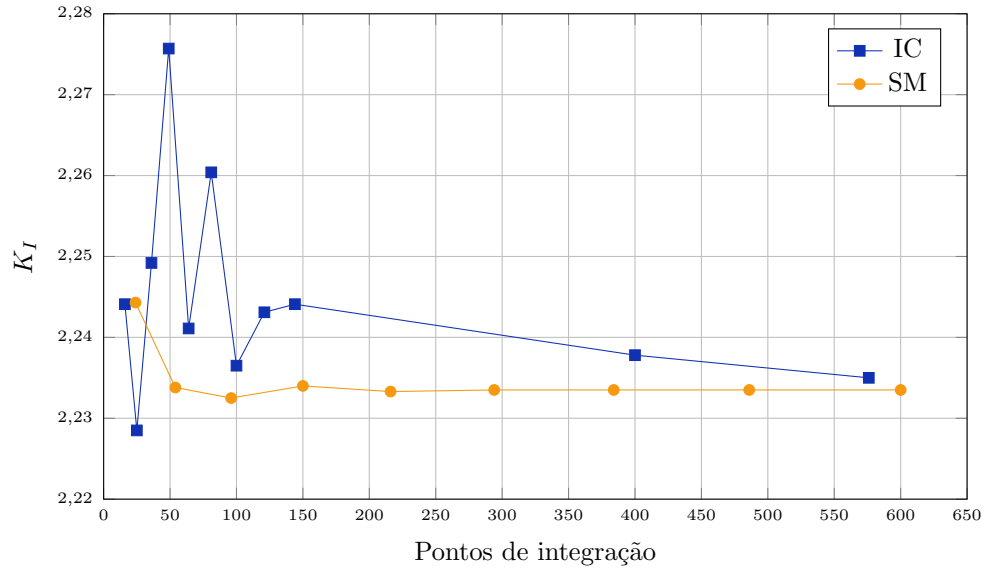


Figura 4.11: Fator de intensidade de tensão K_I para chapa com trinca $a = 1,0$.

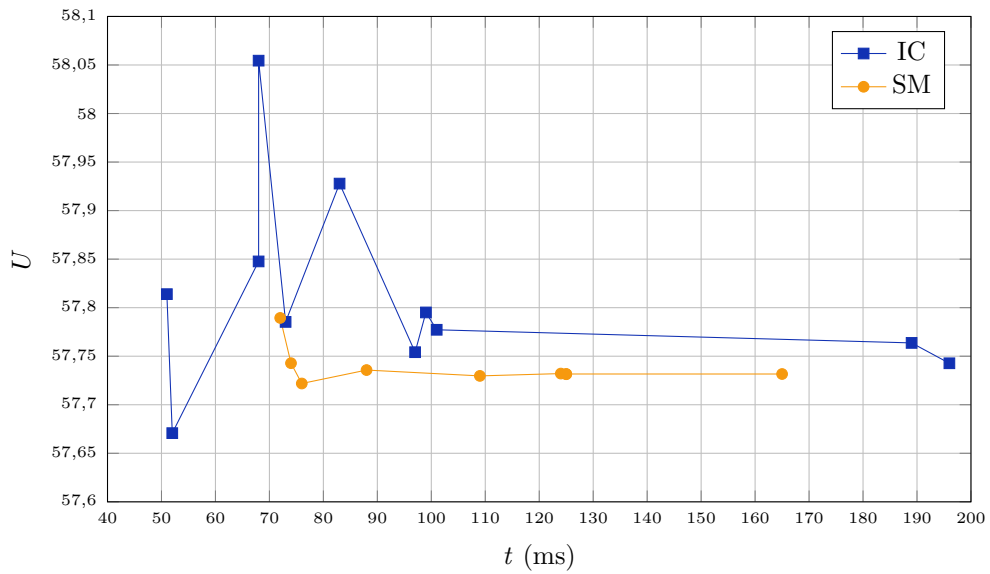


Figura 4.12: Tempo de processamento t para chapa com trinca $a = 1,0$.

A Tabela [4.5a](#) traz todos os valores obtidos tanto da energia de deformação U e do tempo de processamento t como também o fator de intensidade de tensão K_I para o emprego da quadratura de Gauss. Os mesmos dados relacionados à estratégia implementada constam na Tabela [4.5b](#). Para tais parâmetros, a integração convencional não atingiu a estabilidade observada na técnica de mapeamento e subdivisão

de elementos.

Para fins de comparação entre as estratégias de integração numérica foram considerados resultados aceitáveis para a discretização adotada o emprego de 576 pontos na quadratura de Gauss e 6×6 pontos de integração em cada célula triangular (Tabela 4.6). Para valores de U próximos entre si, o tempo de processamento é reduzido em 44% e o número de pontos de integração diminui em 63% ao se considerar a técnica implementada.

Tabela 4.5: Resultados de U , K_I e tempo de processamento t para $a = 1, 0$.

(a) Integração convencional				(b) Estratégia implementada			
Pontos	U	t (ms)	K_I	Pontos	U	t (ms)	K_I
16	57,8139	51	2,2441	24	57,7895	72	2,1496
25	57,6708	52	2,2285	54	57,7428	74	2,2443
36	57,8477	68	2,2492	96	57,7219	76	2,2338
49	58,0545	68	2,2757	150	57,7358	89	2,2325
64	57,7854	73	2,2411	216	57,7297	109	2,2340
81	57,9278	83	2,2604	294	57,7321	124	2,2333
100	57,7542	97	2,2365	384	57,7315	125	2,2335
121	57,7951	99	2,2431	486	57,7317	125	2,2335
144	57,7772	101	2,2441	600	57,7317	165	2,2335
400	57,7637	189	2,2378				
576	57,7427	196	2,2350				

Tabela 4.6: Comparação das estratégias de integração para trinca $a = 1, 0$.

Tipo de integração	Pontos	U	t (ms)
IC	576	57,7427	196
SM	216	57,7297	109

4.2.2 Chapa em Modo I de Abertura e $a = 2,8$

Nesse exemplo a trinca tem dimensão de 2,8 unidades de comprimento, atravessando completamente dois elementos. Na Figura 4.13 podem ser vistos os nós do elemento E25 enriquecidos com função de Heaviside (Equação 2.5). O enriquecimento foi adotado dessa forma a fim de que se observasse o comportamento da subdivisão de elementos em um domínio com nós enriquecidos apenas com função descontínua, de maneira análoga ao exemplo anterior (onde foram empregadas apenas funções singulares). O carregamento aplicado é de $f_x = 0$ e $f_y = 1,0$ e adotou-se estado plano de tensão.

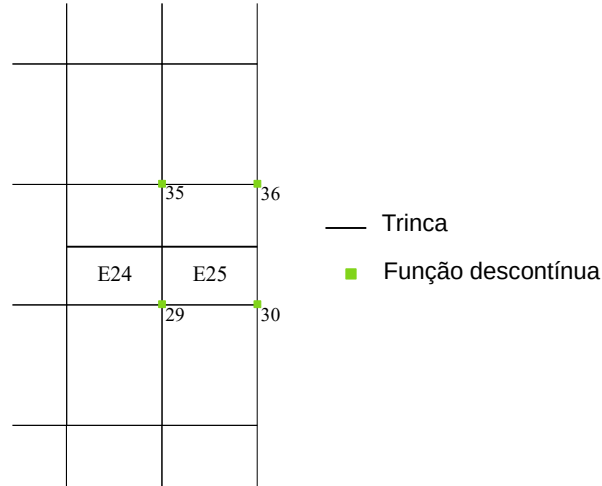


Figura 4.13: Disposição da trinca $a = 2,8$ na malha adotada.

Observa-se na Figura 4.14 a alteração de U com o aumento da quantidade de pontos de integração no elemento E25, enquanto a Figura 4.15 mostra a alteração de K_I . De maneira mais clara que no exemplo anterior, a estratégia de subdivisão adotada *SM* apresenta convergência rápida quando comparada à integração *IC*, necessitando de apenas 3 pontos de integração por célula para apresentar resultados precisos. Consequentemente, o tempo de processamento relacionado também é reduzido, conforme Figura 4.16.

Os resultados de energia de deformação, tempo de processamento (t) e fator de

intensidade de tensão constam na Tabela 4.7a, para a série *IC*, e na Tabela 4.7b, para a série *SM*. Ressalta-se que foram listados, para a integração convencional, somente os dados associados às quadraturas pares. O emprego de quadraturas ímpares posiciona alguns pontos de integração em cima da descontinuidade, gerando erros de integração consideravelmente maiores.

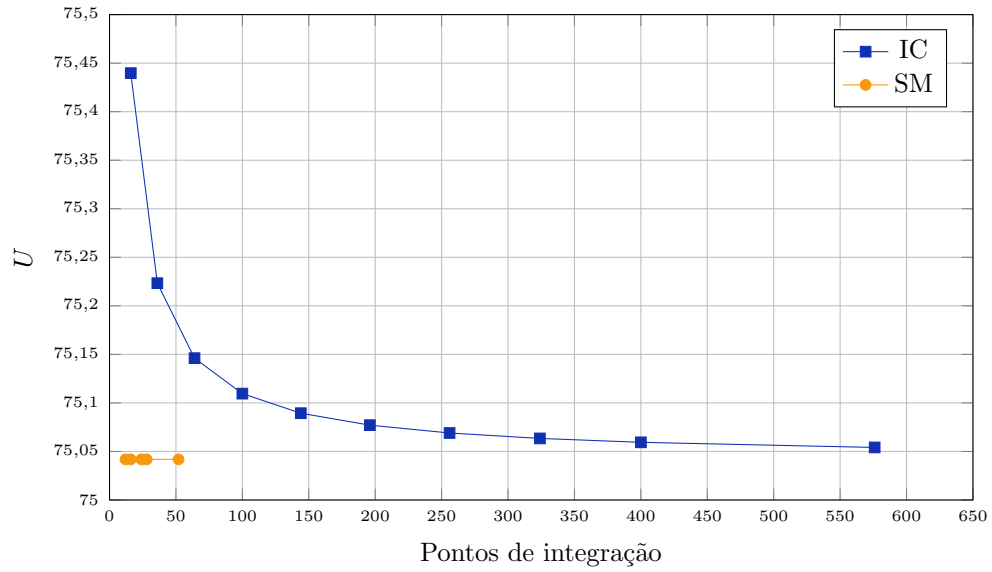


Figura 4.14: Energia de deformação U para chapa com trinca $a = 2,8$.

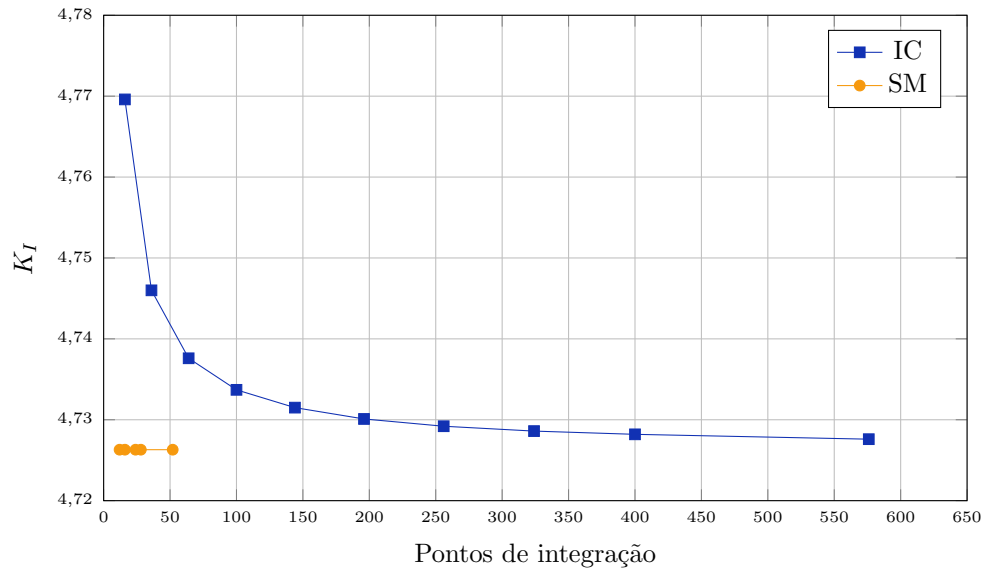


Figura 4.15: Fator de intensidade de tensão K_I para chapa com trinca $a = 2,8$.

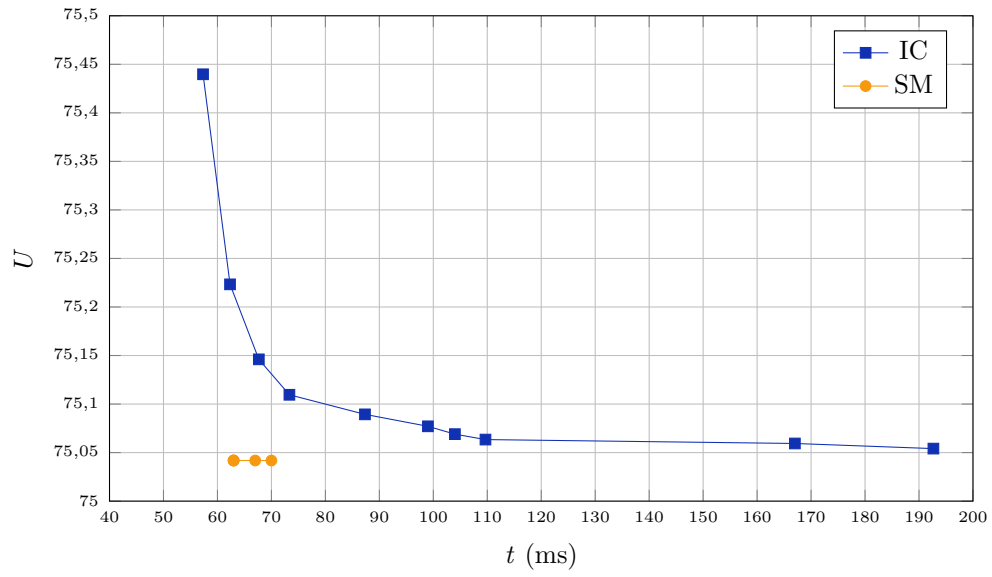


Figura 4.16: Tempo de processamento t para chapa com trinca $a = 2,8$.

Tabela 4.7: Resultados de U , K_I e t para $a = 2,8$.

(a) Integração convencional				(b) Estratégia implementada			
Pontos	U	t (ms)	K_I	Pontos	U	t (ms)	K_I
16	75,4397	57	4,7696	12	75,0418	63	4,7263
36	75,2233	62	4,7460	16	75,0418	63	4,7263
64	75,1461	68	4,7376	24	75,0418	63	4,7263
100	75,1096	73	4,7337	28	75,0418	67	4,7263
144	75,0894	87	4,7315	52	75,0418	70	4,7263
196	75,0771	99	4,7301				
256	75,0690	104	4,7292				
324	75,0634	110	4,7286				
400	75,0594	167	4,7282				
576	75,0541	193	4,7276				

Com o intuito de comparar as duas estratégias, considerou-se resultados aceitáveis para a malha adotada aqueles obtidos com 144 pontos na quadratura de Gauss

e 3 pontos por célula na subdivisão de elementos (12 ao total). Para essa integração numérica, os resultados estão apresentados na Tabela 4.8. Utilizando menos de 10% dos pontos empregados na quadratura de Gauss, a estratégia *SM* alcança uma redução de aproximadamente 28% no tempo de processamento.

Tabela 4.8: Comparação das estratégias de integração para trinca $a = 2, 8$.

Tipo de integração	Pontos	U	t (ms)
IC	144	75,0894	87
SM	12	75,0418	63

4.2.3 Chapa em Modo I de Abertura e $a = 3, 5$

Tem-se nesse exemplo a trinca com dimensão de 3,5 unidades de comprimento, ou seja, metade da largura da chapa. São utilizados enriquecimentos com função descontínua (Equação 2.5) e funções singulares (Equações 2.6 e 2.7) para descrever a trinca existente. O carregamento aplicado é de tração: $f_x = 0$ e $f_y = 1, 0$, e foi adotado estado plano de tensão. A Figura 4.17 indica os nós apenas com funções descontínuas (elemento E25) e os nós apenas com funções singulares (elemento E23). Os dados da série *IC* foram obtidos alternando-se as quadraturas pares para esse posicionamento da trinca.

Para esse exemplo, a energia de deformação foi calculada no software ANSYS® versão 19.1. Como a análise aqui realizada não é de refinamento da aproximação, mas sim da integração, não se espera uma convergência monotônica para este valor. O que se estuda é a velocidade com que cada estratégia converge para a solução capaz de ser representada para o tipo de discretização adotada. Utiliza-se, apenas como referência, o valores obtido pelo ANSYS®, a título de entender o comportamento da solução.

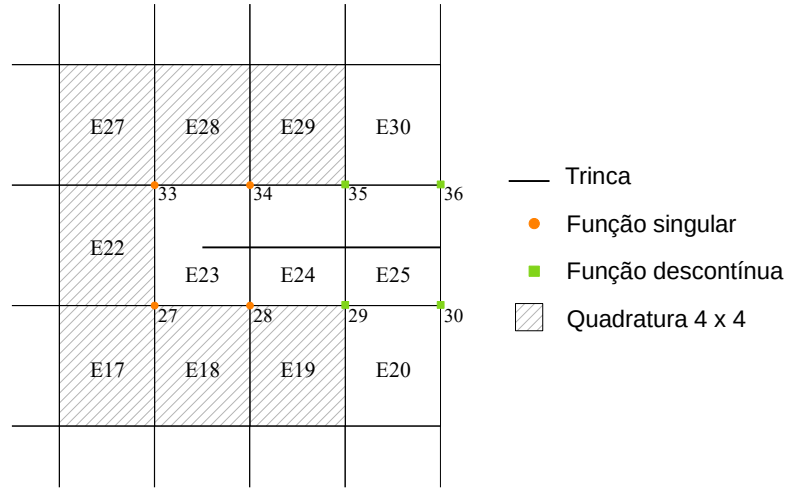


Figura 4.17: Disposição da trinca $a = 3,5$ na malha adotada.

Para a malha da Figura 4.18 com 47.808 nós de elementos do tipo PLANE183 e, na vizinhança da trinca, do tipo quarter-point, obteve-se o valor de energia de deformação $U = 130,74918$. No presente exemplo, além do MEFGE, empregou-se também o MEFGE e o MEFGE linearizado, a fim de se analisar o comportamento da integração numérica em ambos os casos.

Como referência para a análise do fator de intensidade de tensão, foi considerado o valor analítico calculado segundo formulação apresentada por Tada et al. (2000) para uma chapa com trinca de bordo. De acordo com os parâmetros deste exemplo, obteve-se $K_I = 9,3481$.

Ao se utilizar a função de Heaviside padrão, segundo Gupta et al. (2013), o desempenho do MEFGE é inferior ao do MEFGE, gerando erros relativos da norma de energia maiores no estudo de modelos bidimensionais. Assim, os autores propuseram o emprego do conjunto de funções de Heaviside linearizadas:

$$H_L(x, y) = \left\{ H, H \frac{x - x_j}{h_j}, H \frac{y - y_j}{h_j} \right\}, \quad (4.4)$$

onde H é a função de Heaviside padrão definida pela Equação 2.5 e h_j é o fator de escala determinado a partir do tamanho característico do maior elemento que

concorre no nó \mathbf{x}_j .

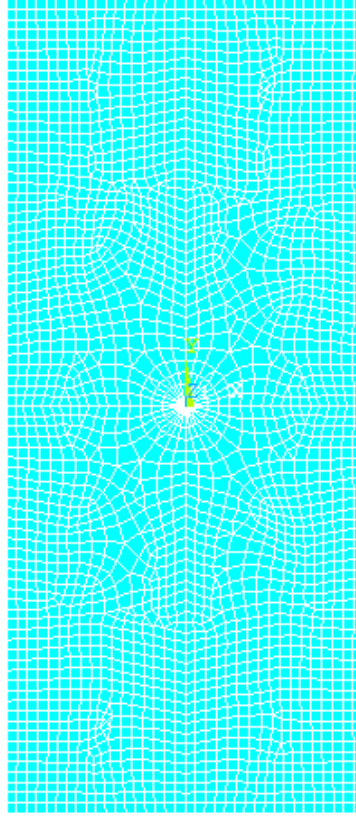


Figura 4.18: Malha adotada para obtenção da energia de deformação de referência para trinca $a = 3, 5$.

Com esse novo enriquecimento, o erro da solução numérica é melhor aproximado, afirmativa esta corroborada por análises realizadas pelos autores. A relação obtida entre a energia de deformação e o número de pontos de integração (soma dos pontos de todos os elementos que contêm a trinca, variados conforme descrito no início deste capítulo) é indicada na Figura 4.19. A Figura 4.20 mostra a relação entre o fator de intensidade de tensão e o número de pontos de integração.

Os valores de U e K_I via MEFGE linearizado se aproximam mais da solução de referência, ao passo que o MEFGE utilizando-se das funções de Heaviside padrão (Equação 2.5) resulta em uma aproximação inferior à do MEFGE. As séries representando a estratégia SM estabilizam-se com menos pontos de integração quando

comparadas àquelas da estratégia *IC*. Observa-se que os parâmetros calculados U e K_I ainda estão distantes das soluções de referência. Enfatiza-se, entretanto, que o objetivo aqui delineado não é verificar a precisão desses resultados. Os valores de referência foram apresentados apenas para comparação entre os resultados do MEFGE, MEFGE e MEFGE linearizado, enquanto é analisada a convergência de cada estratégia de integração numérica para a solução correspondente à discretização da malha adotada.

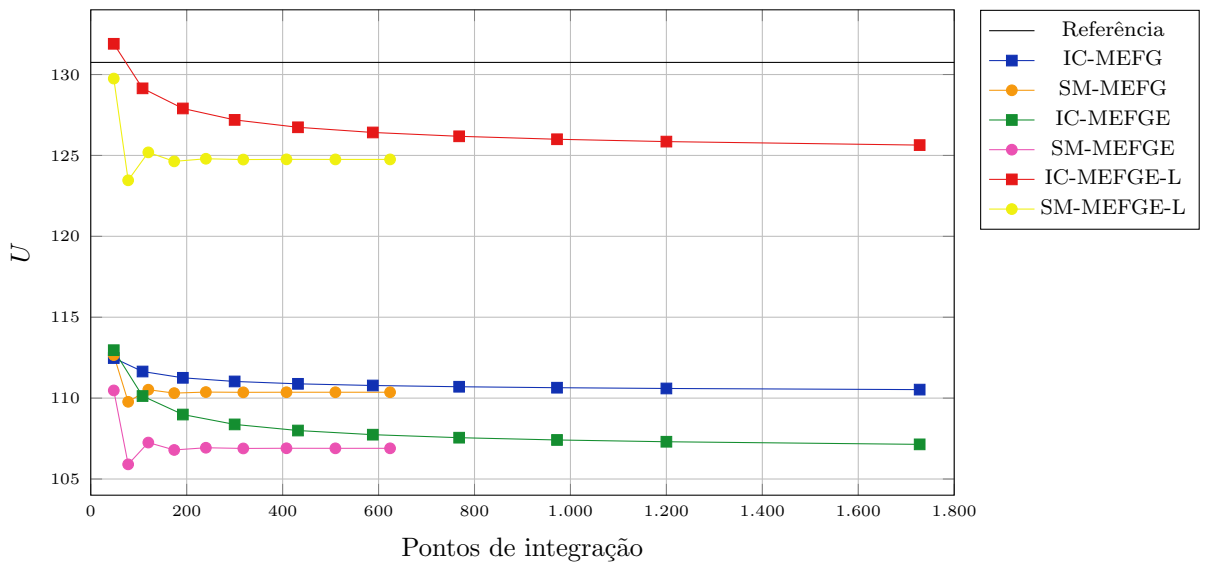


Figura 4.19: Energia de deformação U para chapa com trinca $a = 3, 5$ e Modo I de abertura.

A Figura 4.21 mostra o tempo de processamento para cada energia de deformação obtida, levando em conta o MEFGE, o MEFGE e o MEFGE linearizado. Observa-se que, para este último, o tempo de processamento é maior que nos demais casos. Além disso, a série *SM* apresenta tempos menores em relação à série *IC*. Para simulações com o MEFGE linearizado, a matriz de rigidez tem dimensão superior à advinda do MEFGE e do MEFGE, visto que são adicionados graus de liberdade devido ao enriquecimento linear da função de Heaviside padrão.

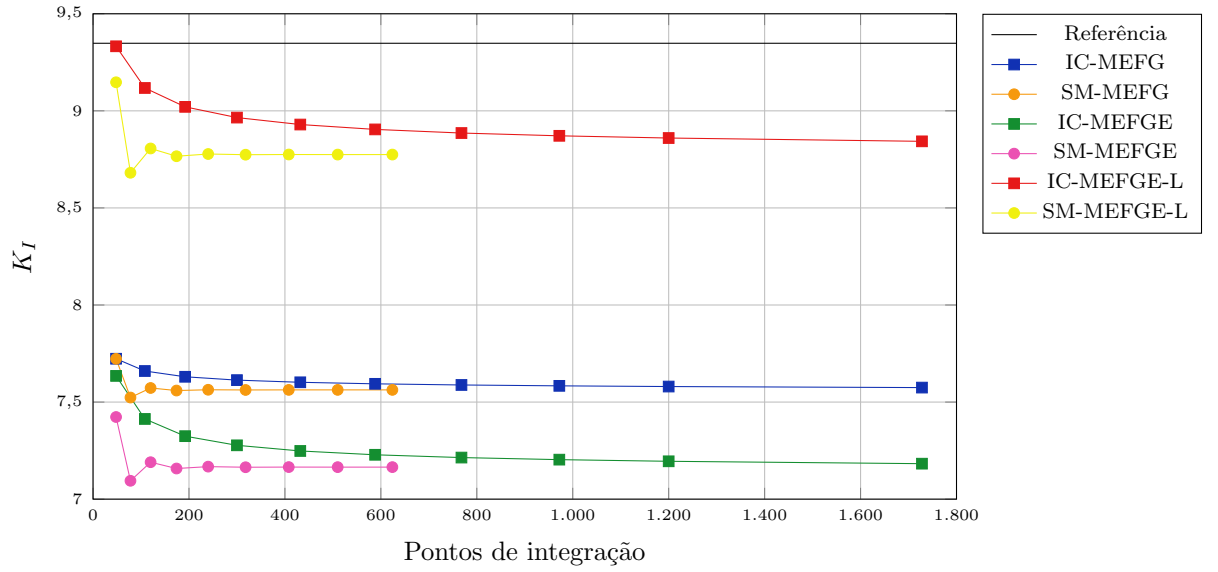


Figura 4.20: Fator de intensidade de tensão K_I para chapa com trinca $a = 3,5$ e Modo I de abertura.

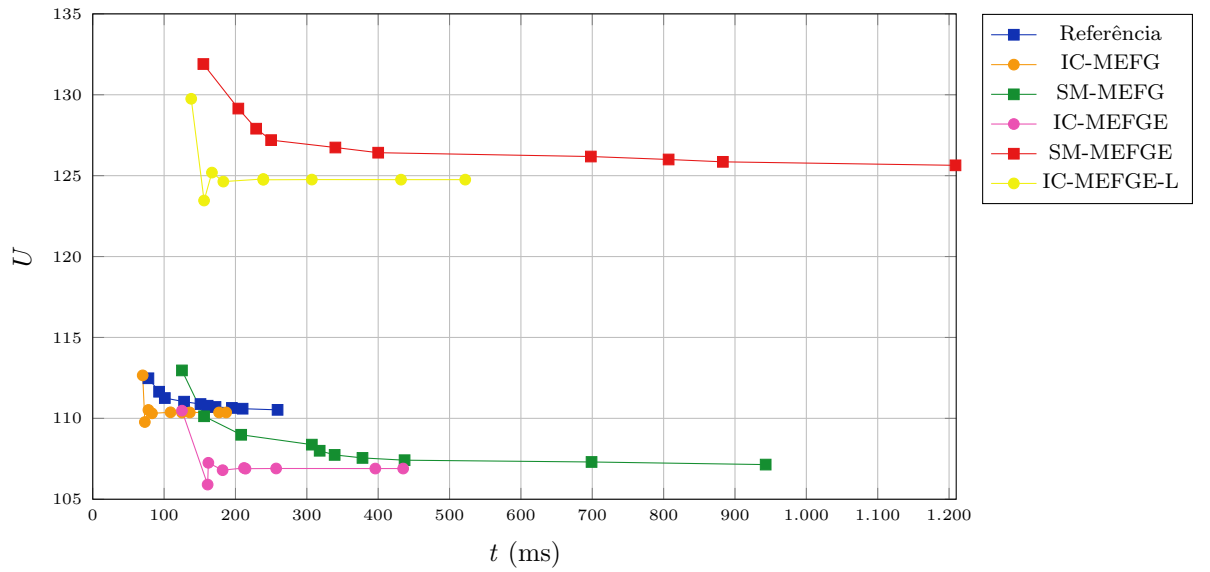


Figura 4.21: Tempo de processamento t para chapa com trinca $a = 3,5$ e Modo I de abertura.

Tomando a quantidade de pontos de integração considerada aceitável na análise separada do efeito de cada um dos enriquecimentos (seções 4.2.1 e 4.2.2), comparou-se os dados obtidos nas simulações desta seção, conforme Tabela 4.9. Nesta também

consta o erro relativo da norma de energia, calculado segundo:

$$\| e_U \|^{rel} = \sqrt{\frac{U(\tilde{\mathbf{u}}) - U(\mathbf{u})}{U(\mathbf{u})}}, \quad (4.5)$$

onde $U(\mathbf{u})$ indica a energia de referência adotada e $U(\tilde{\mathbf{u}})$ a energia de deformação obtida em cada aproximação.

Também foi calculado o erro relativo do fator de intensidade de tensão:

$$\| e_{K_I} \|^{rel} = \sqrt{\frac{\tilde{K}_I - K_I}{K_I}}, \quad (4.6)$$

onde \tilde{K}_I indica o fator de intensidade de tensão de referência adotado e K_I o fator de intensidade de tensão obtido em cada aproximação.

Observa-se que, reduzindo a quantidade de pontos de Gauss em 72%, os tempos de processamento (t) têm redução de 55%, 61% e 63% para o MEFG, MEFGE e MEFGE linearizado, respectivamente.

Tabela 4.9: Comparação das estratégias de integração para trinca $a = 3,5$ e Modo I de abertura.

Tipo de integração		Pontos	U	K_I	t (ms)	$\parallel e_U \parallel$	$\parallel e_{K_I} \parallel$
MEFG	IC	864	110,5295	7,5747	240	0,3933	0,54356
	SM	240	110,3735	7,5634	109	0,3948	0,4369
MEFGE	IC	864	107,2548	7,1919	547	0,4239	0,4803
	SM	240	106,9326	7,1675	212	0,4268	0,4830
MEFGE Linear	IC	864	125,6555	8,8442	644	0,1974	0,2322
	SM	240	124,7939	8,7777	239	0,2134	0,2470

4.2.4 Chapa em Modo Misto de Abertura e $a = 3,5$

Para a mesma dimensão da trinca do exemplo anterior, foi simulado o comportamento da integração numérica na chapa submetida a um esforço cisalhante, ou

seja, com $f_x = -1, 0$ e $f_y = 0$. O problema foi analisado sob estado plano de tensão. Considerando também, portanto, o Modo II de abertura, os mesmos nós são enriquecidos, e aqueles com enriquecimentos singulares têm funções correspondentes aos Modos I e II conforme Equações 2.6 a 2.9. O posicionamento da trinca é igual ao observado na Figura 4.17.

O comportamento da energia de deformação com a variação dos pontos de integração nos elementos cortados pela trinca é representado na Figura 4.22. Em consonância com os demais casos, a série *SM* tem convergência mais rápida do que a série *IC* – a qual, mesmo com uma quadratura de Gauss elevada, não apresentou estabilidade de U .

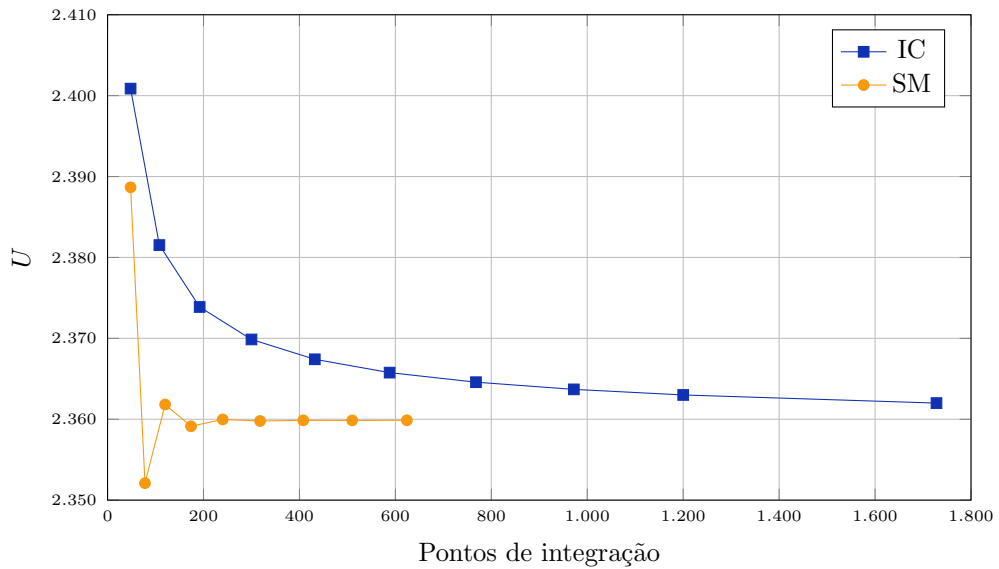


Figura 4.22: Energia de deformação U para chapa com trinca $a = 3,5$ e Modos I e II de abertura.

As Figuras 4.23 e 4.24 mostram os resultados dos fatores de intensidade de tensão K_I e K_{II} . Nota-se que o padrão de convergência de K_I e K_{II} são o mesmo que de U . A relação entre o tempo de processamento e a energia de deformação U é indicada na Figura 4.25.

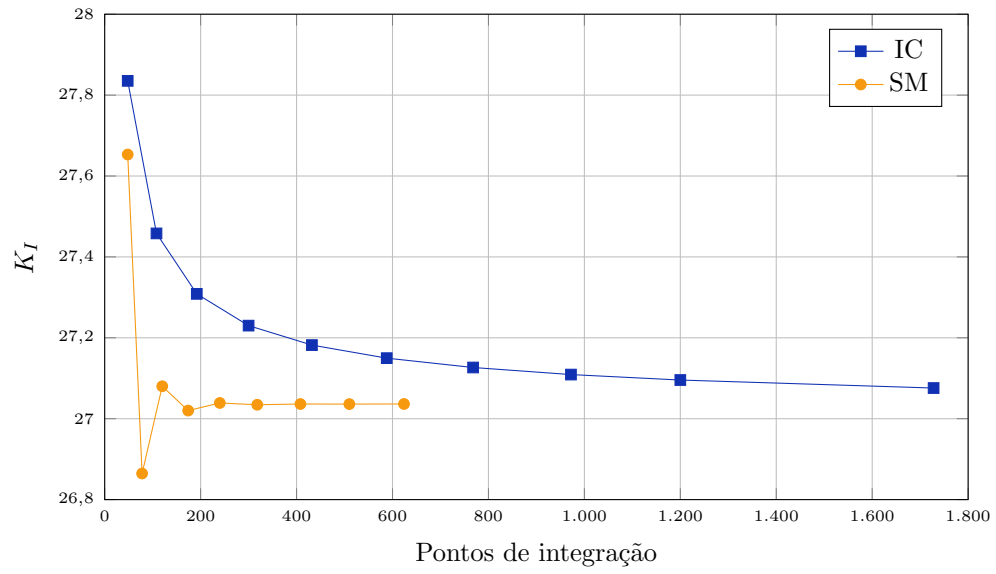


Figura 4.23: Fator de intensidade de tensão K_I para chapa com trinca $a = 3,5$ e Modos I e II de abertura.

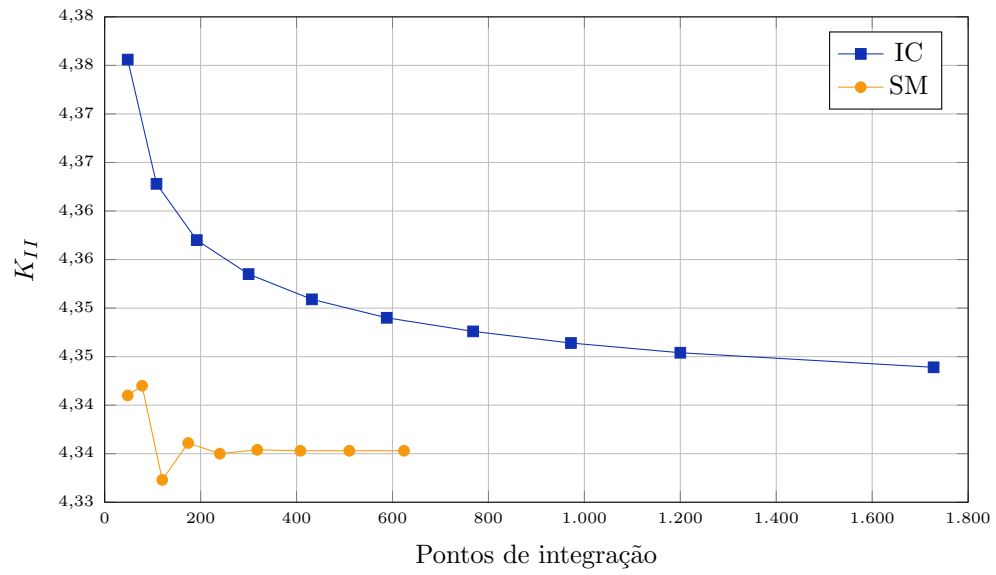


Figura 4.24: Fator de intensidade de tensão K_{II} para chapa com trinca $a = 3,5$ e Modos I e II de abertura.

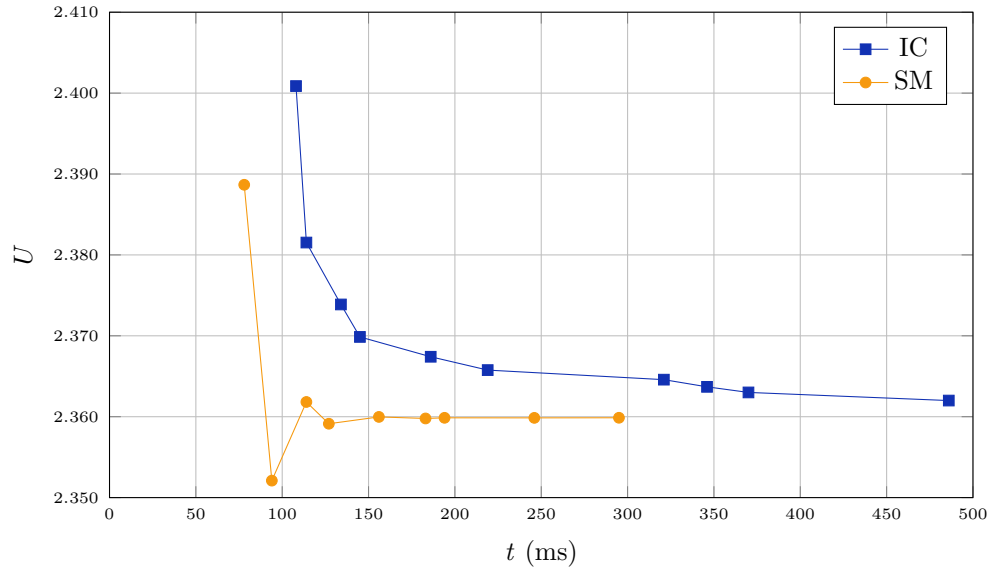


Figura 4.25: Tempo de processamento t para chapa com trinca $a = 3,5$ e Modos I e II de abertura.

Os dados resultantes do emprego da quadratura de Gauss estão na Tabela 4.10 e aqueles relacionados à estratégia implementada estão na Tabela 4.11. Nas duas situações, o número de pontos de integração é a soma em todos os elementos que contém a trinca.

Para fins de comparação de dados, a quantidade de pontos de integração tomada como referência nas seções 4.2.1 e 4.2.2 foi considerada para as informações da Tabela 4.12. Nota-se que, na obtenção de energias de deformação próximas, diminuiu-se em 72% os pontos de integração e em 59% o tempo de processamento quando se opta pela estratégia de subdivisão e mapeamento.

Tabela 4.10: Resultados de U , K_I , K_{II} e tempo de processamento t para integração convencional, $a = 3, 5$ e Modo Misto de abertura.

Pontos	U	t (ms)	K_I	K_{II}
48	2400,8693	108	27,8352	4,3756
108	2381,5285	114	27,4581	4,3628
192	2373,8745	134	27,3086	4,3570
300	2369,8620	145	27,2301	4,3535
432	2367,4097	186	27,1820	4,3509
588	2365,7613	219	27,1497	4,3490
768	2364,5794	321	27,1266	4,3476
972	2363,6915	346	27,1091	4,3464
1200	2363,0006	370	27,0956	4,3454
1728	2361,9960	486	27,0758	4,3439

Tabela 4.11: Resultados de U , K_I , K_{II} e tempo de processamento t para estratégia implementada, $a = 3, 5$ e Modo Misto de abertura.

Pontos	U	t (ms)	K_I	K_{II}
48	2388,6691	78	27,6531	4,3410
78	2352,0988	94	26,8645	4,3420
120	2361,8208	114	27,0802	4,3323
174	2359,1305	127	27,0201	4,3361
240	2359,9734	156	27,0389	4,3350
318	2359,7828	183	27,0345	4,3354
408	2359,8630	194	27,0363	4,3353
510	2359,8561	246	27,0361	4,3353
624	2359,8685	295	27,0364	4,3353

Tabela 4.12: Comparação das estratégias de integração para trinca $a = 3,5$ e Modo Misto de abertura.

Tipo de integração	Pontos	U	t (ms)
IC	864	2362,0887	377
SM	240	2359,9734	156

4.2.5 Chapa com Trinca Inclinada

Nesse exemplo de trinca estática adotou-se um posicionamento diferente da mesma com o intuito de analisar o comportamento da estratégia implementada em triangulações diferentes das já analisadas – ou seja, em casos que a trinca não é necessariamente paralela a uma das arestas do elemento. A dimensão da trinca é de 5,0 unidades de comprimento, conforme Figura 4.26b. A subdivisão realizada no elemento E18 é representada na Figura 4.26a.

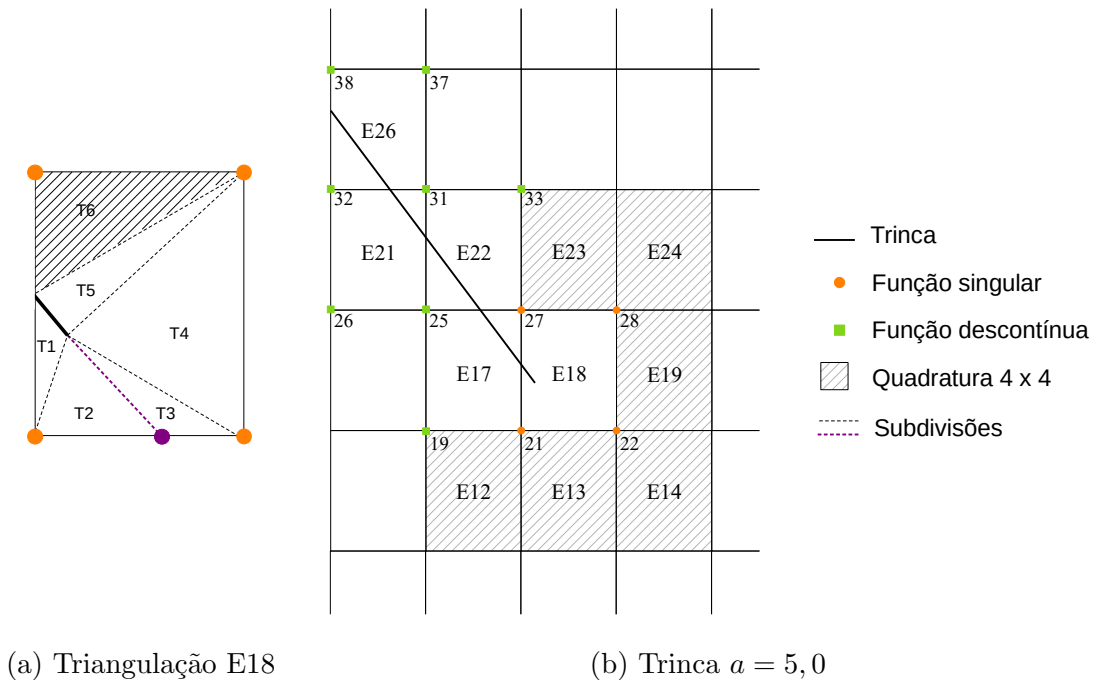


Figura 4.26: Disposição da trinca $a = 5,0$ na malha adotada.

O carregamento adotado foi de $f_x = 0$ e $f_y = 1,0$, e foram considerados os Modos

I e II de abertura para as funções de enriquecimento. A análise foi feita considerando estado plano de tensão. Conforme explicitado na seção 3.2.2, há situações em que a triangulação realizada num elemento contendo a ponta da trinca gera células que não têm um nó na singularidade (células hachuradas da Figura 3.15), sendo portanto empregada a quadratura de Gauss convencional nas mesmas. Após simulações feitas para diferentes quantidades de pontos, verificou-se que nessas células a utilização de 6 pontos de integração leva a resultados convergentes, sendo portanto adotada como *default* na implementação realizada.

A dependência entre a energia de deformação e os pontos de integração é representada na Figura 4.27. De forma ainda mais significativa do que nos outros exemplos, os valores de U obtidos apresentaram convergência mais rápida e estável na série SM .

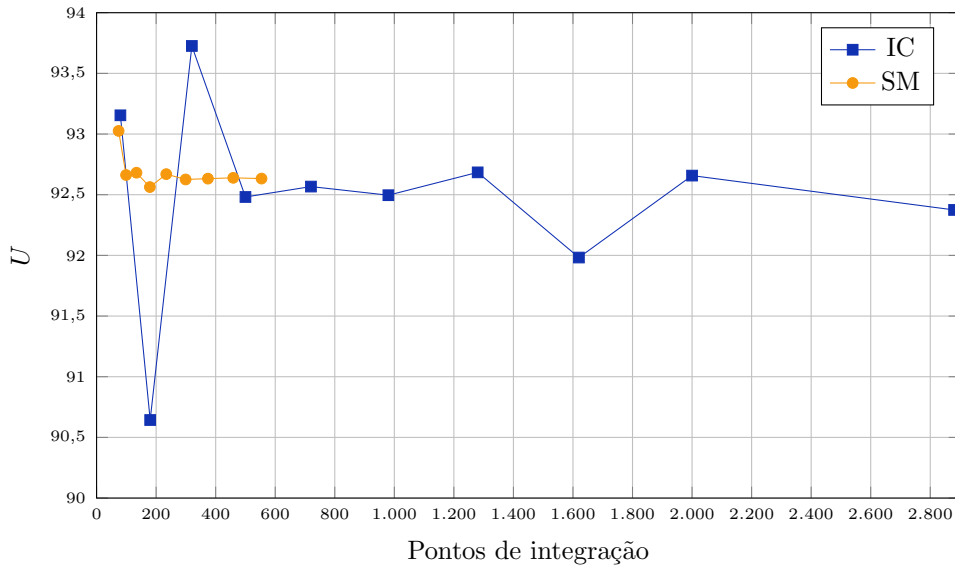


Figura 4.27: Energia de deformação U para chapa com trinca $a = 5, 0$.

A variação dos fatores de intensidade de tensão K_I e K_{II} está indicada nas Figuras 4.28 e 4.29, respectivamente. Nota-se que ambos têm comportamentos de convergência similares ao da energia de deformação. O tempo de processamento obtido para cada energia de deformação pode ser visto na Figura 4.30.

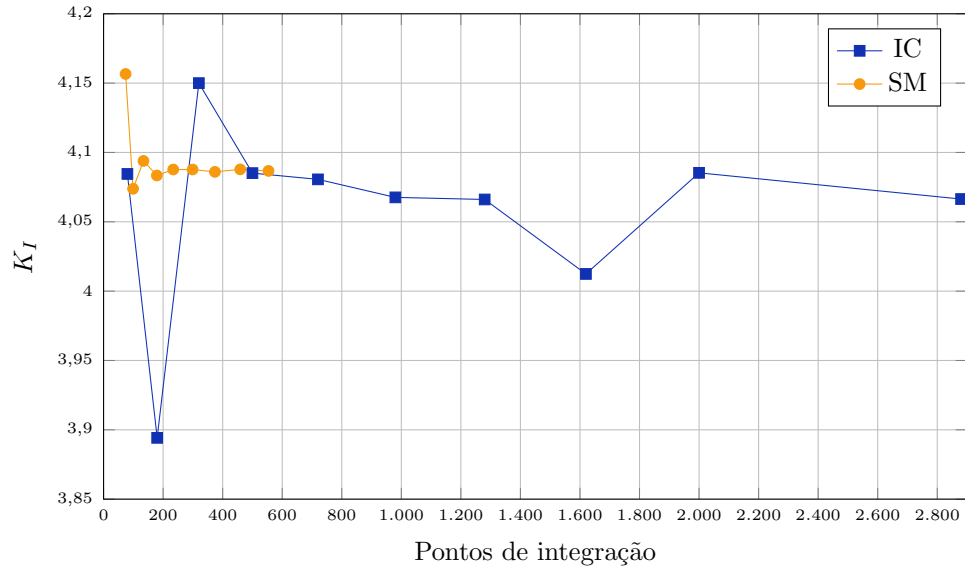


Figura 4.28: Fator de intensidade de tensão K_I para chapa com trinca $a = 5,0$.

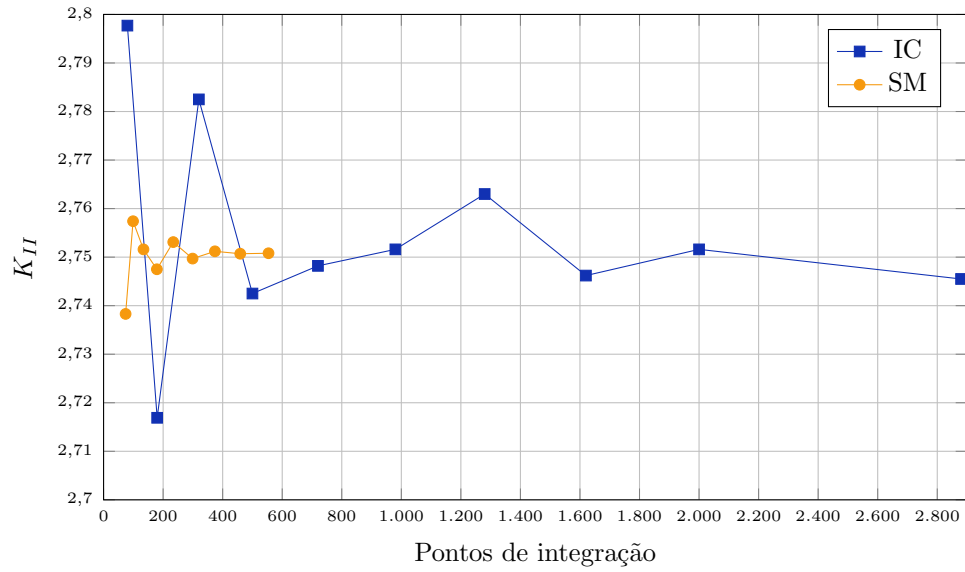


Figura 4.29: Fator de intensidade de tensão K_{II} para chapa com trinca $a = 5,0$.

A relação entre os dados obtidos para a utilização da integração convencional e da estratégia implementada consta nas Tabelas [4.13](#) e [4.14](#), respectivamente. O número de pontos de integração mencionado equivale à soma dos mesmos em todos os elementos que contêm a trinca.

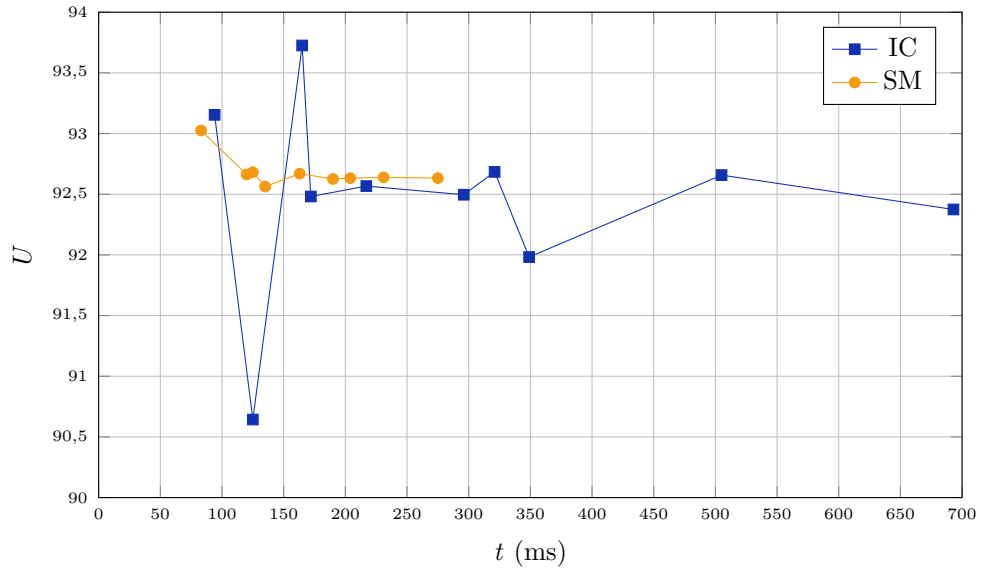


Figura 4.30: Tempo de processamento t para chapa com trinca $a = 5, 0$.

Tabela 4.13: Resultados de U , K_I , K_{II} e tempo de processamento t para integração convencional e $a = 5, 0$.

Pontos	U	t (ms)	K_I	K_{II}
80	93,1544	62	4,2694	2,8266
180	90,6432	94	4,0845	2,7977
320	93,7258	125	3,8942	2,7169
500	92,4812	165	4,1500	2,7825
720	92,5670	172	4,0851	2,7425
980	92,4959	217	4,0806	2,7482
1280	92,6842	296	4,0676	2,7516
1620	91,9822	321	4,0661	2,7630
2000	92,6575	349	4,0124	2,7462
2880	92,3745	505	4,0853	2,7516

Tabela 4.14: Resultados de U , K_I , K_{II} e tempo de processamento t para estratégia implementada e $a = 5, 0$.

Pontos Gauss	U	t (ms)	K_I	K_{II}
74	93,0257	78	4,1566	2,7383
99	92,6624	83	4,0738	2,7574
134	92,6813	120	4,0939	2,7516
179	92,5630	125	4,0834	2,7475
234	92,6695	135	4,0877	2,7531
299	92,6256	163	4,0877	2,7497
374	92,6324	190	4,0860	2,7512
459	92,6390	204	4,0878	2,7507
554	92,6329	231	4,0867	2,7508

De maneira análoga aos dois últimos exemplos, a referência de quantidade de pontos de integração das seções 4.2.1 e 4.2.2 foi considerada para apresentação dos dados da Tabela 4.15. Com a utilização da subdivisão de elementos e mapeamento dos pontos de integração, para valores próximos de energia diminuiu-se a quantidade de pontos em 66% e o tempo de processamento em 47%.

Tabela 4.15: Comparação das estratégias de integração para trinca $a = 5, 0$.

Tipo de integração	Pontos	U	t (ms)
IC	1 384	92,4195	306
SM	466	92,6695	163

4.2.6 Chapa com trinca com mudança de direção

Por último, adotou-se um modelo de trinca com uma quina inicial, ou seja, mudança de direção dentro do elemento. Com o intuito de validar o processo de

integração numérica implementado, foi analisado o exemplo com disposição da trinca indicada na Figura 4.31. Empregou-se estado plano de tensão para o problema e carregamento aplicado de $f_x = 0$ e $f_y = 1, 0$, levando em conta os Modos I e II de abertura.

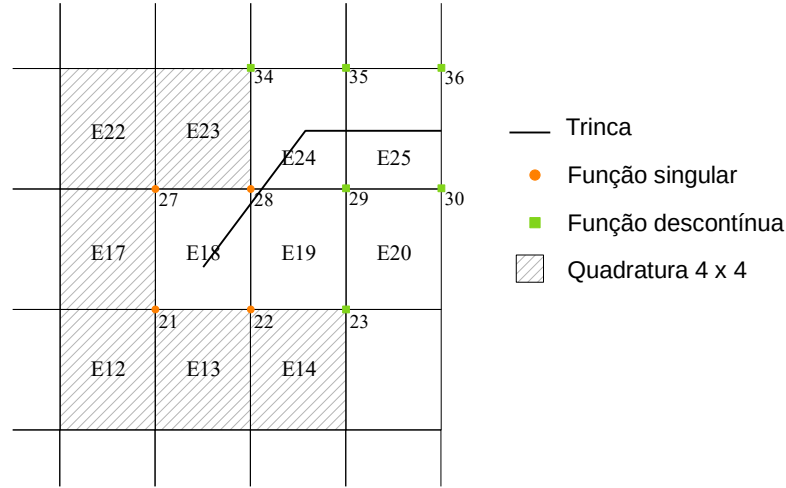


Figura 4.31: Disposição da trinca com quina na malha adotada.

A subdivisão realizada no elemento E24 segue o padrão representado na Figura 3.11b. A variação do número de pontos de integração foi realizada apenas nesse elemento; nos demais, essa quantidade foi fixada conforme as referências obtidas nos exemplos anteriores.

A correspondência entre a energia de deformação e a quantidade de pontos de integração no elemento E24 é indicada na Figura 4.32, enquanto o comportamento dos fatores de intensidade de tensão podem ser observados nas Figuras 4.33 e 4.34. O tempo de processamento obtido para cada quadratura empregada é ilustrado na Figura 4.35.

Observa-se o melhor comportamento da série *SM* em termos de convergência, ao passo que a série *IC* apresenta divergência quando a quadratura de Gauss é elevada. Este comportamento da estratégia convencional de integração deve-se, provavelmente, à posição relativa entre os pontos de Gauss e a trinca, que com seu

aumento passam a coincidir (ou quase) com a posição da trinca. No caso da subdivisão em triângulos, tal cenário é evitado. Diferentemente do exemplo da seção [4.2.2](#) a estratégia de subdivisão apresenta resultados ótimos não com 3, mas sim 6 pontos por célula. Explica-se, esse fato, pela presença de um nó (vértice inferior esquerdo do elemento E24) com enriquecimento de trinca, o que impede que 3 pontos por célula triangular proporcione uma integração exata.

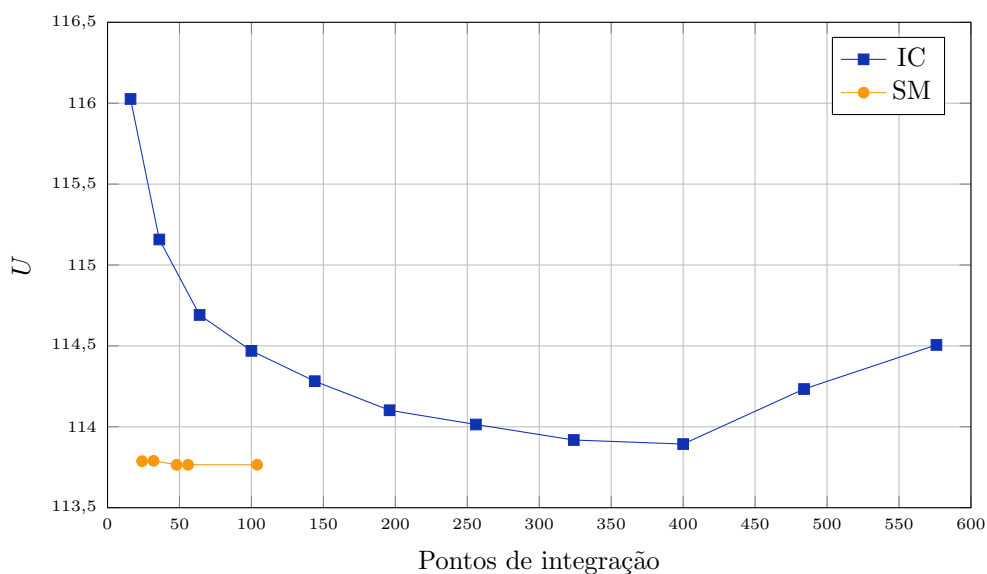


Figura 4.32: Energia de deformação U para chapa com trinca e quina inicial.

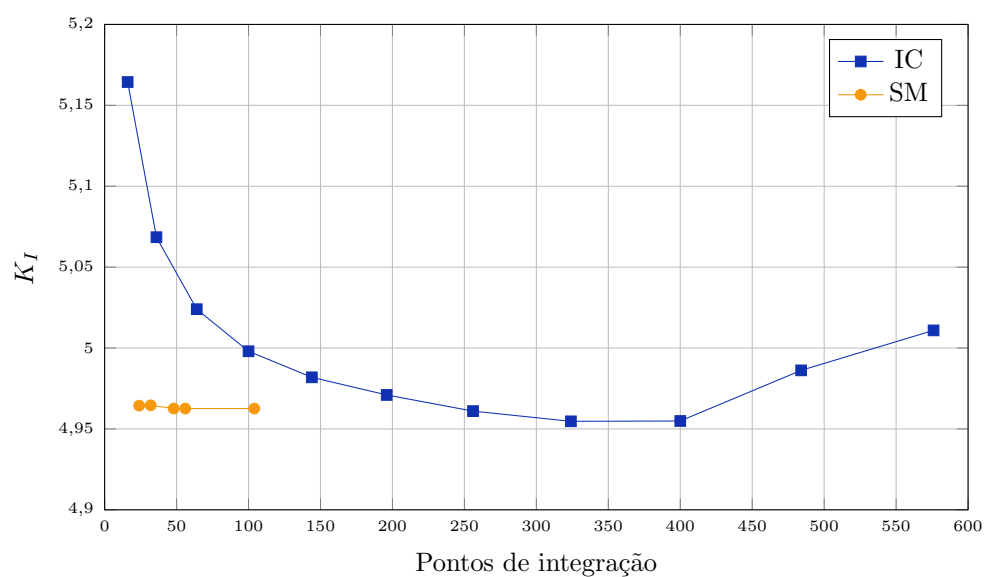


Figura 4.33: Fator de intensidade de tensão K_I para chapa com trinca e quina inicial.

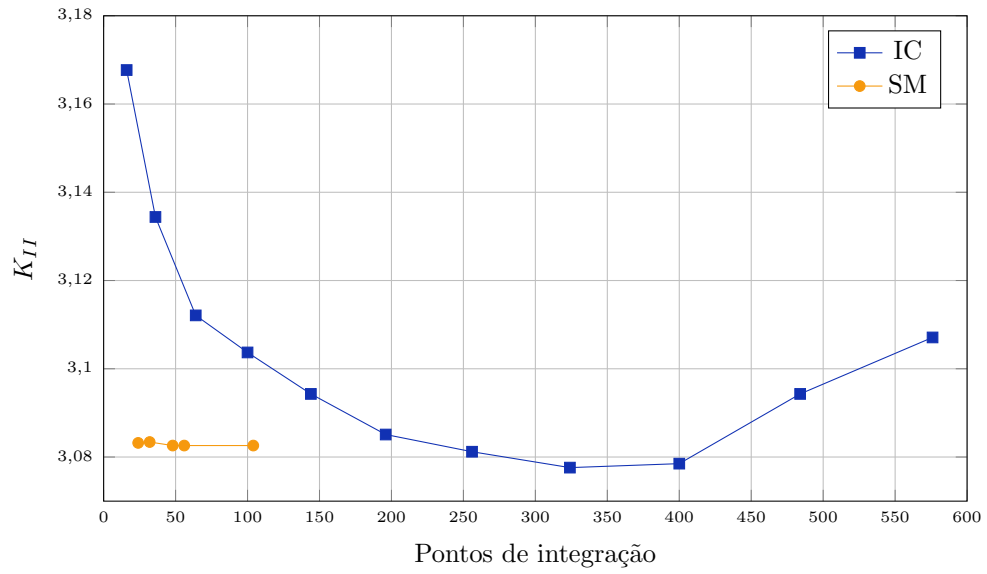


Figura 4.34: Fator de intensidade de tensão K_{II} para chapa com trinca e quina inicial.

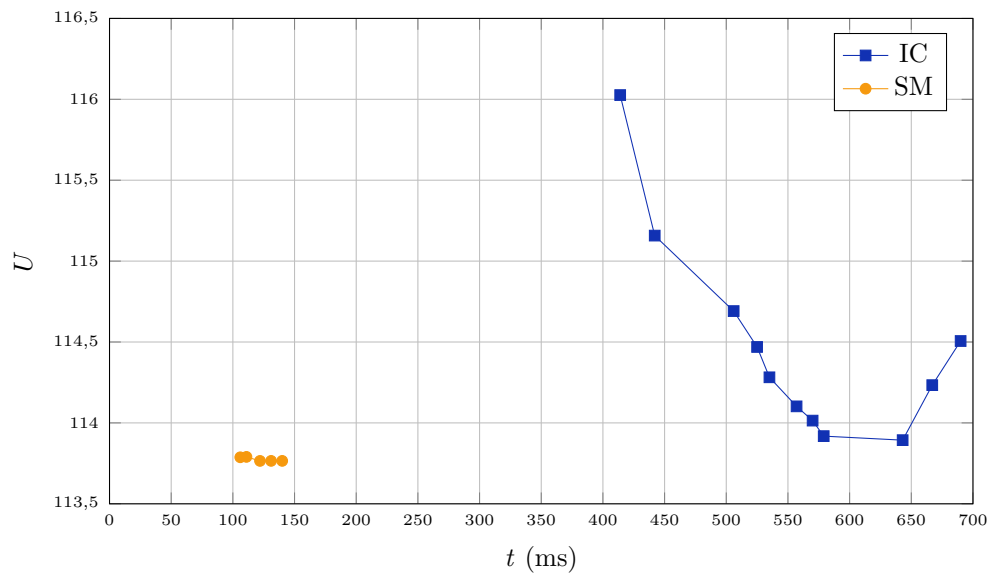


Figura 4.35: Tempo de processamento t para chapa com trinca e quina inicial.

Os resultados obtidos para essa análise estão listados nas Tabelas [4.16](#) e [4.17](#), correspondentes à aplicação da integração convencional e da estratégia implementada, respectivamente. Como não se observou uma convergência na energia de deformação com a utilização da quadratura de Gauss, não se considerou valores de referência

nesse exemplo a fim de comparar as vantagens da subdivisão de elementos. Destaca-se, assim, a importância destas estratégias em detrimento àquelas.

Tabela 4.16: Resultados de U , K_I , K_{II} e tempo de processamento t para chapa com trinca e quina inicial e integração convencional.

Pontos	U	t (ms)	K_I	K_{II}
16	116,0262	414	5,1644	3,1677
36	115,1577	442	5,0685	3,1344
64	114,6912	506	5,0240	3,1121
100	114,4694	525	4,9980	3,1037
144	114,2819	535	4,9819	3,0943
196	114,1023	557	4,9710	3,0851
256	114,0142	570	4,9610	3,0812
324	113,9183	579	4,9547	3,0776
400	113,8934	643	4,9549	3,0785
576	114,5061	690	5,0109	3,1071

Tabela 4.17: Resultados de U , K_I , K_{II} e tempo de processamento t para chapa com trinca e quina inicial e estratégia implementada.

Pontos	U	t (ms)	K_I	K_{II}
24	113,7875	106	4,9644	3,0832
32	113,7900	111	4,9646	3,0834
48	113,7651	122	4,9626	3,0826
56	113,7653	131	4,9626	3,0826
104	113,7653	140	4,9626	3,0826

4.3 Influência da Distorção do Elemento

Após análises do comportamento da integração numérica nos exemplos de trinca estática com malha regular, buscou-se estudar o efeito das técnicas implementadas em elementos distorcidos. Para isso, são citados aqui duas situações: na primeira, a trinca apresenta a mesma dimensão proposta na seção 4.2.1, com o mesmo enriquecimento com funções singulares (Equações 2.6 e 2.7). Já na segunda é considerada a trinca modelada na seção 4.2.2, observando o comportamento isolado da integração numérica no emprego de funções de Heaviside (Equação 2.5).

Para ambos os casos a distorção do elemento foi alternada entre três padrões, aumentando gradativamente o nível de distorção. A geometria da malha e dados do material permaneceram os mesmos dos exemplos de referência citados.

É importante mencionar que, nos gráficos apresentados, os resultados de energia de deformação e norma da matriz de rigidez quando aplicada a estratégia de subdivisão e mapeamento dos pontos de integração são relacionados a baixas quadraturas. Visto que, em cada célula triangular, o máximo de pontos de integração utilizados foram 13, limita-se a quantidade total de pontos no elemento a números bastante inferiores às quadraturas empregadas na integração convencional. Buscou-se na literatura outras quadraturas de pontos de integração para elementos triangulares (tanto em coordenadas paramétricas quanto em coordenadas de área) e não foram encontradas ordens superiores às aqui apresentadas. Resalta-se, assim, a impossibilidade de verificação de convergência ou não da série SM se fossem empregadas quadraturas elevadas.

4.3.1 Estratégia de Mapeamento dos Pontos de Integração

Neste exemplo a trinca tem dimensão de $a = 1,0$ e as distorções dos elementos são indicadas na Figura 4.36, onde as linhas pontilhadas delimitam a configuração não distorcida. Observa-se que, nos dois primeiros casos (distorções P e M), dois

lados do elemento ainda permanecem paralelos, o que não ocorre na última distorção G .

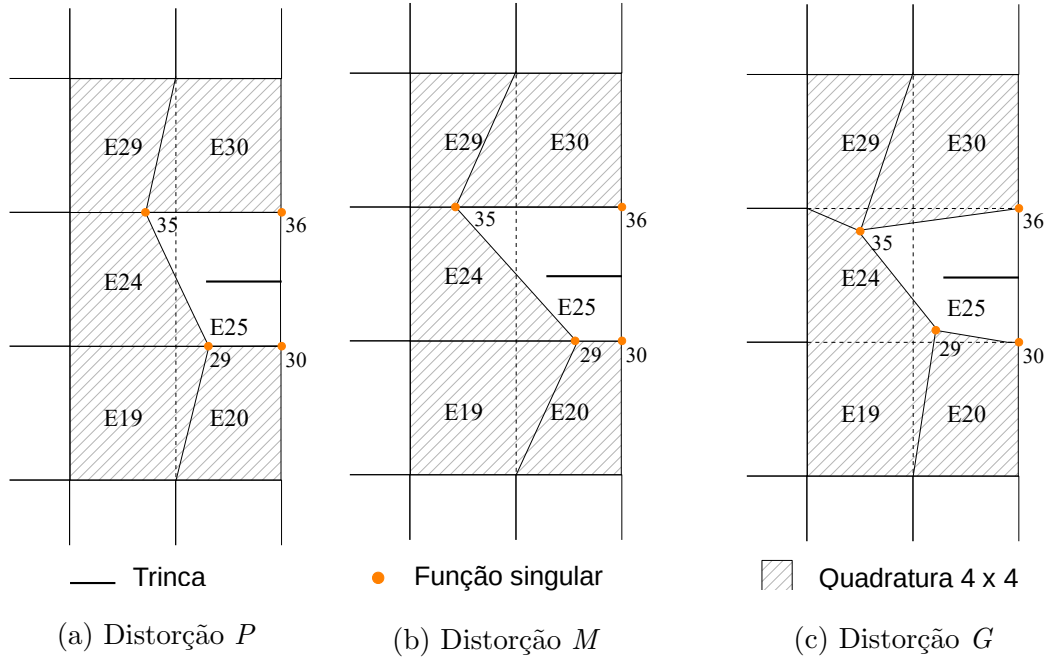


Figura 4.36: Distorções adotadas para elementos com enriquecimento singular.

Na Figura 4.37 são ilustradas as células triangulares geradas para cada distorção. As células hachuradas não contêm um nó na ponta da trinca, e portanto têm 6 pontos de integração convencionais. Nas demais células, os pontos de integração seguem a regra de quadratura de Gauss modificada e são variados de 2x2 a 10x10 pontos.

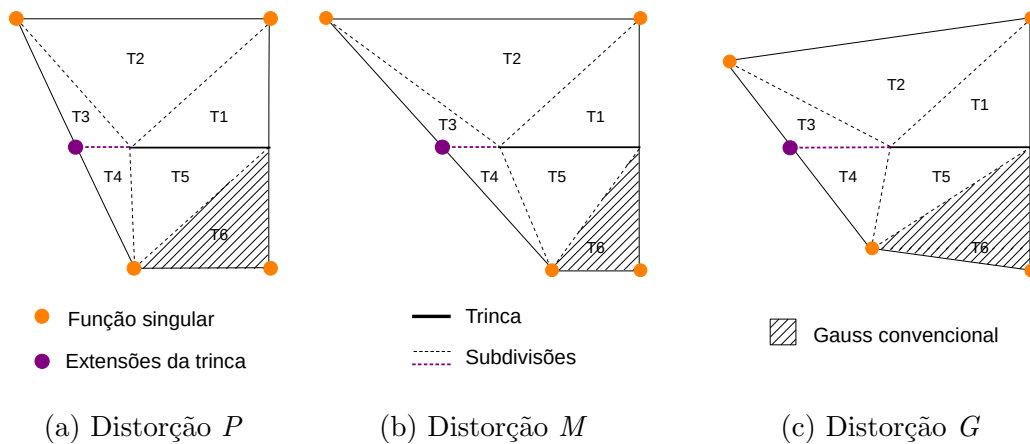


Figura 4.37: Células triangulares geradas para cada distorção.

Os parâmetros em análise foram a energia de deformação da chapa e a norma da matriz de rigidez do elemento E25, calculada conforme Equação 4.1. As Figuras 4.38, 4.39 e 4.40 indicam a variação de U com o aumento dos pontos de integração no elemento em questão.

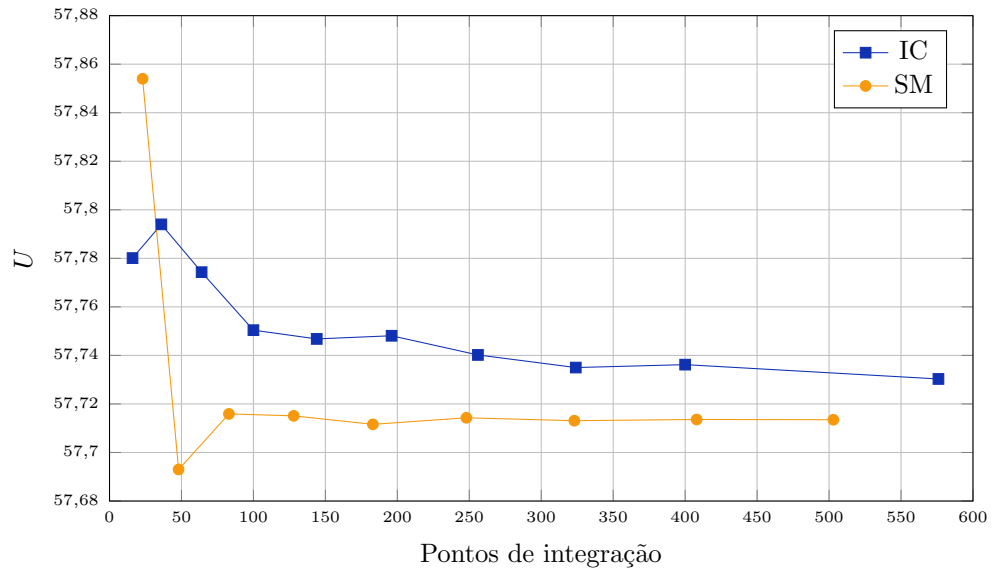


Figura 4.38: Energia de deformação U da chapa para distorção P .

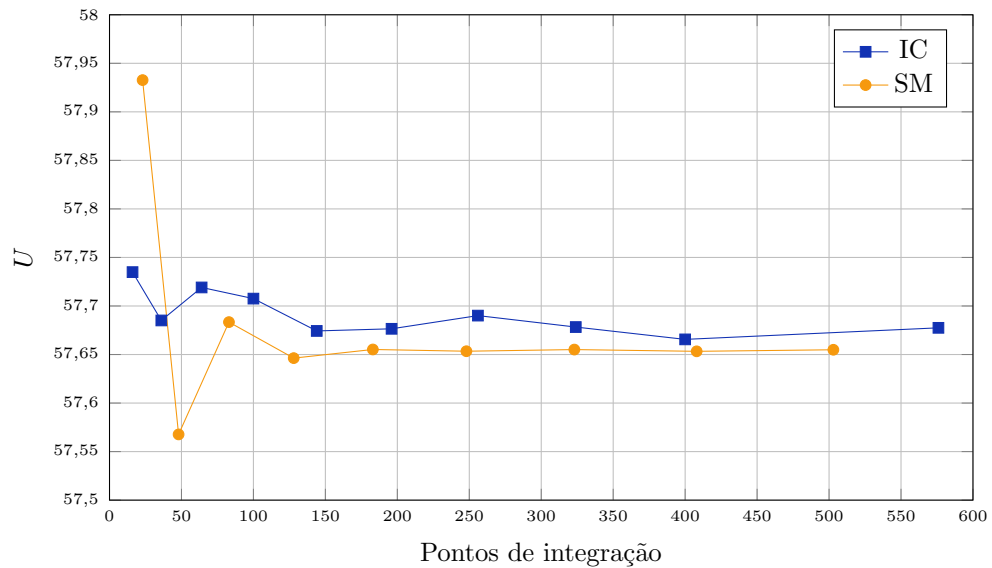


Figura 4.39: Energia de deformação U da chapa para distorção M .

Para as três distorções propostas a série SM apresentou resultados mais estáveis,

convergindo com 6x6 pontos de integração nas células (sendo, portanto, 186 pontos no elemento E25 da Figura 4.36). A integração pela quadratura de Gauss começa a se estabilizar para grandes quantidades de pontos de integração nas distorções P e M , porém mostra grande flutuação na distorção G .

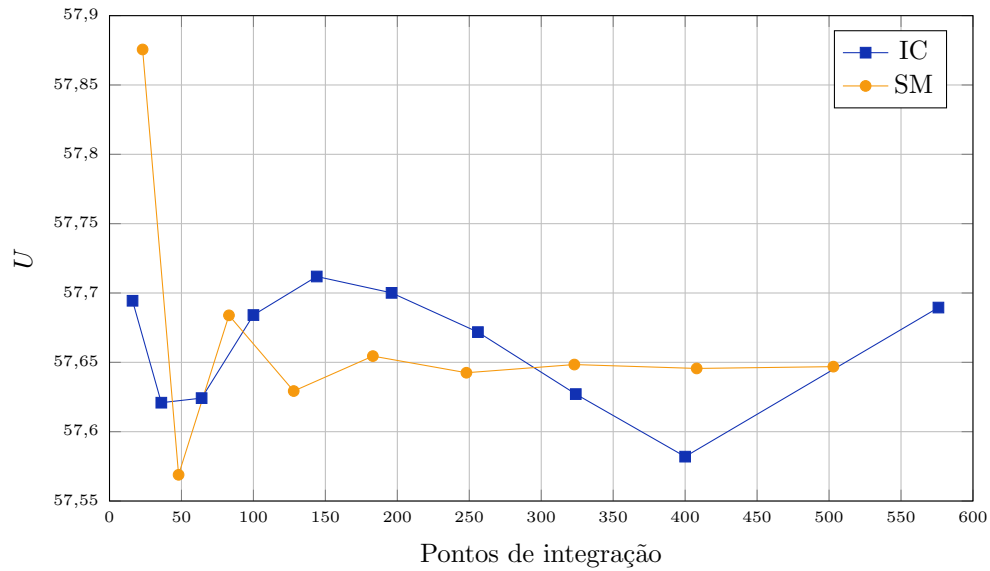


Figura 4.40: Energia de deformação U da chapa para distorção G .

A alteração da rigidez no elemento E25 conforme a distorção adotada e a quantidade de pontos de integração é observada nas Figuras 4.41, 4.42 e 4.43. Nota-se a variação significativa dos resultados da série IC , enquanto a série SM apresenta valores estáveis para as últimas três (distorção P) ou quatro (distorções M e G) simulações. Como o emprego de quadraturas ímpares acarreta maiores erros de integração devido ao posicionamento dos pontos nas proximidades da trinca, foram apresentados os resultados associados somente às quadraturas pares no que diz respeito à integração convencional.

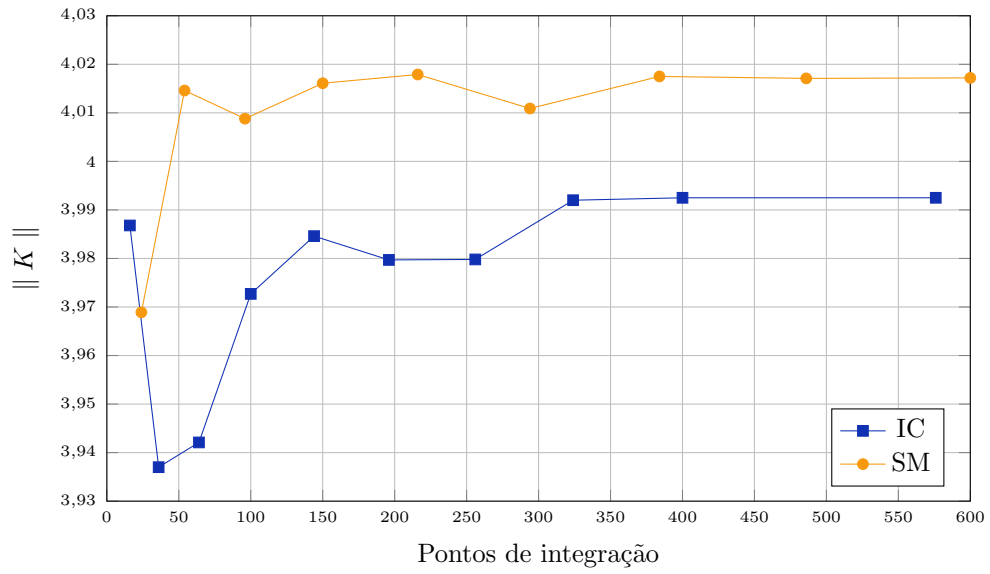


Figura 4.41: Norma da matriz de rigidez $\| K \|$ do elemento E25 para distorção P .

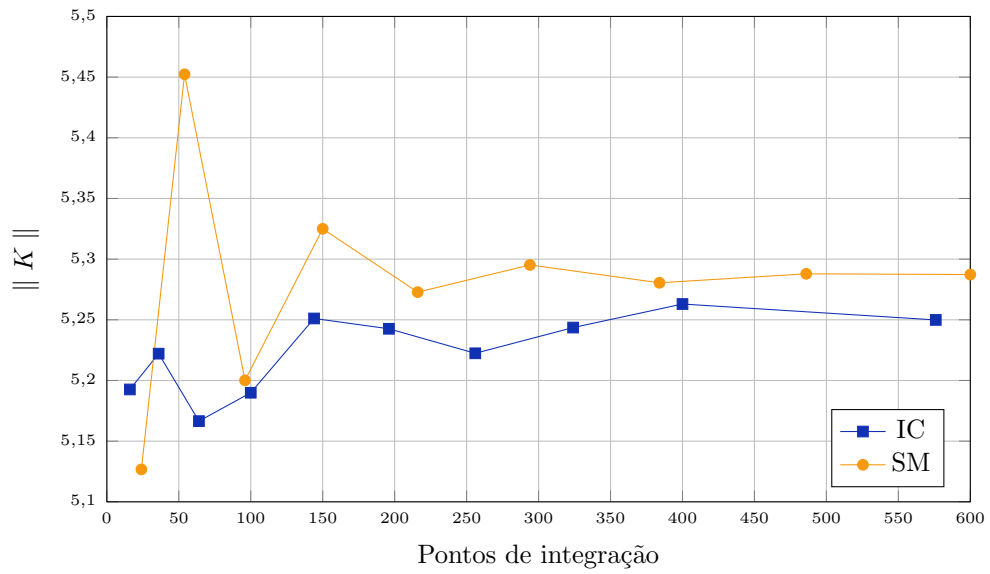


Figura 4.42: Norma da matriz de rigidez $\| K \|$ do elemento E25 para distorção M .

No contexto da utilização de enriquecimentos singulares, portanto, a implementação das estratégias de subdivisão e mapeamento dos pontos de integração é bastante vantajosa. Segundo os valores de energia de deformação e rigidez analisados, as séries SM convergem com quantidades menores de pontos de integração.

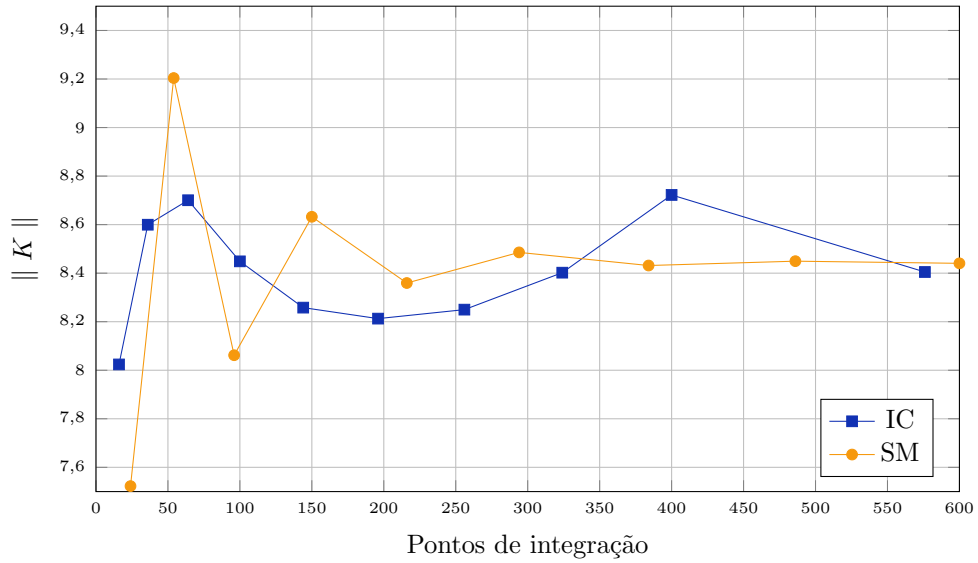


Figura 4.43: Norma da matriz de rigidez $\|K\|$ do elemento E25 para distorção G .

4.3.2 Estratégia de Subdivisão de Elementos

Utilizando a trinca com dimensão de $a = 2,8$ unidades de comprimento, procurou-se verificar o comportamento da estratégia implementada na existência apenas de enriquecimentos descontínuos em elementos distorcidos. À semelhança do exemplo anterior, as distorções adotadas P , M e G estão ilustradas na Figura 4.44.

A variação de U com o aumento do número de pontos de integração está indicada nas Figuras 4.45, 4.46 e 4.47. Para a distorção P , a estratégia de subdivisão converge para 6 pontos de integração por célula, enquanto na integração convencional não se tem o mesmo comportamento. Na distorção M a precisão garantida anteriormente para a série SM não é mais válida, e ambos os métodos de integração numérica apresentam pequenas instabilidades mesmo para grandes quantidades de pontos de integração. A distorção G apresenta variações ainda maiores para a energia de deformação nos dois conjuntos de resultados.

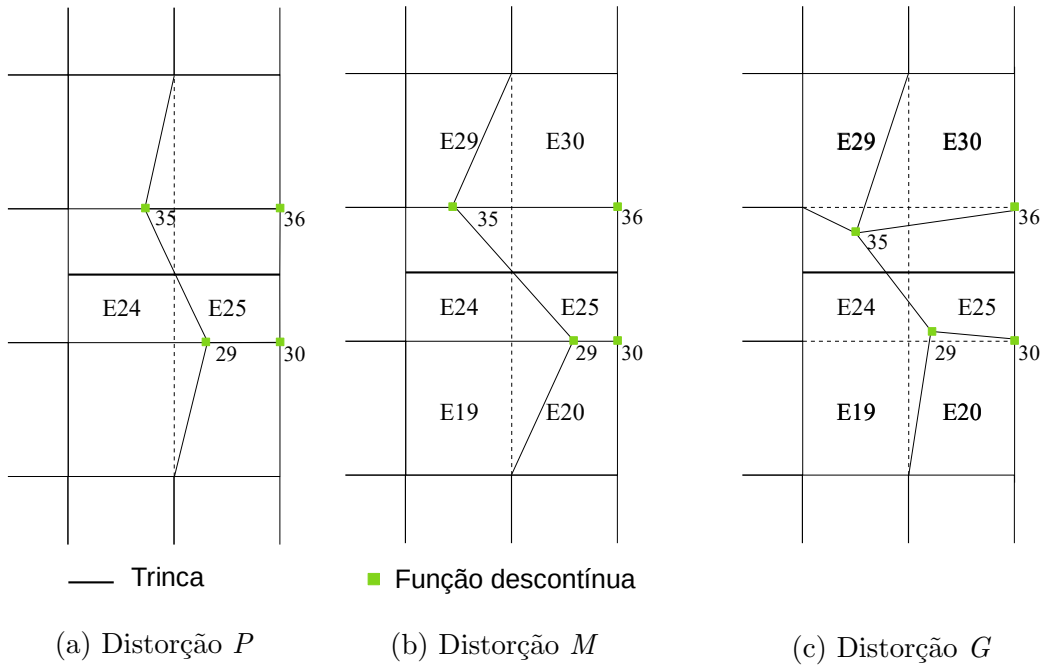


Figura 4.44: Distorções adotadas para elementos com enriquecimento descontínuo.

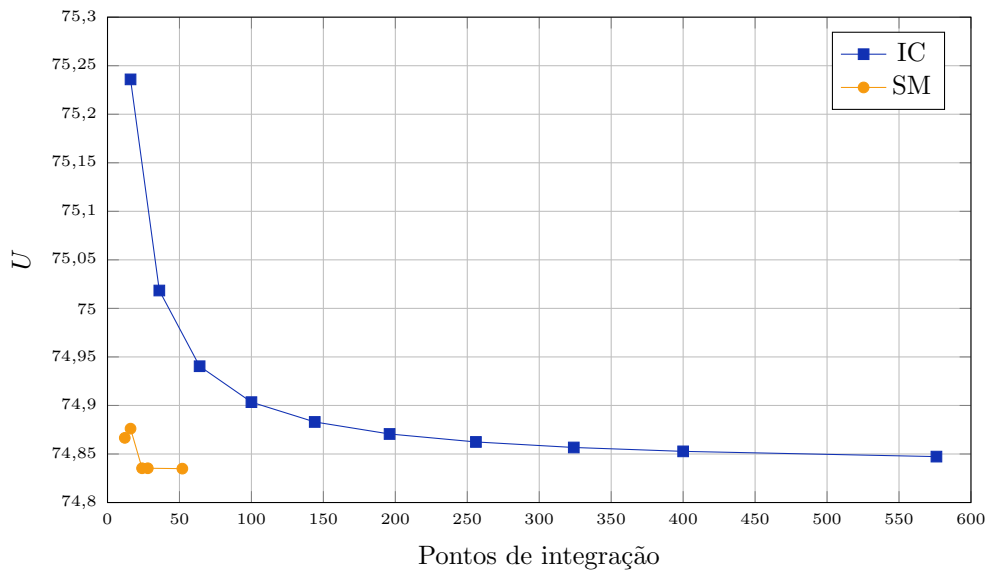


Figura 4.45: Energia de deformação U da chapa para distorção P .

Os resultados obtidos para a norma da matriz de rigidez do elemento E25 da Figura 4.44 estão nas Figuras 4.48, 4.49 e 4.50. Para a distorção P , a série SM estabiliza-se com 6 pontos de integração por célula, enquanto a série IC alcança essa precisão apenas com a quadratura 24×24 ($\|K_e\| = 2,9210$). Já para a distorção

M os resultados são mais estáveis com a integração convencional, e na distorção G ambos métodos de integração apresentam flutuação nos valores associados à rigidez.

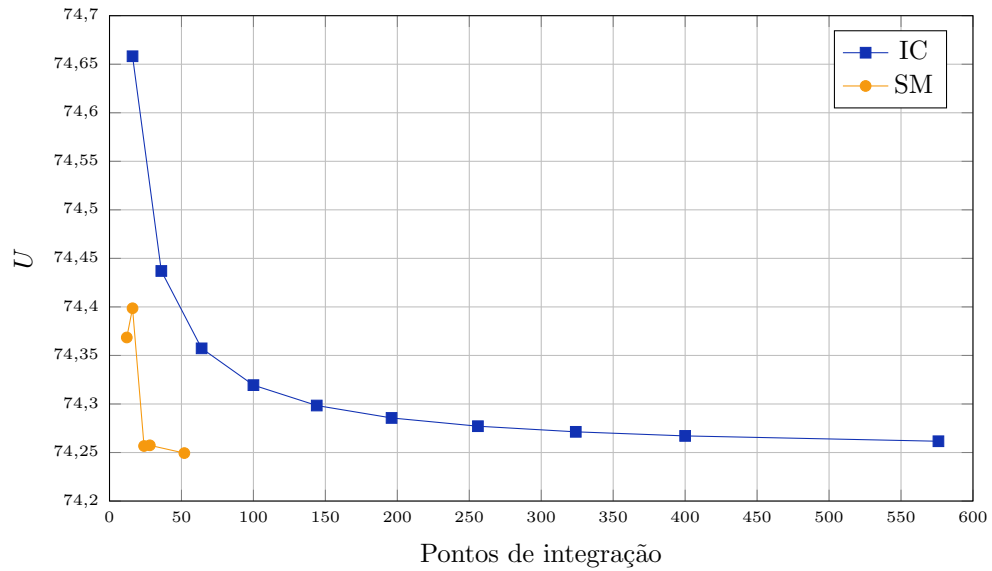


Figura 4.46: Energia de deformação U da chapa para distorção M .

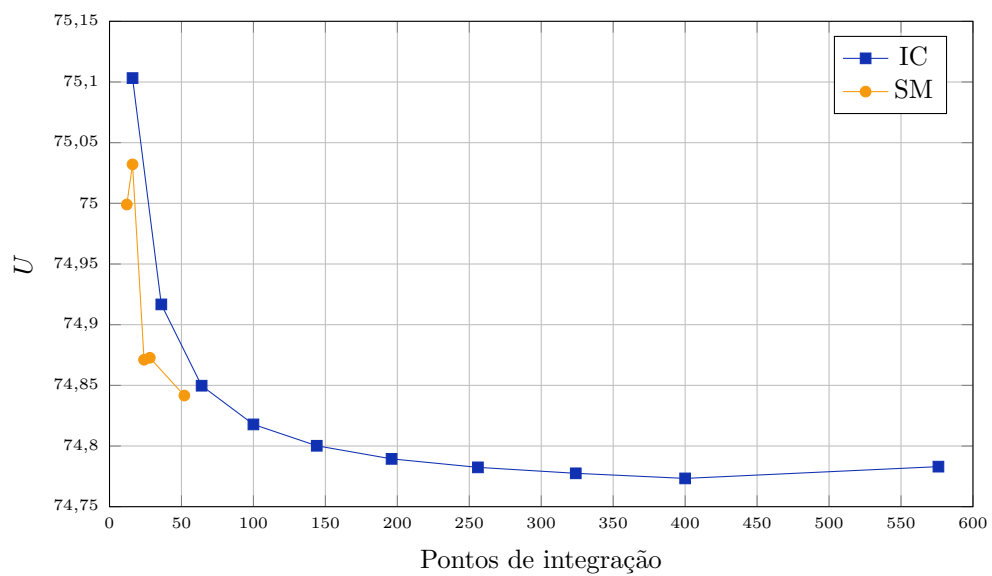


Figura 4.47: Energia de deformação U da chapa para distorção G .

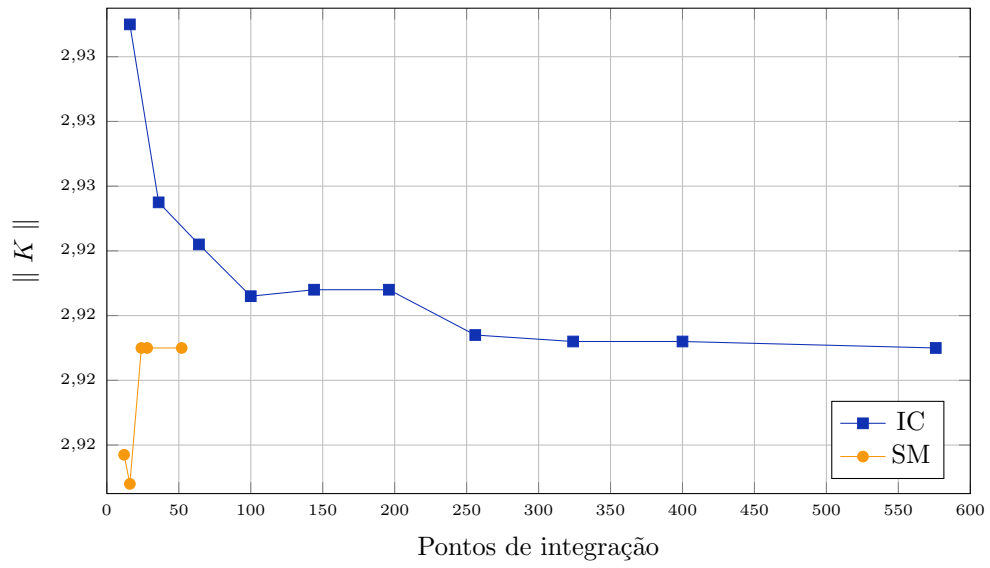


Figura 4.48: Norma da matriz de rigidez $\|K\|$ do elemento E25 para distorção P .

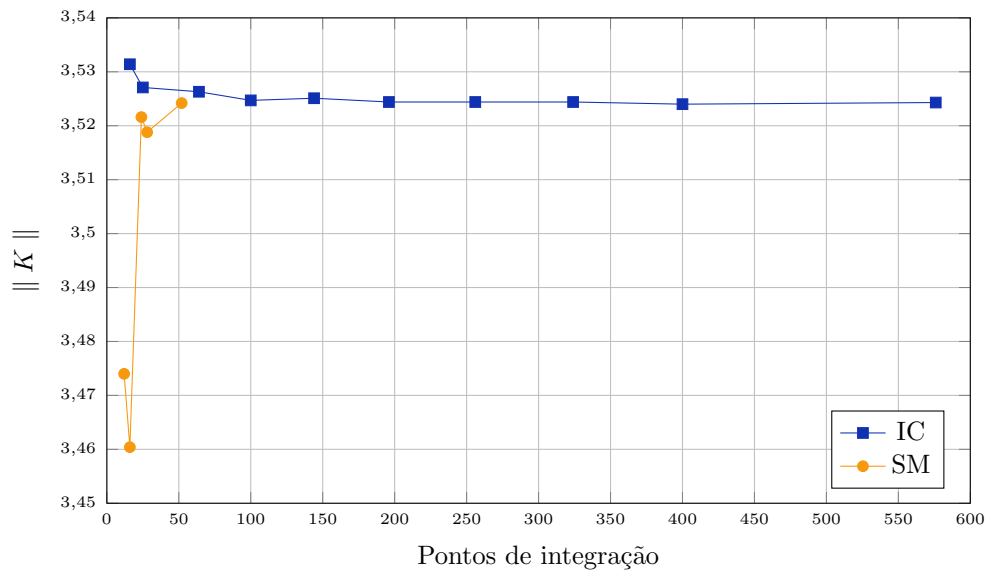


Figura 4.49: Norma da matriz de rigidez $\|K\|$ do elemento E25 para distorção M .

Após observação do comportamento de U e da rigidez para as distorções simuladas, conclui-se que a distorção de elementos enriquecidos com funções descontínuas gera erros relevantes na análise tanto considerando a integração convencional quanto a estratégia implementada.

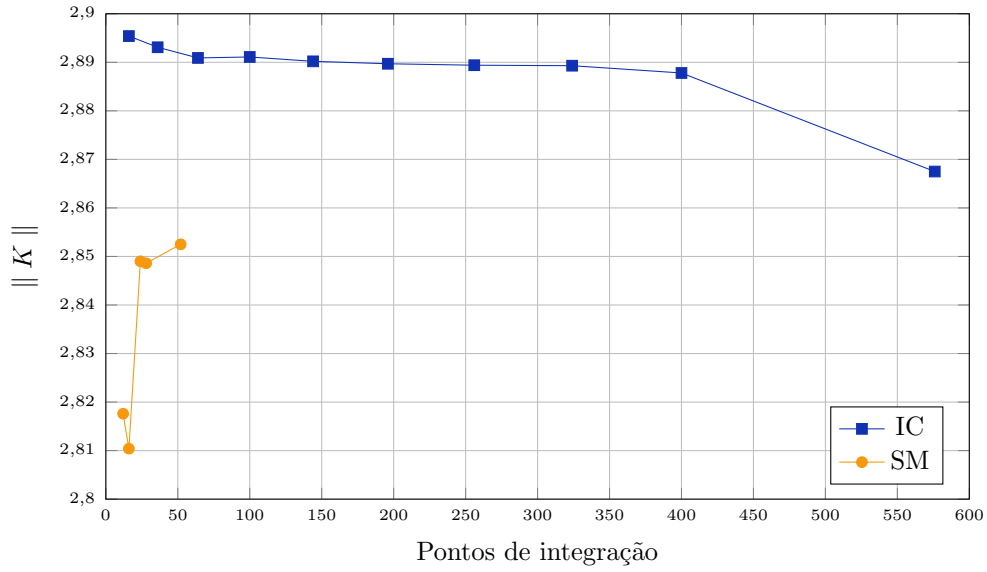


Figura 4.50: Norma da matriz de rigidez $\|K\|$ do elemento E25 para distorção G .

A distorção angular dos elementos faz o Jacobiano variar com a posição no domínio e as funções integradas deixam de ser polinomiais. Na Seção 4.3.1, o mesmo comportamento para o Jacobiano é observado, em se tratando da mesma malha, porém a parcela mais relevante do erro na integração numérica devia-se à presença das funções de enriquecimento com duas derivadas singulares. Naquele caso, a estratégia de subdivisão em triângulos com mapeamento mostrou-se mais eficaz do que a integração convencional com a quadratura de Gauss. O mesmo não ocorre nesta seção, com funções de enriquecimento de Heaviside, em que o maior erro está de fato associado à representação da função do Jacobiano, algo que ambas as estratégias não são tão eficazes na integração.

4.4 Modelo com Propagação e Estratégia Global-Local

Para validar a implementação realizada em modelos com propagação da trinca associados à metodologia global-local, foi escolhido o exemplo de uma chapa com

trinca centrada inclinada. Proposto inicialmente por [Moës et al. \(1999\)](#), a geometria do problema pode ser vista na Figura [4.51](#).

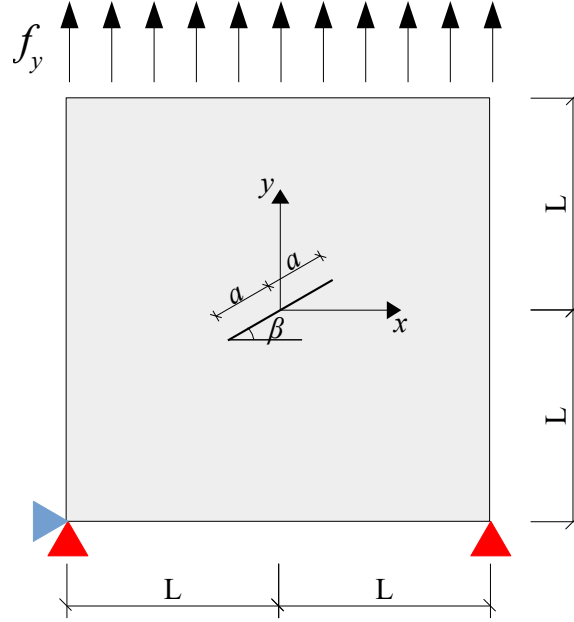


Figura 4.51: Chapa com trinca centrada.

Foi considerado estado plano de tensão, $L = 5,0$, $a = 0,5$, $f_y = 1,0$, $\beta = 30^\circ$, $E = 3 \times 10^7$ e $\nu = 0,3$, em unidades consistentes. Conforme adotado por [Fonseca \(2019\)](#), a malha global contém 81 elementos quadrilaterais de 4 nós de dimensões $1,111 \times 1,111$.

Conforme mencionado na Seção [2.1.4](#), a trinca é descrita no modelo local através das funções de enriquecimento de Heaviside (Equação [2.5](#)) e de ponta de trinca (Equações [2.6](#) a [2.9](#)). Sendo assim, são nos elementos do problema local que as estratégias de integração são alteradas para avaliação e utilizadas tanto na solução do problema local como na solução do problema global enriquecido, uma vez que a integração dos elementos com o enriquecimento local é realizada na escala global.

A malha local é construída a cada passo da propagação, dividindo o lado dos elementos globais em três partes. A Figura [4.52](#) indica a malha local gerada para o primeiro passo de propagação, com elementos de dimensões $0,370 \times 0,370$.

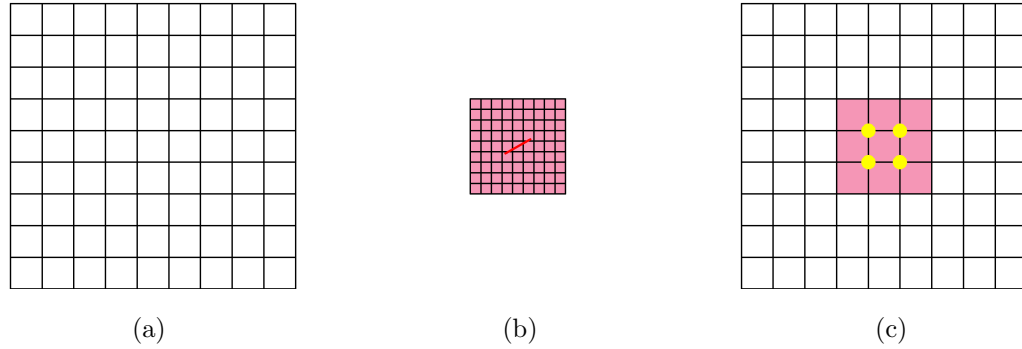


Figura 4.52: Malhas para o primeiro passo de propagação: (a) malha global inicial, (b) malha local gerada, (c) malha global com nós enriquecidos com a solução local em amarelo (Fonseca, 2019).

Foram considerados 10 passos de propagação e incremento de trinca de 0,370 nas duas pontas iniciais. A Figura 4.53 ilustra o trajeto da trinca ao longo da propagação para o emprego da integração convencional e das estratégias de subdivisão e mapeamento. Observa-se diferenças mínimas entre o resultado dos dois procedimentos. O exemplo também foi simulado com o MEFGE e não houve alterações na trajetória representada.

Seguindo os resultados obtidos nas análises das Seções 4.2.1 e 4.2.2, ao se utilizar a integração convencional, foram adotados 12×12 pontos de Gauss em elementos totalmente atravessados pela trinca e 24×24 pontos de Gauss em elementos que contêm a ponta da trinca. No emprego da estratégia implementada, foram adotados 3 pontos de Gauss convencionais por célula para elementos totalmente atravessados pela trinca e, em elementos contendo a ponta da trinca, adotou-se 6×6 pontos de Gauss modificados nas células que contêm um nó na ponta da trinca e, nas demais, adotou-se 6 pontos de Gauss convencionais. Ainda de acordo com análises anteriores, desta vez da Seção 4.2.6, os elementos contendo quinas em seu domínio foram integrados com 12×12 pontos de integração convencionais (série *IC*) ou 6 pontos de integração convencionais por célula (série *SM*).

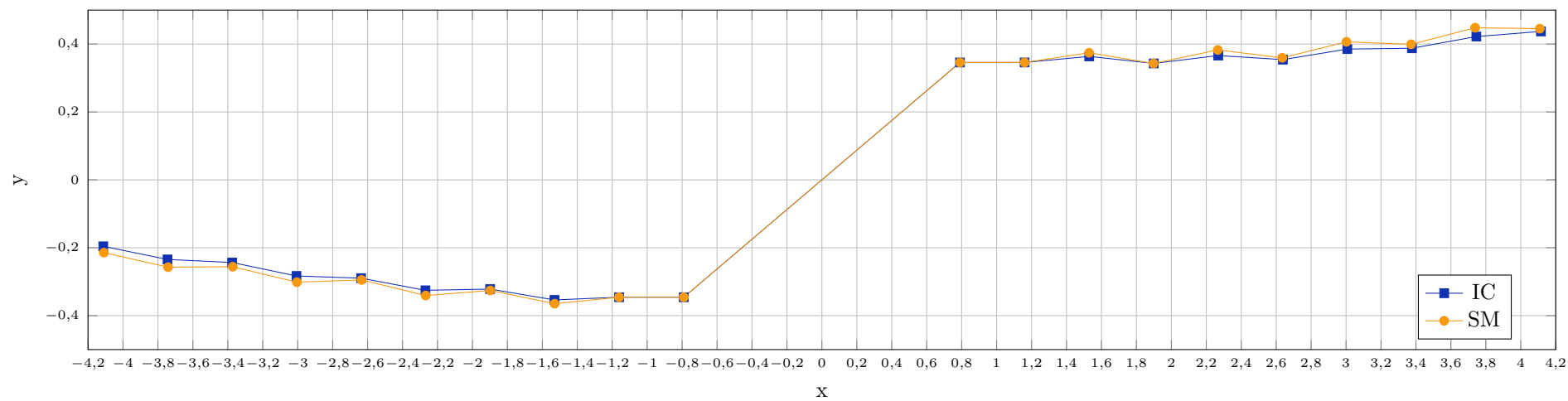


Figura 4.53: Trajetória da trinca para os 10 passos de propagação.

A cada passo da propagação são executados ciclos global-local entre o problema local e o problema global enriquecido, buscando melhorar a qualidade da solução global a ser imposta como condições de contorno no modelo local (Fonseca, 2019). A quantidade de ciclos realizada é associada à convergência relativa dos fatores de intensidade de tensão, calculados no modelo local, dependendo dos modos de abertura considerados, segundo a implementação de Fonseca (2019). No presente exemplo, o critério de convergência adotado é avaliado para os parâmetros K_I e K_{II} , e descrito por:

$$\frac{K_{I\ ou\ II}^i - K_{I\ ou\ II}^{i-1}}{K_{I\ ou\ II}^i} < 0,01, \quad (4.7)$$

onde i indica o número do ciclo corrente.

A Tabela 4.18 reúne informações da quantidade de pontos de integração nos elementos que contêm a trinca e o tempo de cada ciclo durante o processo de propagação, assim como o tempo acumulado da análise. Este último também pode ser visto na Figura 4.54, evidenciando o tempo total inferior quando se considera a implementação realizada das estratégias de integração numérica. A diferença na quantidade de pontos de integração aumenta com o avanço da propagação, quando mais elementos são atravessados pela trinca.

A Figura 4.55 mostra a quantidade de ciclos global-local para cada passo de propagação. Observa-se que a análise pela estratégia implementada resultou ou no mesmo número ou em menos ciclos quando comparada à integração convencional.

Tabela 4.18: Dados coletados a cada passo de propagação para as séries *IC* e *SM*.

Passo	Pontos		Tempo Ciclo (s)		Tempo Acumulado (s)	
	IC	SM	IC	SM	IC	SM
1	1584	408	1004	81	1004	81
2	1872	564	1073	177	2078	258
3	2160	660	1411	174	3488	432
4	2448	756	1189	208	4678	640
5	2736	852	2410	508	7087	1147
6	3024	948	1745	397	8833	1545
7	3312	1044	2578	696	11411	2241
8	3600	1140	1711	850	13122	3091
9	3888	1236	3444	1686	16566	4777
10	4176	1332	2398	1139	18964	5915

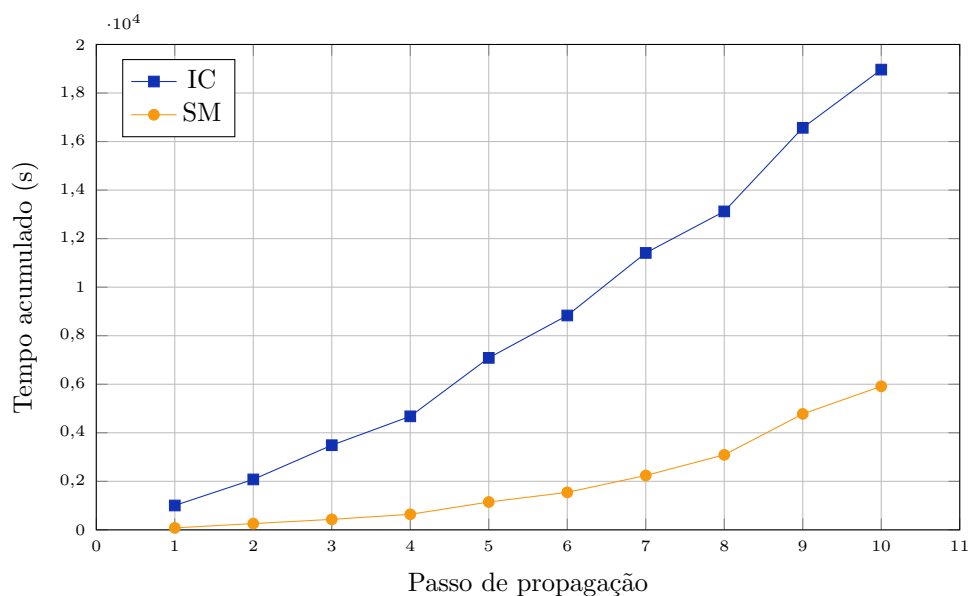


Figura 4.54: Tempo acumulado dos ciclos para os 10 passos de propagação.

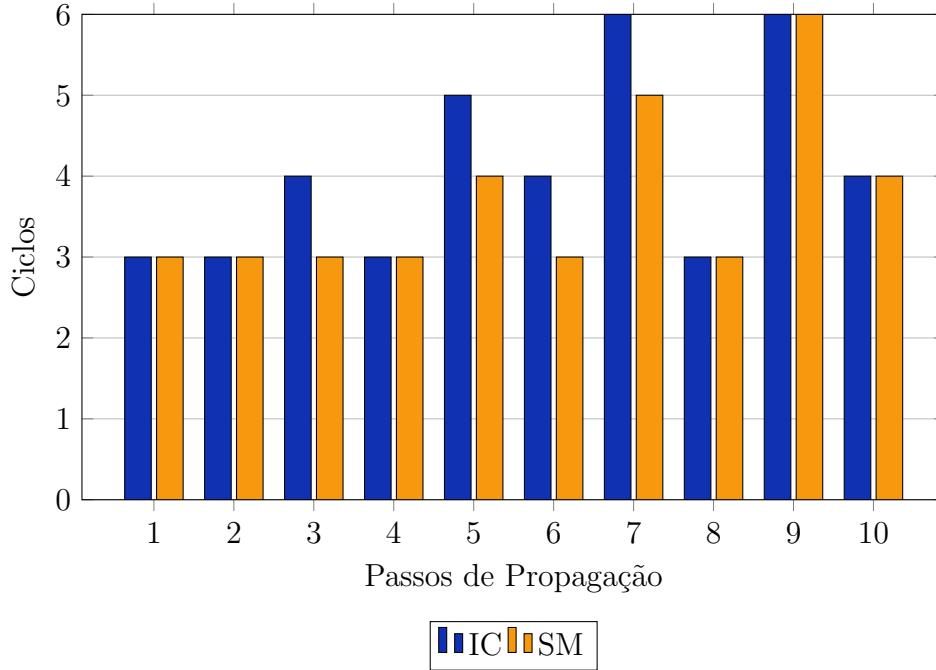


Figura 4.55: Quantidade de ciclos por passo de propagação.

Uma alternativa ao critério de convergência dos fatores de intensidade de tensão em cada ciclo global-local consiste em considerar a energia de deformação do problema global enriquecido para tal verificação. Por ser um parâmetro calculado no modelo global (problema principal a ser resolvido), é coerente utilizá-lo como argumento determinante da quantidade de ciclos executados, desde que a precisão das grandezas K_I e K_{II} não seja prejudicada. A convergência pela energia de deformação é calculada da seguinte forma:

$$\frac{U_{gl}^i - U_{gl}^{i-1}}{U_{gl}^i} < 0,01, \quad (4.8)$$

onde i indica o número do ciclo corrente e U_{gl} refere-se à energia do problema global enriquecido.

O critério de convergência é verificado no problema global, logo após o enriquecimento com os resultados numéricos do problema local. Para esse novo critério, foram necessários apenas 2 ciclos por passo de propagação para as duas estratégias em análise.

As Tabelas 4.19 e 4.20 comparam os resultados obtidos no primeiro passo de propagação para as duas integrações numéricas aplicadas. Nota-se que os valores obtidos após o segundo ciclo considerando a convergência por U_{global} são muito próximos àqueles obtidos no último ciclo (para o passo 1 foram executados 3 ciclos) para convergência por K_I e K_{II} . Assim, obtém-se bons resultados para quantidades menores de ciclos e consequente menor tempo de processamento.

Tabela 4.19: Passo 1 de propagação: resultados para diferentes parâmetros de convergência e integração convencional.

Parâmetros	Convergência por U_{global}		Convergência por K_I e K_{II}
	Ciclo 1	Ciclo 2	Último ciclo
U_{global}	50,5983	50,6002	50,6001
K_I	0,8306	0,9474	0,9492
K_{II}	0,5064	0,5479	0,5464
Erro K_I (%)	11,63	0,79	0,98
Erro K_{II} (%)	6,69	0,95	0,68

Tabela 4.20: Passo 1 de propagação: resultados para diferentes parâmetros de convergência e estratégia implementada.

Parâmetros	Convergência por U_{global}		Convergência por K_I e K_{II}
	Ciclo 1	Ciclo 2	Último ciclo
U_{global}	50,5940	50,5958	50,5958
K_I	0,8310	0,9463	0,9480
K_{II}	0,5062	0,5480	0,5465
Erro K_I (%)	11,60	0,67	0,85
Erro K_{II} (%)	6,73	0,98	0,70

A Figura 4.56 traz o tempo de processamento acumulado ao longo dos 10 passos

de propagação, comparando-o com aqueles relacionados na Figura 4.54. Observe a discrepância entre os tempos obtidos e, conforme mencionado, mantendo-se cálculos aceitáveis em termos de precisão para os parâmetros envolvidos.

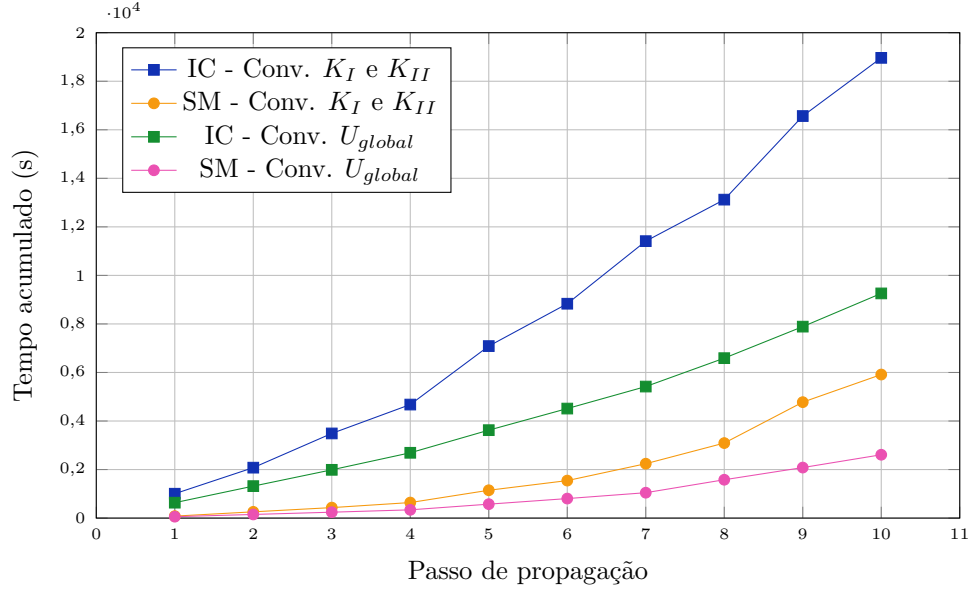


Figura 4.56: Tempo acumulado dos ciclos para os 10 passos de propagação considerando convergência dos ciclos por energia de deformação.

Independente do parâmetro de convergência adotado, a aplicação das estratégias de subdivisão e mapeamento conseguem resultados consistentes com menos pontos de integração e tempo acumulado reduzido, validando portanto sua implementação para situações de propagação em meio linear elástico via MEFG^{gl}.

4.5 Modelos com Propagação de Trinca Coesiva

Nesta seção são apresentados modelos com propagação de trinca coesiva, modelo este mencionado na Seção 2.1.2 e dito mais adequado para representação do comportamento de estruturas de concreto quando comparado à MFLE.

Como dito na Seção 3.2, as informações do modelo constitutivo são armazenadas nas degenerações de cada elemento. Para modelos de trinca coesiva, novas degenerações são adicionadas sob a trinca a fim de armazenar os parâmetros referentes

à coesão. Estes, considerados na lei coesiva e conforme implementação de Wolff (2010), são: resistência à tração, energia de fratura, rigidez inicial ao cisalhamento e rigidez à interpenetração das superfícies da fissura.

A propagação de trincas, mencionada na Seção 2.1.2, é analisada segundo certos condicionantes pré determinados. Em meios lineares elásticos, por exemplo, o critério de propagação já implementado no INSANE é a superação da resistência à tração do material pela tensão máxima principal. Para meios fisicamente não lineares, a implementação de Silva (2016) envolve a verificação da singularidade do tensor acústico. Nos dois casos, os parâmetros avaliados são acessados nas degenerações dos elementos.

Para a implementação já existente no sistema INSANE é importante destacar que, em modelos de trinca coesiva, se é verificado em determinado elemento um estado de tensões suficiente para nucleação ou propagação da trinca, a mesma atravessa todo o domínio em questão. Dessa forma, não são consideradas situações em que a ponta da trinca esteja situada dentro do elemento, estando sempre contida apenas em suas arestas. Essa limitação faz com que a estratégia de integração numérica adotada seja somente a de subdivisão de elementos.

No exemplo 4.5.1 é representada uma chapa sob tração direta considerando meio linear elástico. Ainda tendo em vista a linearidade do meio, o exemplo 4.5.2 mostra a simulação de uma viga em balanço. Já a seção 4.5.3 traz um caso de flexão em três pontos com modelo constitutivo de fissuras distribuídas. Por fim, a seção 4.5.4 mostra um painel em L também com modelo constitutivo de fissuras distribuídas, com seus respectivos resultados experimentais para comparação com o modelo numérico. Todos os casos foram apresentados por Silva (2016) com integração pela quadratura de Gauss convencional, e tais resultados foram tomados aqui para comparação com a nova estratégia implementada.

4.5.1 Análise em Meio Linear Elástico: Chapa sob tração direta

Neste exemplo buscou-se validar a implementação da estratégia de subdivisão de elementos na modelagem de trincas coesivas. Para a chapa indicada na Figura 4.57 foram adotados os seguintes parâmetros do material: módulo de elasticidade $E = 100 \text{ N/mm}^2$, coeficiente de Poisson $\nu = 0$, resistência à tração $f_t = 1,0 \text{ N/mm}^2$, energia de fratura $G_f = 0,02 \text{ N/mm}$ e rigidez inicial ao cisalhamento $d_{init} = 0 \text{ N/mm}^3$. Foram utilizados elementos quadrilaterais de quatro nós Q_4 em estado plano de tensão.

O problema foi resolvido pelo método de controle direto de deslocamentos, com incremento de $0,0005 \text{ mm}$ no deslocamento vertical D_y . A tolerância para convergência relativa (verificada através da magnitude do vetor de forças residuais) foi adotada como 1×10^{-3} e a carga de referência como $1,0 \text{ N/mm}$.

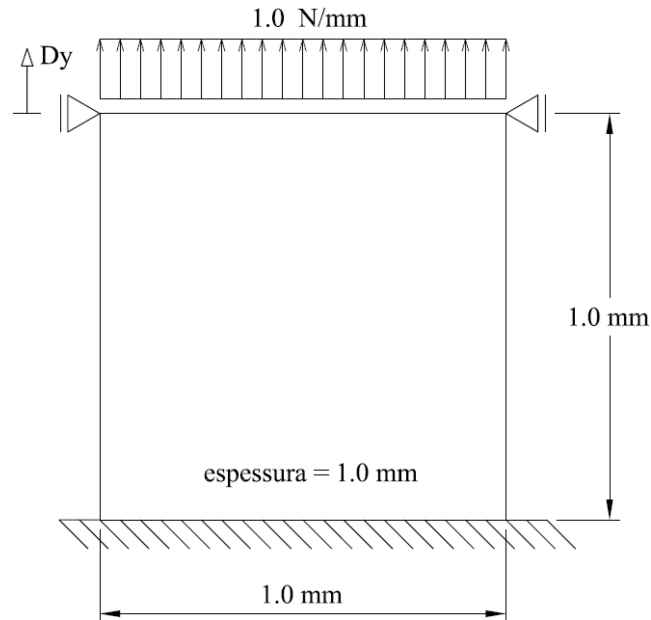


Figura 4.57: Chapa submetida a tração direta (Wolff, 2010).

Para a integração via quadratura de Gauss convencional adotou-se 2×2 pontos

em cada um dos 16 elementos da malha gerada. Ao se empregar a estratégia de subdivisão, cada elemento contendo a trinca passou a ter 12 pontos de integração – 3 por célula triangular. A Figura 4.58 ilustra o surgimento da trinca no passo 21 (linha preta espessa), assim como a alteração das degenerações do passo anterior para o mesmo (pontos em branco).

A trajetória de equilíbrio obtida é mostrada na Figura 4.59, onde verifica-se ótima concordância entre os resultados obtidos pelos dois processos de integração numérica. Por haver poucos elementos atravessados pela trinca e não haver necessidade de acionar métodos para armazenamento das variáveis constitutivas que se degradam ao longo do processo incremental iterativo (caso de meios fisicamente não lineares), a troca dos pontos de integração não gerou mudanças significativas no tempo de processamento.

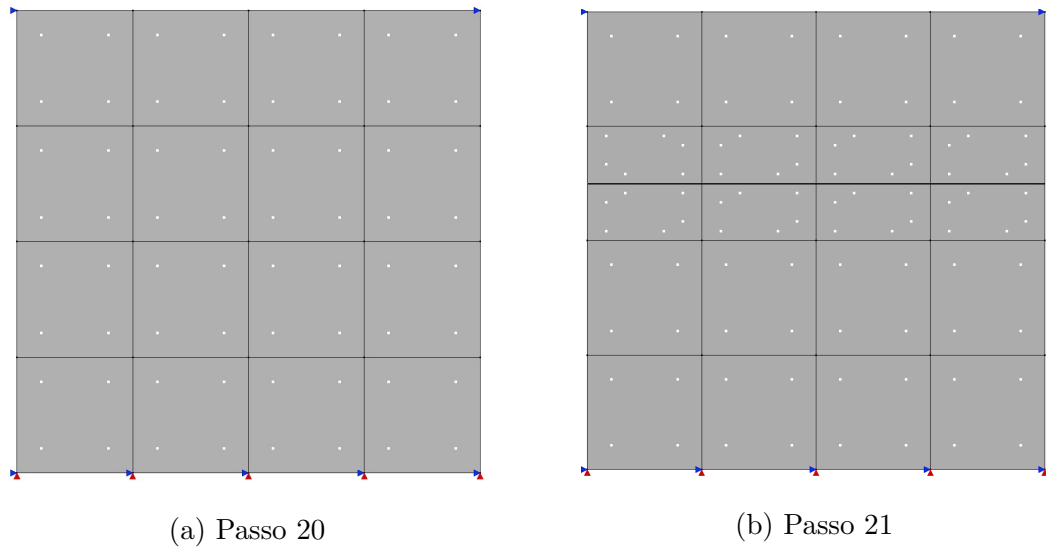


Figura 4.58: Disposição dos pontos de integração antes e após o surgimento da trinca.

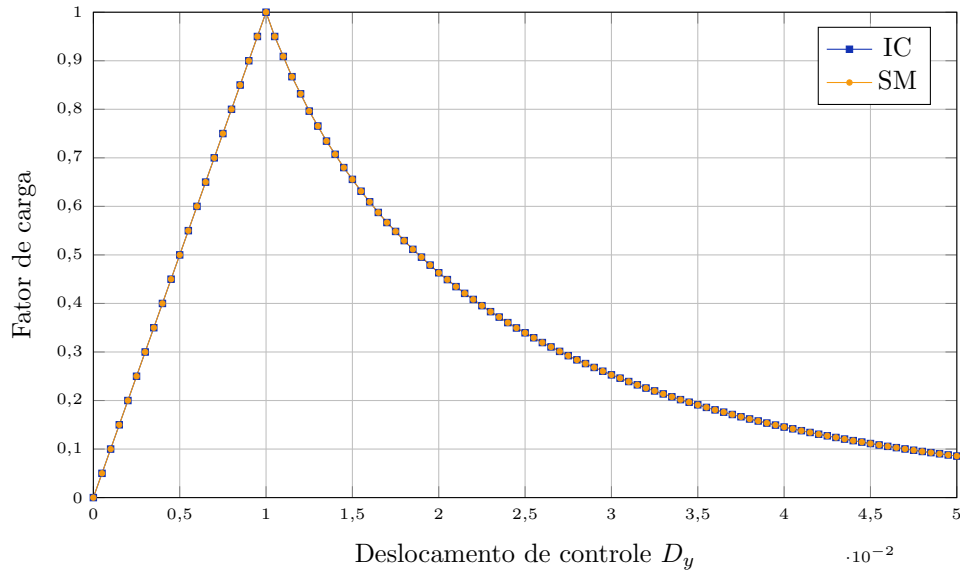


Figura 4.59: Chapa sob tração direta: trajetória de equilíbrio do deslocamento de controle D_y .

4.5.2 Análise em Meio Linear Elástico: Viga em balanço

A fim de observar o impacto das estratégias de integração numérica implementadas na trajetória da trinca, foi simulada a viga em balanço ilustrada na Figura 4.60. Para o modelo constitutivo linear elástico adotado, os dados do material considerados foram: módulo de elasticidade $E = 4,4 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$, resistência à tração $f_t = 3400,0 \text{ kN/m}^2$, energia de fratura $G_f = 0,000392 \text{ kN/m}$ e rigidez inicial ao cisalhamento $d_{init} = 1,22 \times 10^7 \text{ kN/m}^3$. Adotou-se estado plano de tensão e elementos quadrilaterais de doze nós $Q12$, no qual todos os nós foram enriquecidos com função de Heaviside (Equação 2.5).

Determinou-se a solução do problema pelo método de controle direto de deslocamentos, com incremento no deslocamento vertical D_y de $0,00001 \text{ m}$. A tolerância definida para convergência relativa, verificada através da magnitude do vetor de forças residuais, foi de 1×10^{-4} e a carga de referência, $1,0 \text{ kN/m}$.

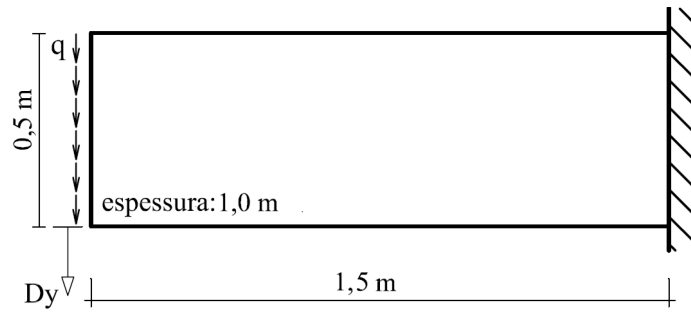


Figura 4.60: Viga em balanço (Silva, 2016).

A malha gerada contém 10×20 elementos, e para a integração convencional a análise foi realizada com 8×8 pontos de Gauss por elemento. Além de ser a quantidade empregada por Silva (2016), testes variando essa quadratura mostraram que, para quantidades diferentes desta, ou há divergência em passos anteriores ou a trajetória de equilíbrio indicou enrijecimento do modelo numérico. Essa afirmação é corroborada pela Figura 4.61.

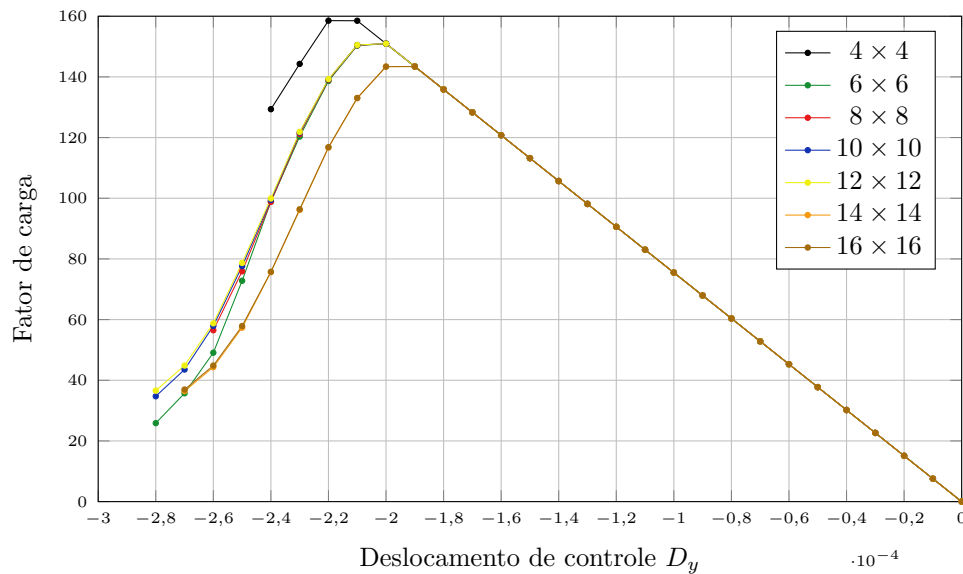


Figura 4.61: Viga em balanço: alterações na trajetória de equilíbrio com variação da quadratura de Gauss na integração convencional.

Na simulação associada à estratégia de subdivisão de elementos, considerou-se 4 pontos de integração por célula gerada após a triangulação. Dessa forma,

compatibiliza-se a aproximação da estratégia implementada com aquela advinda da formulação paramétrica do elemento $Q12$, sendo ambas cúbicas (Oñate, 2009). Observou-se também a influência da alteração da quadratura de Gauss antes de aplicada a estratégia de subdivisão e, segundo testes realizados, valores aceitáveis são obtidos com 6×6 pontos de integração. Entretanto, para se equiparar ao estudo com apenas integração convencional (Silva, 2016), manteve-se o emprego da quadratura 8×8 .

A Figura 4.62 compara as trajetórias de equilíbrio obtidas para as duas integrações numéricas adotadas. Observa-se a concordância entre as mesmas no ramo linear elástico e o aparecimento de diferenças ao se iniciar a degradação do meio, sendo verificado que o modelo torna-se sensivelmente mais dúctil quando associado à aplicação da subdivisão de elementos.

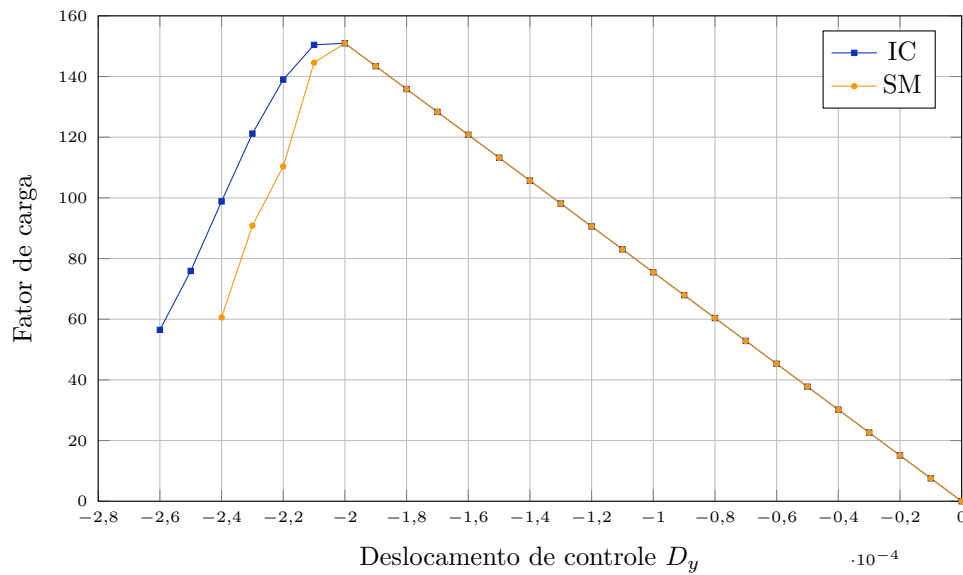


Figura 4.62: Viga em balanço: trajetória de equilíbrio do deslocamento de controle D_y .

A trajetória da fissuração pode ser vista nas Figuras 4.63 e 4.64 para as integrações convencional e via subdivisão de elementos, respectivamente, com fator de escala da configuração deformada igual a 1000. Nota-se que a nucleação e propagação da trinca seguem padrões similares.

A Figura [4.65](#) indica a distribuição de tensão horizontal σ_{xx} para um mesmo nível de deslocamento das estratégias de integração (Passo 24). Percebe-se que, para a estratégia implementada, uma segunda trinca é nucleada no passo citado. No respectivo elemento onde ocorre tal nucleação, há uma concentração de tensões de compressão, provavelmente induzida pela fragilidade introduzida através da descontinuidade.

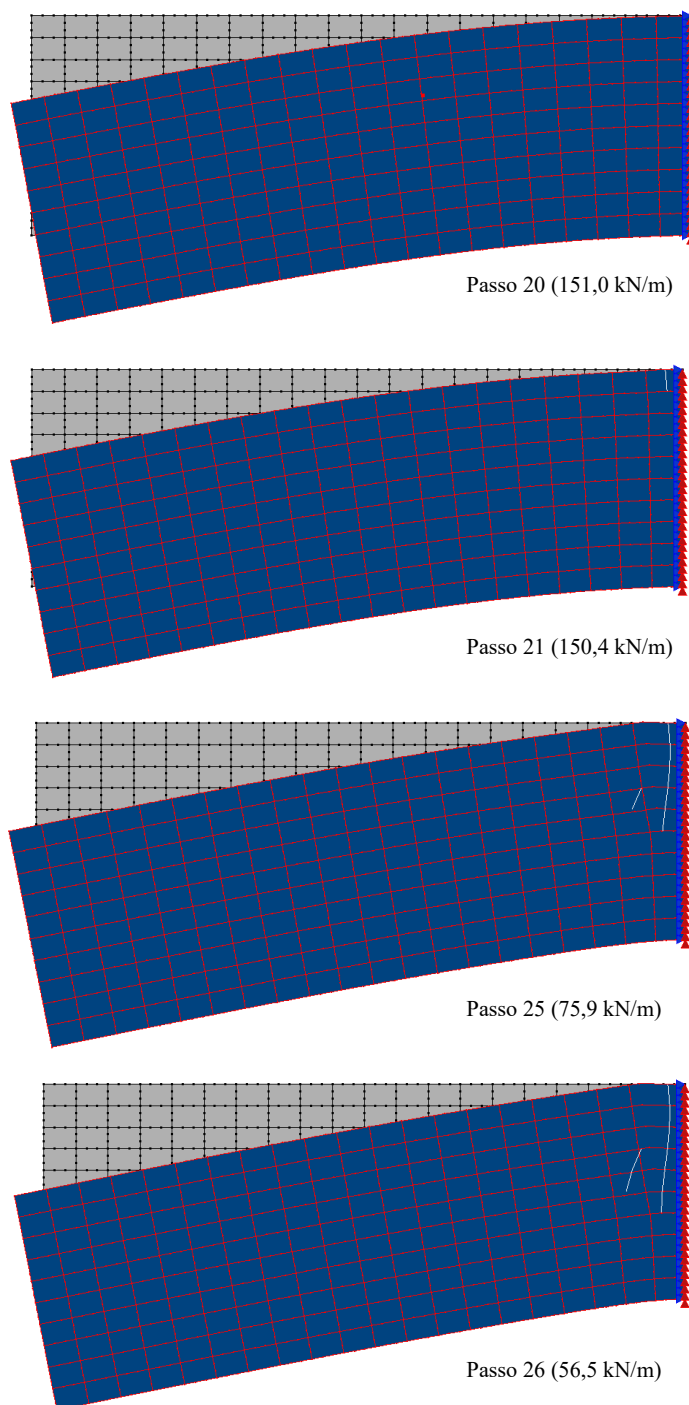


Figura 4.63: Viga em balanço: configuração deformada para integração convencional.

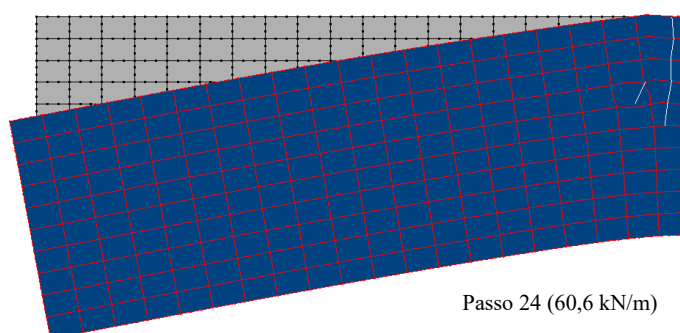
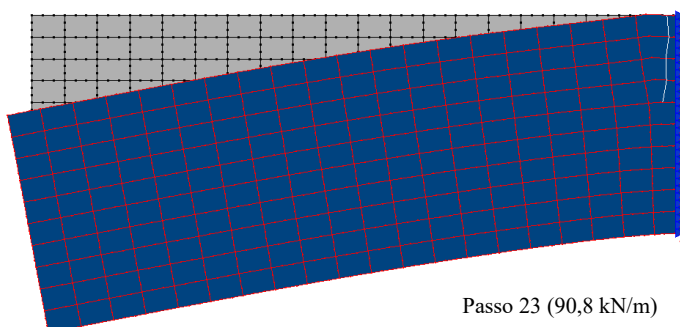
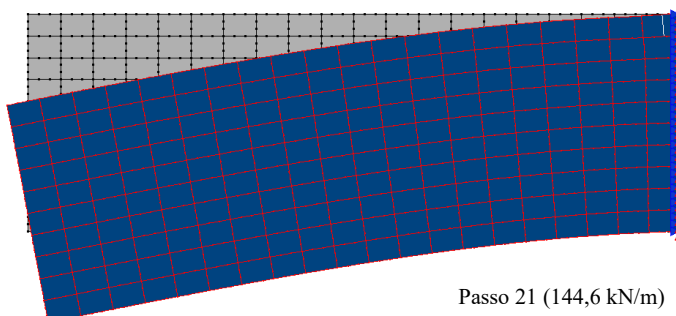
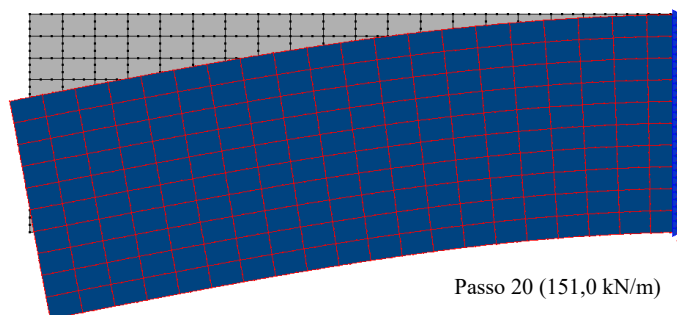
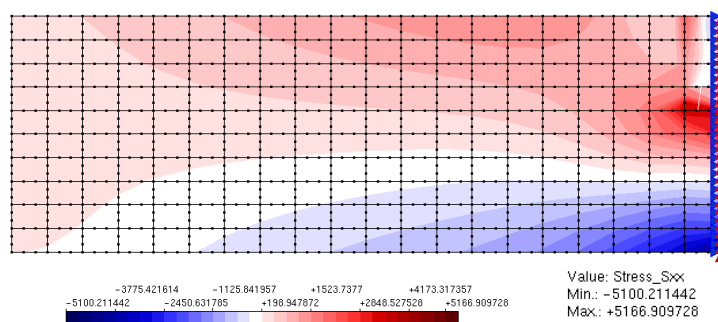
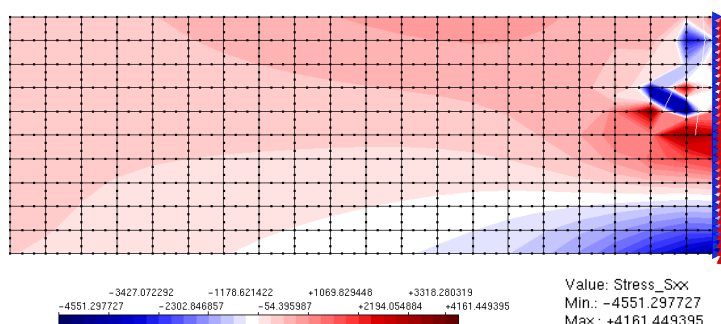


Figura 4.64: Viga em balanço: configuração deformada para estratégia implementada.



(a) Passo 24 (98,8 kN/m)



(b) Passo 24 (60,6 kN/m)

Figura 4.65: Viga em balanço: tensão σ_{xx} para (a) integração convencional e (b) estratégia implementada.

Na maioria das análises estruturais simuladas com elementos quadrilaterais, utiliza-se o elemento de quatro nós $Q4$. Isso deve-se à simplicidade de sua formulação e boa aproximação dos resultados sem implicar em tempos de processamento elevados. Buscando, então, verificar o comportamento do presente exemplo com essa classe de elementos paramétricos, adotou-se a mesma malha com elementos $Q4$ e enriquecimento polinomial de ordem dois ($P2$). Dessa maneira, garante-se a aproximação cúbica proporcionada pelo $Q12$ (Oñate, 2009).

As trajetórias de equilíbrio para os modelos com elementos $Q4$ e $Q12$ para ambas as estratégias analisadas estão indicadas na Figura 4.66, e o padrão de fissuras para os dois casos em estudo é ilustrado nas Figuras 4.67 e 4.68.

Ainda que $Q4$ com $P2$ e $Q12$ sejam capazes de reproduzir o mesmo espaço de polinômios cúbicos, estes dois elementos apresentam uma distribuição distinta de graus de liberdade pelas arestas. Enquanto que $Q4$ com $P2$ tem todos os graus de liberdade concentrados nos nós, o $Q12$ tem graus associados ao meio das arestas. Este fato talvez explique as diferentes respostas encontradas, tendo em vista a influência das condições de contorno na propagação da trinca, que se faz muito próxima do que seria o engaste. Nos elementos $Q4$ com $P2$, cada aresta apresenta restringidos doze graus de liberdade associados às duas direções e aos dois nós que coincidem com o contorno. Por sua vez, em $Q12$ são oito os graus de liberdade associados às duas direções e aos quatro nós da aresta pertencente ao contorno. Assim, embora representem o mesmo espaço de polinômios, a solução que são capazes de reproduzir é ligeiramente alterada por causa da imposição das condições de contorno. Há, portanto, uma interferência na formação e propagação das trincas, conduzindo a uma trajetória de equilíbrio distinta.

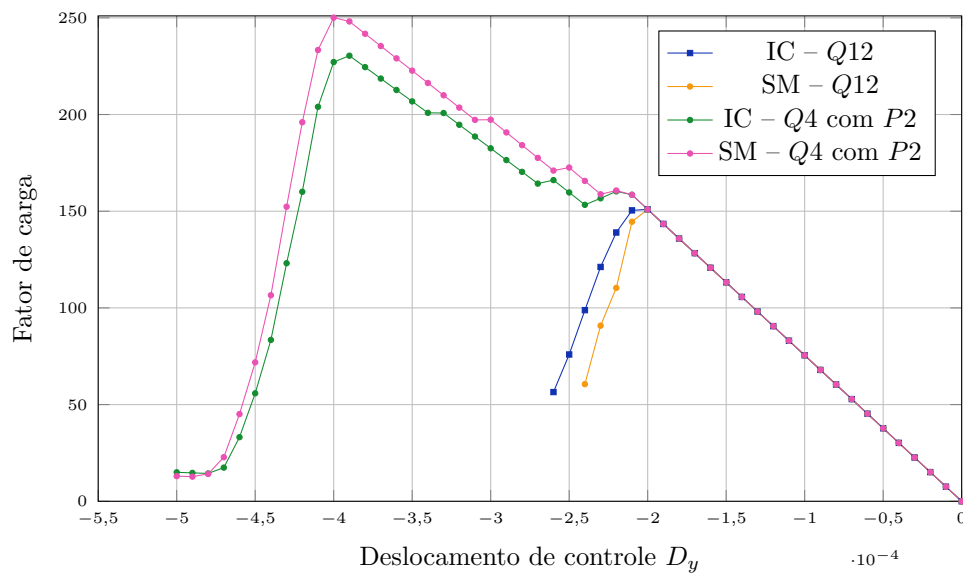


Figura 4.66: Viga em balanço: alterações na trajetória de equilíbrio para elementos quadrilaterais $Q4$ e $Q12$.

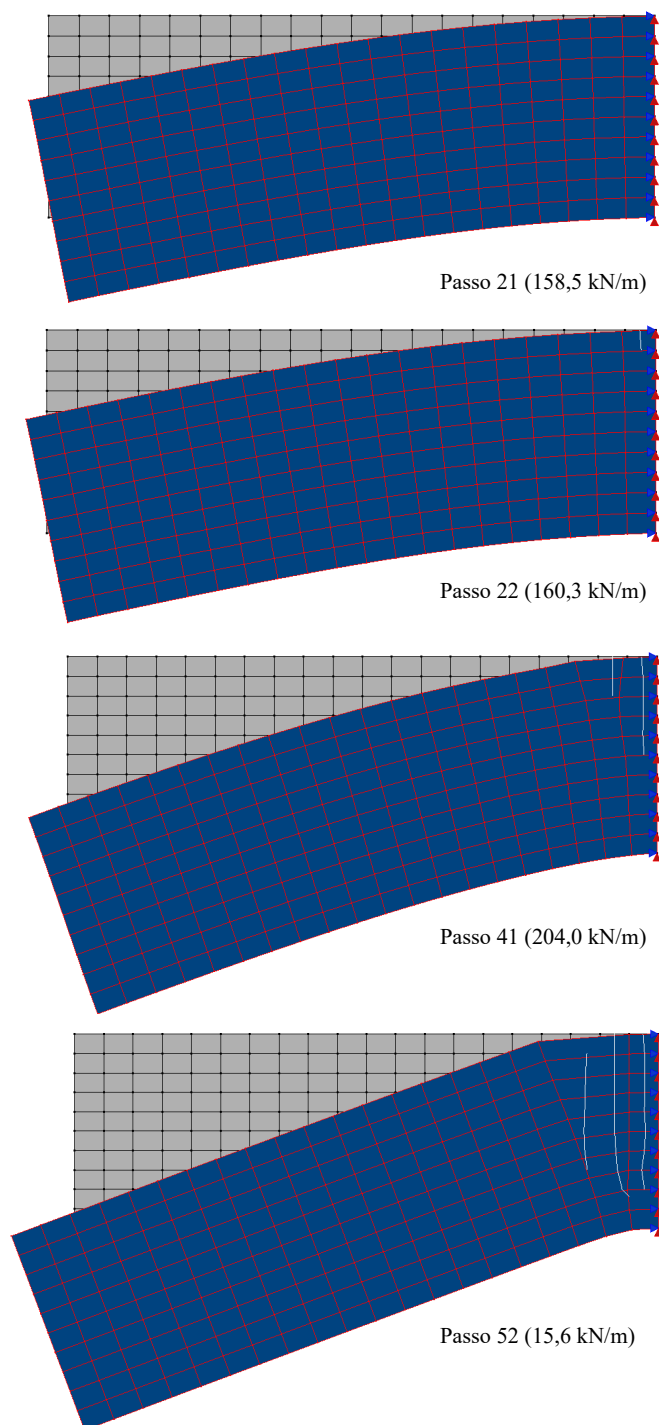


Figura 4.67: Viga em balanço: configuração deformada para integração convencional e malha de elementos $Q4$.

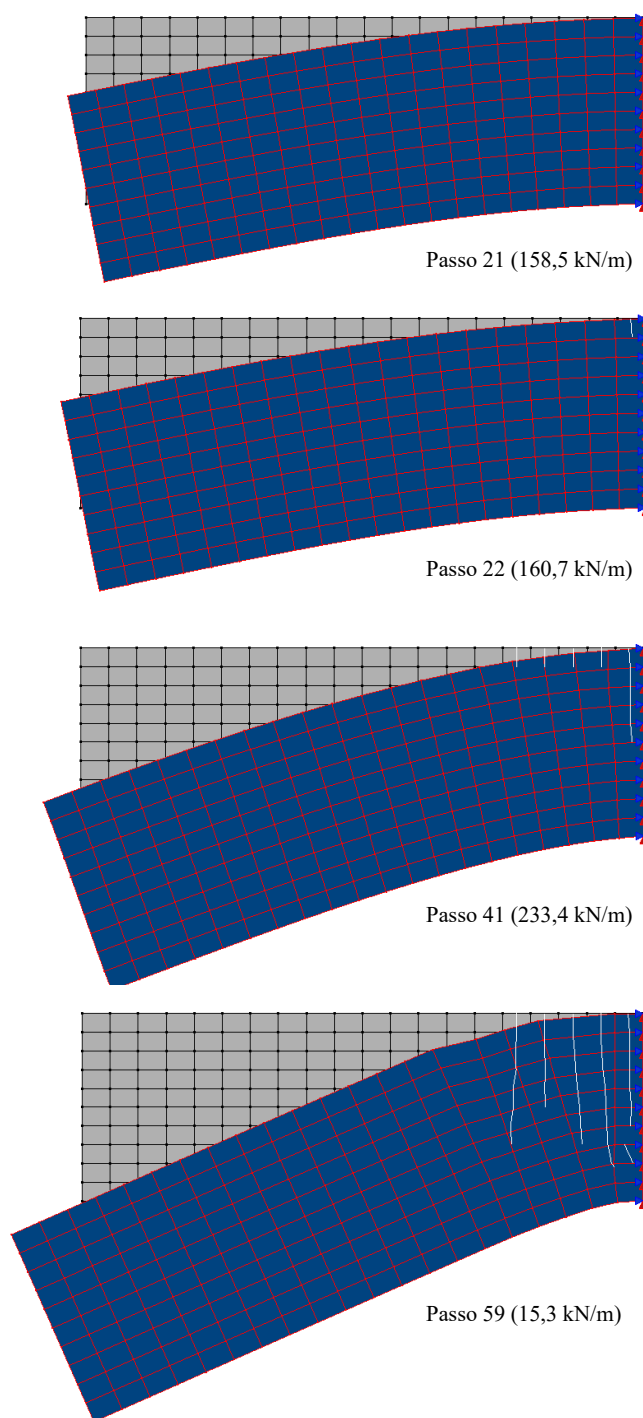


Figura 4.68: Viga em balanço: configuração deformada para estratégia implementada e malha de elementos $Q4$.

Na situação representada anteriormente, todos os graus de liberdade associados ao enriquecimento polinomial dos nós do contorno restritos foram travados. Nota-se que, para o enriquecimento polinomial de grau 2 ($P2$), o conjunto de funções de aproximação local é dado pela Equação 4.9, conforme notação da Equação 2.2

$$I_j = \left\{ 1; \frac{x - x_j}{h_j}; \frac{y - y_j}{h_j}; \left(\frac{x - x_j}{h_j} \right)^2; \left(\frac{y - y_j}{h_j} \right)^2 \right\}. \quad (4.9)$$

Assim, no exemplo em questão, ao se acrescentar os graus de liberdade associados ao enriquecimento polinomial nos nós restritos, apenas as parcelas associadas a y precisam ser também restritas – uma vez que todos assumem o mesmo valor de x . Considerando essa característica na análise, a trajetória de equilíbrio obtida está representada na Figura 4.69.

As séries com subíndice 1 indicam a restrição de todos os graus de liberdade dos nós dos apoios advindos do enriquecimento polinomial. As séries identificadas com subíndice 2, por sua vez, fazem referência ao travamento seletivo. Comparando esta última com a restrição de todos os graus de liberdade nos nós dos apoios, verifica-se diferenças na rigidez do modelo. A configuração fissurada pode ser vista nas Figuras 4.70 e 4.71.

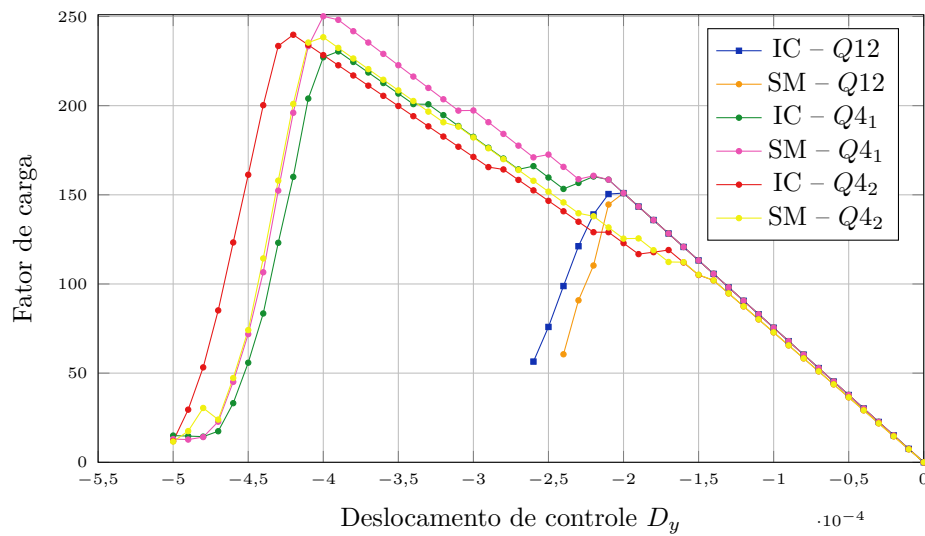


Figura 4.69: Viga em balanço: alterações na trajetória de equilíbrio para elementos quadrilaterais $Q4$ e $Q12$ e diferentes restrições dos graus de liberdade.

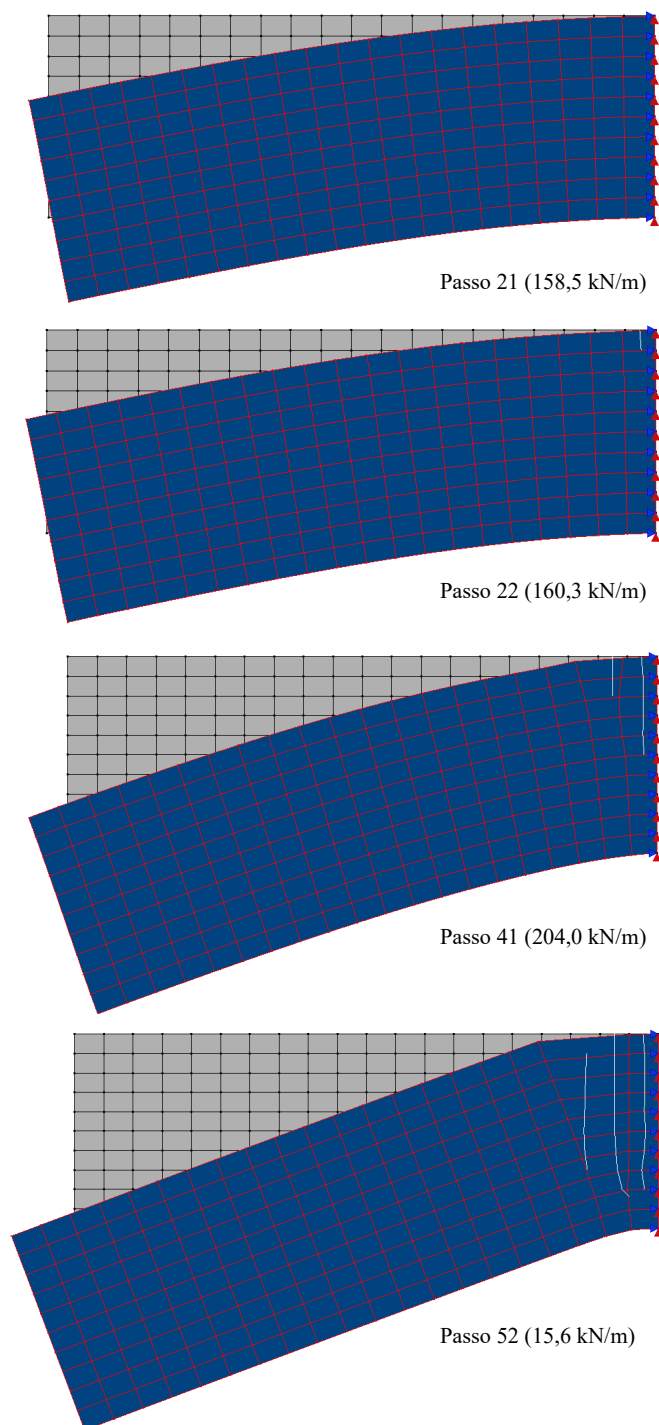


Figura 4.70: Viga em balanço: configuração deformada para integração convencional e restrição seletiva do enriquecimento polinomial.

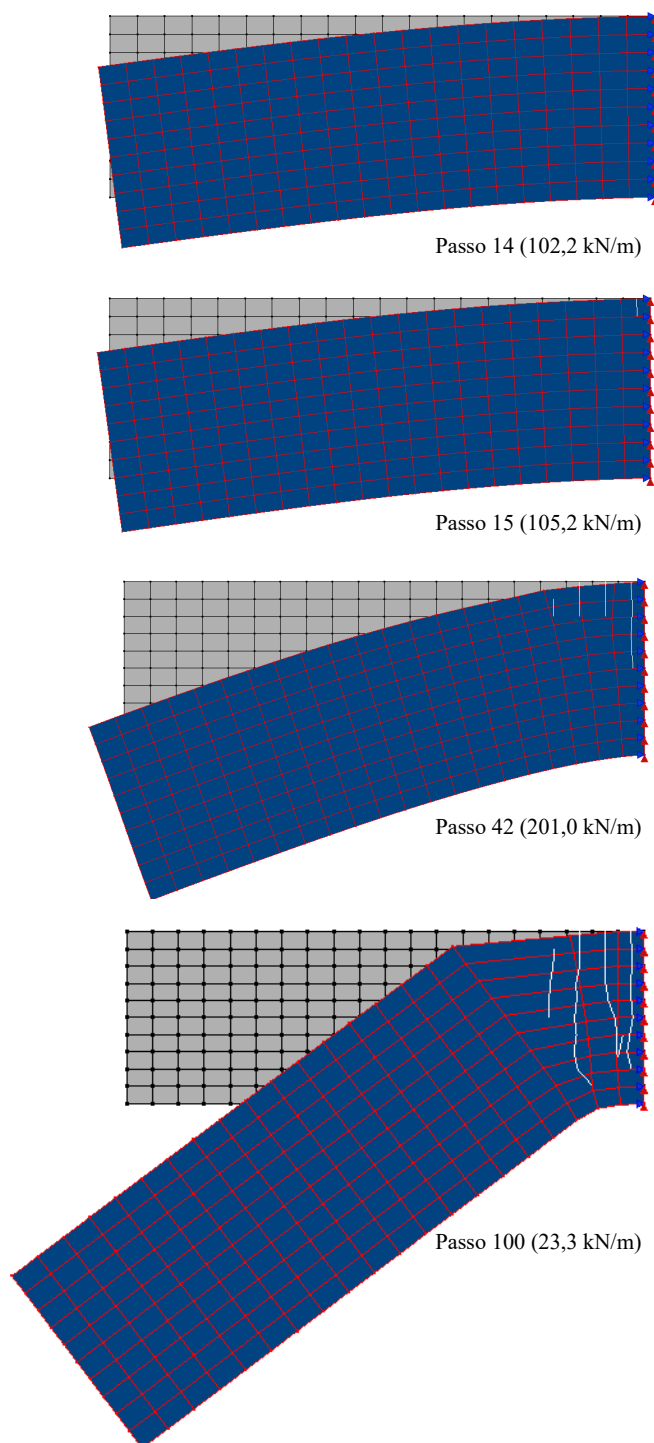


Figura 4.71: Viga em balanço: configuração deformada para estratégia implementada e restrição seletiva do enriquecimento polinomial.

De posse dos resultados acima, conclui-se que há influência significativa das condições de contorno na nucleação e propagação de trincas devido à proximidade entre

o engaste e a região de maiores tensões. Dessa forma, os resultados das análises com elementos $Q12$ e $Q4$ com enriquecimento polinomial e diferentes restrições dos graus de liberdade apresentam discrepâncias que são independentes da estratégia de integração utilizadas. Optou-se por registrar, contudo, estes resultados de forma a contribuir para a interpretação de simulações com o MEFG.

4.5.3 Análise em Meio Fisicamente Não Linear: Flexão em 3 pontos

Para observar o comportamento da estratégia implementada em um meio representado por um modelo não linear foi analisado o problema de flexão em três pontos, indicado na Figura 4.72 e com modelo constitutivo de fissuras distribuídas.

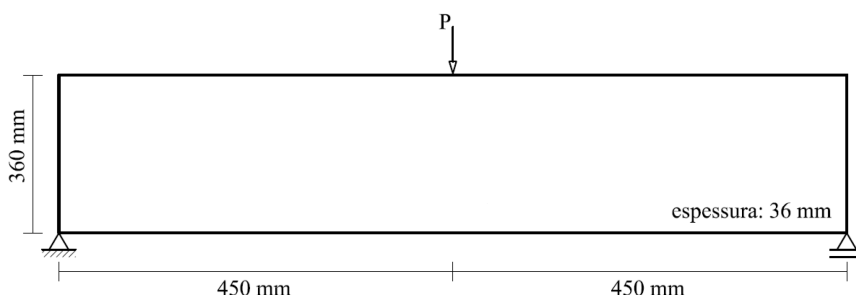


Figura 4.72: Viga sob flexão em três pontos (Penna, 2011).

Foram adotadas as leis de Carreira e Chu (1985) para compressão e Boone e Ingraffea (1987) para tração, com os seguintes parâmetros do material: módulo de elasticidade elástico $E_0 = 44000,0 \text{ N/mm}^2$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$, resistência à compressão $f_c = 40,0 \text{ N/mm}^2$, resistência à tração $f_t = 3,8 \text{ N/mm}^2$, deformação relativa ao limite elástico na compressão $\varepsilon_c = 0,0018$, energia de fratura $G_f = 0,164 \text{ N/mm}$, comprimento característico $h = 100 \text{ mm}$ e fator de retenção ao cisalhamento $\beta_r = 0,05$. A malha é constituída de elementos quadrilaterais de quatro nós $Q4$ e considerou-se estado plano de tensão.

O problema foi resolvido com o método de controle direto de deslocamentos, com incremento de $0,0015 \text{ mm}$ no apoio direito. A tolerância para convergência relativa (verificada através da magnitude do vetor de forças residuais) foi adotada como 1×10^{-4} e a carga de referência como $1,0 \text{ N}$.

A malha de elementos finitos gerada contém 6 por 15 elementos. Na integração convencional foi considerada a quadratura de Gauss de 4×4 pontos. No contexto das estratégias de subdivisão e mapeamento foi necessário definir os parâmetros da função de distribuição Gaussiana, cuja finalidade é ponderar as variáveis constitutivas das degenerações anteriores para armazenamento nas novas degenerações.

Os parâmetros envolvidos são o comprimento interno do domínio não local adotado l e o parâmetro da função k (conforme mencionado na Seção 2.2.3). Para verificar quais valores seriam adequados, fixou-se $k = 1,0$ e os valores de l foram variados. A Figura 4.73 ilustra o comportamento da função Gaussiana para l variando de $\frac{1}{6}d$ a $\frac{20}{6}d$, onde d é o tamanho do elemento (nesse exemplo, $d = 60$).

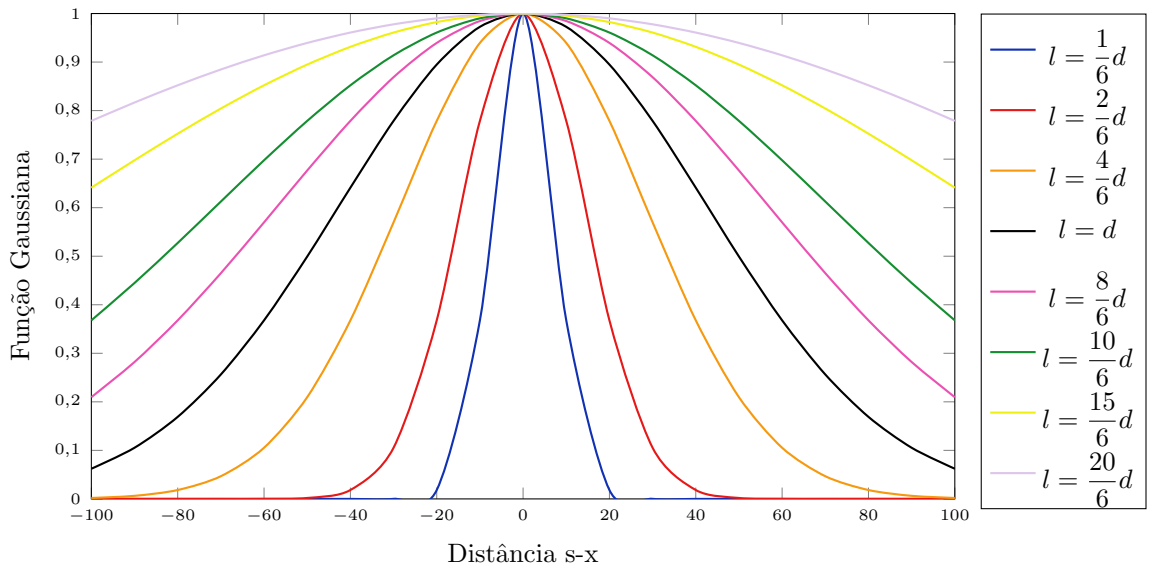


Figura 4.73: Função Gaussiana para l variável e $k = 1,0$.

A quantidade de passos executados para cada valor de l está indicada na Tabela 4.21. Nela também constam a quantidade de iterações necessárias a cada propagação

da trinca (P1 a P6). Observa-se que o melhor resultado é obtido para o menor valor de l considerado, ou seja, ponderando mais as variáveis constitutivas dos pontos de Gauss antigos mais próximos àquele em análise. À medida que a função Gaussiana é suavizada – se aproximando de uma média simples – ocorre divergência no processamento antes de se atingir o total de passos estabelecido, ou seja, 200. Além disso, nas duas últimas simulações (para $l = 15d/6$ e $l = 20d/6$) a quantidade de iterações na nucleação da trinca é significativamente grande.

Tabela 4.21: Quantidade de passos do processo incremental-iterativo considerando a estratégia de subdivisão de elementos.

l	P1	P2	P3	P4	P5	P6	Passos
$\frac{1}{6}d$	3	4	3	3	4	6	200
$\frac{2}{6}d$	3	4	4	3	4	7	194
$\frac{4}{6}d$	3	4	4	4	4	-	120
d	3	4	4	4	4	-	129
$\frac{8}{6}d$	3	4	4	4	4	-	128
$\frac{10}{6}d$	3	4	4	4	4	-	130
$\frac{15}{6}d$	23	5	4	4	4	-	130
$\frac{20}{6}d$	24	5	4	4	5	-	130

Dessa forma, conclui-se ser ideal a utilização do parâmetro $l = \frac{1}{6}d$ para o presente exemplo. Assumida essa configuração, a Figura 4.74 mostra a trajetória de equilíbrio obtida para integração convencional e para a estratégia implementada. Verifica-se ótima concordância entre as curvas. Na obtenção dessas trajetórias, a quantidade de iterações a cada passo foi semelhante entre as estratégias: dos 200 passos, em 57 houve uma iteração a mais para a estratégia de subdivisão, em 6 houve uma iteração a mais para a integração convencional e em apenas 1 houve 3 iterações a mais para

a subdivisão de elementos.

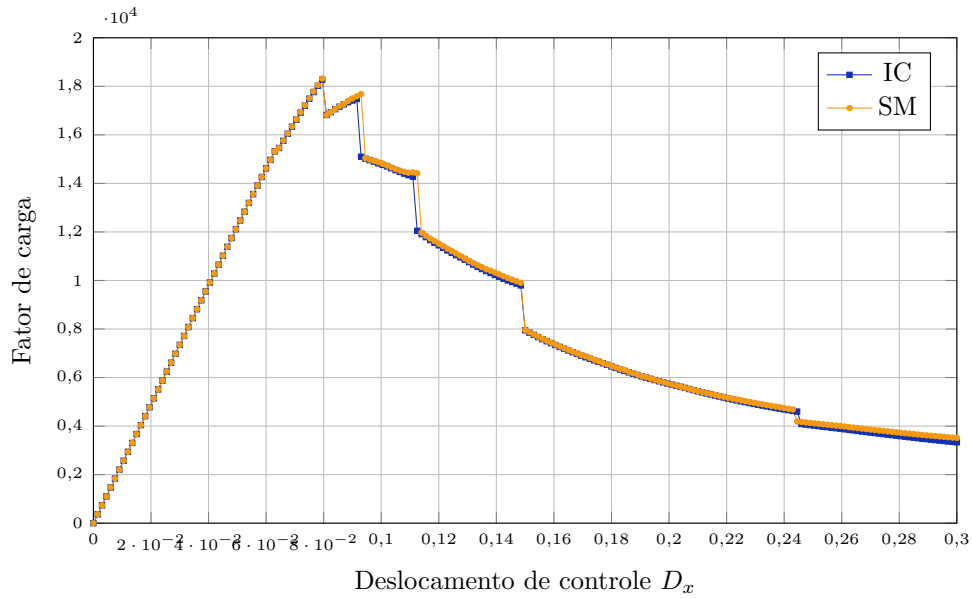


Figura 4.74: Flexão em três pontos: trajetória de equilíbrio do deslocamento de controle D_x .

A trajetória da trinca para as estratégias de integração numérica consta nas Figuras 4.75 e 4.76. Nas duas situações observa-se que, no final da propagação, a trinca tem uma inclinação em sua trajetória. Embora resultados experimentais indiquem que para a flexão em 3 pontos a falha deva ocorrer em linha reta até atingir toda a altura da estrutura, em modelos numéricos é comum verificar a alteração aqui observada. Isso se deve ao fato de a concentração de tensões de compressão na região central superior ser alta ao ponto de não permitir propagação, induzindo a trinca a seguir caminhos alternativos. A distribuição de tensões horizontais σ_{xx} pode ser observada nas Figuras 4.77 e 4.78.

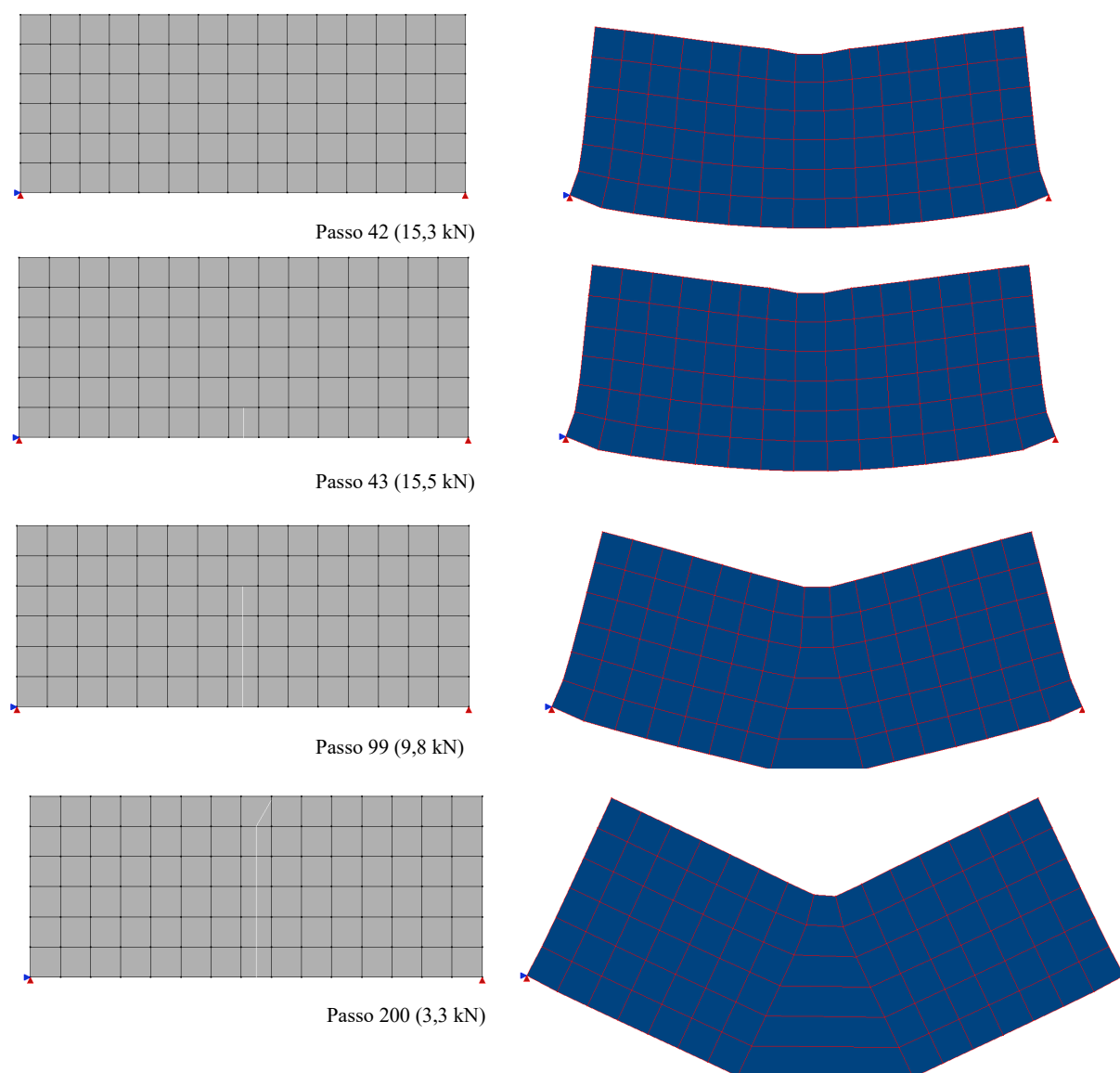


Figura 4.75: Flexão em três pontos: configuração deformada para integração convencional.

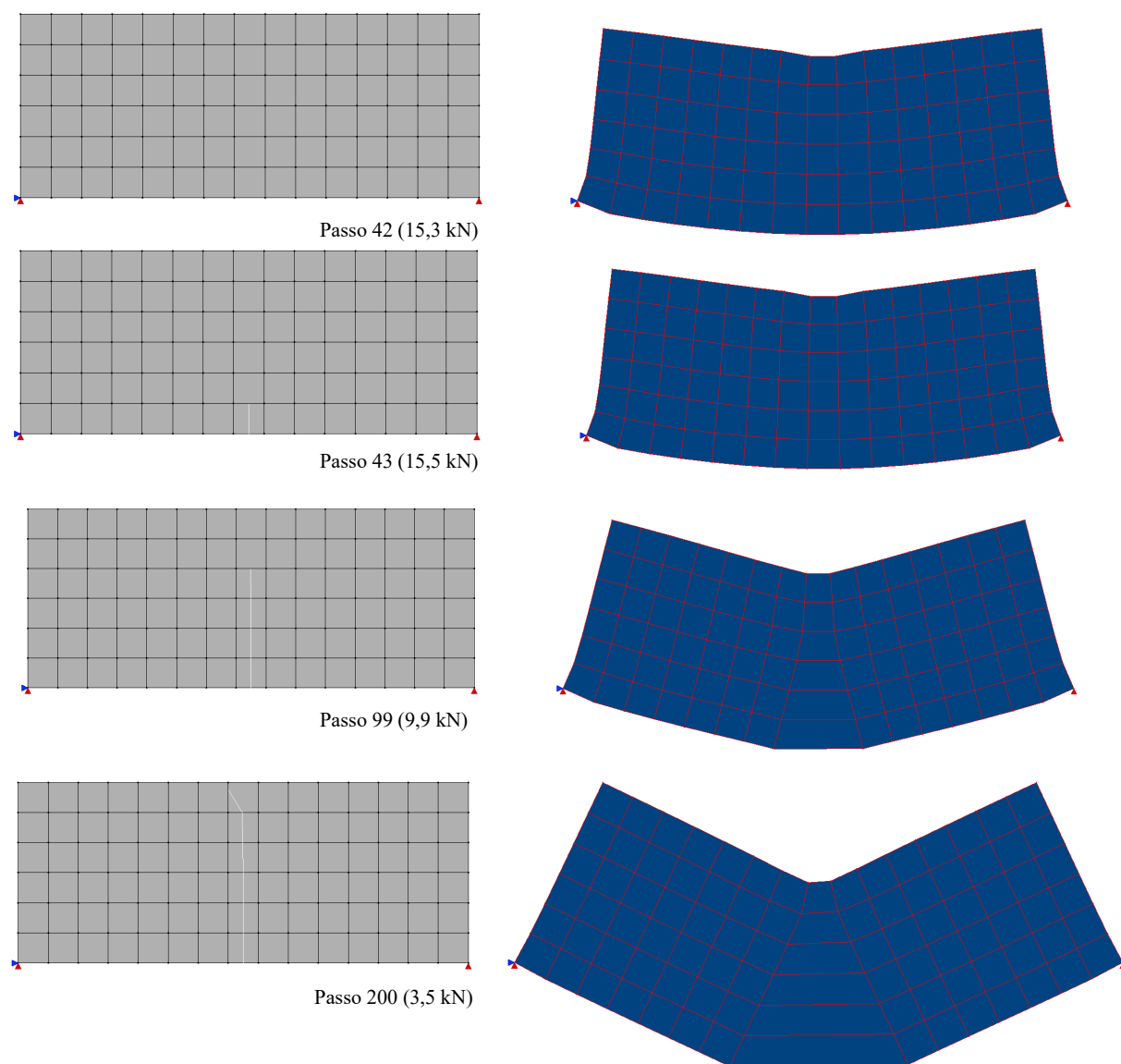
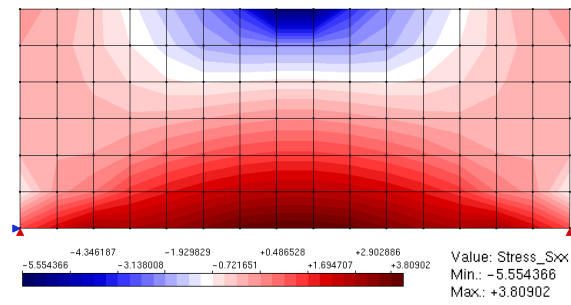
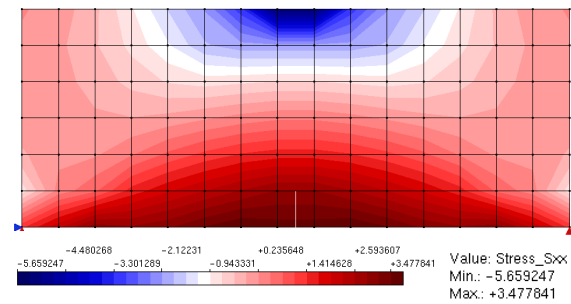


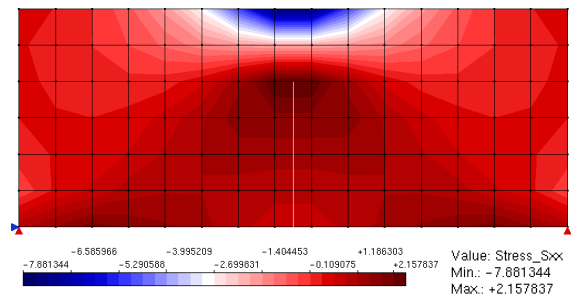
Figura 4.76: Flexão em três pontos: configuração deformada para estratégia implementada.



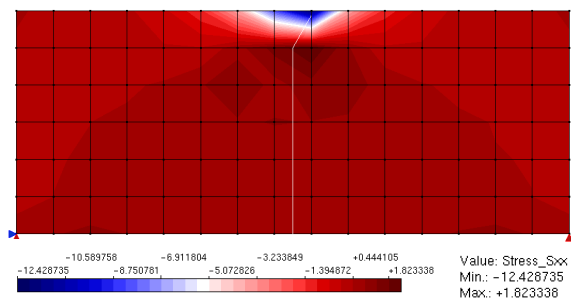
(a) Passo 42 (15,3 kN)



(b) Passo 43 (15,5 kN)

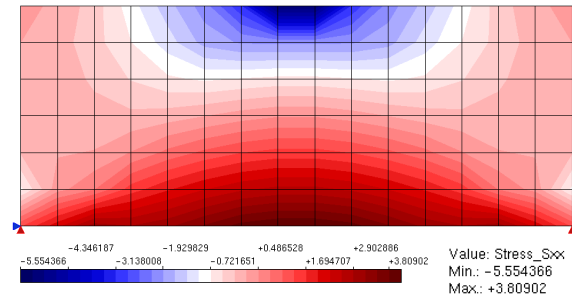


(c) Passo 99 (9,8 kN)

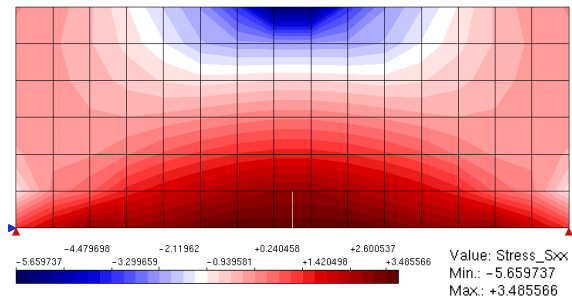


(d) Passo 200 (3,3 kN)

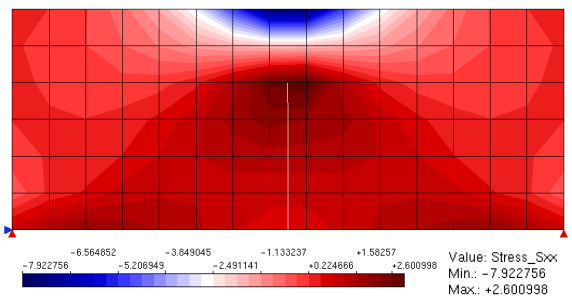
Figura 4.77: Flexão em três pontos: distribuição de tensões horizontais σ_{xx} para integração convencional.



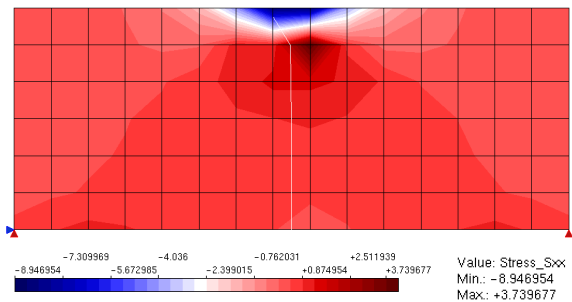
(a) Passo 42 (15,3 kN)



(b) Passo 43 (15,5 kN)



(c) Passo 99 (9,9 kN)



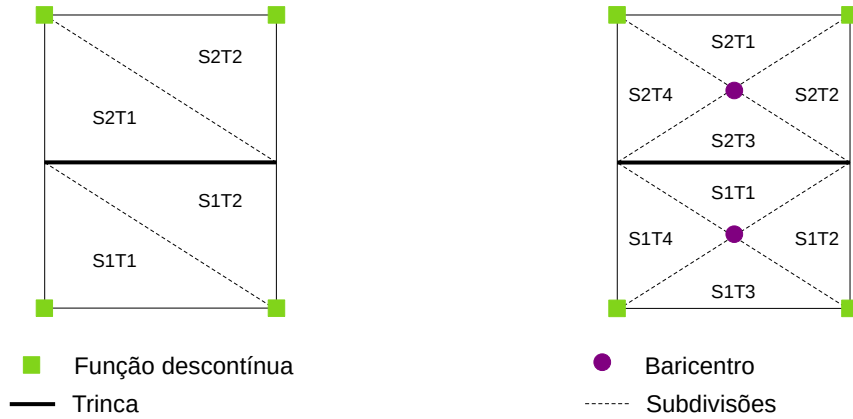
(d) Passo 200 (3,5 kN)

Figura 4.78: Flexão em três pontos: distribuição de tensões horizontais σ_{xx} para estratégia implementada.

Na distribuição de tensões do último passo do processo incremental-iterativo para a estratégia implementada, nota-se uma região de concentração de tensões de tração

anormal, trazendo certa assimetria ao problema que é inexistente para análise com a quadratura de Gauss convencional. Esse fato é causado pelo novo posicionamento dos pontos de integração, os quais não são simétricos com relação ao eixo tangencial ao segmento de trinca (Figura 4.79a).

Buscou-se, então, modelar o problema considerando uma subdivisão em células triangulares de maneira a simetrizar a posição dos pontos de integração. Assim, utilizou-se o baricentro da região de cada lado da descontinuidade para integrar a lista de pontos de suas respectivas triangulações. A nova subdivisão proposta pode ser vista na Figura 4.79b.



(a) Caso 1: triangulação antiga

(b) Caso 2: nova triangulação proposta

Figura 4.79: Modificação das células de integração para simetrização dos pontos de integração com relação ao eixo tangencial à trinca.

Para essa nova disposição dos pontos de integração, a distribuição de tensões e trajetória da trinca estão indicadas na Figura 4.80 para o último passo da análise. Esta última apresentou padrão coerente com a simetria do problema simulado; não ocorreu a propagação no último elemento devido à alta concentração de tensões de compressão no mesmo (diferentemente do resultado da integração convencional, onde a trinca propagou de maneira inclinada).

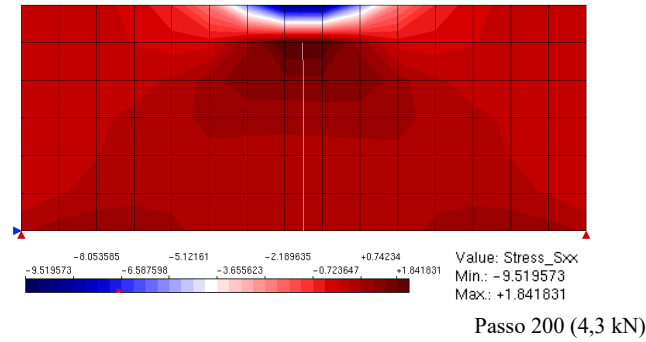


Figura 4.80: Flexão em três pontos: distribuição de tensões horizontais σ_{xx} para estratégia implementada e simetrização dos pontos de integração.

A Figura 4.81 mostra a comparação entre as trajetórias de equilíbrio já citadas e aquela associada à simetrização feita dos pontos de integração. Para tal, o parâmetro l da função Gaussiana foi considerado $l = \frac{2}{6}d$, diferentemente do valor anterior adotado. Essa mudança ocorreu devido ao fato de que, para o raio anterior, não foi possível abranger alguma degeneração antiga para que fosse feita a ponderação as variáveis constitutivas.

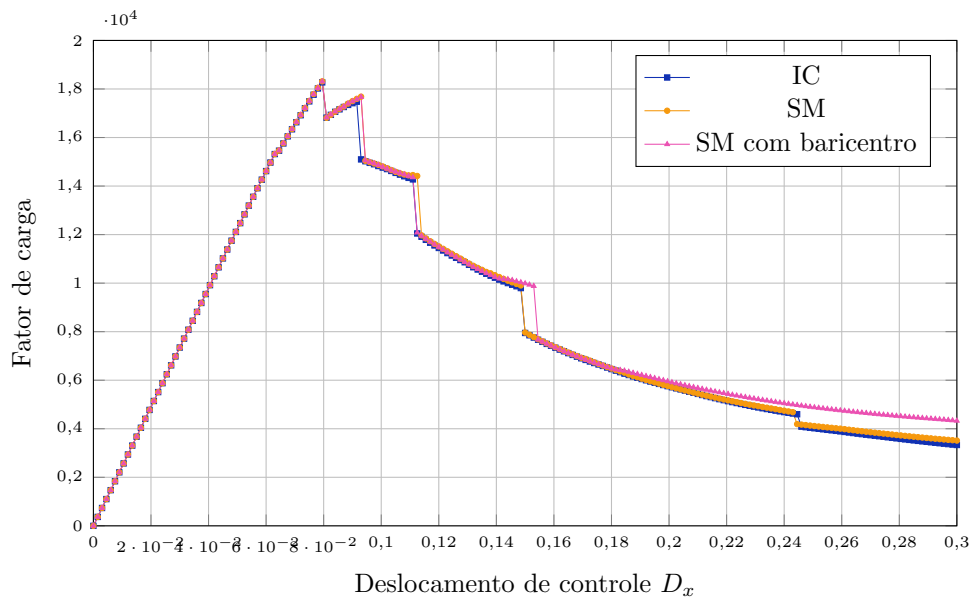


Figura 4.81: Flexão em três pontos: trajetória de equilíbrio do deslocamento de controle D_x , comparação com implementação da simetrização dos pontos de integração.

É interessante ressaltar que a simetria da subdivisão não foi abordada nos exemplos anteriores visto serem todos associados a meios de propagação lineares elásticos. Com a introdução da não linearidade física torna-se necessário o emprego da estratégia não local para armazenamento das variáveis constitutivas nos novos pontos de integração. Por isso, passa a ser de extrema significância a simetrização dos pontos abrangidos pelos parâmetros da função de distribuição empregada.

O tempo de processamento observado para as duas estratégias de integração numérica foi próximo entre ambas, sendo entretanto maior quando utilizada a subdivisão de elementos. Deve-se levar em conta que, além de ser necessário acessar os métodos para a que a própria subdivisão seja feita, a estratégia implementada tem mais pontos de integração por elemento – são 4×4 (ou 16 no total) pontos na integração convencional comparados com 3 pontos em cada célula (ou 24 no total) após a subdivisão. O tempo acumulado pode ser visto na Figura 4.82

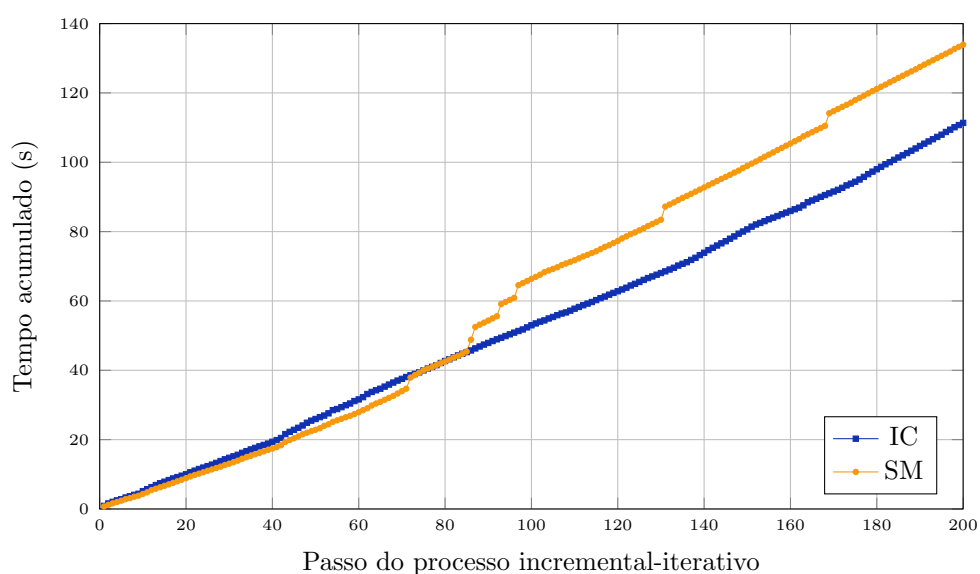


Figura 4.82: Flexão em três pontos: tempo de processamento acumulado.

Para o exemplo proposto de flexão em três pontos, portanto, conclui-se que a utilização da estratégia de subdivisão apresenta comportamento semelhante àquele observado para a integração convencional. O tempo de processamento é bastante próximo para os dois casos, sendo um pouco maior nos últimos passos do processo

incremental-iterativo para a estratégia implementada. A simetrização dos pontos de integração torna-se fundamental para melhor descrição do comportamento das fissuras, e as trajetórias de equilíbrio são próximas em todas as situações.

4.5.4 Análise em Meio Fisicamente Não Linear: Painel em L

Ainda considerando modelos fisicamente não lineares, é apresentado nesta seção um painel em L, conforme a Figura 4.83, cujos resultados experimentais foram obtidos por Winkler et al. (2004).

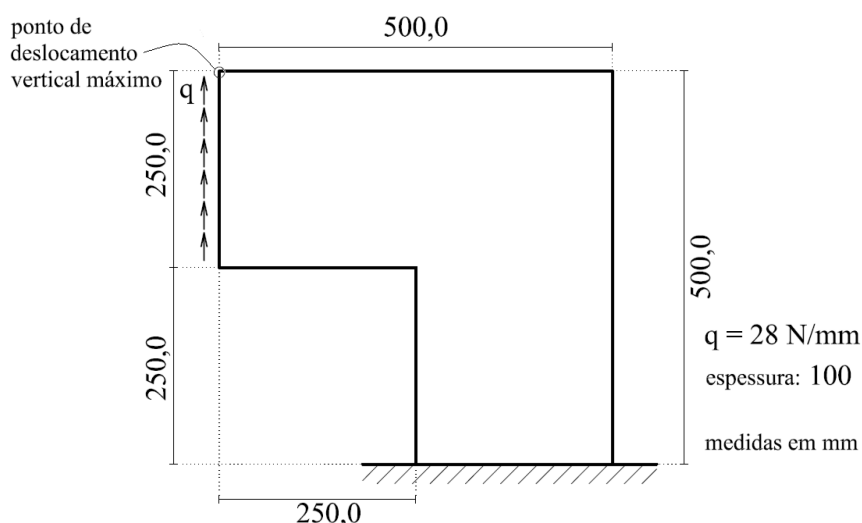


Figura 4.83: Painel em L (Winkler et al., 2004).

Foi adotado o modelo constitutivo de fissuras distribuídas e as leis de Carreira e Chu (1985) para compressão e Boone e Ingraffea (1987) para tração, com os seguintes dados do material: módulo de elasticidade $E = 25850 \text{ N/mm}^2$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,18$, resistência à compressão $f_c = 31,0 \text{ N/mm}^2$, resistência à tração $f_t = 2,7 \text{ N/mm}^2$, energia de fratura $G_f = 0,065 \text{ N/mm}$, comprimento característico $h = 28 \text{ mm}$ e deformação relativa ao limite elástico na compressão $\varepsilon_c = 0,0022$.

Para uma malha de elementos triangulares de três nós $T3$ e estado plano de

tensão, o problema foi resolvido considerando-se equilíbrio secante (descrito na Seção 2.2.1) e método de controle direto de deslocamentos, com incremento de $0,01 \text{ mm}$ no ponto de deslocamento vertical máximo. A tolerância para convergência relativa, verificada através da magnitude do vetor de forças residuais, foi adotada como 1×10^{-3} e a carga de referência como $q = 28,0 \text{ N/mm}$.

Para a integração convencional, empregou-se 3 pontos de integração em cada elemento e, para a estratégia implementada, adotou-se 3 pontos de integração por célula triangular gerada. A ponderação das variáveis constitutivas para armazenamento nos novos pontos de integração criados pela subdivisão dos elementos foi feita segundo a função de distribuição Gaussiana, com parâmetros $k = 1,0$ e $l = 10$ (Equação 2.16); a dimensão média dos elementos finitos da malha é de 25 mm .

De forma similar ao exposto por Most e Bucher (2006), a energia de fratura G_f foi variada entre $0,065$ e $0,090 \text{ N/mm}$, a fim de se observar a concordância das trajetórias de equilíbrio com a faixa experimental no ramo descendente. Como pode ser visto na Figura 4.84, o melhor resultado foi obtido com $G_f = 0,065 \text{ N/mm}$, valor este adotado nas simulações para comparação das estratégias de integração numérica.

A Figura 4.85 mostra as trajetórias de equilíbrio obtidas para a integração convencional e para a estratégia implementada. Observa-se que o pico do fator de carga alcançado por ambas foi menor do que o experimental, o que se deve à fragilidade oriunda da introdução de uma descontinuidade.

Em termos de quantidade de iterações a cada passo, as duas estratégias tiveram resultados parecidos. Para os 100 passos da simulação, em 41 a integração convencional teve mais iterações, em 34 foi a estratégia implementada e em 25 obteve-se o mesmo número de iterações para os dois casos.

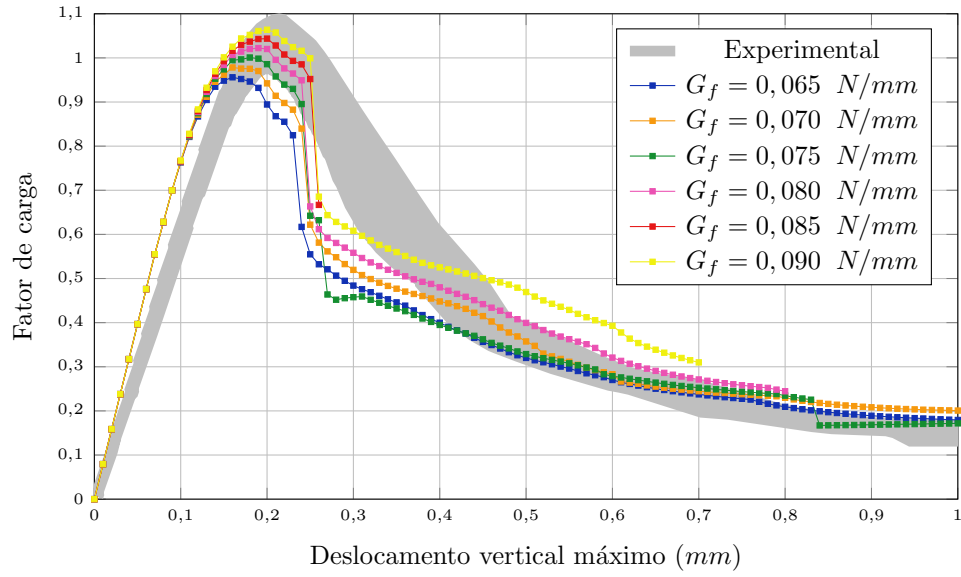


Figura 4.84: Pannel em L: trajetórias de equilíbrio para diferentes energias de fratura com integração convencional.

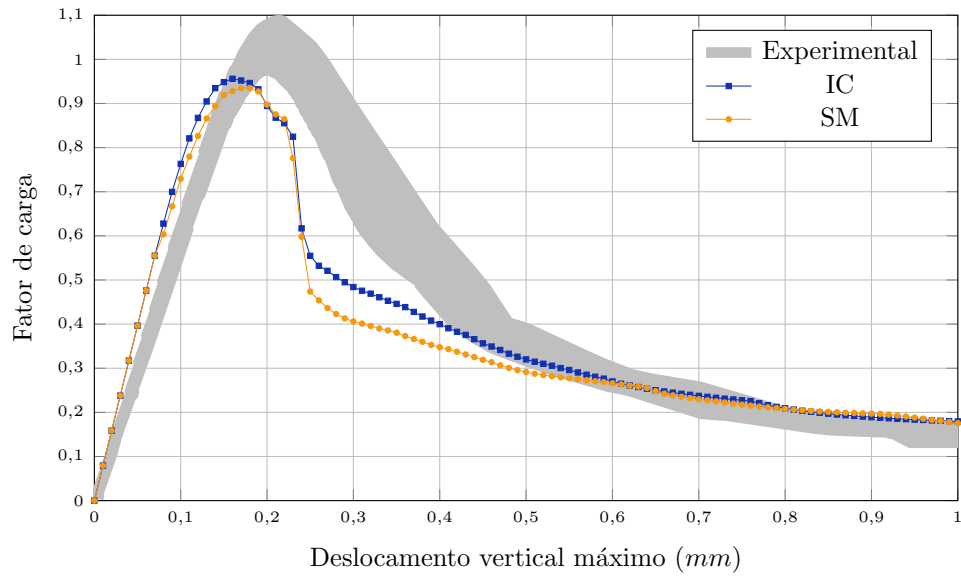


Figura 4.85: Pannel em L: trajetória de equilíbrio do deslocamento vertical máximo.

As Figuras 4.86 e 4.87 ilustram a propagação da trinca ao longo do processo incremental iterativo, enquanto as Figuras 4.88 e 4.89 ilustram o dano na direção de ε_1 ao longo do domínio para a integração convencional e estratégia implementada, respectivamente.

No início da propagação observa-se o aparecimento de dano causado por compressão na região superior da chapa, o que se deve à lei de Carreira adotada. Nota-se que são valores significativamente pequenos e, nos próximos passos de propagação, o dano se concentra na região de surgimento da trinca.

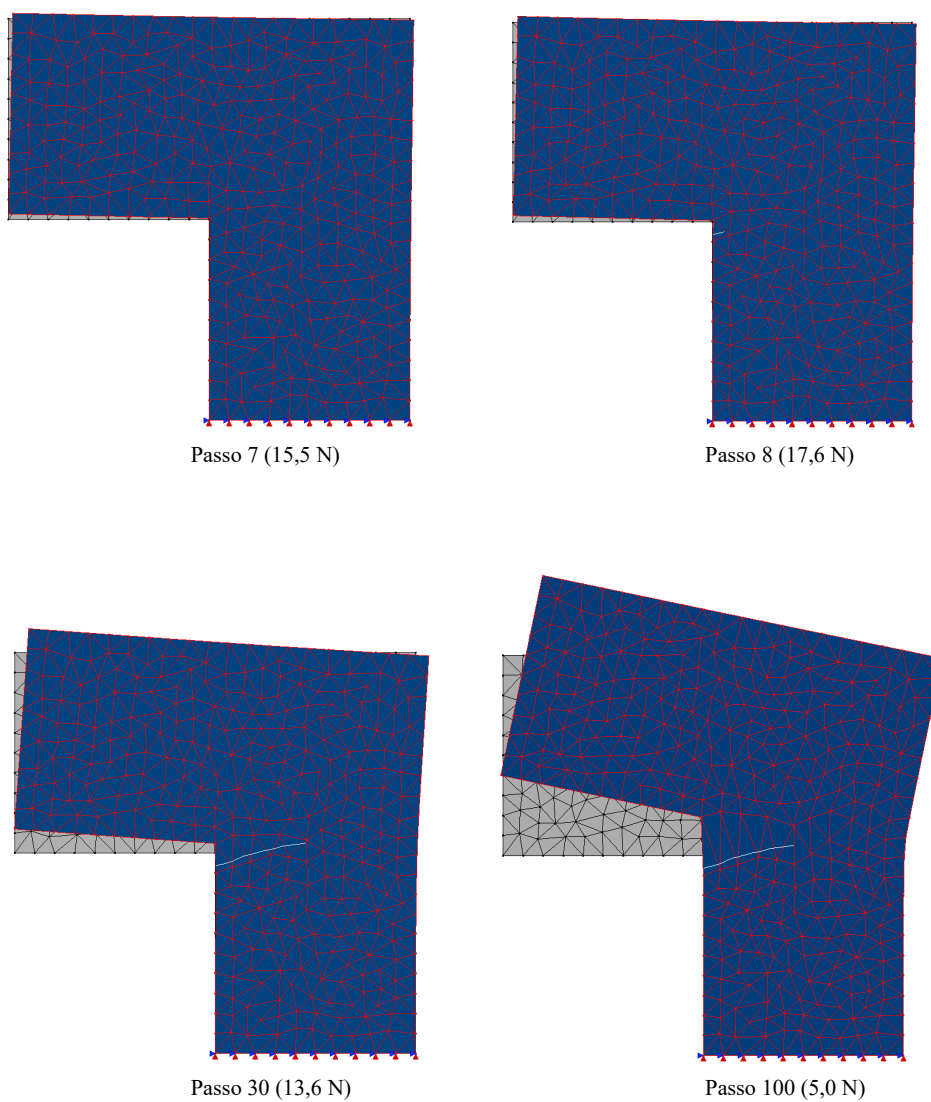


Figura 4.86: Pannel em L: configuração deformada para integração convencional.

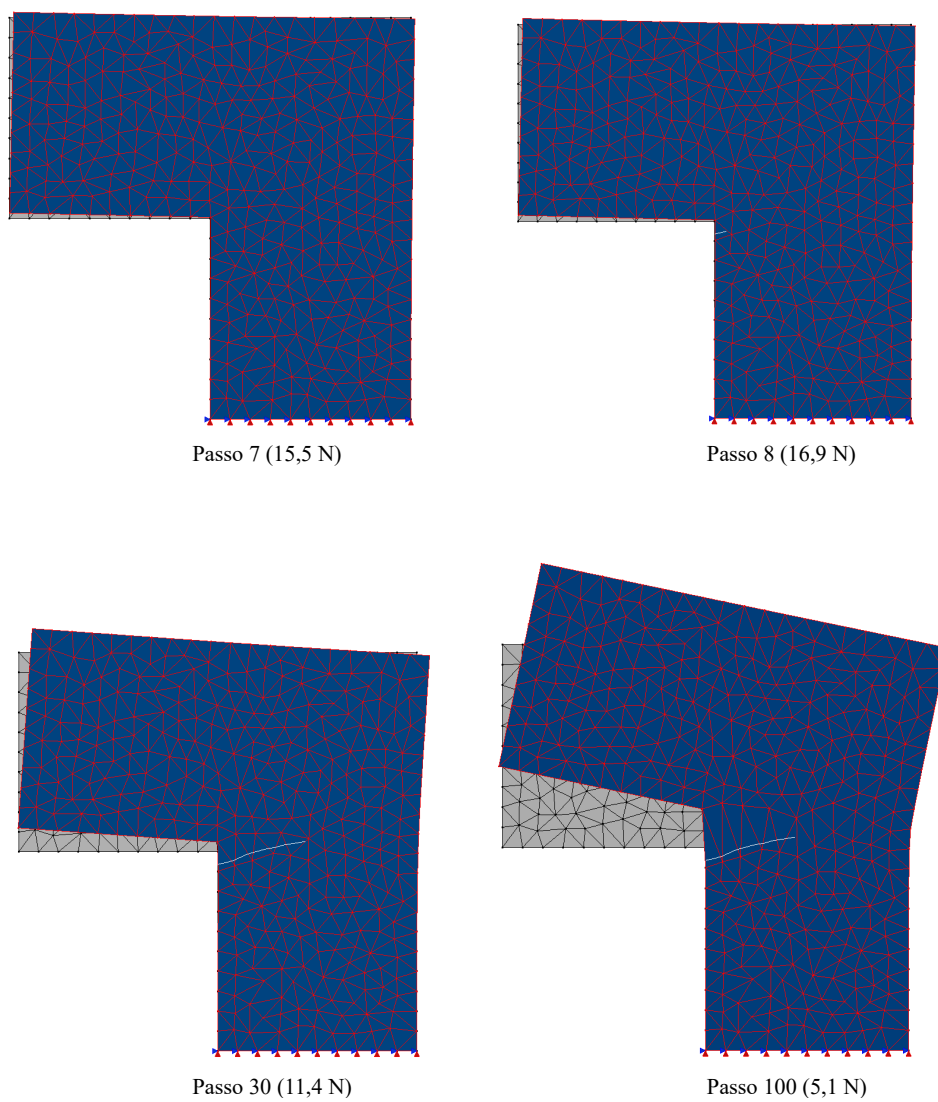


Figura 4.87: PaineL em L: configuração deformada para estratégia implementada.

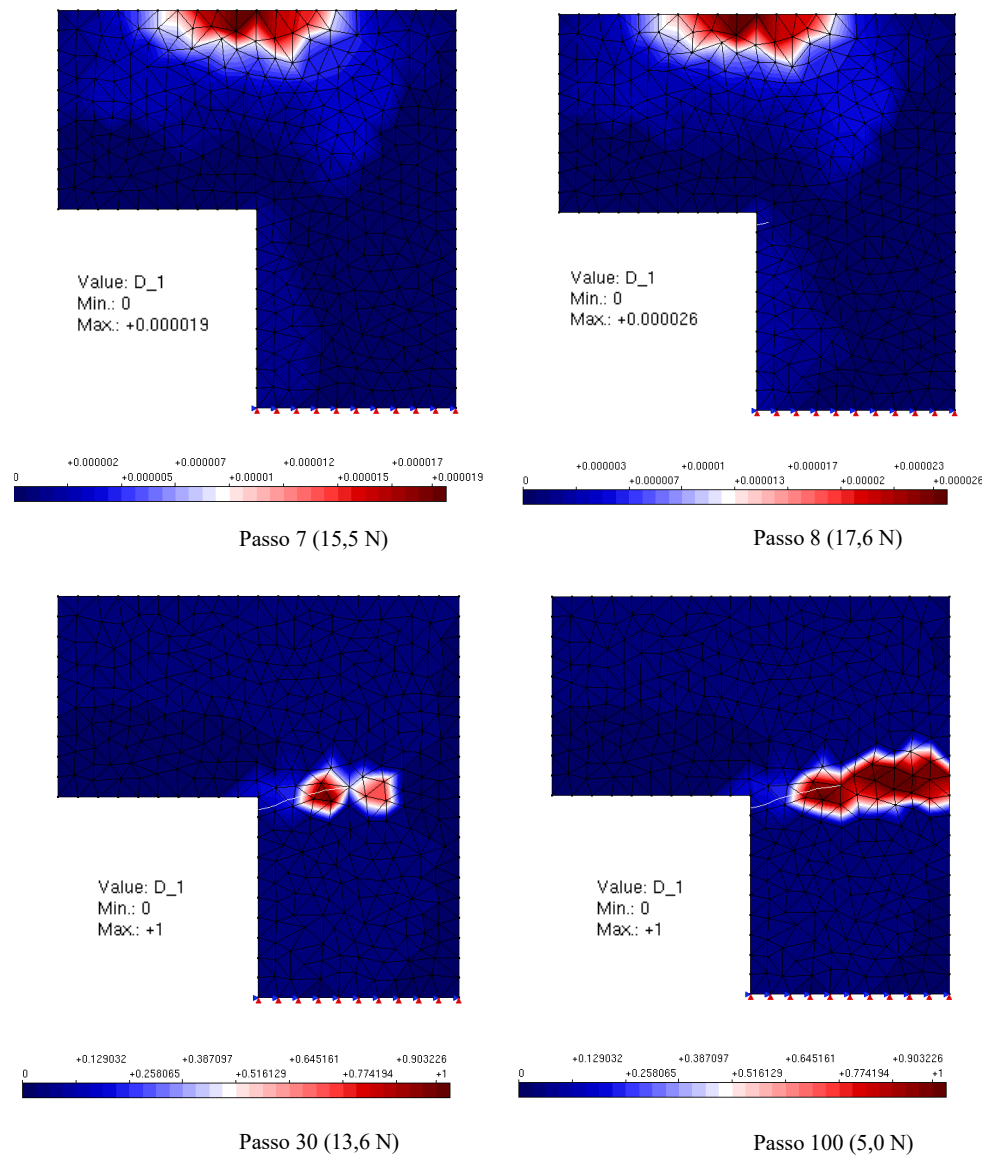


Figura 4.88: PaineL em L: dano na direção de ε_1 para integração convencional.

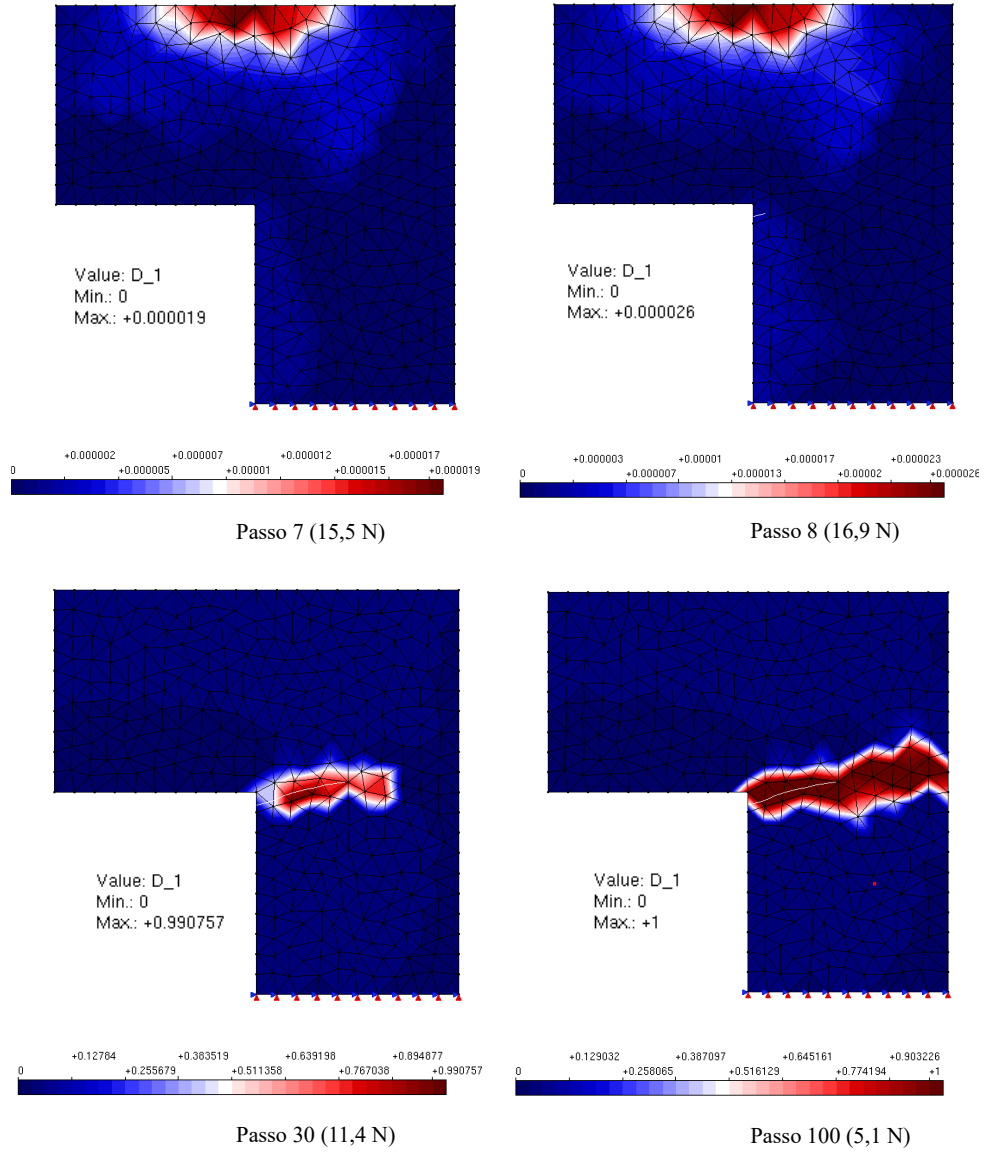


Figura 4.89: PaineL em L: dano na direção de ε_1 para estratégia implementada.

O tempo de processamento acumulado para as estratégias de integração numérica avaliadas consta na Figura 4.90. Observa-se que o tempo é bastante similar para ambos os casos, mesmo com a diferença na quantidade de pontos de integração (3 na integração convencional e 9 na estratégia implementada) em cada elemento.

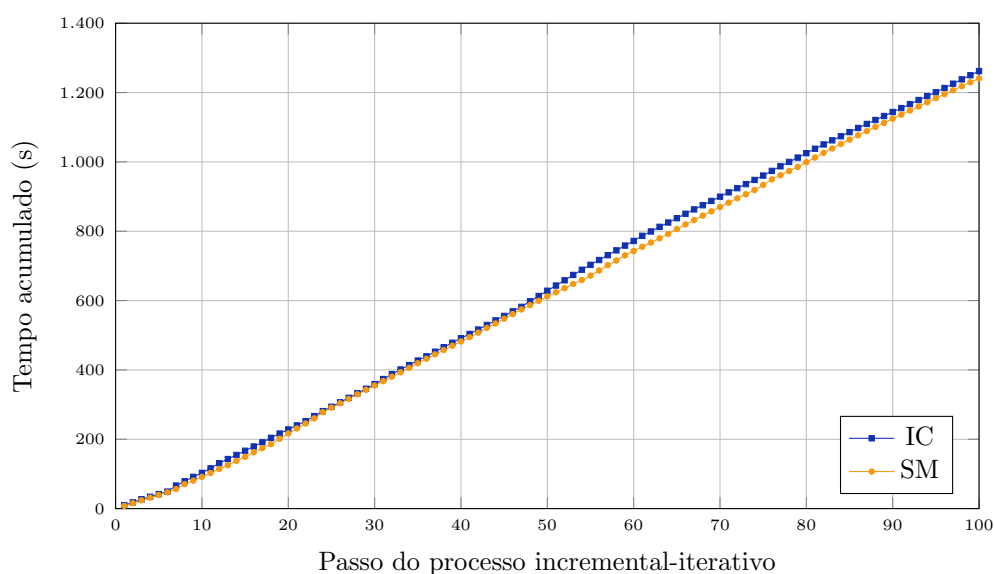


Figura 4.90: Painel em L: tempo de processamento acumulado.

A Figura 4.91 ilustra o padrão de dano experimental observado por Winkler et al. (2004), sendo este similar aos padrões encontrados para as estratégias de integração numérica em análise. Uma limitação da implementação computacional no sistema INSANE, entretanto, é o fato de que, no primeiro elemento onde a trinca surge, ela necessariamente deve passar pelo seu centroide. Como a nucleação da trinca experimental ocorre na junção angular do painel, sua trajetória já se inicia de maneira distinta nas simulações feitas no INSANE.

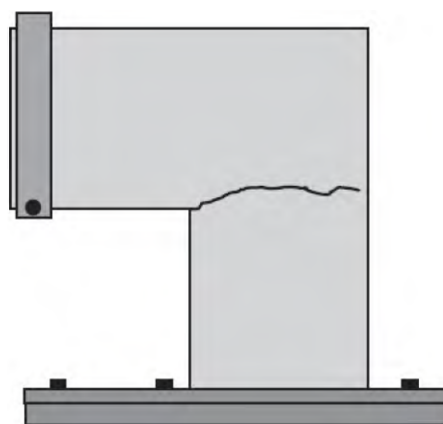


Figura 4.91: Painel em L: padrão de dano experimental (Winkler et al., 2004).

Capítulo 5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

5.1 Contribuições deste Trabalho

Neste trabalho foi apresentado um estudo de uma alternativa para a integração numérica associada a problemas abordados pelo Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG). Criado como uma variação do Método dos Elementos Finitos (MEF) para melhor descrição de problemas com particularidades em regiões locais do domínio, o MEFG permite o emprego de funções de enriquecimento para prever o comportamento de singularidades e descontinuidades, como é o caso dos problemas da Mecânica da Fratura.

As funções de aproximação local, associadas à presença de trincas, trazem uma característica não polinomial ao integrando das equações da forma fraca do problema de valor de contorno. Dessa maneira, a representação exata advinda da quadratura de Gauss deixa de ser precisa, sendo necessárias estratégias de integração que contornem tal situação. As proposições de [Park et al. \(2009\)](#) foram aqui referenciadas e implementadas, valendo-se da subdivisão de elementos e mapeamento dos pontos de integração para restituir a precisão prejudicada pela associação das funções de enriquecimento nos graus de liberdade adicionais do MEFG.

Abordados por diversos autores, os procedimentos de subdivisão e mapeamento proporcionam melhores resultados nas análises de problemas com trincas. Ambos foram implementados no software livre INSANE, desenvolvido no departamento de Engenharia de Estruturas (DEES) da Escola de Engenharia da UFMG. Sua expansão

se deu de forma a proporcionar ao usuário a possibilidade de se valer de estratégias opcionais à integração convencional.

A implementação computacional foi feita de maneira genérica, buscando assim ser útil a diferentes tipos de problema com diferentes modelos constitutivos que os descrevem. As simulações numéricas realizadas abrangeram exemplos da Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE), considerando trincas estáticas com diferentes configurações geométricas e abordagem estável do Método dos Elementos Finitos Generalizados Estável (MEFGE) ou mesmo a propagação de trincas pelo Método dos Elementos Finitos Generalizados com Enriquecimento Global-Local (MEFG^{gl}). Além disso, a implementação feita foi testada para situações de nucleação e propagação de trincas coesivas, seja em meio linear elástico ou considerando sua não linearidade física.

Utilizando-se como referência a abordagem não local para obtenção de variáveis de estado ao longo da história de evolução do fenômeno não linear, foi proposta e implementada uma estratégia para a transferência destas variáveis armazenadas inicialmente nos pontos de integração da quadratura convencional para aqueles novos pontos criados com as novas técnicas de integração implementadas. Para isso, funções de distribuição são utilizadas, que permitem ponderar as variáveis constitutivas dos pontos de integração antigos e armazená-las de forma proporcional nos novos pontos advindos das estratégias de integração numérica implementadas. Fez-se uma análise dos parâmetros envolvidos na construção dessas funções e qual o impacto dos mesmos na obtenção de trajetórias de equilíbrio.

Ao se lidar com problemas fisicamente não lineares, onde foi necessária a utilização de uma estratégia de ponderação e armazenamento de variáveis constitutivas nos novos pontos de integração inseridos, a triangulação usada em elementos quadrilaterais precisou ser simetrizada. Para tal, a proposição inicial de [Park et al. \(2009\)](#) leva em conta a adição do baricentro do polígono gerado de cada lado da descontinuidade (Figura [4.79](#)) à lista de nós necessários para triangulação – implementada

aqui somente para o exemplo da Seção 4.5.3. Entretanto, a quadratura de Gauss mínima para integração exata, nessa situação, soma uma quantidade elevada de pontos em todo o domínio do elemento. Assim, para exemplos considerando meio material linear elástico, ressalta-se possibilidade de simplificação da triangulação sem levar em conta o baricentro citado.

O estudo realizado em elementos distorcidos mostrou que, para esse tipo de configuração do elemento, a integração numérica sofre perda significativa de sua exatidão. Esse fato ocorreu tanto para a integração convencional quanto para a estratégia de subdivisão e mapeamento, mostrando a necessidade de análises mais profundas acerca do tema, buscando causas da imprecisão gerada e alternativas para solucioná-la ou ao menos suavizá-la. Além disso, fica evidente a necessidade de utilização de quadraturas elevadas – referentes a elementos triangulares – para observação da estabilidade ou não dos resultados relacionados à estratégia de subdivisão e mapeamento. Para a quantidade de pontos de integração aqui empregada, não foi possível estabelecer conclusões precisas acerca desse tipo de simulação.

Avaliou-se também os aspectos de eficiência computacional para ambos os tipos de integração numérica. Concluiu-se que a subdivisão e mapeamento proporcionaram não só resultados mais precisos, mas também tempos de processamento equivalentes ou menores do que os provenientes da integração pela quadratura de Gauss.

Finalmente, foram obtidos resultados coerentes e satisfatórios para todos os exemplos apresentados para os valores de energia de deformação, rigidez e fatores de intensidade de tensão. A contribuição do presente trabalho pode ser dita significativa no contexto de expansão do sistema INSANE, além de expor a necessidade de maiores estudos acerca dos impactos da integração numérica em simulações de trincas no MEEG.

5.2 Sugestões para Trabalhos Futuros

Com base neste trabalho, sugerem-se os seguintes itens para estudo em trabalhos futuros:

1. Avaliar a utilização das estratégias de integração numérica para outros modelos constitutivos (representando a não linearidade física do material) já existentes no sistema INSANE.
2. Aplicar e avaliar a utilização das estratégias de integração numérica e de transferência de dados entre pontos de integração em problemas de propagação de trinca coesiva em que a ponta da trinca possa ocorrer no interior do elemento finito.
3. Implementar outras estratégias de integração numérica propostas na literatura e comparar a eficiência das mesmas com a subdivisão de elementos e mapeamento dos pontos de integração.
4. Expandir as estratégias para análises em três dimensões.
5. Adaptar o acesso à implementação realizada para o pré-processador gráfico do INSANE, facilitando a entrada de dados e deixando-a mais intuitiva ao usuário.

Referências Bibliográficas

- Alves, P. D., 2012. Estratégia global-local aplicada ao método dos elementos finitos generalizados. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Babuška, I. e Banerjee, U., 2012. ‘Stable Generalized Finite Element Method (SG-FEM)’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 201-204(1), pp. 91–111.
- Babuška, I., Caloz, G. e Osborn, J. E., 1994. ‘Special Finite Element Methods for a Class of Second Order Elliptic Problems with Rough Coefficients’. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 31(4), pp. 945–981.
- Barros, F. B., 2002. Métodos Sem Malha e Métodos dos Elementos Finitos Generalizados em Análise Não-Linear de Estruturas. Tese de Doutorado, EESC - USP, São Carlos, SP, Brasil.
- Bathe, K., 2014. *Finite Element Procedures*. K.J. Bathe, Watertown, MA.
- Bažant, Z. P. e Jirásek, M., 2002. ‘Nonlocal Integral Formulations of Plasticity and Damage: Survey of Progress’. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 128(11), pp. 1119–1149.
- Béchet, E., Minnebo, H., Moës, N. e Burgardt, B., 2005. ‘Improved implementation and robustness study of the X-FEM for stress analysis around cracks’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 64(8), pp. 1033–1056.
- Belytschko, T. e Black, T., 1999. ‘Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 45(5), pp. 601–620.

- Belytschko, T., Moës, N., Usui, S. e Parimi, C., 2001. ‘Arbitrary discontinuities in finite elements’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 50(4), pp. 993–1013.
- Boone, T. e Ingraffea, A. R., (1987), Simulation of the fracture process at rock interfaces, *em* ‘Proceedings of the fourth International Conference in Numerical Methods in Fracture Mechanics’, pp. 519–531.
- Cano, A. e Moreno, C., 2015. ‘A new method for numerical integration of singular functions on the plane’. *Numerical Algorithms*, vol. 68(3), pp. 547–568.
- Carreira, D. J. e Chu, K. H., 1985. ‘Stress-strain relationship for plain concrete in compression’. *American Concrete Institute Journal*, vol. 6(82), pp. 797–804.
- Chessa, L., Wang, H. e Belytschko, T., 2003. ‘On the construction of blending elements for local partition of unity enriched finite elements’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 57(7), pp. 1015–1038.
- Dolbow, J., Moës, N. e Belytschko, T., 2000. ‘Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method’. *Finite Element in Analysis and Design*, vol. 36(3), pp. 235–260.
- Duarte, C. A., Babuška, I. e Oden, J. T., 2000. ‘Generalized finite element methods for three-dimensional structural mechanics problems’. *Computers & Structures*, vol. 77(2), pp. 215–232.
- Duarte, C. A. e Kim, D. J., 2008. ‘Analysis and applications of a generalized finite element method with global-local enrichment functions’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 197(6-8), pp. 487–504.
- Duarte, C. A. M. e Oden, J. T., 1996a. ‘H-p clouds-an h-p meshless method’. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, vol. 12(6), pp. 673–705.
- Duarte, C. A. e Oden, J. T., (1995), Hp clouds - a meshless method to solve boundary-value problem, Technical report, TICAM, The University of Texas at Austin. Technical Report.

- Duarte, C. A. e Oden, J. T., 1996b. ‘An h-p adaptive method using cloud’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139, pp. 237–262.
- Duffy, M. G., 1982. ‘Quadrature over a pyramid or cube of integrands with a singularity at a vertex’. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 19(6), pp. 1260–1262.
- Erdogan, F. e Sih, G. C., 1963. ‘On the Crack Extension in Plates Under Plane Loading and Transverse Shear’. *Journal of Basic Engineering*, vol. 85(4), pp. 519.
- Fonseca, F. T., 2008. Sistema computacional para análise dinâmica geometricamente não-linear através do método dos elementos finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Fonseca, G. M., 2019. Propagação de trincas em meios elásticos lineares via método dos elementos finitos generalizados com estratégia global-local automatizada. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Fries, T. P. e Belytschko, T., 2010. ‘The extended / generalized finite element method : An overview of the method and its applications’. *Review Literature And Arts Of The Americas*, (April), pp. 253–304.
- Fuina, J. S., 2004. Métodos de controle de deformações para análise não-linear de estruturas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Griffith, A. A., 1920. ‘The extended / generalized finite element method : An overview of the method and its applications’. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, vol. 221(582-593), pp. 163–198.
- Gupta, V. e Duarte, C. A., 2016. ‘On the enrichment zone size for optimal convergence rate of the Generalized/Extended Finite Element Method’. *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 72(1), pp. 481–493.

- Gupta, V., Duarte, C. A., Babuška, I. e Banerjee, U., 2013. ‘A stable and optimally convergent generalized FEM (SGFEM) for linear elastic fracture mechanics’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 266(1), pp. 23–39.
- Gupta, V., Duarte, C. A., Babuška, I. e Banerjee, U., 2015. ‘Stable GFEM (SGFEM): Improved conditioning and accuracy of GFEM/XFEM for three-dimensional fracture mechanics’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 289(1), pp. 355–386.
- Hillerborg, A., Modéer, M. e Petersson, P. E., 1976. ‘Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements’. *Cement and Concrete Research*, vol. 6(6), pp. 773–781.
- Huang, R., Sukumar, N. e Prévost, J. H., 2003. ‘Modeling quasi-static crack growth with the extended finite element method Part II: Numerical applications’. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 40(26), pp. 7539–7552.
- Iarve, E. V., 2003. ‘Mesh independent modelling of cracks by using higher order shape functions’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 56(6), pp. 869–882.
- Ingraffea, A. R. e Wawrzynek, P. A., 2004. ‘Computational Fracture Mechanics: A survey of the field’. *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, vol. 55(July), pp. 321–334.
- Jirásek, M., 2011. ‘Non-local damage mechanics with application to concrete’. *Revue Française de Génie Civil*, vol. 8(5-6), pp. 683–707.
- Karihaloo, B. L., 1995. *Fracture Mechanics and Structural Concrete*. Longman Scientific & Technical.
- Laborde, P., Pommier, J., Renard, Y. e Salaün, M., 2005. ‘High-order extended finite element method for cracked domains’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 64(3), pp. 354–381.

- Malekan, M., 2017. Crack Propagation Modeling in Plane Structures Using Two-Scale Generalized/Extended Finite Element Method. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Melenk, J. M. e Babuška, I., 1996. ‘The Partition of Unit Finite Element Method: basic Theory and Applications’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139(1), pp. 289–314.
- Moës, N., Dolbow, J. e Belytschko, T., 1999. ‘A finite element method for crack growth without remeshing’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 46(1), pp. 131–150.
- Most, T. e Bucher, C., 2006. ‘Energy-based simulation of concrete cracking using an improved mixed-mode cohesive crack model within a meshless discretization’. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 31(2), pp. 285–305.
- Nagarajan, A. e Mukherjee, S., 1993. ‘A mapping method for numerical evaluation of two-dimensional integrals with $1/r$ singularity’. *Computational Mechanics*, vol. 12(1-2), pp. 19–26.
- Natarajan, S., Bordas, S. e Mahapatra, D., 2009. ‘Numerical integration over arbitrary polygonal domains based on Schwarz-Christoffel conformal mapping’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 80(1), pp. 103–134.
- Noor, A. K., 1986. ‘Global-local methodologies and their application to nonlinear analysis’. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 2, pp. 333–346.
- Oñate, E., 2009, *Structural Analysis with the Finite Element Method*, Vol. 1, International Center for Numerical Methods in Engineering, CIMNE, Capítulo Higher Order 2D Solid Elements: Shape Functions and Analytical Computation of Integrals.
- Oden, J. T. e Duarte, C. A., (1997), Chapter: clouds, cracks and FEM’s, *em* ‘Recent Developments in Innovative Applications in Computational Mechanics’, International Center for Numerical Methods in Engineering, CIMNE, pp. 302–321.

- Park, K., Pereira, J. P., Duarte, C. A. e Paulino, G. H., 2009. ‘Integration of singular enrichment functions in the generalized/extended finite element method for three-dimensional problems’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 78(10), pp. 1220–1257.
- Penna, S. S., 2007. Pós-processador para modelos bidimensionais não-lineares do método dos elementos finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Penna, S. S., 2011. Formulação Multipotencial para Modelos de Degradação Elástica: Unificação Teórica, Proposta de Novo Modelo, Implementação Computacional e Modelagem de Estruturas de Concreto. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Pereira, J. P., Duarte, C. A., Guoy, D. e Jiao, X., 2009. ‘hp-Generalized FEM and crack surface representation for non-planar 3-D cracks’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, (77), pp. 601–633.
- Portela, A., Aliabadi, M. H. e Rooke, D. P., 1992. ‘The dual boundary element method: effective implementation for cracked problems’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 33, pp. 1269–1287.
- Portela, A., Aliabadi, M. H. e Rooke, D. P., (1993), Dual boundary element analysis of fatigue crack growth, *em* ‘Advances in Boundary Element Methods for Fracture Mechanics’, Elsevier Applied Science, pp. 1–46.
- Rashid, Y. R., 1968. ‘Ultimate Strength Analysis of Prestressed Concrete Pressure Vessels’. *Nuclear Engineering and Design*, vol. 7(4), pp. 334–344.
- Shepard, M. S., Yehia, N. A. B., Burd, G. S. e Weidner, T. J., 1985. ‘Computational strategies for nonlinear and fracture mechanics problems: automatic crack propagation tracking’. *Computers & Structures*, vol. 20(1–3), pp. 211–223.
- Silva, L. L., 2016. Sistema gráfico interativo para análise de nucleação e propagação de trincas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.

- Stolarska, M., Chopp, D. L., Moës, N. e Belytschko, T., 2001. ‘Modelling crack growth by level sets in the extended finite element method’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 51(8), pp. 943–960.
- Strouboulis, T., Babuška, I. e Copps, K., 2000. ‘The design and analysis of the Generalized Finite Element Method’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 181(1), pp. 43–69.
- Strouboulis, T., Copps, K. e Babuška, I., 2000. ‘The generalized finite element method: an example of its implementation and illustration of its performance’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 47(8), pp. 1401–1417.
- Sukumar, N., Moës, N., Moran, B. e Belytschko, T., 2000. ‘Extended finite element method for three-dimensional crack modelling’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 48(11), pp. 1549–1570.
- Swenson, D. V. e Ingraffea, A. R., 1988. ‘Modeling mixed-mode dynamic crack propagation using finite elements: Theory and applications’. *Computational Mechanics*, vol. 3(1), pp. 381–397.
- Szabó, B. e Babuška, I., 1991. *Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, Inc.
- Tada, H., Paris, P. C. e Irwin, G. R., 2000. *The Stress Analysis of Cracks Handbook*. The American Society of Mechanical Engineers.
- Ventura, G. e Benvenuti, E., 2015. ‘Equivalent polynomials for quadrature in Heaviside function enriched elements’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 102(3-4), pp. 688–710.
- Ventura, G., Gracie, R. e Belytschko, T., 2009. ‘Fast integration and weight function blending in the extended finite element method’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 77(1), pp. 1–29.
- Winkler, B., Hofstetter, G. e Lehar, H., 2004. ‘Application of a constitutive model for concrete to the analysis of a precast segmental tunnel lining’. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 28, pp. 797–819.

- Wolff, K. P., 2010. Implementação computacional de um modelo de fissuração para o concreto baseado no método dos elementos finitos estendido (xfem). Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Yau, J. F., Wang, S. S. e Corten, H. T., 1980. 'A Mixed-Mode Crack Analysis of Isotropic Solids Using Conservation Laws of Elasticity'. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 47(2), pp. 335–341.