

**PROPAGAÇÃO DE TRINCAS EM MEIOS
ELÁSTICOS LINEARES VIA MÉTODO DOS
ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS
COM ESTRATÉGIA GLOBAL-LOCAL
AUTOMATIZADA**

Gabriela Marinho Fonseca

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

**PROPAGAÇÃO DE TRINCAS EM MEIOS ELÁSTICOS
LINEARES VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS
GENERALIZADOS COM ESTRATÉGIA
GLOBAL-LOCAL AUTOMATIZADA**

Gabriela Marinho Fonseca

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de “Mestre em Engenharia de Estruturas”.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Felício Bruzzi Barros
DEES - UFMG (Orientador)

Prof. Dr. Roque Luiz da Silva Pitangueira
DEES - UFMG

Prof. Dr. Rafael Marques Lins (à distância)
Divisão de Engenharia Aeronáutica - ITA

Eng. Humberto Alves da Silveira Monteiro
DEES - UFMG

Belo Horizonte, 25 de Fevereiro de 2019

F676p

Fonseca, Gabriela Marinho.

Propagação de trincas em meios elásticos lineares via método dos elementos finitos generalizados com estratégia global-local automatizada [manuscrito] / Gabriela Marinho Fonseca. – 2019.

104 f., enc.: il.

Orientador: Felício Bruzzi Barros.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Apêndices: f. 97-99.

Bibliografia: f. 100-104.

1. Engenharia de estruturas - Teses. 2. Método dos elementos finitos - Teses. 3. Mecânica da fratura - Teses. I. Barros, Felício Bruzzi. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. III. Título.

CDU: 624(043)

Índice

Índice	ii
Lista de Tabelas	v
Lista de Figuras	x
Lista de Abreviaturas e Siglas	xi
Lista de Símbolos	xii
Resumo	xvii
Abstract	xviii
Agradecimentos	xix
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Contextualização	1
1.2 Justificativa	4
1.3 Objetivos	5
1.3.1 Objetivo Geral	5
1.3.2 Objetivos Específicos	5
1.4 Organização do Texto	5
2 REVISÃO DA LITERATURA	7
2.1 Método dos Elementos Finitos Generalizados	7
2.1.1 Formulação do MEFG	8
2.1.2 Modelagem de Trincas através do MEFG	11
2.2 Método dos Elementos Finitos Generalizados com Enriquecimento Global-Local	13
2.2.1 Formulação do Problema Global Inicial	15
2.2.2 Formulação do Problema Local	16
2.2.3 Formulação do Problema Global Enriquecido	18
2.2.4 Ciclos Global-Local	19
2.3 Método dos Elementos Finitos Generalizados Estável	22
2.3.1 Formulação do MEFGE	23

3	ASPECTOS COMPUTACIONAIS	26
3.1	Geração Automatizada de Problemas Locais Bidimensionais Prescritos	27
3.2	Geração Automatizada de Problemas Locais Bidimensionais para a Descrição de Descontinuidades	34
3.3	Procedimento para a Propagação de Trincas Utilizando Problemas Locais Automatizados na Abordagem do MEFG ^{gl}	38
3.4	Procedimento para o Cálculo de Fatores de Intensidade de Tensão Segundo o Método da Integral de Interação	42
4	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	50
4.1	Considerações Iniciais	50
4.2	Simulações Utilizando a Abordagem Padrão do MEFG ^{gl}	52
4.2.1	Trinca de Borda em Modo I de Abertura	53
4.2.2	Trinca de Borda em Modo Misto de Abertura	64
4.2.3	Ensaio DCB Modificado	69
4.2.4	Trinca Inclinada em Modo Misto de Abertura	74
4.3	Simulações Utilizando a Abordagem do MEFGE ^{gl}	85
4.3.1	Trinca de borda em modo I de abertura – MEFGE ^{gl}	85
4.3.2	Trinca de borda em modo misto de abertura – MEFGE ^{gl}	89
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	94
5.1	Contribuições deste Trabalho	94
5.2	Sugestões para Trabalhos Futuros	96
A	Geometria Computacional no Sistema INSANE	97
	Referências Bibliográficas	100

Lista de Tabelas

3.1	Expressões para os campos de tensões e deslocamentos do estado 2, considerando as soluções assintóticas dos modos I e II de abertura. . .	45
4.1	Comparação entre os valores de K_I e K_{II} extraídos do modelo (considerando a solução do MEF G^{gl} sem enriquecimento polinomial no modelo global) e da solução de referência.	58
4.2	Comparação entre os valores de K_I e K_{II} extraídos do modelo (considerando a solução do MEF G^{gl} com enriquecimento polinomial no modelo global) e da solução de referência.	58
4.3	Comparação entre os valores de K_I extraídos do modelo (considerando um problema local fixo) e da solução de referência.	62
4.4	Comparação entre os valores de K_I e K_{II} obtidos com o MEF G^{gl} e a solução de referência.	66
4.5	Valores da energia de deformação extraídos do modelo e erros em relação à solução de referência.	68
4.6	Comparação entre os valores de K_I e K_{II} extraídos do modelo (considerando a estratégia do problema local automatizado) e da solução de referência.	76
4.7	Comparação entre os valores de K_I e K_{II} extraídos do modelo (considerando a estratégia do problema local fixo) e da solução de referência.	79
4.8	Comparação entre os valores de K_I e K_{II} extraídos do modelo (considerando a estratégia do problema local automatizado e malha irregular) e da solução de referência.	83
4.9	Comparação entre os valores de K_I e K_{II} extraídos do modelo (considerando a solução do MEF GE^{gl} com enriquecimento polinomial no modelo global) e da solução de referência.	87

4.10	Comparação entre os valores de K_I e K_{II} extraídos do modelo (considerando a solução do MEFGE ^{gl} sem enriquecimento polinomial no modelo global) e da solução de referência.	87
4.11	Comparação entre os valores de K_I e K_{II} extraídos com o MEFGE ^{gl} (considerando o enriquecimento polinomial no modelo global) e a solução de referência.	89
4.12	Comparação entre os valores de K_I e K_{II} extraídos com o MEFG ^{gl} e o MEFGE ^{gl} (sem o enriquecimento polinomial no modelo global) e a solução de referência.	90

Lista de Figuras

2.1	Estratégia de enriquecimento da nuvem ω_j (Barros, 2002).	9
2.2	Representação esquemática do enriquecimento global-local para um problema bidimensional. Os nós globais enriquecidos com a solução do problema local são destacados em amarelo. A presença da trinca no problema global inicial é meramente ilustrativa, uma vez que esta é representada cinematicamente pelo enriquecimento no problema local e no problema global enriquecido.	15
2.3	Processo de ciclos global-local para um passo de propagação genérico, no qual as condições de contorno para o problema local do ciclo $t + 1$ são obtidas da solução do problema global enriquecido do ciclo t	21
2.4	Classificação de elementos no MEFGE conforme o número de nós enriquecidos.	22
2.5	Obtenção de funções de forma do MEFGE. À esquerda, tem-se o enriquecimento padrão utilizado no MEFGE. No centro, exibe-se a obtenção do enriquecimento modificado. À direita, apresenta-se construção da função de forma do MEFGE (Gupta et al., 2013).	24
3.1	Exemplo do processo de geração automatizada de um modelo local prescrito a partir de um modelo global fornecido pelo usuário.	30
3.2	Contornos do problema local em relação ao contorno do problema global. Apenas a região destacada em azul recebe as condições de contorno provenientes do problema global.	31
3.3	Sequência de verificações sobre as arestas de elementos locais para a imposição das condições de contorno provenientes do problema global.	31
3.4	Relação entre os elementos globais e locais de um problema bidimensional.	32

3.5	Seleção dos nós globais a serem enriquecidos com a solução do problema local.	33
3.6	Exemplo do processo de geração automatizada de um modelo local que engloba uma descontinuidade. A representação da trinca na malha global inicial é meramente ilustrativa.	36
3.7	Exemplo do mecanismo de propagação de uma trinca pré-existente utilizando um problema local adaptativo.	40
3.8	Ilustração do incremento (Δ_a) e do ângulo (θ) que determina a orientação do novo segmento de trinca.	41
3.9	Sistema de coordenadas adotado para o cálculo da Integral de Interação, considerando uma trinca representada em vermelho.	44
3.10	Exemplo do processo de definição dos elementos que irão compor o domínio de integração para o cálculo da Integral de Interação. Os elementos selecionados são destacados em azul.	47
4.1	Representação da chapa tracionada contendo uma trinca de borda, na qual $H = 10,0$, $B = 10,0$, $a = 0,835$ e $\sigma = 1,0$ (em unidades consistentes).	53
4.2	Representação das malhas utilizadas na análise do MEF ^{gl} para a geometria da Figura 4.1, considerando o primeiro passo da propagação. (a) Problema global inicial. (b) Problema local. (c) Problema global enriquecido, com os nós enriquecidos com a solução local destacados em amarelo.	54
4.3	Detalhe da malha local gerada para o primeiro passo da propagação. Em azul, os nós enriquecidos com a função de Heaviside. Em verde, os nós enriquecidos com as funções de singularidade.	55
4.4	Fatores de intensidade de tensão avaliados ao longo da propagação da trinca, considerando a solução do MEF ^{gl} (sem enriquecimento polinomial no modelo global) e a solução de referência.	56
4.5	Fatores de intensidade de tensão avaliados ao longo da propagação da trinca, considerando a solução do MEF ^{gl} (com enriquecimento polinomial no modelo global) e a solução de referência.	57
4.6	Representação de alguns passos da trajetória de propagação da trinca.	60

4.7	Representação das malhas utilizadas na análise do MEF ^{gl} , considerando um problema local fixo. Representa-se o passo correspondente ao entalhe inicial, em analogia com a Figura 4.2. (a) Problema global enriquecido, com os nós enriquecidos com a solução local destacados em amarelo. (b) Problema local.	61
4.8	Tempo total gasto no processamento de dez passos de propagação da trinca.	63
4.9	Representação da chapa solicitada por cisalhamento contendo uma trinca de borda, na qual $H = 8,0$, $B = 7,0$, $a = 3,5$ e $\tau = 1,0$ (em unidades consistentes).	64
4.10	Representação das malhas utilizadas na análise do MEF ^{gl} para a geometria da Figura 4.9. (a) Problema global inicial. (b) Problema local. (c) Problema global enriquecido, com os nós enriquecidos com a solução local destacados em amarelo.	65
4.11	Detalhe da malha local gerada para o problema da Figura 4.9. Em azul, os nós enriquecidos com a função de Heaviside. Em verde, os nós enriquecidos com as funções de singularidade.	66
4.12	Evolução dos erros avaliados em relação à solução de referência ao longo da execução dos ciclos global-local.	67
4.13	Representação da viga engastada submetida à forças concentradas na extremidade livre. Os parâmetros indicados são $H = 3,94$, $L = 11,8$, $P = 197$, $a = 3,94$ e $\Delta a = 0,3$ (em unidades consistentes). O entalhe inicial é posicionado na metade da altura da viga e o ângulo $\Delta\theta$ assume os valores de $1,43$, $2,86$ e $5,71^\circ$	69
4.14	Malhas utilizadas na análise do MEF ^{gl} para a geometria da Figura 4.13. (a) Problema global inicial. (b) Problema local. (c) Problema global enriquecido, com os nós enriquecidos com a solução local destacados em amarelo.	70
4.15	Detalhe da malha local gerada para o primeiro passo da propagação (para o caso de $\Delta\theta = 5,71^\circ$). Em azul, os nós enriquecidos com a função de Heaviside. Em verde, os nós enriquecidos com as funções de singularidade.	71
4.16	Trajetórias de propagação do entalhe inicial considerando três valores do ângulo $\Delta\theta$. O sistema de eixos adotado é o mesmo da Figura 4.13.	72

4.17	Representação de alguns passos da trajetória de propagação da trinca, considerando o ângulo $\Delta\theta = 5,71^\circ$	73
4.18	Representação da chapa tracionada contendo uma trinca inclinada em seu centro. Os parâmetros indicados são $L = 5,0$, $a = 0,5$ e $\sigma = 1,0$ (em unidades consistentes).	74
4.19	Malhas utilizadas na análise do MEF G^{gl} para o primeiro passo da propagação. (a) Problema global inicial. (b) Problema local (para $\beta = 30^\circ$). (c) Problema global enriquecido, com os nós enriquecidos com a solução local destacados em amarelo.	75
4.20	Malha local gerada para o primeiro passo da propagação (com $\beta = 30^\circ$). Em azul, os nós enriquecidos com a função de Heaviside. Em verde, os nós enriquecidos com as funções de singularidade.	76
4.21	Representação de alguns passos da trajetória de propagação da trinca (através do problema local automatizado), considerando o ângulo inicial $\beta = 30^\circ$	78
4.22	Representação das malhas utilizadas na análise do MEF G^{gl} , considerando um problema local fixo. (a) Problema global enriquecido, com os nós enriquecidos com a solução local destacados em amarelo. (b) Problema local.	79
4.23	Tempo total gasto no processamento de dez passos de propagação da trinca a partir do entalhe inicial, considerando as abordagens de problema local fixo e automatizado.	80
4.24	Fatores de intensidade de tensão avaliados para uma faixa de valores do ângulo β	81
4.25	Malha global irregular definida para a análise do MEF G^{gl}	82
4.26	Representação de alguns passos da trajetória de propagação da trinca, considerando uma malha irregular e o ângulo inicial $\beta = 30^\circ$	84
4.27	Fatores de intensidade de tensão avaliados ao longo da propagação da trinca (através do MEF G^{gl} e do MEF GE^{gl}), considerando o enriquecimento polinomial de primeiro grau no modelo global.	86
4.28	Fatores de intensidade de tensão avaliados ao longo da propagação da trinca (através do MEF G^{gl} e do MEF GE^{gl}), sem o enriquecimento polinomial de primeiro grau no modelo global.	88

4.29	Evolução dos erros avaliados em relação à solução de referência ao longo da execução dos ciclos global-local, considerando as soluções do $MEFG^{gl}$ e o $MEFGE^{gl}$ (sem o enriquecimento polinomial no problema global).	91
4.30	Energia de deformação avaliada em função do número de ciclos global-local. Consideram-se as soluções do $MEFG^{gl}$ e o $MEFGE^{gl}$, com a inclusão do enriquecimento polinomial de primeiro grau no modelo global.	92
4.31	Energia de deformação avaliada em função do número de ciclos global-local. Consideram-se as soluções do $MEFG^{gl}$ e o $MEFGE^{gl}$, sem a inclusão do enriquecimento polinomial de primeiro grau no modelo global.	92
A.1	Métodos da classe <i>ComputationalGeometry</i> empregados na presente implementação.	98

Lista de Abreviaturas e Siglas

MEF Método dos Elementos Finitos

MEFG Método dos Elementos Finitos Generalizados

MEFG^{gl} Método dos Elementos Finitos Generalizados com Enriquecimento Global-
Local

MEFGE Método dos Elementos Finitos Generalizados Estável

MEFGE^{gl} Método dos Elementos Finitos Generalizados com Enriquecimento Global-
Local Estável

INSANE *INteractive Structural ANalysis Environment*

PU Partição da Unidade

POO Programação Orientada a Objetos

Q8 Elemento finito quadrilateral de 8 nós

XFEM *eXtended Finite Element Method*

Lista de Símbolos

Capítulo 2

ω_j	Nuvem de elementos que concorrem no nó j
\mathbf{x}_j	Vetor de coordenadas de um nó j
$N_j(\mathbf{x})$	Funções de Lagrange lineares
I_j	Conjunto de funções de enriquecimento do MEF
L_{ji}	Função de enriquecimento do MEF
$\{\phi_{ji}\}_{i=1}^{q_j}$	Função de forma do MEF
$\tilde{u}(x)$	Aproximação genérica do MEF
u_j	Parâmetros nodais associados ao MEF
b_{ji}	Parâmetros nodais associados ao MEF
$H(x)$	Função de Heaviside
ξ	Posição da descontinuidade
$u_x^{(1)}$	Função de singularidade na direção x para o modo I de abertura
$u_x^{(2)}$	Função de singularidade na direção x para o modo II de abertura
$u_y^{(1)}$	Função de singularidade na direção y para o modo I de abertura
$u_y^{(2)}$	Função de singularidade na direção y para o modo II de abertura

r	Coordenada polar com origem na ponta da trinca
θ	Coordenada polar com origem na ponta da trinca
$\lambda^{(1)}$	Constante da função de singularidade para o modo I de abertura
$\lambda^{(2)}$	Constante da função de singularidade para o modo II de abertura
$Q^{(1)}$	Constante da função de singularidade para o modo I de abertura
$Q^{(2)}$	Constante da função de singularidade para o modo II de abertura
κ	Constante determinada a partir do coeficiente de Poisson
$\bar{\Omega}_G$	Domínio global com a inclusão do seu contorno
Ω_G	Domínio global
\cap	Interseção de conjuntos
\cup	União de conjuntos
$\partial\Omega_G$	Contorno do domínio global
\mathbb{R}^n	Domínio real de n dimensões
$\partial\Omega_G^u$	Contorno do domínio global no qual são prescritos deslocamentos
$\partial\Omega_G^\sigma$	Contorno do domínio global no qual são prescritas forças
\emptyset	Conjunto vazio
\setminus	Subtração de conjuntos
\mathbf{n}	Vetor unitário normal
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor de tensões
$\bar{\mathbf{t}}$	Vetor das tensões de superfície prescritas

\mathbf{C}	Tensor constitutivo de rigidez elástica
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Tensor de deformações
∇	Operador gradiente
$\tilde{\mathbf{u}}_G^0$	Solução aproximada do problema global inicial
$\tilde{\mathcal{X}}_G^0(\Omega_G)$	Discretização do espaço de Hilbert $\mathcal{H}^1(\Omega_G)$
$\mathcal{H}^1(\Omega_G)$	Espaço de Hilbert definido em Ω_G
\forall	Para qualquer que seja
\mathbf{v}_G^0	Função tentativa do problema global inicial
Ω_L	Domínio local
$\tilde{\mathbf{u}}_L$	Solução aproximada do problema local
$\tilde{\mathcal{X}}_L(\Omega_L)$	Discretização do espaço de Hilbert $\mathcal{H}^1(\Omega_L)$
$\mathcal{H}^1(\Omega_L)$	Espaço de Hilbert definido em Ω_L
\mathbf{v}_L	Função tentativa do problema local
$\partial\Omega_L$	Contorno do domínio local
κ	Parâmetro de penalidade
E	Módulo de Elasticidade Longitudinal
n	Número de dimensões espaciais
V_0	Volume do elemento utilizado no sistema paramétrico
J	Jacobiano do elemento global
$\tilde{\mathbf{u}}_G^E$	Solução aproximada do problema global enriquecido

$\tilde{\mathcal{X}}_G^E(\Omega_G)$	Discretização do espaço de Hilbert $\mathcal{H}^1(\Omega_G)$
\mathbf{v}_G^E	Função tentativa do problema global enriquecido
$\tilde{\mathbf{u}}_G^{k,t}$	Solução aproximada do problema global no ciclo t e passo k
\tilde{L}_{ji}	Função enriquecedora do MEFGE
$I_{\omega_j}(L_{ji})$	Função interpoladora do MEFGE
$\{\tilde{\phi}_{ji}\}_{i=1}^{q_j}$	Função de forma do MEFGE

Capítulo 3

K_I	Fator de Intensidade de Tensão para o modo I de abertura
K_{II}	Fator de Intensidade de Tensão para o modo II de abertura
θ	Ângulo que define a direção da propagação
Δa	Incremento de trinca
J	Integral J
δ_{1j}	Delta de Kronecker
$J^{(1,2)}$	Integral J para a superposição dos estados 1 e 2
x_1	Eixo das abscissas do sistema de coordenadas cartesiano com origem na ponta da trinca
x_2	Eixo das ordenadas do sistema de coordenadas cartesiano com origem na ponta da trinca
$\sigma_{ij}^{(1)}$	Campo de tensões do estado 1
$\sigma_{ij}^{(2)}$	Campo de tensões do estado 2
$\epsilon_{ij}^{(1)}$	Campo de deformações do estado 1

$\epsilon_{ij}^{(2)}$	Campo de deformações do estado 2
$u_i^{(1)}$	Campo de deslocamentos do estado 1
$u_i^{(2)}$	Campo de deslocamentos do estado 2
Γ	Contorno de integração da Integral J
$I^{(1,2)}$	Integral de Interação para os estados 1 e 2
$W^{(1,2)}$	Energia de Deformação de Interação para os estados 1 e 2
q	Função de ponderação
N_{PG}	Número total de pontos de Gauss
w_{PG}	Peso do ponto de Gauss
$ \mathbf{J} $	Determinante da matriz jacobiana

Capítulo 4

K_I^t	Fator de Intensidade de Tensão para o modo I de abertura avaliado no ciclo t
K_I^{t-1}	Fator de Intensidade de Tensão para o modo I de abertura avaliado no ciclo $t - 1$

Resumo

Esta dissertação de mestrado apresenta a automatização da estratégia global-local sob a abordagem do Método dos Elementos Finitos Generalizados, avaliando seu desempenho na simulação de problemas bidimensionais da Mecânica da Fratura Linear Elástica. O Método dos Elementos Finitos Generalizados é um método numérico estabelecido como alternativa ao Método dos Elementos Finitos, sendo particularmente eficaz na análise de problemas cuja solução não é suave. Propõe-se uma estratégia automatizada de construção de problemas locais, cujas soluções enriquecem a aproximação de um problema global único, tendo em vista a redução da interferência do usuário na simulação da propagação de trincas. A implementação computacional atuou na expansão do sistema INSANE (*INteractive Structural ANalysis Environment*), um projeto de software livre desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais. Novos procedimentos foram incorporados ao sistema, viabilizando a construção automatizada de problemas locais capazes de acompanhar a trajetória descrita ao longo do processo de crescimento de uma trinca. A implementação foi validada através da simulação numérica de problemas com solicitações e geometrias diversas, buscando a correta obtenção de fatores de intensidade de tensão nos modos I e II de abertura de trinca. O desempenho do método foi mensurado com base nos resultados obtidos em energia de deformação, fatores de intensidade de tensão e trajetória de propagação da trinca. Foram consideradas as influências dos ciclos de análise global-local, enriquecimento polinomial e topologia da malha. Buscou-se, adicionalmente, avaliar o efeito da abordagem estável do Método dos Elementos Finitos Generalizados sobre o enriquecimento obtido da solução numérica do problema local.

Palavras-Chave: Método dos Elementos Finitos Generalizados, Enriquecimento Global-Local, Método dos Elementos Finitos Generalizados Estável, Mecânica da Fratura.

Abstract

This master's thesis presents the automation of the global-local strategy under the Generalized Finite Element Method approach, evaluating its performance in the analysis of two-dimensional problems of Linear Elastic Fracture Mechanics. The Generalized Finite Element Method is a numerical method established as an alternative to the Finite Element Method (MEF), being particularly effective for problems with non-smooth solutions. An automated strategy for building local problems, whose solution enriches the approximation of an unique global problem, is proposed, aiming to reduce user interference in the simulation of crack propagation. The implementation is carried out as an expansion of the INSANE (INteractive Structural ANALYSIS Environment) system, a free software project developed in the Department of Structural Engineering of the Federal University of Minas Gerais. New procedures were incorporated into the system, making possible the definition of adaptive local problems, able to follow the path described during the process of crack growth. The implementation was validated by the numerical simulation of problems with different geometries and loadings, seeking the correct extraction of stress intensity factors for crack opening modes I and II. The method performance was measured based on the results in strain energy, stress intensity factors and crack path. Influences of the global-local analysis cycles, polynomial enrichment and mesh topology were considered. Additionally, the effect of the Stable Generalized Finite Element Method approach on the enrichment obtained from the local problem solution is evaluated.

Keywords: Generalized Finite Element Method, Global-Local Enrichment, Stable Generalized Finite Element Method, Fracture Mechanics.

Agradecimentos

Aos meus pais, Geraldo e Jussara, pelo apoio e carinho dedicados em mais uma etapa de minha vida.

Ao Professor Felício Bruzzi Barros, orientador e exemplo desde os tempos da graduação, por toda a dedicação e paciência ao longo de mais um trabalho compartilhado. Agradeço pela sabedoria transmitida e por me proporcionar um enorme crescimento profissional e pessoal.

Ao colega Humberto Alves da Silveira Monteiro, cujas ideias, apoio intelectual e amizade foram imprescindíveis para o sucesso deste trabalho.

À amiga e companheira de trabalho Larissa Novelli, por dividir comigo as angústias e vitórias desta pesquisa. Sua companhia foi um enorme presente da vida acadêmica.

Ao Professor Samuel Silva Penna, pela ajuda essencial em diversos momentos deste mestrado.

Aos colegas que me antecederam no grupo do INSANE (em particular à querida Thaianne Oliveira), cujo trabalho em equipe proporcionou todo o desenvolvimento da minha pesquisa.

Aos amigos que trouxeram felicidade e conforto à minha vida em Belo Horizonte, tornando-se mais do que simplesmente colegas de curso. Em especial, agradeço o carinho e a companhia de João Victor Dias.

A todos os professores e funcionários do Departamento de Engenharia de Estruturas da UFMG, pela contribuição fundamental ao longo da minha trajetória acadêmica.

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

1.1 Contextualização

Uma grande variedade de problemas de Engenharia pode ser descrita por modelos matemáticos nos quais variáveis de estado sofrem grandes variações ao longo de pequenas extensões do domínio. Devido à complexidade do cálculo de uma solução analítica, métodos numéricos têm sido amplamente utilizados para fornecer soluções aproximadas capazes de reproduzir corretamente o fenômeno físico de interesse. Na modelagem desses problemas, entretanto, a solução numérica resultante pode envolver descontinuidades, singularidades e outros gradientes elevados. Na esfera da Engenharia de Estruturas, são encontrados exemplos de tais soluções em problemas envolvendo concentrações de tensões e geometrias complexas – ou em razão da presença de trincas, orifícios e inclusões no domínio.

Para o tratamento de problemas cuja solução não é suave, o já consolidado Método dos Elementos Finitos (MEF) apresenta limitações. A estratégia baseada na construção de espaços polinomiais para a aproximação exige processo oneroso de geração da malha, sendo necessário elevado nível de refinamento para capturar as singularidades das grandezas envolvidas. Torna-se necessário, portanto, o desenvolvimento de métodos alternativos que utilizem abordagens mais adequadas para essa classe de problemas.

Nesse contexto, o Método dos Elementos Finitos Generalizados – MEFG (Strouboulis et al., 2000), (Duarte et al., 2000) constitui uma alternativa ao MEF convencional, uma vez que define a aproximação com certa liberdade em relação à malha de elementos finitos. O MEFG pode ser considerado um produto das formulações de métodos sem malha dos anos 90 (Alves, 2012), distinguindo-se destes ao utilizar as funções de forma do MEF na definição da Partição da Unidade (PU). A aproximação é construída sobre uma malha de elementos finitos, valendo-se da estrutura computacional já desenvolvida para a forma convencional do MEF. Na estratégia denominada enriquecimento, as funções de PU são multiplicadas por funções previamente determinadas (funções enriquecedoras), com o objetivo de aprimorar a representação do comportamento esperado do problema analisado. Cabe ressaltar que o MEFG e o XFEM (*eXtended Finite Element Method*), proposto em paralelo por Belytschko e Black (1999), são entendidos atualmente como métodos equivalentes, conforme Belytschko et al. (2009).

Na aproximação do MEFG, o uso de funções enriquecedoras previamente definidas permite a obtenção de respostas para modelos estruturais complexos. Entretanto, o refinamento da malha ainda se faz necessário, especialmente em problemas tridimensionais, quando existem fenômenos concentrados em pequenas regiões do domínio (que ocorrem, por exemplo, em problemas da Mecânica da Fratura). O tratamento de modelos que envolvem a interação entre dois níveis de discretização motivou o desenvolvimento do Método dos Elementos Finitos Generalizados com Enriquecimento Global-Local (Duarte e Kim, 2008) – identificado aqui como MEFG^{gl} – que explora a flexibilidade do enriquecimento do MEFG com o emprego de funções enriquecedoras construídas em cada posição de interesse a partir de soluções geradas em subregiões previamente definidas. A estratégia do MEFG^{gl} é dividida em três etapas, sendo a primeira correspondente a uma discretização grosseira de todo o domínio. Na segunda etapa, um problema local, abrangendo apenas a região do domínio que contém o fenômeno que se deseja representar, é resolvido utilizando

como condições de contorno a solução da primeira etapa. A discretização do problema local deve procurar descrever o referido fenômeno de maneira mais precisa. A resposta numérica deste problema local é, então, introduzida em forma de enriquecimento na terceira etapa da análise, contribuindo para uma representação mais adequada da resposta global do problema.

Diversas simulações numéricas já foram realizadas no âmbito do MEF^{gl}, comprovando o êxito da estratégia e sua pertinência na análise de problemas marcados pela existência de trincas ou defeitos no domínio. Existe, ainda, um importante campo de pesquisa no que diz respeito à análise da propagação de trincas no meio material, seja no contexto da Mecânica da Fratura Linear Elástica, seja para meios parcialmente frágeis. Justifica-se, portanto, a investigação desse fenômeno através de diferentes propostas na esfera da abordagem Global-Local, sendo necessários recursos computacionais adequados.

O sistema computacional INSANE (*IN*teractive *Str*uctural *AN*alysis *En*viroment) corresponde a um projeto de software livre, implementado em linguagem Java segundo o paradigma de Programação Orientada a Objetos (POO), desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais. Esse sistema dispõe de recursos diversos para a análise estrutural, incluindo classes específicas para análises via MEF^{gl} e MEF^{gl}. No contexto do sistema INSANE, o presente trabalho amplia o desenvolvimento de Malekan (2017) para o estudo da propagação de trincas em análise linear elástica através do MEF^{gl}. Particularmente, avalia-se uma sugestão do autor (também proposta, independentemente, por Pereira et al. (2012)) no que diz respeito à modelagem desse processo: viabilizar a implementação de problemas locais de forma automática, que se atualizem com a posição da ponta da trinca sem a necessidade de intervenção do usuário. A proposta se insere como expansão da plataforma INSANE, adicionando mais uma funcionalidade ao sistema que configura um ambiente computacional segmentado, amigável a mudanças e escalável em complexidade.

1.2 Justificativa

O projeto de uma estrutura deve considerar, além dos critérios clássicos de resistência baseados na análise da distribuição de tensões, a possibilidade de falhas decorrentes da presença de defeitos no material. Devem ser avaliados os níveis de tensão que levam ao surgimento desses defeitos e adotada uma margem de segurança adequada para que a solicitação em serviço não exceda o limite previsto. É de extrema relevância, também, avaliar o efeito da propagação de defeitos pré-existentes no material, situação que ocorre com grande frequência no cotidiano da Engenharia e que pode ser analisada à luz da Mecânica da Fratura.

A análise estrutural através do MEF clássico, conforme já foi discutido, apresenta limitações para o tratamento do fenômeno da fissuração. Nas últimas décadas, o desenvolvimento de métodos numéricos alternativos (dentre eles, o MEFG em sua abordagem padrão) contribuiu para o estudo desse fenômeno, fornecendo resultados mais precisos valendo-se de modelos com malhas menos refinadas. Entretanto, a distinção clara entre o fenômeno localizado e o restante do domínio, neste caso, instiga o uso de métodos que considerem diferentes níveis de discretização em sua formulação, como é o caso do MEFG^{gl}. Justifica-se, portanto, a escolha do MEFG^{gl} como instrumento para o estudo da propagação de trincas neste trabalho.

Já na esfera do MEFG^{gl}, a estratégia de problemas locais automatizados, proposta neste trabalho, viabiliza a análise da propagação de trincas através de um processamento com melhor desempenho computacional, fato este confirmado por Pereira et al. (2012). Além disso, torna-se possível acompanhar o caminho seguido pela trinca ao longo da propagação, permitindo a descrição de exemplos com trajetórias mais complexas – ou até mesmo casos nos quais a trajetória não é previamente conhecida.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo Geral

O objetivo geral deste trabalho consiste em contribuir para a análise da propagação de trincas através do MEF^{gl} no sistema INSANE, buscando a diminuição da interferência do usuário e um processamento com menor custo computacional.

1.3.2 Objetivos Específicos

Como objetivos específicos deste trabalho, no contexto do sistema INSANE, podem ser citados:

1. Automatização da construção de problemas locais e de sua discretização a partir da definição de critérios associados à sua localização e ao tamanho de seu domínio.
2. Implementação de problemas locais automatizados na abordagem do MEF^{gl}, que possam acompanhar a propagação de uma trinca, dentro do contexto da Mecânica da Fratura Linear Elástica.
3. Utilização da abordagem estável do MEF^{gl} (MEFGE) sobre o enriquecimento obtido da solução numérica do problema local, valendo-se do trabalho de Oliveira (2018).

1.4 Organização do Texto

O presente trabalho é organizado em 5 capítulos e 1 apêndice, conforme descrito a seguir.

O Capítulo 1 apresenta uma breve introdução a este trabalho, contendo uma contextualização, a justificativa e os objetivos principais da pesquisa desenvolvida.

O Capítulo 2 compreende uma revisão da literatura, abrangendo os principais aspectos dos métodos numéricos aqui discutidos.

No Capítulo 3, são apresentados os aspectos computacionais a partir de uma descrição geral da implementação realizada e das novas funcionalidades adicionadas ao sistema INSANE.

O Capítulo 4 apresenta as simulações numéricas realizadas com o objetivo de validar a implementação executada, discutindo parâmetros relevantes em cada caso.

O Capítulo 5 sintetiza as considerações finais deste trabalho, denotando também propostas de desenvolvimento para trabalhos futuros.

Finalmente, o Apêndice A compreende uma breve descrição dos métodos de geometria computacional do sistema INSANE empregados no desenvolvimento deste trabalho.

Capítulo 2

REVISÃO DA LITERATURA

2.1 Método dos Elementos Finitos Generalizados

De acordo com Barros (2002), a denominação atual de “Método dos Elementos Finitos Generalizados” surgiu primeiramente em Melenk (1995). Como precursores do método, conforme Duarte et al. (2000), podem também ser citados:

- Babuška e colaboradores (Babuška et al. (1994), Babuška e Melenk (1997) e Melenk e Babuška (1996)), inicialmente sob a denominação de “Método dos Elementos Finitos Especiais” e “Método da Partição da Unidade”.
- Duarte e Oden (1995) na formulação do chamado “Método das Nuvens-*hp*”.

O conceito fundamental da aproximação do MEEG é o enriquecimento da Partição da Unidade (PU) com funções especiais previamente determinadas, escolhidas de acordo com o comportamento esperado para o problema de interesse. Segundo Duarte e Kim (2008), a grande vantagem do método reside em sua capacidade de utilizar funções enriquecedoras não-polinomiais – e até mesmo funções resultantes da solução de um problema de valor de contorno local – o que representa um grande avanço em relação ao MEF convencional.

Ainda que não possa ser considerado um método sem malha (Nguyen et al., 2008), o MEEG compartilha com métodos deste tipo a construção de uma aproximação na

qual se procura minimizar a influência da malha de elementos finitos. Baseando-se nas propostas do Método da Partição da Unidade e do Método das Nuvens- hp , estabelece-se uma malha de elementos que é utilizada na definição de uma PU, sobre a qual é realizado o enriquecimento da aproximação. A escolha das funções de forma convencionais do MEF para a PU preserva o caráter interpolador da aproximação e facilita a imposição das condições de contorno essenciais. Além disso, tal escolha evita os problemas de integração numérica comumente encontrados nos métodos sem malha (Strouboulis et al., 2000).

2.1.1 Formulação do MEFG

A estratégia de construção das funções de forma do MEFG é ilustrada na Figura 2.1, referente à aproximação de um domínio bidimensional. O termo nuvem (ω_j , na Figura 2.1(a)), herdado do Método das Nuvens- hp , representa no MEFG o conjunto de elementos finitos que compartilham o mesmo ponto nodal cujo vetor de coordenadas é \mathbf{x}_j . A Partição da Unidade é fornecida por elementos finitos convencionais – a exemplo das funções de Lagrange lineares (representadas por $N_j(\mathbf{x})$, na Figura 2.1(b)). Tais funções formam a base de uma PU, pois, em qualquer posição do domínio:

$$\sum_{j=1}^n N_j(\mathbf{x}) = 1 \quad (2.1)$$

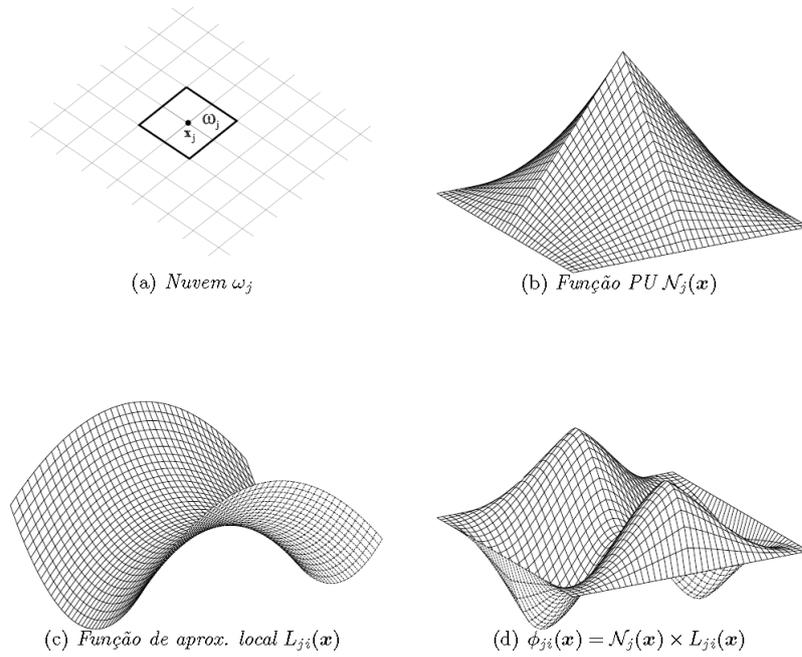


Figura 2.1: Estratégia de enriquecimento da nuvem ω_j (Barros, 2002).

O conjunto I_j de funções enriquecedoras (representadas na Figura 2.1(c)) é composto por q_j funções linearmente independentes definidas para cada nó \mathbf{x}_j :

$$I_j \stackrel{def}{=} \{L_{j1}(\mathbf{x}), L_{j2}(\mathbf{x}), \dots, L_{jq_j}(\mathbf{x})\} = \{L_{ji}(\mathbf{x})\}_{i=1}^{q_j} \quad (2.2)$$

com $L_{j1}(\mathbf{x}) = 1$.

As funções $L_{ji}(\mathbf{x})$ são, a princípio, quaisquer, podendo ser polinomiais ou não. Tratam-se de funções que constituem aproximações locais e devem representar adequadamente a solução sobre o suporte a elas associado (Barros, 2002).

Finalmente, as funções de forma $\phi_{ji}(x)$ do MEFG (representadas na Figura 2.1(d)) são definidas pela Partição da Unidade enriquecida, ou seja, pelo produto entre as funções da PU e as q_j funções enriquecedoras, associadas a cada nuvem ω_j :

$$\{\phi_{ji}\}_{i=1}^{q_j} = N_j(x) \times \{L_{ji}(x)\}_{i=1}^{q_j} \quad (2.3)$$

sem somatório em j .

Utilizando as funções de forma definidas na Equação (2.3), a aproximação genérica $\tilde{u}(x)$ do MEFG é construída por meio da seguinte combinação linear:

$$\tilde{u}(x) = \sum_{j=1}^N N_j(x) \left\{ u_j + \sum_{i=2}^{q_j} L_{ji}(x) b_{ji} \right\} \quad (2.4)$$

na qual u_j e b_{ji} são parâmetros nodais associados a cada componente $N_j(x)$ do MEF e $N_j(x)L_{ji}(x)$ do MEFG, respectivamente.

A função de forma do MEFG herda, portanto, o suporte compacto da PU e características importantes das funções enriquecedoras. Pela maneira como o enriquecimento é realizado, a aproximação global, obtida em um dado elemento pela combinação das funções produto relativas a cada nó, é construída sem penalizar a continuidade (do tipo C^0) entre os elementos, e, portanto, atende ao critério da conformidade (Barros, 2002).

Apesar de apresentar as vantagens previamente mencionadas, a construção das funções de forma do MEFG pode gerar espaços de aproximação linearmente dependentes, especialmente quando são utilizadas funções enriquecedoras polinomiais. A consequência imediata desse fato é a existência de uma matriz de rigidez semi-definida positiva, mesmo após a eliminação dos movimentos de corpo rígido (Barros, 2002). Tal problema pode ser contornado empregando-se a estratégia iterativa proposta por Strouboulis et al. (2000) e implementada no sistema INSANE por Alves (2012).

A possibilidade de existência de uma matriz de rigidez singular, no entanto, não reduz a potencialidade do MEFG. De fato, além da simplicidade com que se realiza o enriquecimento, novas funções podem ser introduzidas conforme o tipo de aplicação desejada, o que torna a aplicação do método especialmente interessante para problemas nos quais o campo de tensões apresente singularidades (Barros, 2002).

2.1.2 Modelagem de Trincas através do MEFG

A estratégia de enriquecimento do MEFG permite a modelagem de trincas de maneira não-geométrica, ou seja, sem a necessidade de inserir a descontinuidade como uma entidade geométrica no modelo (Silva, 2016). Trata-se de um modelo de representação cinemática, no qual a descontinuidade é embutida pela modificação da aproximação através do enriquecimento, conforme a classificação de Ingraffea e Wawrzynek (2004).

Visando evitar a necessidade de remalhamento do modelo, trincas podem ser representadas no MEFG por meio de combinações de funções enriquecedoras. No âmbito da Mecânica da Fratura Linear-Elástica, Moes et al. (1999) propuseram um esquema de enriquecimento que incorpora campos de descontinuidade e singularidade à aproximação. No sistema INSANE, esse esquema é empregado através da função de Heaviside e das funções de singularidade descritas a seguir.

A função de Heaviside, conforme Silva (2016), corresponde a um enriquecimento do tipo degrau, definida conforme a Equação (2.5). Tal função introduz uma descontinuidade forte no domínio, ou seja, um salto no campo de deslocamentos.

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \forall \xi > 0 \\ 0, & \forall \xi < 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

na qual ξ representa a posição em relação à descontinuidade assumida em $\xi = 0$.

Na região da ponta da trinca, a singularidade do campo de tensões pode ser descrita através de funções assintóticas, conforme proposto por Szabo e Babuska (1991). Tais funções são apresentadas nas Equações (2.6) e (2.7), para solicitações em modo I de abertura, e nas Equações 2.8 e 2.9 para modo II de abertura.

$$u_x^{(1)} = \frac{1}{2G} r^{\lambda^{(1)}} [(\kappa - Q^{(1)}(\lambda^{(1)} + 1)) \cos \lambda^{(1)}\theta - \lambda^{(1)} \cos(\lambda^{(1)} - 2)\theta] \quad (2.6)$$

$$u_y^{(1)} = \frac{1}{2G} r^{\lambda^{(1)}} [(\kappa + Q^{(1)}(\lambda^{(1)} + 1)) \sin \lambda^{(1)}\theta + \lambda^{(1)} \sin(\lambda^{(1)} - 2)\theta] \quad (2.7)$$

$$u_x^{(2)} = \frac{1}{2G} r^{\lambda^{(2)}} [(\kappa - Q^{(2)}(\lambda^{(2)} + 1)) \text{sen} \lambda^{(2)} \theta - \lambda^{(2)} \text{sen}(\lambda^{(2)} - 2)\theta] \quad (2.8)$$

$$u_y^{(2)} = \frac{1}{2G} r^{\lambda^{(2)}} [(\kappa + Q^{(2)}(\lambda^{(2)} + 1)) \cos \lambda^{(2)} \theta + \lambda^{(2)} \cos(\lambda^{(2)} - 2)\theta] \quad (2.9)$$

sendo:

- G o módulo de elasticidade transversal;
- $\kappa = (3 - 4\nu)$ para estado plano de deformação e $\frac{(3-\nu)}{1+\nu}$ para estado plano de tensão, sendo ν o coeficiente de Poisson;
- $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = 0,5$, $Q^{(1)} = 0,333$ e $Q^{(2)} = -1,0$ constantes determinadas para que a solução satisfaça o equilíbrio e as condições de contorno do problema, para o caso da singularidade introduzida por fissura fechada;
- r e θ coordenadas polares com origem na ponta da trinca.

No âmbito do sistema INSANE, um procedimento para a representação de um segmento de trinca através da função de Heaviside no MEEFG foi implementado por Silva (2016). Detalhes a respeito da seleção dos nós enriquecidos com essa função e da atribuição dos multiplicadores (1 ou 0, conforme a Equação (2.5)) em relação à posição da trinca podem ser encontrados no referido trabalho. Para possibilitar o esquema de enriquecimento de Moes et al. (1999) no presente trabalho, modificações foram impostas no procedimento de Silva (2016), permitindo a inclusão das funções de singularidade e também a descrição de múltiplos segmentos de trinca no contexto de uma propagação, conforme será discutido na seção 3.3.

2.2 Método dos Elementos Finitos Generalizados com Enriquecimento Global-Local

Conforme discutido na seção anterior, a técnica de construção das funções de forma do MEF^g permite que funções especiais sejam incorporadas à aproximação numérica, valendo-se de um conhecimento *a priori* do comportamento físico do problema analisado. Como consequência, a aplicação do método torna-se viável para uma pequena gama de problemas relevantes de Engenharia. A dificuldade de prever funções enriquecedoras é especialmente verificada na análise multiescala, em problemas tridimensionais e em modelos de comportamento não-linear (Gupta et al., 2012).

Adicionalmente, a solução do MEF^g para fenômenos localizados – que ocorrem em meios com a presença de descontinuidades, por exemplo – é incapaz de extrair respostas apuradas de malhas mais grosseiras em problemas tridimensionais, mesmo com a introdução de funções de singularidade. O controle dos erros da discretização continua a demandar o refinamento da malha, contrapondo-se às vantagens alcançadas pelo esquema de enriquecimento.

Buscando resolver esses entraves, Duarte e Kim (2008) propuseram o Método dos Elementos Finitos Generalizados com Enriquecimento Global-Local, identificado neste texto como MEF^{gl}. A estratégia combina o clássico conceito do Método dos Elementos Finitos Global-Local de Noor (1986) com o enriquecimento da Partição da Unidade do MEF^g. Do ponto de vista da aproximação, a proposta baseia-se na decomposição da solução em duas escalas de análise: uma escala grosseira, capaz de representar a parcela suave da solução, e uma escala refinada, visando à descrição de características locais do problema estudado.

A solução de um problema através do MEF^{gl} é dividida em três etapas:

1. Inicialmente é obtida a solução do problema global. Para isso, adota-se uma discretização grosseira de todo o domínio, sem a necessidade de se descrever o

fenômeno gerador dos gradientes localizados.

2. Define-se um problema local, abrangendo a região na qual tais gradientes ocorrem, impondo como condições de contorno a solução do problema global inicial (em termos de tensões e/ou deslocamentos). No domínio local, adota-se uma malha refinada o bastante para representar adequadamente o fenômeno localizado.
3. A solução numérica local é utilizada em uma nova análise do problema global, com o objetivo de obter a resposta final do problema. Nesta etapa, o enriquecimento dos nós do problema global (definido pela Equação (2.3)) é feito com funções enriquecedoras $L_{ji}(x)$ obtidas da solução do problema local.

A Figura 2.2 representa esquematicamente a estratégia do MEF^{gl} aplicada a um problema da Mecânica da Fratura. Neste caso, a existência da trinca induz o surgimento de uma elevada concentração no campo de tensões, sendo este um fenômeno que não é capturado pela discretização do problema global. O domínio local é definido, desse modo, na região ao redor da ponta da trinca.

Na esfera da Mecânica dos Sólidos, podem ser apontados os seguintes avanços recentes na aplicação do MEF^{gl}: Li e Duarte (2018) na simulação paralela de soldas pontuais em grandes estruturas; OHara, Duarte, e Eason (2016) na análise da interação e coalescência de múltiplas trincas; Plews e Duarte (2016) na modelagem de termoplasticidade localizada e OHara, Hollkamp, Duarte, e Eason (2016) na propagação de trincas por fadiga em 3D.

A seguir, são apresentadas as formulações das três etapas de uma análise via MEF^{gl}, segundo Duarte e Kim (2008) e Kim et al. (2010), adaptadas de acordo com a implementação presente no sistema INSANE.

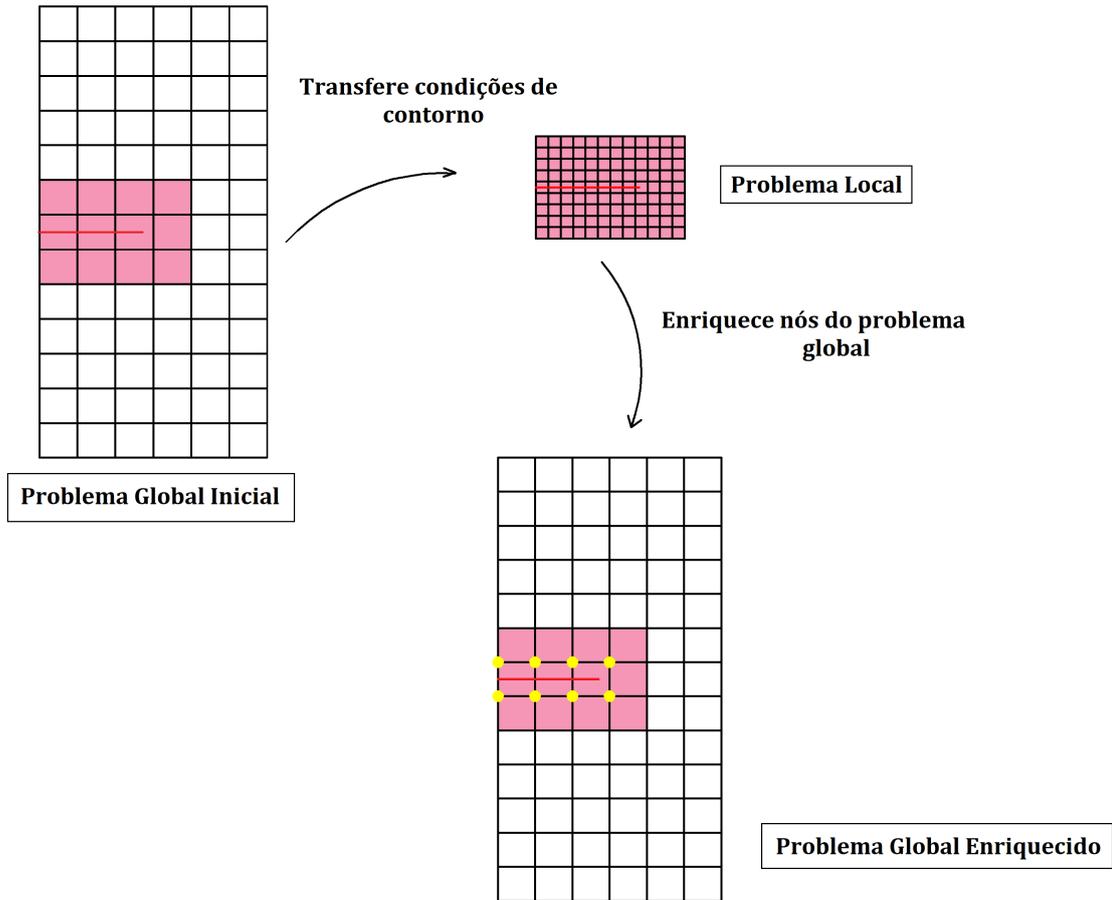


Figura 2.2: Representação esquemática do enriquecimento global-local para um problema bidimensional. Os nós globais enriquecidos com a solução do problema local são destacados em amarelo. A presença da trinca no problema global inicial é meramente ilustrativa, uma vez que esta é representada cinematicamente pelo enriquecimento no problema local e no problema global enriquecido.

2.2.1 Formulação do Problema Global Inicial

Seja o domínio $\bar{\Omega}_G = \Omega_G \cup \partial\Omega_G$ em \mathbb{R}^n , cujo contorno é dividido em $\partial\Omega_G = \partial\Omega_G^u \cup \partial\Omega_G^\sigma$ com $\partial\Omega_G^u \cap \partial\Omega_G^\sigma = \emptyset$. Os índices u e σ indicam as regiões onde são aplicadas as condições de contorno de Dirichlet e de Neumann, segundo as Equações 2.10 e 2.11:

$$\mathbf{u} = 0 \text{ em } \partial\Omega_G^u \text{ (homogênea por simplificação)} \quad (2.10)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \text{ em } \partial\Omega_G^\sigma \quad (2.11)$$

sendo \mathbf{u} o vetor de deslocamentos, $\boldsymbol{\sigma}$ o tensor de tensões, \mathbf{n} o vetor unitário normal para $\partial\Omega_G^\sigma$ e $\bar{\mathbf{t}}$ o vetor das tensões de superfície prescritas.

A equação de equilíbrio da Teoria da Elasticidade é apresentada na Equação (2.12). Já a relação constitutiva é dada pela Lei de Hooke Generalizada, $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$, sendo \mathbf{C} o tensor constitutivo de rigidez elástica e $\boldsymbol{\varepsilon}$ o tensor de deformações.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \text{ em } \Omega_G \quad (2.12)$$

A solução aproximada do problema global inicial, definido pelas Equações 2.10, 2.11 e 2.12 é dada por $\tilde{\mathbf{u}}_G^0$ na Equação (2.13), tanto em análise via MEF quanto em análise via MEFG (no caso de serem utilizadas funções enriquecedoras no problema global inicial):

Encontre $\tilde{\mathbf{u}}_G^0 \in \tilde{\mathcal{X}}_G^0(\Omega_G) \subset \mathcal{H}^1(\Omega_G) \forall \mathbf{v}_G^0 \in \tilde{\mathcal{X}}_G^0(\Omega_G)$

$$\int_{\Omega_G} \boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{u}}_G^0) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_G^0) d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega_G^\sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v}_G^0 ds \quad (2.13)$$

na qual $\tilde{\mathcal{X}}_G^0(\Omega_G)$ é a discretização de $\mathcal{H}^1(\Omega_G)$, um espaço de Hilbert definido em Ω_G construído com as funções de forma do método utilizado (MEF ou MEFG) e que atende às condições de contorno homogêneas de Dirichlet (conforme a Equação (2.10)). O termo \mathbf{v}_G^0 refere-se à função tentativa.

2.2.2 Formulação do Problema Local

Seja Ω_L um subdomínio de Ω_G , correspondente ao domínio local. Este domínio deve conter os fenômenos indutores de concentração de tensões, como trincas, aberturas, inclusões ou outros elementos de interesse (Duarte e Kim, 2008). O seguinte

problema é resolvido após a obtenção da solução global $\tilde{\mathbf{u}}_G^0$:

Encontre $\tilde{\mathbf{u}}_L \in \tilde{\mathcal{X}}_L(\Omega_L) \subset \mathcal{H}^1(\Omega_L) \forall \mathbf{v}_L \in \tilde{\mathcal{X}}_L(\Omega_L)$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_L} \boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{u}}_L) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_L) d\mathbf{x} + \eta \int_{\partial\Omega_L \setminus (\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G)} \tilde{\mathbf{u}}_L \cdot \mathbf{v}_L ds = \\ \int_{\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G^\sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v}_L ds + \int_{\partial\Omega_L \setminus (\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G)} (\mathbf{t}(\tilde{\mathbf{u}}_G^0) + \eta \tilde{\mathbf{u}}_G^0) \cdot \mathbf{v}_L ds \end{aligned} \quad (2.14)$$

na qual $\tilde{\mathcal{X}}_L(\Omega_L)$ é a discretização de $\mathcal{H}^1(\Omega_L)$, um espaço de Hilbert definido em Ω_L utilizando as funções de forma do MEF. Os domínios de integração da Equação (2.14) representam contornos do domínio local.

De acordo com Kim et al. (2010), é possível selecionar os tipos de condições de contorno provenientes de $\tilde{\mathbf{u}}_G^0$ a partir da escolha do parâmetro de rigidez η , conforme descrito a seguir.

1. Para $\eta = 0$ a Equação (2.14) se reduz a:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_L} \boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{u}}_L) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_L) d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G^\sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v}_L ds \\ + \int_{\partial\Omega_L \setminus (\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G)} \mathbf{t}(\tilde{\mathbf{u}}_G^0) \cdot \mathbf{v}_L ds \end{aligned} \quad (2.15)$$

Neste caso, que corresponde às condições de contorno de Neumann, são transferidas apenas tensões para o contorno do problema local.

2. Para transferir apenas informações de deslocamentos para o problema local, caso das condições de contorno de Dirichlet, adota-se η como o parâmetro utilizado no Método da Penalidade. Neste caso, como o valor de η é muito grande, a aplicação das tensões ($\mathbf{t}(u_G)$) torna-se inócua, reduzindo a Equação (2.14) à Equação (2.16):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_L} \boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{u}}_L) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_L) d\mathbf{x} + \eta \int_{\partial\Omega_L \setminus (\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G)} \tilde{\mathbf{u}}_L \cdot \mathbf{v}_L ds \\ = \int_{\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G^\sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v}_L ds + \eta \int_{\partial\Omega_L \setminus (\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G)} \tilde{\mathbf{u}}_G^0 \cdot \mathbf{v}_L ds \end{aligned} \quad (2.16)$$

3. Para impor condições de contorno de Cauchy, deve-se utilizar um valor de η intermediário entre as duas condições anteriores. Desse modo, é feita a transferência de tensões e deslocamentos para o contorno do problema local. Os autores sugerem, com base em experimentos numéricos, a seguinte expressão para a determinação de η :

$$\eta = \frac{E}{\sqrt[n]{V_0 J}} \quad (2.17)$$

sendo E o módulo de elasticidade longitudinal, n o número de dimensões espaciais do problema, V_0 o volume do elemento utilizado no sistema paramétrico e J o jacobiano do elemento global cuja aresta está contida no contorno local onde são impostas as condições de contorno.

2.2.3 Formulação do Problema Global Enriquecido

Finalmente, a solução $\tilde{\mathbf{u}}_L$, obtida do problema local, é utilizada como enriquecimento em uma nova análise do problema global. Procura-se representar a singularidade do problema através de $\tilde{\mathbf{u}}_L$, que enriquece a Partição da Unidade do problema global. Nesta etapa da análise, haverá uma i -ésima função de forma (conforme estabelecido na Equação (2.3)), definida por:

$$\phi_{ji} = \mathcal{N}_j \times \tilde{\mathbf{u}}_L \quad (2.18)$$

sendo \mathcal{N}_j a PU utilizada no problema global.

A solução do problema global enriquecido, $\tilde{\mathbf{u}}_G^E$, é dada pela Equação (2.19):

Encontre $\tilde{\mathbf{u}}_G^E \in \tilde{\mathcal{X}}_G^E(\Omega_G) \subset \mathcal{H}^1(\Omega_G) \forall \mathbf{v}_G^E \in \tilde{\mathcal{X}}_G^E(\Omega_G)$

$$\int_{\Omega_G} \boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{u}}_G^E) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_G^E) d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega_G^e} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v}_G^E ds \quad (2.19)$$

na qual $\tilde{\mathcal{X}}_G^E(\Omega_G)$ é o espaço $\tilde{\mathcal{X}}_G^0(\Omega_G)$ aumentado com as funções de enriquecimento global-local. É importante observar que o espaço pode ser aumentado através de outras funções de enriquecimento além da função de enriquecimento global-local (Alves, 2012).

Quanto à integração numérica nesta etapa do MEF^{gl}, Kim et al. (2010) propõem o uso de elementos locais como células de integração para o problema global enriquecido. Essa estratégia é possível desde que a malha local seja aninhada à global, sendo necessária uma sequência de mapeamentos de pontos de integração entre os sistemas paramétricos dos elementos locais e globais. Mais detalhes podem ser encontrados no referido trabalho.

O problema global enriquecido é resolvido com a mesma malha grosseira do modelo global inicial. No caso de problemas da Elasticidade bidimensional, as funções de enriquecimento global-local adicionam apenas dois graus de liberdade a cada nó global enriquecido, independentemente da discretização utilizada no problema local. Por conseguinte, podem ser definidas malhas bastante refinadas para o domínio local – capazes de descrever o fenômeno localizado – sem incorrer em um aumento significativo do tamanho do problema global final. Trata-se da mais relevante vantagem do MEF^{gl} em relação ao MEF convencional, que exige alto grau de refinamento para a descrição do mesmo fenômeno a nível global (Kim et al., 2010).

2.2.4 Ciclos Global-Local

Pela forma como é definido o enriquecimento do MEF^{gl}, a resposta final fornecida pelo método depende altamente da qualidade da solução numérica calculada no problema local. Tal solução é subordinada, conforme discutido na Seção 2.2.2, à imposição das condições de contorno provenientes da análise do problema global inicial.

OHara et al. (2009) expõem que, para o caso de problemas contendo gradientes localizados, a solução do problema global inicial pode apresentar erros excessivos mesmo em regiões do domínio distantes da singularidade. Como resultado, o problema local é submetido a condições de contorno deficientes e o erro associado à sua solução deixa de ser puramente controlado pelo refinamento da malha local ou pelos enriquecimentos nodais adotados. Para contornar esse transtorno, os autores

propõem a execução de um ciclo global-local adicional, no qual a solução do problema global enriquecido é utilizada na imposição de condições de contorno em uma nova análise do problema local. Em seguida, o processo segue a mesma sequência tradicional do MEF^{gl}, com a solução local sendo empregada como enriquecimento no problema global.

A estratégia de ciclos global-local é analisada em maior detalhe por Gupta et al. (2012), que investigam aprimoramentos das condições de contorno oriundas do problema global para problemas tridimensionais da Mecânica da Fratura. Nesse trabalho, afirma-se que a taxa de convergência da solução do MEF^{gl} é controlada pela taxa de convergência da aproximação local. O erro da solução numérica local, por sua vez, é composto de duas parcelas: a primeira referente ao erro inerente à discretização de elementos finitos e a segunda relativa ao efeito de condições de contorno inexatas. A primeira parcela pode ser controlada pelo refinamento da malha local e a segunda é fruto da imprecisão da solução do problema global inicial, obtida em escala grosseira e sem a descrição de características locais.

Para uma análise de propagação de trincas, a metodologia de ciclos global-local de Gupta et al. (2012) é descrita a seguir e ilustrada na Figura 2.3, sendo k um passo qualquer do processo de propagação.

1. Define-se $t = 1$.
2. A solução do problema global no ciclo t e passo k , $\tilde{\mathbf{u}}_G^{k,t}$ é utilizada para a imposição de condições de contorno no problema local.
3. O problema local é resolvido, obtendo-se $\tilde{\mathbf{u}}_L$.
4. A solução local é utilizada para enriquecer o espaço de solução do problema global, conforme a Equação (2.18).
5. O problema global é resolvido, enriquecido com a solução local.

6. Incrementa-se t e retorna-se à etapa 2, se a mudança em alguma grandeza de interesse exceder uma tolerância pré-definida. Caso contrário, o processo segue para o passo $k + 1$.

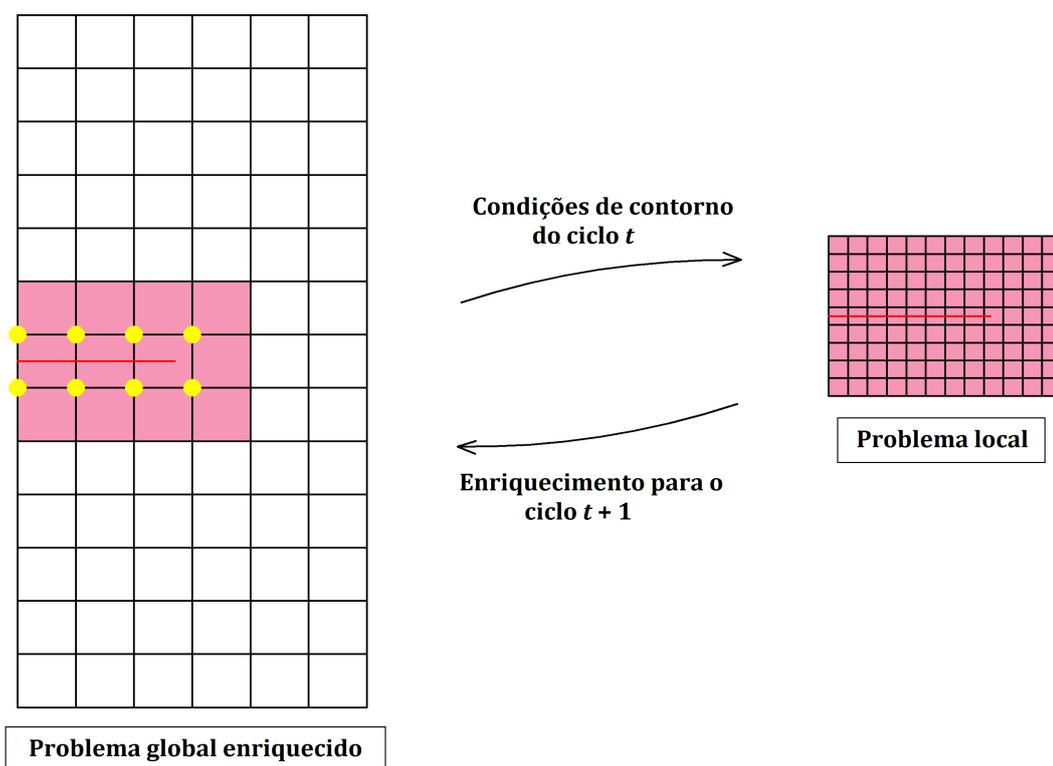


Figura 2.3: Processo de ciclos global-local para um passo de propagação genérico, no qual as condições de contorno para o problema local do ciclo $t + 1$ são obtidas da solução do problema global enriquecido do ciclo t .

2.3 Método dos Elementos Finitos Generalizados Estável

Conforme discutido na Seção 2.1, a construção das funções de forma do MEF_G pode gerar espaços de aproximação linearmente dependentes, sendo este um contratempo verificado desde as aplicações iniciais do método. Como consequência da dependência linear, a matriz de rigidez associada ao MEF_G torna-se severamente mal condicionada, podendo causar a perda de precisão da solução do sistema linear de equações.

Outro problema conhecido desde o surgimento do MEF_G é o seu mau desempenho na presença de elementos de mistura, ilustrados na Figura 2.4. Tais elementos são aqueles que apresentam enriquecimento parcial, não contemplando todos os nós que os constituem. Desse modo, a função enriquecedora deixa de ser plenamente reproduzida e permite-se, também, a adição de termos indesejados à aproximação (Oliveira, 2018). Conforme mostrado por Chessa et al. (2003) e Fries (2008), os elementos de mistura podem apresentar erros maiores em relação ao restante do domínio, prejudicando a taxa de convergência do MEF_G.

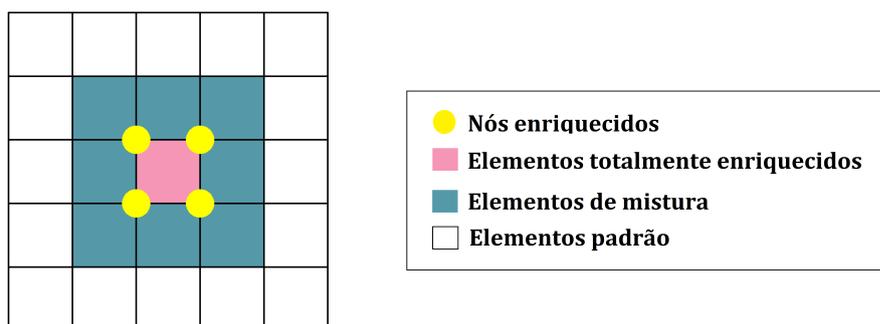


Figura 2.4: Classificação de elementos no MEF_G conforme o número de nós enriquecidos.

Visando resolver esses problemas sem suprimir propriedades vantajosas do MEF_G,

Babuška e Banerjee (2012) propuseram o Método dos Elementos Finitos Generalizados Estável – identificado neste texto como MEFGE. A estratégia emprega uma simples modificação local no enriquecimento do MEFG, contribuindo para reduzir o número de condicionamento da matriz de rigidez – que passa a apresentar valores da mesma ordem de grandeza daqueles associados ao MEF convencional (Gupta et al., 2013). Os autores também comprovaram o bom desempenho do MEFGE na presença de elementos de mistura, tendo observado, nesses elementos, erros menores em relação ao MEFG.

2.3.1 Formulação do MEFGE

Conforme Gupta et al. (2013), a formulação do MEFGE é baseada em uma modificação local das funções enriquecedoras padrão (L_{ji}) do MEFG, apresentada na Equação (2.20):

$$\tilde{L}_{ji} = L_{ji} - I_{\omega_j}(L_{ji}) \quad (2.20)$$

na qual $I_{\omega_j}(L_{ji})$ é a função interpoladora, definida como:

$$I_{\omega_j}(L_{ji})(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n N_k(\mathbf{x}) L_{ji}(\mathbf{x}_k) \quad (2.21)$$

sendo:

\mathbf{x}_k o vetor de coordenadas do nó k do elemento que contém a posição de cálculo \mathbf{x} ;

n o número de pontos nodais do elemento que contém a posição de cálculo \mathbf{x} ;

$L_{ji}(\mathbf{x}_k)$ a função enriquecedora original do MEFG.

Desse modo, a modificação imposta pelo método consiste na eliminação dos termos redundantes que já apareciam na PU, subtraindo das funções enriquecedoras as suas projeções no espaço daquela (Oliveira, 2018).

As funções de forma do MEFGE são obtidas de maneira análoga ao MEFG, valendo-se do enriquecimento modificado. A construção das funções de forma é

definida pela Equação (2.22) e ilustrada na Figura 2.5.

$$\{\tilde{\phi}_{ji}\}_{i=1}^{q_j} = N_j(\mathbf{x}) \times \{\tilde{L}_{ji}(\mathbf{x})\}_{i=1}^{q_j} \quad (2.22)$$

sem somatório em j .

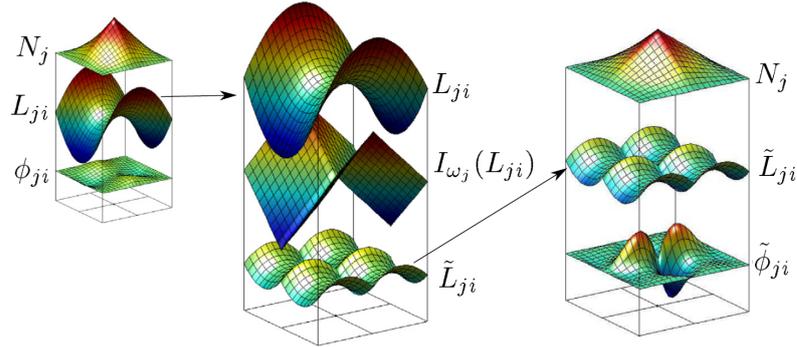


Figura 2.5: Obtenção de funções de forma do MEFGE. À esquerda, tem-se o enriquecimento padrão utilizado no MEFGE. No centro, exibe-se a obtenção do enriquecimento modificado. À direita, apresenta-se construção da função de forma do MEFGE (Gupta et al., 2013).

Gupta et al. (2013) analisaram o comportamento do MEFGE quando aplicado a funções enriquecedoras expressas analiticamente (funções de singularidade e de Heaviside) na análise de um problema bidimensional da Mecânica da Fratura. Em um trabalho posterior, Gupta et al. (2015) expandiram a aplicação do método para problemas tridimensionais, propondo modificações na estratégia de enriquecimento para a obtenção de taxas ótimas de convergência. Complementarmente, Gupta (2014) propôs a aplicação da estratégia estável sobre o enriquecimento numericamente obtido no MEFGE^{gl}, avaliado em exemplos tridimensionais com a presença de trincas. A abordagem denominada “Método dos Elementos Finitos Generalizados Estável com Enriquecimento Global-Local” (MEFGE^{gl}) foi comparada ao MEFGE^{gl} (com enriquecimento global-local padrão) em termos de condicionamento, taxas de

convergência e precisão no cálculo de fatores de intensidade de tensão. Os resultados obtidos tiveram desempenho semelhante ao verificado para enriquecimentos analíticos, apresentando menores erros e uma redução significativa do número de condicionamento.

O efeito do enriquecimento global-local estável na análise da propagação de trincas em modelos bidimensionais será analisado na seção 4.3 deste trabalho.

Capítulo 3

ASPECTOS COMPUTACIONAIS

Neste capítulo, são apresentados os principais aspectos da implementação computacional desenvolvida no sistema INSANE ao longo deste trabalho. É feita uma descrição geral das novas funcionalidades adicionadas ao sistema, separadas da seguinte forma:

1. Geração automatizada de problemas locais bidimensionais prescritos.
2. Geração automatizada de problemas locais bidimensionais para a descrição de descontinuidades.
3. Procedimento para a propagação de trincas utilizando problemas locais automatizados na abordagem do MEF^{gl}.
4. Procedimento para o cálculo de fatores de intensidade de tensão segundo o método da Integral de Interação.

3.1 Geração Automatizada de Problemas Locais Bidimensionais Prescritos

Conforme apresentado no Capítulo 2, a solução de um problema através do MEF^{gl} envolve a definição de dois modelos: um para o problema global e outro para o problema local. Tratam-se de dois modelos distintos, porém não totalmente independentes, sendo necessário estabelecer relações entre eles em momentos específicos da análise.

A estrutura básica previamente existente no sistema INSANE para análises utilizando o MEF^{gl} exigia do usuário o fornecimento de dois arquivos de entrada de dados, sendo cada arquivo específico para o respectivo modelo (global e local). Informações necessárias para relacionar os dois problemas eram definidas manualmente nos arquivos de entrada, processo este que tornava-se extremamente dispendioso para modelos maiores ou mais elaborados. Foi verificada, dessa forma, uma demanda por processos automatizados, capazes de simplificar o pré-processamento e reduzir a interferência do usuário na análise.

A automatização proposta neste trabalho permite a geração de modelos locais a partir de um modelo global previamente definido. Cabe ao usuário fornecer um arquivo de entrada relativo ao problema global e definir dados relacionados à geometria do problema local desejado. A partir disso, o modelo local é criado em tempo de processamento, viabilizando a sequência da análise. A estratégia é independente do tipo de malha do problema global, podendo ser empregada em qualquer análise (linear ou não) que utiliza o MEF^{gl}.

Basicamente, são necessários três dados fundamentais para a geração de um modelo local a partir de um modelo global já existente: a localização do problema local, o tamanho do seu domínio e o tipo de discretização da malha local. A estratégia adotada neste trabalho é baseada na definição de uma “janela” que abrange uma determinada região do problema global, identificando elementos que irão constituir

o modelo local (a ser refinado em seguida). São fornecidos pelo usuário o ponto central, a altura e a largura dessa janela, bem como informações relacionados ao tipo de discretização da malha local. O processo de geração do modelo local é exemplificado na Figura 3.1 para um problema bidimensional.

As seis etapas ilustradas na Figura 3.1 são descritas a seguir.

- Etapa 1: definição, pelo usuário, das informações referentes à “janela” para a construção do problema local. O posicionamento e o tamanho do problema local devem ser definidos de acordo com o problema analisado, buscando englobar regiões de interesse da solução. Na figura, optou-se por um problema local no centro do domínio.
- Etapa 2: a partir da “janela” definida na Etapa 1, elementos do problema global são selecionados para constituir a malha local. Para tanto, são utilizados algoritmos de geometria computacional (já disponíveis no sistema INSANE, conforme consta no Apêndice A) para encontrar os elementos globais atravessados por esse polígono. Optou-se, na presente implementação, por selecionar todos os elementos que possuem, pelo menos, um ponto nodal no interior da janela de definição do problema local, conforme exibido na Figura 3.1.
- Etapa 3: o conjunto de elementos resultante da Etapa 2 é transformado em uma estrutura de dados para subdivisão planar. No sistema INSANE, adota-se a estrutura de “*Half Edge*” ou “Semi-Arestas” (Mantyla, 1988), que permite o estabelecimento de relações de adjacência entre faces do modelo. Essa estrutura facilita a pesquisa de entidades e soluciona questões fundamentais para a manipulação de dados geométricos, conforme Penna (2007). O conjunto de elementos é convertido, dessa forma, em uma lista de faces, arestas e vértices.
- Etapa 4: valendo-se da estrutura de dados da Etapa 3, é feito o refinamento da malha que irá compor o problema local. Nesta etapa, são empregados os algoritmos geradores de malha já presentes no sistema INSANE (desenvolvidos

nos trabalhos de Gonçalves (2004) e Ferreira e Pitangueira (2015)), implementados de modo a operar sobre uma estrutura de *Half Edge*. As relações de adjacência entre as faces tornam-se extremamente importantes neste momento, permitindo que o refinamento resulte em uma malha local aninhada à global e tornando possível o uso de elementos locais como células de integração para o problema global enriquecido (conforme relatado na seção 2.2.3). Para os exemplos numéricos apresentados no Capítulo 4, o refinamento foi obtido através da subdivisão de arestas dos elementos globais pelo método do Mapeamento Transfinito Bilinear. Mais detalhes a respeito desse método podem ser encontrados em Gonçalves (2004).

- Etapa 5: a malha obtida para o problema local é transformada em uma entidade de modelo. Primeiramente, os vértices da estrutura de dados são convertidos em pontos nodais e as faces em elementos planos. Na sequência, são atribuídas propriedades – fornecidas previamente pelo usuário – como o material, o modelo constitutivo, o número de pontos de integração e os enriquecimentos nodais desejados para o modelo local.
- Etapa 6: construído o problema local, segue-se para a fase de preparação do modelo para o seu processamento. São necessárias mais duas etapas, descritas a seguir.
 - Etapa 6.1: primeiramente, é feita uma classificação das arestas dos elementos locais para a imposição das condições de contorno provenientes do modelo global. Conforme consta na Equação (2.14), somente o contorno local que não coincide com o contorno global ($\partial\Omega_L \setminus \partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G$, ilustrado na Figura 3.2) está habilitado a receber tais condições de contorno. Para isso, é realizada uma sequência de verificações sobre cada aresta local, conforme apresentado na Figura 3.3.

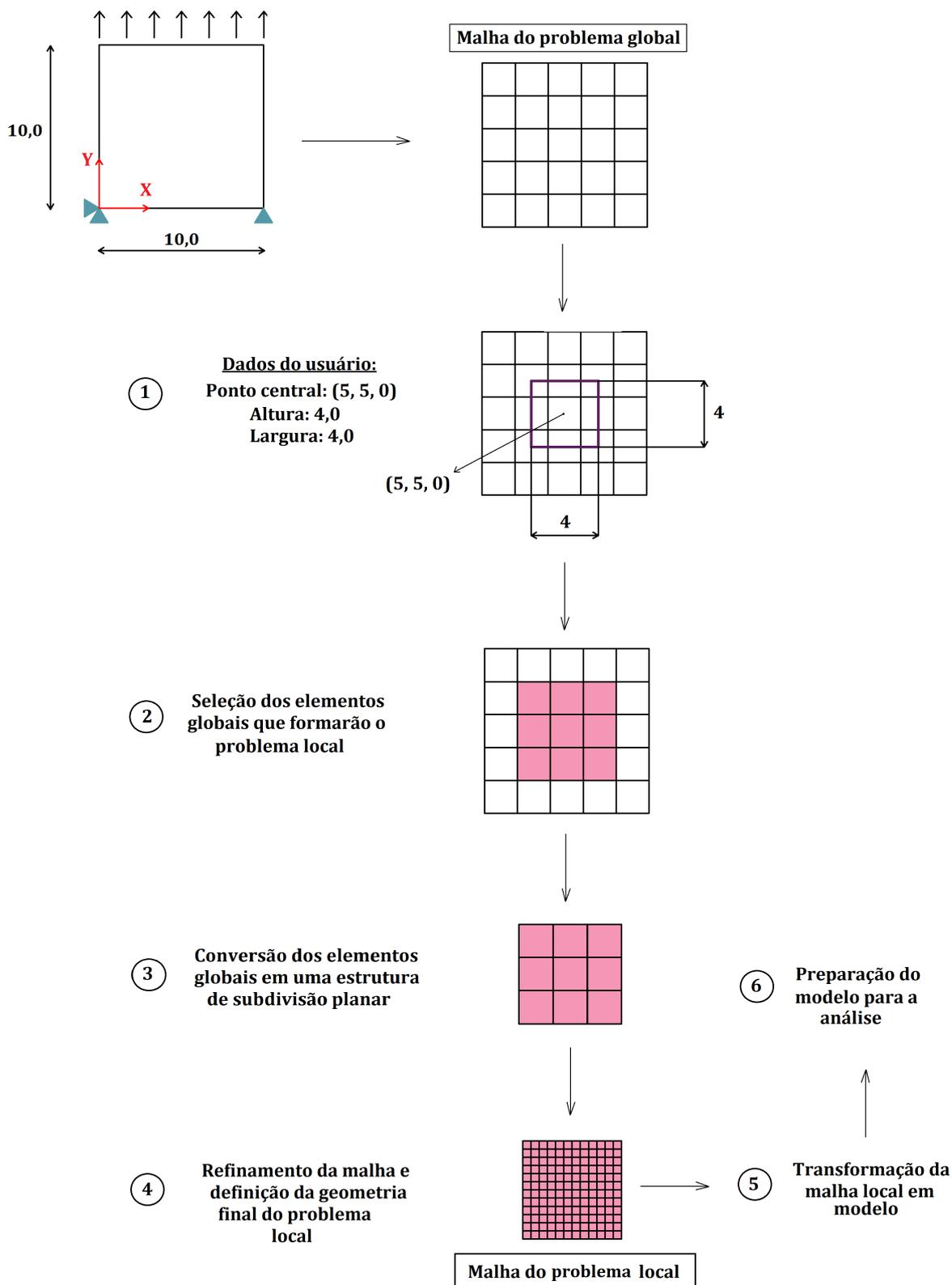


Figura 3.1: Exemplo do processo de geração automatizada de um modelo local prescrito a partir de um modelo global fornecido pelo usuário.

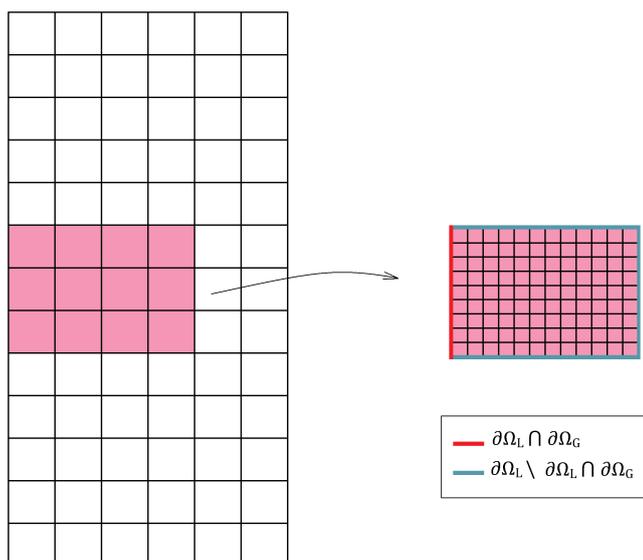


Figura 3.2: Contornos do problema local em relação ao contorno do problema global. Apenas a região destacada em azul recebe as condições de contorno provenientes do problema global.

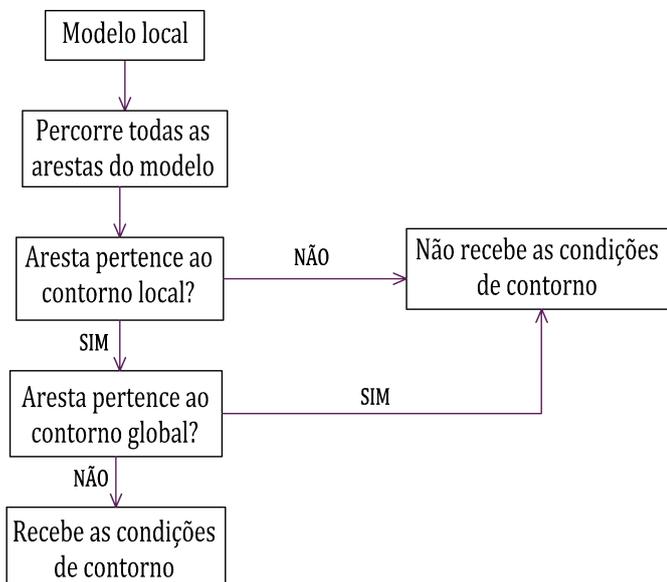


Figura 3.3: Sequência de verificações sobre as arestas de elementos locais para a imposição das condições de contorno provenientes do problema global.

Para verificar se uma determinada aresta pertence ao contorno local, emprega-se a estrutura de dados para subdivisão planar mencionada na

Etapa 3. Isso torna o processo bastante simples, sendo empregadas as relações de adjacência existentes entre as faces do modelo. Caso a aresta faça parte do contorno local, algoritmos de geometria computacional (apresentados no Apêndice A) são utilizados para determinar se a mesma pertence também ao contorno global.

- Etapa 6.2: finalmente, é necessário estabelecer uma relação entre cada elemento local e um correspondente elemento global. Em razão da condição de aninhamento entre as malhas, cada elemento local situa-se, necessariamente, no domínio de apenas um elemento global. Na busca por esse elemento, são utilizados, novamente, métodos de geometria computacional (presentes no Apêndice A). Ao final desse processo, cada elemento local tem um elemento global a ele associado (o elemento “pai”), viabilizando a transferência da solução para a imposição das condições de contorno no problema local. Analogamente, para cada elemento global define-se uma lista de elementos locais nele localizados (os elementos “filhos”), visando à construção do enriquecimento na terceira etapa da análise do MEF^{gl}. A relação entre elementos globais e locais é exemplificada na Figura 3.4.

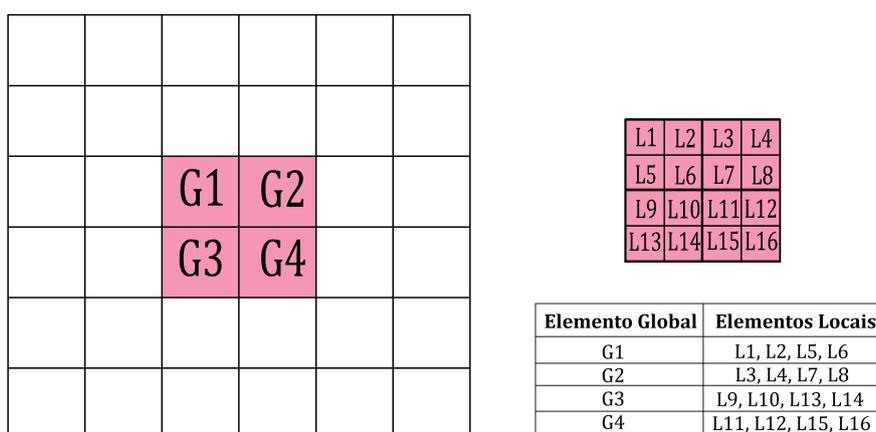


Figura 3.4: Relação entre os elementos globais e locais de um problema bidimensional.

O procedimento de geração de problemas locais aqui descrito permite, ainda, a definição automática dos nós globais a serem enriquecidos com a solução do problema local. Uma vez que o enriquecimento global-local é a principal contribuição para a resposta final do MEFG^{gl}, busca-se aplicar esse enriquecimento ao maior número possível de nós do problema global. Em vista da construção do enriquecimento do MEFG (mostrada na Figura 2.1), tem-se a seguinte exigência para a aplicação do enriquecimento global-local sobre um determinado nó global: a nuvem deste nó deve estar inteiramente contida na região do domínio local. Caso contrário, a solução local deixa de ser plenamente descrita no domínio de suporte da Partição da Unidade daquele nó, não podendo ser utilizada para enriquecer a aproximação.

Valendo-se da janela de construção do problema local, todos os nós globais localizados em seu interior podem ser enriquecidos com a solução local. Esse procedimento é ilustrado na Figura 3.5.

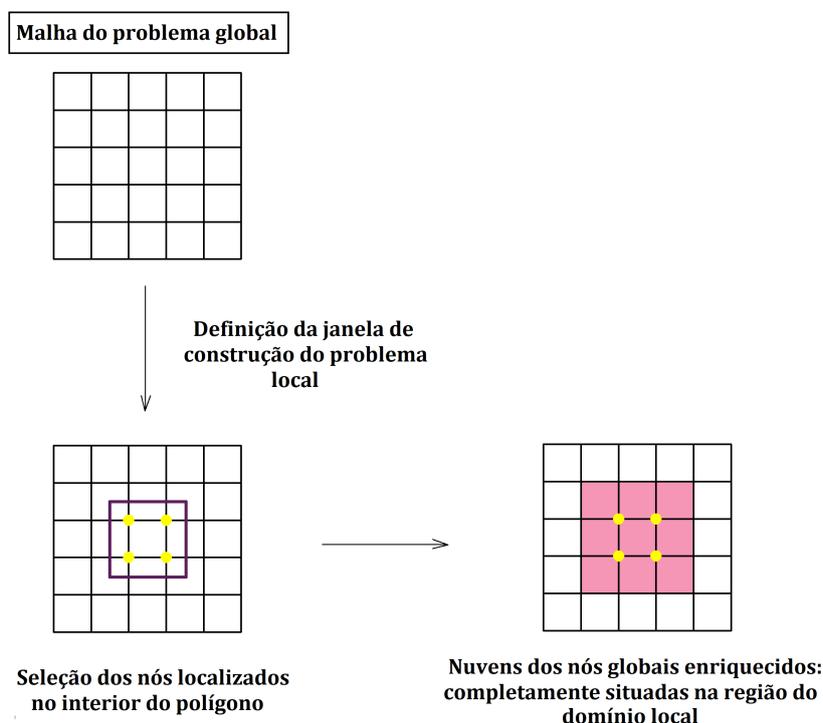


Figura 3.5: Seleção dos nós globais a serem enriquecidos com a solução do problema local.

3.2 Geração Automatizada de Problemas Locais Bidimensionais para a Descrição de Descontinuidades

Conforme apresentado na seção 2.2, a representação de uma fratura utilizando o MEFG^{gl} consiste na utilização da solução numérica do problema local para a descrição da descontinuidade e da concentração de tensões associadas à trinca. A definição do modelo local fica, então, vinculada à região com a presença da trinca, permitindo que esta seja inserida na aproximação do modelo global através do enriquecimento construído com a solução local.

A estratégia proposta neste trabalho adota um modelo local que engloba completamente a descontinuidade. Tal escolha foi motivada pela influência que a qualidade da solução global, imposta como condições de contorno ao problema local, pode ter sobre o resultado da análise deste último problema (conforme verificado por Kim et al. (2010)). Ao envolver totalmente a descontinuidade com o modelo local, garante-se que a solução global transferida seja predominantemente suave, assegurando-se, assim, melhor qualidade para as condições de contorno impostas no modelo local. Além disso, a representação da trinca através de enriquecimentos (já apresentada na seção 2.1.2) fica inteiramente contida no domínio local, evitando a necessidade de descrevê-la no problema global com funções distintas daquelas oriundas da solução local.

Para a geração automatizada de um modelo local ao redor de uma descontinuidade, adotou-se a metodologia de Pereira et al. (2012), na qual o domínio local é composto pelas nuvens de elementos globais que são intersectados pela trinca. As etapas do processo de construção são ilustradas na Figura 3.6 e descritas na sequência. Cabe ressaltar que a única diferença em relação ao procedimento da seção 3.1 está na forma como os elementos globais são selecionados para compor o modelo

local.

- Etapa 1: buscam-se todos os elementos globais que são intersectados pela trinca. São utilizados, mais uma vez, algoritmos de geometria computacional (expostos no Apêndice A) para obter esses elementos (destacados em azul na Figura 3.6). É importante ressaltar que cada segmento de trinca não precisa, necessariamente, estar descrito no problema global inicial, bastando o conhecimento de seus pontos inicial e final para obter os elementos globais desejados.
- Etapa 2: selecionam-se todos os nós dos elementos identificados na Etapa 1.
- Etapa 3: define-se o domínio local como a união das nuvens de todos os nós selecionados. Obtém-se, dessa forma, um conjunto de elementos globais que irão compor o problema local.
- Etapa 4: assim como na Etapa 3 da seção 3.1, o conjunto de elementos globais é transformado em uma estrutura de subdivisão planar.
- Etapa 5: a partir da estrutura de dados da Etapa 4, é feito o refinamento da malha que irá constituir o problema local. A discretização resultante torna-se capaz de descrever adequadamente a descontinuidade presente no modelo, conforme será discutido no Capítulo 4.
- Etapa 6: a malha do problema local é convertida em uma entidade de modelo, valendo-se das propriedades fornecidas previamente pelo usuário. Neste modelo, os segmentos de trinca são representados por meio do esquema de enriquecimento descrito na seção 2.1.2.

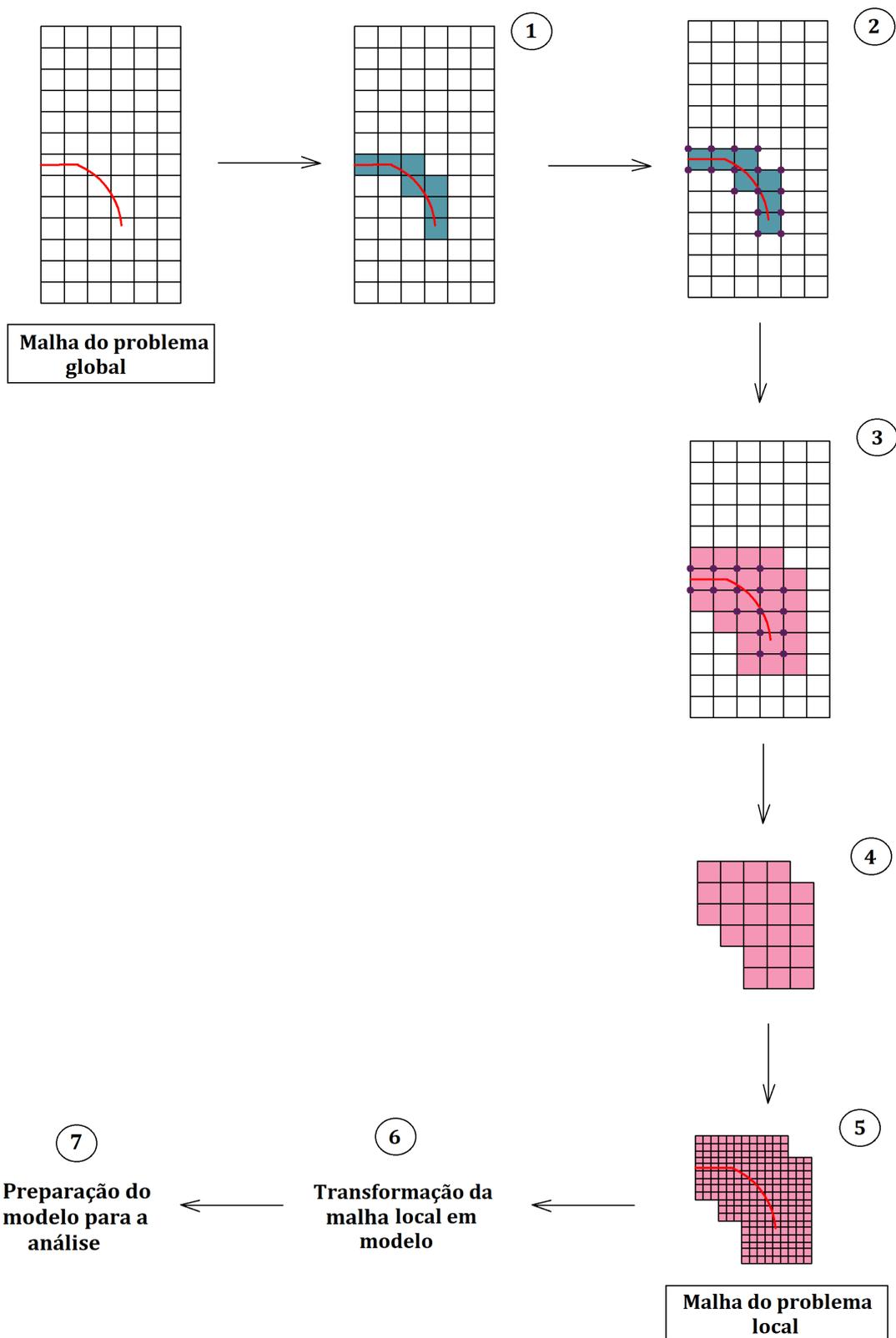


Figura 3.6: Exemplo do processo de geração automatizada de um modelo local que engloba uma descontinuidade. A representação da trinca na malha global inicial é meramente ilustrativa.

- Etapa 7: construído o problema local, são executadas as etapas de preparação do modelo para análise, já descritas na Etapa 6 da seção 3.1. Além disso, é necessário, neste caso, incluir a descrição da trinca no modelo local. A partir do conhecimento de seus pontos inicial e final – e também do conjunto de elementos locais que são atravessados pela trinca – definem-se os nós do problema local a serem enriquecidos com a função de Heaviside e com as funções de singularidade, conforme discutido na seção 2.1.2.

Pela forma como são selecionados os elementos globais na Etapa 1, permite-se que o problema local seja gerado para qualquer geometria de trinca. As dimensões são definidas da maneira mais compacta possível, diminuindo o custo computacional da análise. Além disso, é viável, também, a geração de problemas locais a partir de malhas irregulares, conforme será exposto na seção 4.2.4.

Quanto à definição dos nós globais a serem enriquecidos com a solução local, devem ser escolhidos, conforme relatado na seção anterior, aqueles cujas nuvens estejam inteiramente contidas na região do domínio local. Neste caso, tal definição é bastante simples: todos os nós selecionados na Etapa 2 da Figura 3.6 podem receber o enriquecimento global-local.

Diante do exposto, verifica-se que a metodologia implementada associa diretamente a construção do modelo local à geometria da descontinuidade presente no problema. Torna-se possível, dessa forma, criar problemas locais automatizados, que possam acompanhar o crescimento de uma trinca pré-existente. O procedimento implementado para a análise da propagação de trincas utilizando essa estratégia é descrito na próxima seção.

3.3 Procedimento para a Propagação de Trincas Utilizando Problemas Locais Automatizados na Abordagem do MEF^{gl}

Conforme mencionado no Capítulo 1, o objetivo principal deste trabalho é viabilizar a análise da propagação de trincas em estruturas utilizando problemas locais automatizados no âmbito do MEF^{gl}. Para isso, o mecanismo de geração de domínios locais que englobam uma descontinuidade, descrito na seção anterior, é empregado no contexto da propagação de uma trinca pré-definida pelo usuário.

A abordagem previamente existente no sistema INSANE para analisar a propagação de uma trinca através do MEF^{gl} (no contexto da Mecânica da Fratura Linear Elástica) foi implementada por Malekan (2017). Nesse trabalho, representava-se a trinca em um problema local fixo, definido de modo a abarcar todo o crescimento da mesma. Surgiram, por conseguinte, dois problemas na modelagem desse fenômeno: o tamanho do problema local, que aumentava o custo computacional da análise, e a pré-definição da sua geometria, que exigia o conhecimento antecipado da trajetória a ser seguida pela trinca ao longo da propagação.

O procedimento descrito nesta seção busca resolver esses dois problemas. A cada passo da propagação, constrói-se um novo problema local – cuja geometria é definida da maneira mais compacta possível – diminuindo o custo computacional do processo. Além disso, a definição do domínio local é feita de modo a acompanhar o caminho da trinca, permitindo a descrição de trajetórias mais complexas. A estratégia implementada é ilustrada na Figura 3.7 e detalhada em seguida, sendo k um passo qualquer da propagação. Busca-se descrever a propagação de uma trinca a partir de um entalhe inicial de tamanho a (representado em vermelho na Figura 3.7), cujos pontos inicial e final são fornecidos pelo usuário.

- Etapa 1: definição, pelo usuário, da discretização do modelo global. Adota-se

uma malha grosseira, sem a representação do entalhe inicial.

- Etapa 2: a partir dos pontos que definem o entalhe inicial, selecionam-se os elementos globais que irão compor o modelo local (assim como na Etapa 1 da Figura 3.6). A representação da trinca nesta etapa da Figura 3.7 é meramente ilustrativa.
- Etapa 3: constrói-se o modelo local para o primeiro passo da propagação ($k = 1$) a partir dos elementos globais selecionados na Etapa 2. O processo de geração e preparação do modelo é o mesmo descrito na seção 3.2, sendo a trinca incorporada por meio das funções enriquecedoras descritas na seção 2.1.2.

Na sequência, o problema local é resolvido e são extraídos os fatores de intensidade de tensão para os modos I e II de abertura (K_I e K_{II}), utilizando o método da Integral de Interação (a ser detalhado na próxima seção).

- Etapa 4: são executados ciclos global-local – entre o problema local e o problema global enriquecido – buscando melhorar a qualidade da solução global a ser imposta como condições de contorno no modelo local. A descrição da trinca é levada ao problema global por meio do enriquecimento dos nós destacados em amarelo na Figura 3.7. A cada vez que o problema local é processado, novos valores de K_I e K_{II} são extraídos. Optou-se, na presente implementação, por incluir um critério de convergência associado a K_I para determinar o fim da execução dos ciclos: enquanto a diferença relativa entre o valor corrente e o valor anterior de K_I for superior a uma tolerância fornecida pelo usuário, um ciclo global-local adicional deve ser realizado. Permite-se, dessa forma, a obtenção de respostas aprimoradas para os fatores de intensidade de tensão, cuja precisão é regulada pelo usuário. É importante ressaltar que, para problemas em modo misto de abertura, a convergência é definida considerando-se, também, a mesma tolerância para K_{II} . Mais informações estão presentes no Capítulo 4.

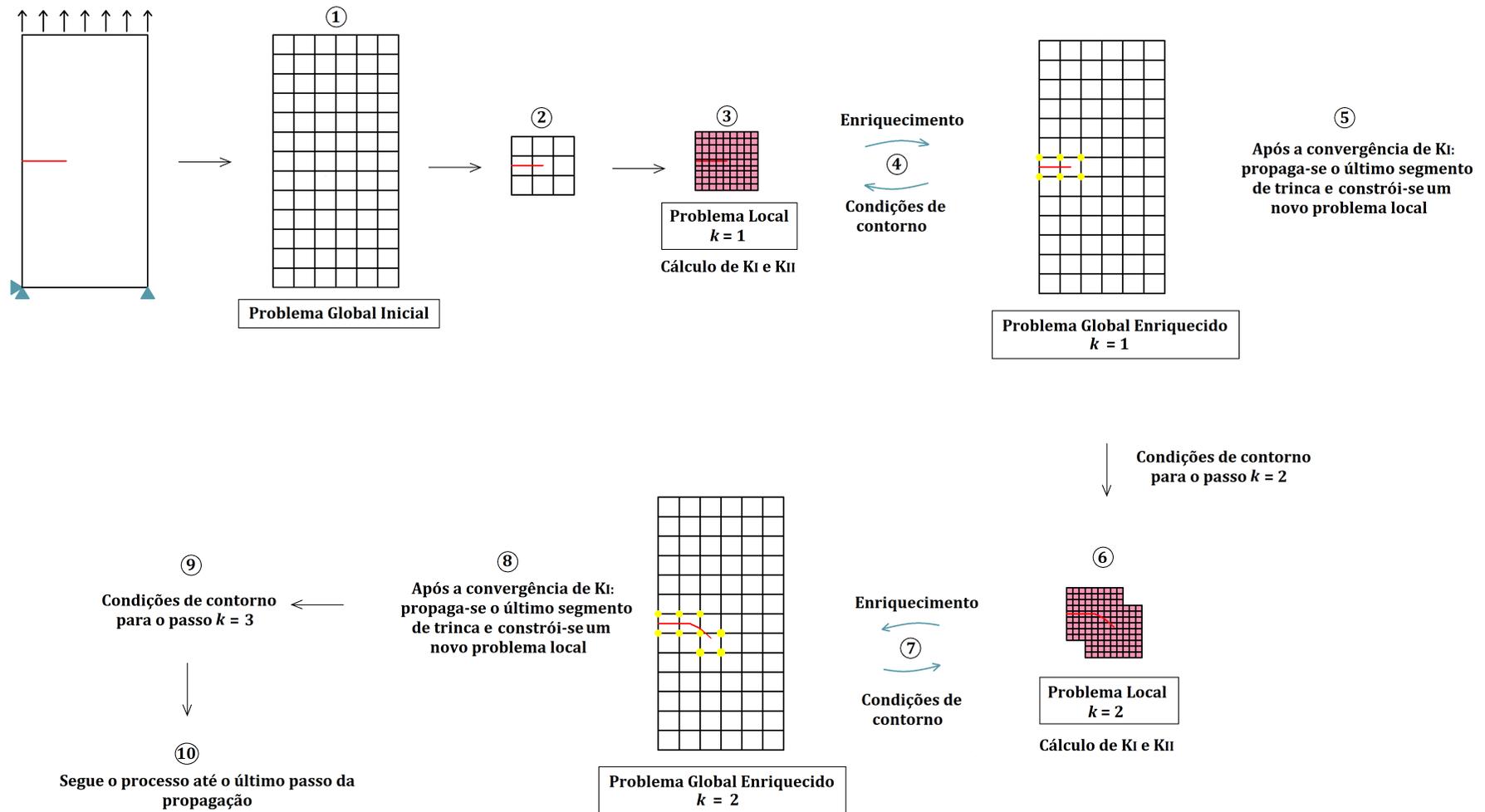


Figura 3.7: Exemplo do mecanismo de propagação de uma trinca pré-existente utilizando um problema local adaptativo.

- Etapa 5: após a convergência de K_I no último ciclo, é realizada a propagação da trinca. Na presente implementação, o incremento de trinca (Δ_a) é fornecido pelo usuário, devendo ser pequeno o bastante para configurar uma propagação coerente e estável. Um novo segmento de trinca é definido, ao final de cada passo k , a partir do incremento e do ângulo da propagação (θ), ilustrado na Figura 3.8. O ângulo que determina a direção do novo segmento de trinca é calculado a partir de K_I e K_{II} segundo o critério da máxima tensão circunferencial, conforme consta em Moes et al. (1999). Tal critério foi proposto inicialmente por Erdogan e Sih (1963) e define que a propagação ocorre, a partir da ponta da trinca, em uma direção θ perpendicular à de tensão circunferencial máxima. A expressão resultante para o ângulo θ é apresentada na Equação (3.1). Mais detalhes sobre esse critério podem ser encontrados em Moes et al. (1999).

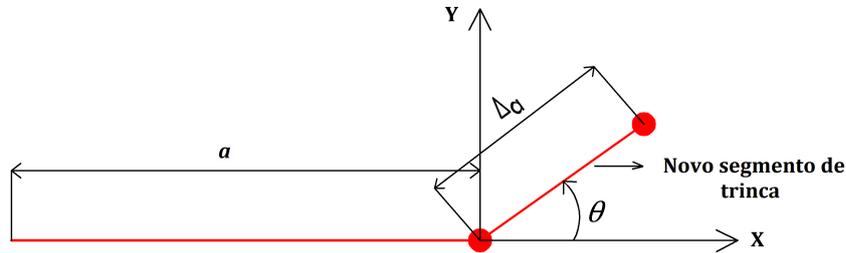


Figura 3.8: Ilustração do incremento (Δ_a) e do ângulo (θ) que determina a orientação do novo segmento de trinca.

$$\theta = 2 \arctan \left[\frac{-2K_{II}/K_I}{1 + \sqrt{1 + 8 \left(\frac{K_{II}}{K_I} \right)^2}} \right] \quad (3.1)$$

- Etapa 6: após a definição do novo segmento de trinca a ser adicionado, gera-se um novo problema local que engloba toda a extensão da trinca. Desse modo, a descontinuidade presente no problema é representada por uma lista

de segmentos de trinca, sendo cada um deles descrito através do esquema de enriquecimento exposto na seção 2.1.2. Cabe ressaltar que as funções de singularidade são empregadas somente no elemento que contém a ponta do último segmento da lista de trincas do modelo. A geração do modelo local é feita, mais uma vez, através do processo elucidado na seção 3.2. As condições de contorno, nesta etapa, são provenientes do problema global enriquecido do último ciclo do passo anterior, conforme destacado na Figura 3.7. O problema local é resolvido e os fatores de intensidade de tensão são calculados, assim como na Etapa 3.

- Etapas 7, 8 e 9: são análogas às etapas 4, 5 e 6, sendo executados ciclos global-local até a convergência de K_I e, em seguida, calculado o novo segmento de trinca e gerado um novo problema local.
- Etapa 10: o procedimento descrito segue até o último passo da propagação, no qual se obtém a geometria final da trinca.

O procedimento aqui descrito foi aplicado a diversos exemplos da Mecânica da Fratura Linear Elástica, buscando validar a implementação e avaliar a eficácia da estratégia, em especial, na obtenção dos fatores de intensidade de tensão. Maiores detalhes encontram-se no Capítulo 4.

3.4 Procedimento para o Cálculo de Fatores de Intensidade de Tensão Segundo o Método da Integral de Interação

O procedimento implementado no sistema INSANE para o cálculo dos fatores de intensidade de tensão baseia-se no método energético da Integral de Interação, proposto inicialmente por Yau et al. (1980). Trata-se de um método formulado a

partir das leis de conservação da Teoria da Elasticidade e de relações fundamentais da Mecânica da Fratura. Assim como os demais métodos baseados em taxas de liberação de energia, a Integral de Interação fornece resultados bastante precisos, uma vez que, em teoria, converge com a mesma taxa que a energia de deformação (Gupta et al., 2017).

Conforme Yau et al. (1980), a Integral J – comumente encontrada em referências da Mecânica da Fratura – pode ser expressa em termos dos fatores de intensidade de tensão, para problemas planos em modo misto de abertura, da seguinte forma:

$$J = \frac{K_I^2}{E^*} + \frac{K_{II}^2}{E^*} \quad (3.2)$$

na qual:

$$E^* = \begin{cases} E, & \text{para Estado Plano de Tensão} \\ \frac{E}{1-\nu^2}, & \text{para Estado Plano de Deformação} \end{cases} \quad (3.3)$$

Considerando, agora, a abordagem proposta por Moes et al. (1999), adotam-se dois estados independentes de equilíbrio (indicados pelos índices 1 e 2). O estado 1 corresponde ao estado corrente do modelo, obtido após o seu processamento. Já o estado 2 é definido como um estado de equilíbrio auxiliar, escolhido a partir das soluções assintóticas para os Modos I e II de abertura, conforme será descrito a seguir. A partir da definição da Integral J para um campo de tensões único (apresentada na Equação 3.4), pode-se obter uma expressão para a superposição dos dois estados de equilíbrio, conforme a Equação (3.5).

$$J = \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) \mathbf{n}_j d\Gamma \quad (3.4)$$

$$J^{(1+2)} = \int_{\Gamma} \left[\frac{1}{2} (\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}) (\epsilon_{ij}^{(1)} + \epsilon_{ij}^{(2)}) \delta_{1j} - (\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}) \frac{\partial (u_i^{(1)} + u_i^{(2)})}{\partial x_1} \right] \mathbf{n}_j d\Gamma \quad (3.5)$$

nas quais:

- x_1 e x_2 correspondem aos eixos das abscissas e das ordenadas do sistema cartesiano de coordenadas adotado. Nesta formulação, define-se, por conveniência, a origem dos eixos na ponta da trinca, conforme ilustrado na Figura 3.9.

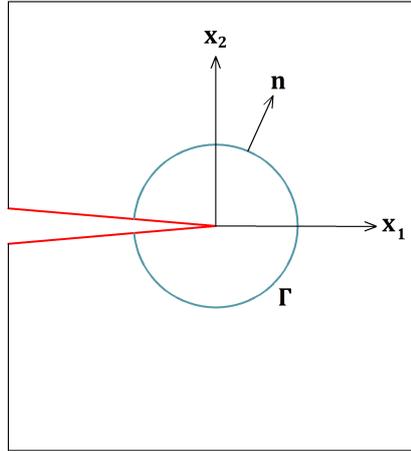


Figura 3.9: Sistema de coordenadas adotado para o cálculo da Integral de Interação, considerando uma trinca representada em vermelho.

- $\sigma_{ij}^{(1)}$, $\epsilon_{ij}^{(1)}$ e $u_i^{(1)}$ indicam os campos de tensões, deformações e deslocamentos do estado 1 – resultantes da análise do modelo estudado com a presença da trinca.
- $\sigma_{ij}^{(2)}$, $\epsilon_{ij}^{(2)}$ e $u_i^{(2)}$ representam os campos de tensões, deformações e deslocamentos do estado 2. Expressões possíveis para as tensões e deslocamentos são apresentadas na Tabela 3.1, em função do modo de abertura da trinca, conforme Anderson (2005).
- \mathbf{n}_j corresponde ao vetor unitário normal ao contorno Γ , conforme mostrado na Figura 3.9.

Tabela 3.1: Expressões para os campos de tensões e deslocamentos do estado 2, considerando as soluções assintóticas dos modos I e II de abertura.

Campo	Modo I	Modo II
$\sigma_{11}^{(2)}$	$\frac{K_I^{(2)}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2}\right)$	$-\frac{K_{II}^{(2)}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\right)$
$\sigma_{22}^{(2)}$	$\frac{K_I^{(2)}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2}\right)$	$\frac{K_{II}^{(2)}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}$
$\sigma_{12}^{(2)}$	$\frac{K_I^{(2)}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}$	$\frac{K_{II}^{(2)}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2}\right)$
$u_1^{(2)}$	$\frac{K_I^{(2)}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(\kappa - 1 + 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}\right)$	$\frac{K_{II}^{(2)}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \left(\kappa + 1 + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}\right)$
$u_2^{(2)}$	$\frac{K_I^{(2)}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \left(\kappa + 1 - 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}\right)$	$-\frac{K_{II}^{(2)}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(\kappa - 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}\right)$

sendo as constantes μ e κ da Tabela 3.1 dadas por:

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.6)$$

$$\kappa = \begin{cases} \frac{3-\nu}{1+\nu}, & \text{para Estado Plano de Tensão} \\ 3 - 4\nu, & \text{para Estado Plano de Deformação} \end{cases} \quad (3.7)$$

Após um rearranjo dos termos, obtém-se:

$$J^{(1+2)} = J^{(1)} + J^{(2)} + I^{(1,2)} \quad (3.8)$$

sendo o símbolo $I^{(1,2)}$ definido como a Integral de Interação para os estados 1 e 2, conforme a Equação (3.9):

$$I^{(1,2)} = \int_{\Gamma} \left[W^{(1,2)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} \right] \mathbf{n}_j d\Gamma \quad (3.9)$$

na qual $W^{(1,2)}$ refere-se à energia de deformação de interação, dada pela Equação (3.10):

$$W^{(1,2)} = \sigma_{ij}^{(1)} \epsilon_{ij}^{(2)} = \sigma_{ij}^{(2)} \epsilon_{ij}^{(1)} \quad (3.10)$$

Reescrevendo a Equação (3.2) para a combinação dos dois estados de equilíbrio, obtém-se:

$$J^{(1+2)} = J^{(1)} + J^{(2)} + \frac{2}{E^*} \left(K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)} \right) \quad (3.11)$$

Igualando a Equação (3.11) à Equação (3.8), define-se uma relação entre a Integral de Interação e os fatores de intensidade de tensão:

$$I^{(1,2)} = \frac{2}{E^*} \left(K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)} \right) \quad (3.12)$$

Expressões finais para K_I e K_{II} podem ser obtidas a partir de uma escolha adequada para o estado auxiliar 2. Definindo esse estado como o de Modo I puro, com $K_I^{(2)} = 1$ e $K_{II}^{(2)} = 0$, encontra-se a seguinte equação para K_I :

$$K_I^{(1)} = \frac{E^*}{2} I_{\text{Modo I}}^{(1,2)} \quad (3.13)$$

Definindo, agora, o estado 2 como o de Modo II puro, com $K_{II}^{(2)} = 1$ e $K_I^{(2)} = 0$, obtém-se uma expressão para K_{II} :

$$K_{II}^{(1)} = \frac{E^*}{2} I_{\text{Modo II}}^{(1,2)} \quad (3.14)$$

Assim sendo, torna-se possível extrair os valores de K_I e K_{II} a partir da Integral de Interação avaliada para os modos I e II de abertura.

A integral de linha definida na Equação (3.9), entretanto, não apresenta o formato mais adequado para uma análise utilizando elementos finitos planos. Em vista disso, é realizada uma transformação da integral de linha em uma integral de área equivalente, a partir da multiplicação do integrando por uma função $q(x)$ suficientemente suave e unitária em Γ . Reduzindo-se este contorno, no limite, à ponta da trinca e aplicando-se o Teorema da Divergência, obtém-se a Integral de Interação como uma integral de área:

$$I^{(1,2)} = \int_A \left[\sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} + \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} - W^{(1,2)} \delta_{1j} \right] \frac{\partial q}{\partial x_j} dA \quad (3.15)$$

Para a avaliação numérica da integral da Equação (3.15), o domínio A é definido como um conjunto de elementos finitos situados ao redor da ponta da trinca. Moes et al. (1999) sugerem que este conjunto seja formado pelos elementos que contêm, pelo menos, um nó no interior de um círculo de raio r_d com centro na ponta da trinca. Um valor típico para r_d (adotado neste trabalho) é dado pelo dobro do comprimento característico (definido, para o caso bidimensional, como a raiz quadrada da área) do elemento finito que contém a ponta da trinca. O processo de seleção desses elementos é ilustrado na Figura 3.10.

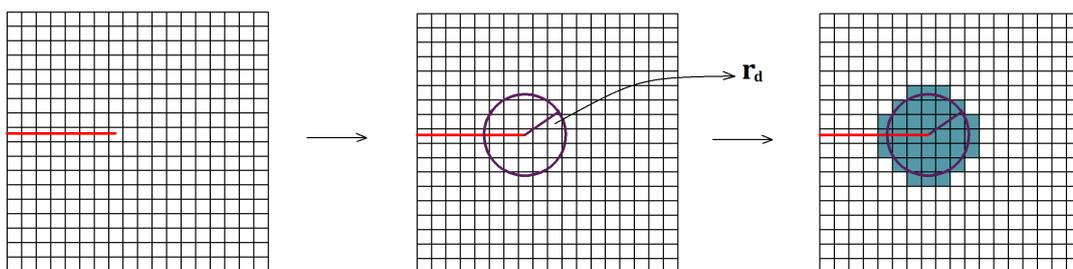


Figura 3.10: Exemplo do processo de definição dos elementos que irão compor o domínio de integração para o cálculo da Integral de Interação. Os elementos selecionados são destacados em azul.

Definido o domínio A , pode-se explicitar a função de ponderação q . Os autores sugerem que tal função assuma o valor unitário para os nós localizados no interior do círculo definido por r_d e valor nulo nos nós externos a esse círculo. Após a interpolação dos valores nodais de q utilizando as funções de forma de cada elemento de A , obtém-se uma função suficientemente suave.

A sequência do procedimento implementado no sistema INSANE para o cálculo dos fatores de intensidade de tensão, a partir da formulação apresentada nesta seção, é descrita a seguir.

1. Seleção dos elementos que irão compor o domínio de integração. A partir do

modelo no qual a trinca está representada, definem-se esses elementos conforme o procedimento mostrado na Figura 3.10.

2. Percorrem-se todos os elementos selecionados na etapa anterior.
3. Percorrem-se todos os pontos de Gauss de cada elemento.
4. Calcula-se o termo $\frac{\partial q}{\partial x_j}$, a partir da construção do vetor contendo os valores nodais da função q e posterior multiplicação pela matriz de derivadas globais do elemento. Em seguida, efetua-se a rotação para o eixo local paralelo à superfície da trinca.
5. Calcula-se o termo $\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1}$, a partir da multiplicação do vetor de deslocamentos do elemento pela matriz de derivadas globais do mesmo. Na sequência, realiza-se a mesma rotação de eixos do item anterior.
6. Obtém-se o termo $\sigma_{ij}^{(1)}$ a partir do cálculo das tensões no ponto de Gauss corrente. Novamente, é efetuada a rotação de eixos mencionada itens 4 e 5.
7. Define-se o modo de abertura a ser analisado (I, II ou ambos), a partir de informações fornecidas pelo usuário no arquivo de entrada do problema analisado.
8. Para o modo de abertura corrente, obtém-se $\sigma_{ij}^{(2)}$ a partir das expressões apresentadas na Tabela 3.1.
9. Para o modo de abertura corrente, calculam-se os termos $\epsilon_{ij}^{(2)}$ e $\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1}$ a partir de derivações dos deslocamentos apresentados na Tabela 3.1.
10. Utilizando as tensões e deformações encontradas nos itens 6 e 9, é feito o cálculo da energia de deformação conforme a Equação (3.10).
11. Definidos todos os termos necessários, obtém-se o valor da Integral de Interação numericamente, conforme a Equação (3.16).

$$I^{(1,2)} = \sum_{(E \in A)} \sum_{n=1}^{N_{PG}} \left[\sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} + \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} - W^{(1,2)} \delta_{1j} \right] \frac{\partial q}{\partial x_j} w_{PG} |\mathbf{J}| \quad (3.16)$$

sendo E um elemento finito pertencente ao domínio A , N_{PG} o número total de pontos de Gauss, w_{PG} o peso do ponto de gauss corrente e $|\mathbf{J}|$ o determinante da matriz jacobiana do elemento corrente.

12. Finalmente, o resultado encontrado para $I^{(1,2)}$ é utilizado para obter os valores de K_I e K_{II} , valendo-se das Equações 3.13 e 3.14.

O procedimento exposto nesta seção foi aplicado a modelos sujeitos a solicitações diversas, sendo empregado, no contexto do MEF^{g1}, apenas no modelo local. Os valores extraídos para os fatores de intensidade de tensão foram comparados a soluções de referência e avaliados ao longo da propagação de uma trinca a partir de um entalhe inicial. Mais detalhes são apresentados no Capítulo 4.

Capítulo 4

SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

4.1 Considerações Iniciais

O presente capítulo apresenta simulações numéricas realizadas no sistema INSANE, objetivando validar a implementação para a análise da propagação de trincas em estruturas bidimensionais utilizando o MEF^{gl}. Para cada exemplo exposto, são analisados parâmetros de relevância da solução – seja do ponto de vista numérico ou da Mecânica da Fratura – como os fatores de intensidade de tensão, a energia de deformação, a trajetória da trinca e a eficiência computacional do processo.

Para facilitar o entendimento do leitor, os exemplos são separados em duas seções. Na seção 4.2, apresentam-se as simulações que empregam o MEF^{gl} em sua abordagem padrão. A seção 4.3, por sua vez, exhibe os exemplos que utilizam a abordagem do MEFGE^{gl}, valendo-se da aplicação da estratégia estável sobre o enriquecimento numericamente obtido da solução local.

Para ambas as seções 4.2 e 4.3, são descritos a seguir alguns parâmetros de entrada comuns a todos os exemplos apresentados:

1. O refinamento da malha local é realizado, a partir de elementos da malha global, através do método do Mapeamento Transfinito Bilinear, conforme já mencionado na seção 3.1. Nos exemplos a serem apresentados, cada aresta global é dividida em três partes para a definição da malha local.
2. Todas as malhas utilizadas são compostas por elementos planos quadriláterais

de quatro nós.

3. Buscando aprimorar a descrição da parcela suave da solução, adota-se o enriquecimento polinomial de primeiro grau em todos os nós do problemas local. Obtém-se, desse modo, uma aproximação quadrática nesse modelo. Em alguns casos, foram feitos testes incluindo esse enriquecimento também no problema global, conforme será explicitado nos exemplos que seguem. Na Equação (4.1), define-se o enriquecimento adotado (conforme a notação da Equação(2.2)).

$$I_j = \left\{ 1, \frac{x - x_j}{h_j}, \frac{y - y_j}{h_j} \right\} \quad (4.1)$$

na qual x e y são as coordenadas do ponto de cálculo, j representa o nó para o qual o enriquecimento é definido, x_j e y_j são as coordenadas deste nó e h_j é o diâmetro do maior elemento finito que compartilha o nó j .

4. As trincas são inseridas somente no modelo local, valendo-se da estratégia de enriquecimento descrita na seção 2.1.2. As funções de singularidade são aplicadas apenas nos nós do elemento que contém a ponta da trinca, sendo o restante da descontinuidade representado através da função de Heaviside. O esquema de enriquecimento obtido para cada exemplo será ilustrado nas seções seguintes.
5. No que diz respeito à integração numérica, definem-se as seguintes ordens de integração:
 - Problema global inicial: 3×3 pontos de Gauss em todo o domínio.
 - Problema local: 8×8 pontos de Gauss nos elementos atravessados pela trinca, buscando representar de maneira adequada as funções descontínuas e singulares inseridas na aproximação. Tal número foi determinado a partir de testes de convergência, tendo como parâmetro o valor de K_I . No restante do domínio local, adotam-se 4×4 pontos de Gauss.

- Problema global enriquecido: utiliza-se a mesma ordem de integração do problema global inicial, exceto na região que coincide com o domínio local. Nesta última, elementos locais são empregados como células de integração, conforme exposto na seção 2.2.3.
6. São utilizadas condições de contorno de Dirichlet, transferindo-se apenas deslocamentos do problema global para o contorno do problema local. O valor definido para o parâmetro κ da Equação (2.14) é de 1×10^{10} .
 7. Adota-se o modelo constitutivo linear elástico para os dois modelos (global e local). As propriedades dos materiais utilizados serão descritas nas seções seguintes.
 8. A tolerância que determina o fim da execução dos ciclos global-local, conforme descrito na seção 3.3, é definida pelo valor de 1%, conforme mostra a Equação 4.2. Desse modo, enquanto a diferença entre o valor corrente (ciclo t) e o valor anterior (ciclo $t - 1$) de K_I for superior a 1%, um ciclo global-local adicional deve ser executado. Para problemas em modo misto de abertura (caso das seções 4.2.2, 4.2.3, 4.2.4 e 4.3.2) a mesma tolerância de 1% é considerada, também, em relação a K_{II} .

$$\frac{K_I^t - K_I^{t-1}}{K_I^t} < 0,01 \quad (4.2)$$

4.2 Simulações Utilizando a Abordagem Padrão do MEF^{gl}

Os exemplos presentes nesta seção empregam o MEF^{gl} (em sua abordagem padrão) para a análise da propagação de uma trinca a partir de um entalhe inicial, no contexto da Mecânica da Fratura Linear Elástica. São apresentados quatro exemplos com objetivos diversos, sendo eles:

1. Trinca de borda em modo I de abertura.
2. Trinca de borda em modo misto de abertura.
3. Ensaio DCB modificado em modo misto de abertura.
4. Trinca centrada inclinada em modo misto de abertura.

4.2.1 Trinca de Borda em Modo I de Abertura

O problema aqui apresentado consiste em uma chapa tracionada em estado plano de tensão, na qual é inserido um entalhe inicial de tamanho a . A geometria e as condições de contorno do problema são mostradas na Figura 4.1.

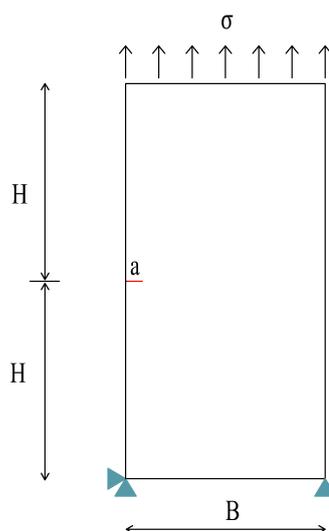


Figura 4.1: Representação da chapa tracionada contendo uma trinca de borda, na qual $H = 10,0$, $B = 10,0$, $a = 0,835$ e $\sigma = 1,0$ (em unidades consistentes).

As propriedades adotadas para o material são $E = 1,0$ e $\nu = 0,3$ (em unidades consistentes).

Para a geometria da Figura 4.1, adota-se como referência para K_I a seguinte solução empírica, proposta por Tada et al. (2000), com precisão de 0,5% para $a/B < 0,6$:

$$K_I = F(a/B) \sigma \sqrt{\pi a} \quad (4.3)$$

$$F(a/B) = 1,112 - 0,231(a/B) + 10,550(a/B)^2 - 21,710(a/B)^3 + 30,382(a/B)^4 \quad (4.4)$$

Na Figura 4.2, apresentam-se as malhas utilizadas nas três etapas da análise do MEF^{gl}. A malha global é composta por 78 elementos quadriláteros de quatro nós, cujas dimensões são $1,667 \times 1,538$. Trata-se de uma discretização grosseira, incapaz de representar a trinca presente no problema. Já a malha local é definida em tempo de processamento de modo a englobar a trinca estudada, conforme discutido na seção 3.3. Na Figura 4.2(b), apresenta-se a malha local gerada para o primeiro passo da propagação, correspondente à descrição do entalhe inicial. Esta malha é composta por 54 elementos quadriláteros de quatro nós, com dimensões de $0,556 \times 0,513$.

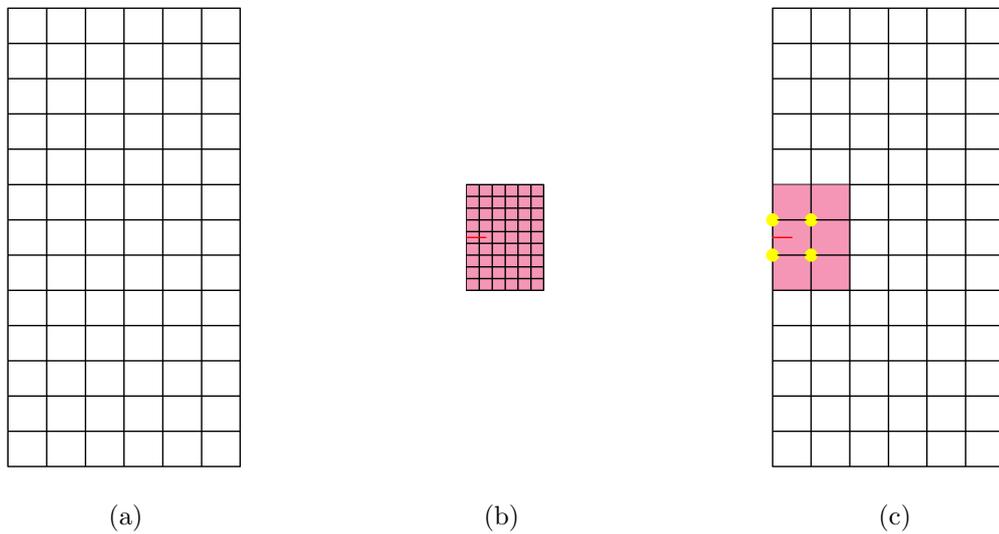


Figura 4.2: Representação das malhas utilizadas na análise do MEF^{gl} para a geometria da Figura 4.1, considerando o primeiro passo da propagação. (a) Problema global inicial. (b) Problema local. (c) Problema global enriquecido, com os nós enriquecidos com a solução local destacados em amarelo.

A Figura 4.3 apresenta em detalhe a malha local gerada para o primeiro passo da propagação, destacando os nós enriquecidos com as funções de singularidade e de Heaviside, conforme definido na seção 2.1.2. Destaca-se que as funções de singularidade são inseridas somente no elemento local que contém a ponta da trinca.

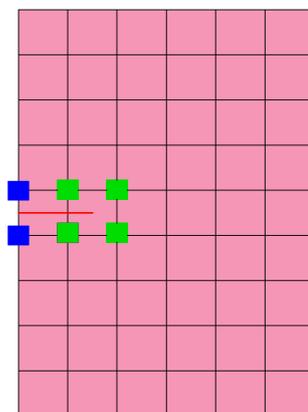


Figura 4.3: Detalhe da malha local gerada para o primeiro passo da propagação. Em azul, os nós enriquecidos com a função de Heaviside. Em verde, os nós enriquecidos com as funções de singularidade.

Através do presente exemplo, busca-se avaliar a eficácia do MEF^{gl} na extração dos fatores de intensidade de tensão ao longo da propagação da trinca ilustrada na Figura 4.1. Emprega-se o procedimento descrito na seção 3.3, com o incremento de trinca $\Delta_a = 0,556$. Foram executados 10 passos de propagação, permitindo a comparação com a solução empírica da Equação (4.3).

Primeiramente, o problema foi modelado sem a utilização, no modelo global, do enriquecimento polinomial de primeiro grau. Desse modo, obtém-se uma aproximação bilinear no problema global, fornecida pelos elementos quadriláteros de quatro nós. Os valores obtidos para K_I e K_{II} são apresentados na Figura 4.4, que mostra também as curvas correspondentes à solução de referência.

Para melhor visualização, os valores exibidos na Figura 4.4 são apresentados também na Tabela 4.1, que mostra o erro avaliado para K_I em relação à solução de referência.

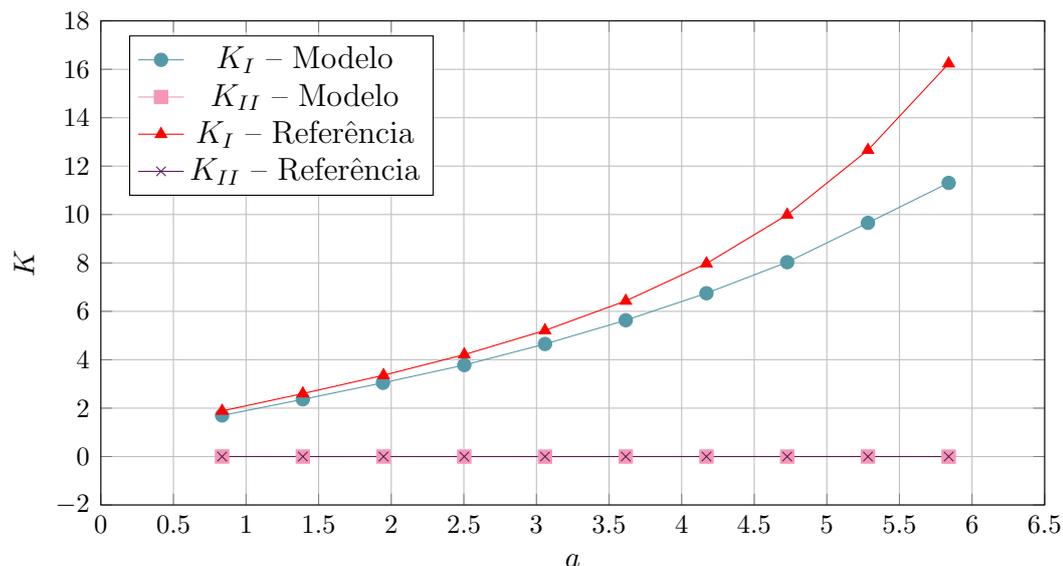


Figura 4.4: Fatores de intensidade de tensão avaliados ao longo da propagação da trinca, considerando a solução do MEF^{gl} (sem enriquecimento polinomial no modelo global) e a solução de referência.

Os resultados da Figura 4.4 e da Tabela 4.1 mostram que a estratégia do MEF^{gl} – com aproximação bilinear no problema global – não apresenta bons resultados para K_I . Observam-se erros elevados em relação à solução de referência, que crescem ao longo da propagação da trinca. À medida que o tamanho da trinca aumenta, os erros da solução são acumulados, prejudicando cada vez mais a qualidade da solução. Os valores de K_{II} , por sua vez, não tem sua qualidade comprometida pelo avanço da trinca. Tal comportamento se justifica pelo fato de que, neste exemplo, o modo I de abertura é dominante no problema, sendo possível extrair valores de K_{II} próximos de zero mesmo que a solução não seja muito precisa.

Buscando melhorar a qualidade da solução global, a análise anterior foi novamente realizada, incluindo-se, agora, o enriquecimento polinomial de primeiro grau em todos os nós do problema global. Obtém-se, dessa forma, uma aproximação quadrática nesse modelo. Os resultados encontrados são apresentados na Figura 4.5 e na Tabela 4.2.

Os resultados da Figura 4.5 e da Tabela 4.2 exibem excelente concordância com

os valores de referência. Os erros encontrados para K_I foram menores que 1% ao longo de toda a propagação, confirmando a eficácia da estratégia adotada para a obtenção de resultados precisos para os fatores de intensidade de tensão. Os valores encontrados para K_{II} foram, novamente, próximos de zero, em virtude da predominância do modo I de abertura no presente exemplo.

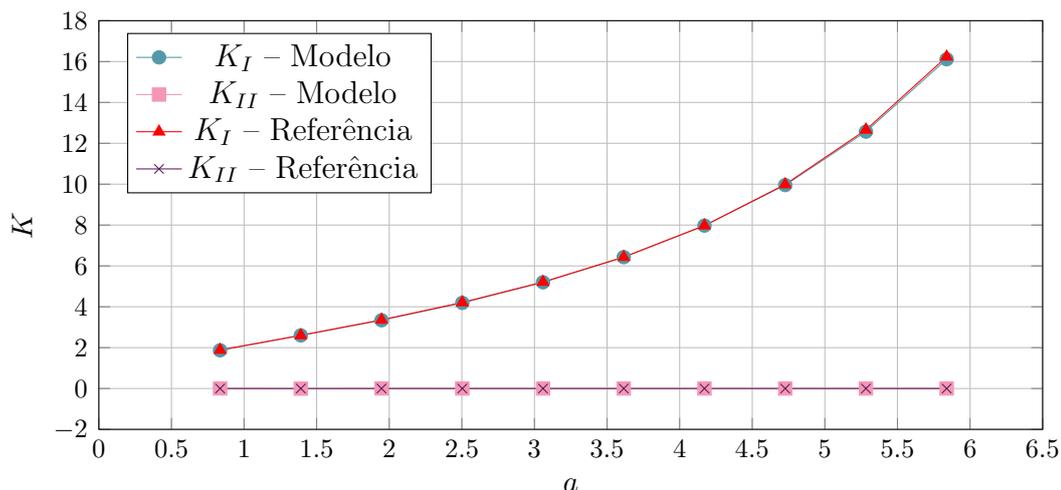


Figura 4.5: Fatores de intensidade de tensão avaliados ao longo da propagação da trinca, considerando a solução do MEF^{gl} (com enriquecimento polinomial no modelo global) e a solução de referência.

A comparação entre as tabelas 4.1 e 4.2 fornece informações importantes a respeito da abordagem do MEF^{gl}. Conforme discutido na seção 2.2.4, sabe-se que a qualidade da solução global interfere diretamente na solução do problema local, em virtude da imposição das condições de contorno neste problema. A estratégia de ciclos global-local garante que a solução global – a ser utilizada para impor as condições de contorno – leve em consideração a descontinuidade e a singularidade advindas da presença da trinca. Ainda assim, em função da discretização grosseira do problema global, há uma parcela suave da solução que a estratégia global-local não é capaz de representar. Tal parcela passa a ser descrita através do enriquecimento polinomial adicionado ao problema global, colaborando para a descrição geral do comportamento físico do problema.

Tabela 4.1: Comparação entre os valores de K_I e K_{II} extraídos do modelo (considerando a solução do MEFG^{gl} sem enriquecimento polinomial no modelo global) e da solução de referência.

a	0,835	1,391	1,947	2,503	3,059	3,615	4,171	4,727	5,283	5,839
K_I (MEFG ^{gl})	1,698	2,365	3,047	3,779	4,650	5,633	6,747	8,030	9,654	11,304
K_I (Referência)	1,884	2,602	3,359	4,211	5,210	6,430	7,974	9,986	12,658	16,235
K_{II} (MEFG ^{gl})	1,81E-03	-9,54E-04	1,58E-04	-1,44E-03	-5,10E-03	-1,15E-04	-3,66E-04	-1,39E-03	4,38E-04	-3,83E-03
Erro K_I (%)	9,87	9,13	9,30	10,26	10,77	12,40	15,38	19,58	23,73	30,37

Tabela 4.2: Comparação entre os valores de K_I e K_{II} extraídos do modelo (considerando a solução do MEFG^{gl} com enriquecimento polinomial no modelo global) e da solução de referência.

a	0,835	1,391	1,947	2,503	3,059	3,615	4,171	4,727	5,283	5,839
K_I (MEFG ^{gl})	1,871	2,599	3,342	4,190	5,199	6,430	7,973	9,956	12,571	16,115
K_I (Referência)	1,884	2,602	3,359	4,211	5,210	6,430	7,974	9,986	12,658	16,235
K_{II} (MEFG ^{gl})	4,65E-03	-8,20E-03	2,52E-03	-1,28E-03	-2,76E-04	-4,47E-04	-1,97E-04	1,44E-04	6,10E-04	8,87E-04
Erro K_I (%)	0,69	0,14	0,53	0,50	0,24	0,00	0,01	0,30	0,69	0,74

Considerando a solução que utiliza o enriquecimento polinomial no modelo global, apresentam-se na Figura 4.6 alguns passos da trajetória de propagação da trinca, fornecidos pelo pós-processador do sistema INSANE. Nessas figuras, é possível observar o crescimento do problema local, definido de modo a englobar toda a extensão da descontinuidade. A trinca presente no problema, conforme o esperado, propaga-se em linha reta em função da predominância do modo I de abertura.

Adicionalmente, o exemplo estudado nesta seção foi utilizado para avaliar a eficiência computacional da abordagem de problemas locais automatizados no MEF^{gl}. Para isso, é feita uma comparação entre essa estratégia e aquela que adota um problema local fixo (abordagem previamente utilizada no sistema INSANE para analisar a propagação de trincas através do MEF^{gl}).

Para o caso do problema local fixo, foi definido um modelo local abrangendo uma faixa horizontal na região onde se prevê a propagação da trinca a partir do entalhe inicial, conforme ilustrado na Figura 4.7. O problema global é definido pela mesma malha mostrada na Figura 4.2 e o refinamento da malha local é análogo ao utilizado na abordagem com o problema local automatizado. Adota-se o enriquecimento polinomial de primeiro grau no problema global, buscando uma comparação com os resultados da Tabela 4.2. Cabe ressaltar que, neste caso, o número de nós enriquecidos não varia ao longo da propagação, sendo mantidos os 14 nós destacados em amarelo na Figura 4.7. Os valores obtidos para os fatores de intensidade de tensão, bem como os erros em relação à solução de referência, são apresentados na Tabela 4.3.



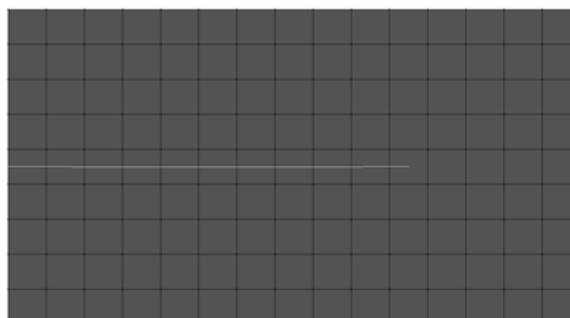
Passo 1



Passo 3



Passo 7



Passo 10

Figura 4.6: Representação de alguns passos da trajetória de propagação da trinca.

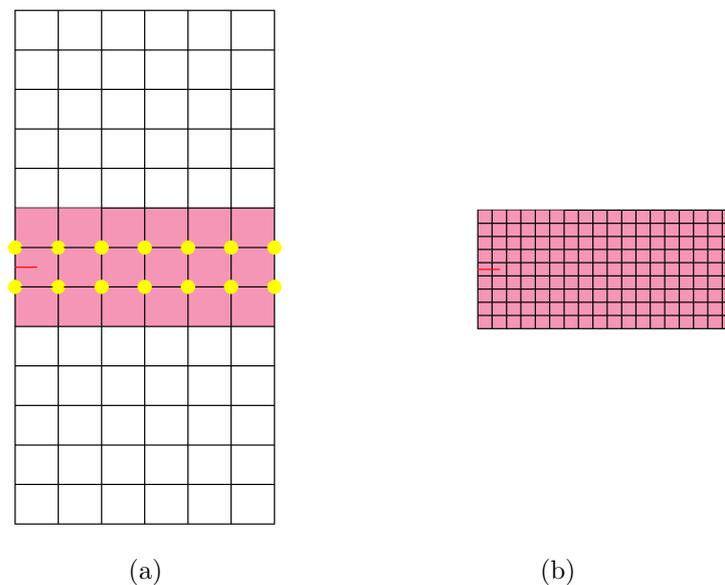


Figura 4.7: Representação das malhas utilizadas na análise do MEFG^{gl} , considerando um problema local fixo. Representa-se o passo correspondente ao entalhe inicial, em analogia com a Figura 4.2. (a) Problema global enriquecido, com os nós enriquecidos com a solução local destacados em amarelo. (b) Problema local.

Os resultados da Tabela 4.3 apresentam erros da mesma ordem de grandeza daqueles da Tabela 4.2. Isso mostra que, para o exemplo analisado, o maior número de nós enriquecidos da estratégia com problema local fixo não melhora significativamente os resultados. Além disso, observa-se que um problema local de maiores dimensões fornece respostas muito próximas daquelas obtidas com um domínio local reduzido. Tais conclusões reforçam os benefícios da abordagem de problemas locais automatizados proposta neste trabalho.

Para o estudo da eficiência computacional das duas estratégias, foi avaliado o tempo total de processamento, considerando os dez passos da propagação. Os resultados obtidos são mostrados na Figura 4.8. Cabe ressaltar que os valores apresentados correspondem à média de três medições do tempo de processamento, realizadas em um computador com 16 GB de memória e processador Intel[®] CORE i7.

Tabela 4.3: Comparação entre os valores de K_I extraídos do modelo (considerando um problema local fixo) e da solução de referência.

a	0,835	1,391	1,947	2,503	3,059	3,615	4,171	4,727	5,283	5,839
K_I (MEFG ^{gl})	1,871	2,598	3,354	4,195	5,212	6,448	8,003	10,008	12,629	16,216
K_I (Referência)	1,884	2,602	3,359	4,211	5,210	6,430	7,974	9,986	12,658	16,235
K_{II} (MEFG ^{gl})	4,66E-03	-1,34E-4	-3,02E-4	-7,93E-4	-1,55E-03	-2,40E-3	-3,14E-03	-3,63E-3	-3,82E-3	-3,76E-3
Erro K_I (%)	0,66	0,18	0,16	0,39	0,02	0,27	0,36	0,22	0,23	0,12

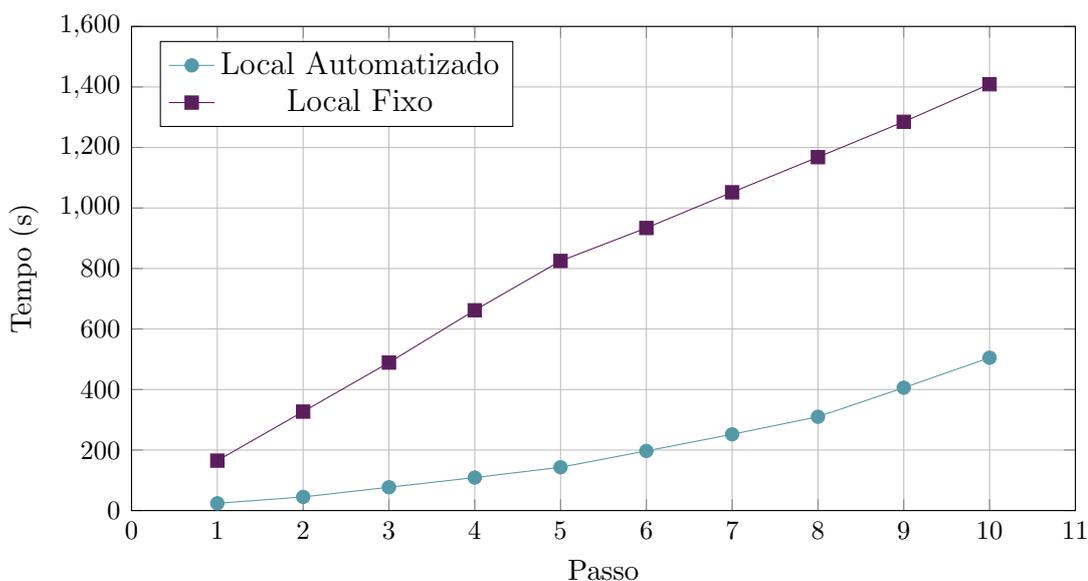


Figura 4.8: Tempo total gasto no processamento de dez passos de propagação da trinca.

A partir da Figura 4.8, confirma-se a expectativa de que a estratégia de problemas locais automatizados diminui significativamente o custo computacional da análise do MEFG^{gl} – em relação à estratégia previamente adotada no sistema INSANE. O tempo gasto na geração de um novo modelo a cada passo da propagação não compromete a economia de tempo garantida pela redução de tamanho do problema local (definido, a cada passo, com a mais compacta geometria possível).

Finalmente, é necessário fazer uma observação quanto ao desempenho da estratégia de ciclos global-local para o presente exemplo. Em todas as análises avaliadas nesta seção (seja através do problema local fixo ou automatizado), a convergência foi atingida após 3 ciclos global-local. Esse valor é coerente com resultados presentes em outros trabalhos da literatura, como Gupta et al. (2012) e Kim et al. (2011). O efeito dessa estratégia sobre a qualidade da solução final é estudado em maior detalhe no exemplo da próxima seção.

4.2.2 Trinca de Borda em Modo Misto de Abertura

O problema avaliado nesta seção foi proposto por Wilson (1969) e corresponde a uma chapa contendo uma trinca de borda, submetida a uma tensão cisalhante. Considera-se, neste caso, a hipótese de estado plano de deformação. A geometria do problema é ilustrada na Figura 4.9.

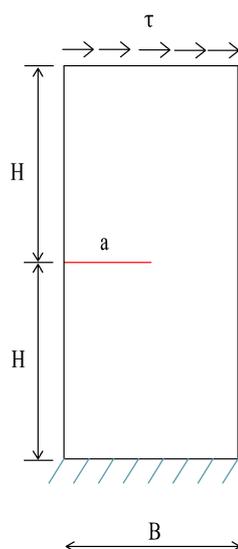


Figura 4.9: Representação da chapa solicitada por cisalhamento contendo uma trinca de borda, na qual $H = 8,0$, $B = 7,0$, $a = 3,5$ e $\tau = 1,0$ (em unidades consistentes).

As propriedades adotadas para o material são $E = 100 \times 10^3$ e $\nu = 0,3$ (em unidades consistentes). Para essas condições, a solução de referência dada por Wilson (1969), considerando a trinca representada na Figura 4.9, é apresentada a seguir:

$$K_I = 34 \quad (4.5)$$

$$K_{II} = 4,55 \quad (4.6)$$

O objetivo deste exemplo é avaliar a sensibilidade da solução (em termos dos fatores de intensidade de tensão e da energia de deformação) em relação à estratégia de ciclos global-local, considerando uma solicitação em modo misto de abertura.

Neste caso, avalia-se somente a configuração do entalhe inicial, sem que se desenvolva a propagação da trinca.

Na Figura 4.10, são representadas as malhas utilizadas na análise do MEF^{gl} para o problema desta seção. A malha global possui 105 elementos quadrilaterais de quatro nós, com dimensões de $1,0 \times 1,067$. Já a malha local, obtida através do procedimento apresentado na seção 3.2, é composta por 135 elementos quadrilaterais de quatro nós, com dimensões de $0,333 \times 0,356$. O problema local é exibido em detalhe na Figura 4.11.

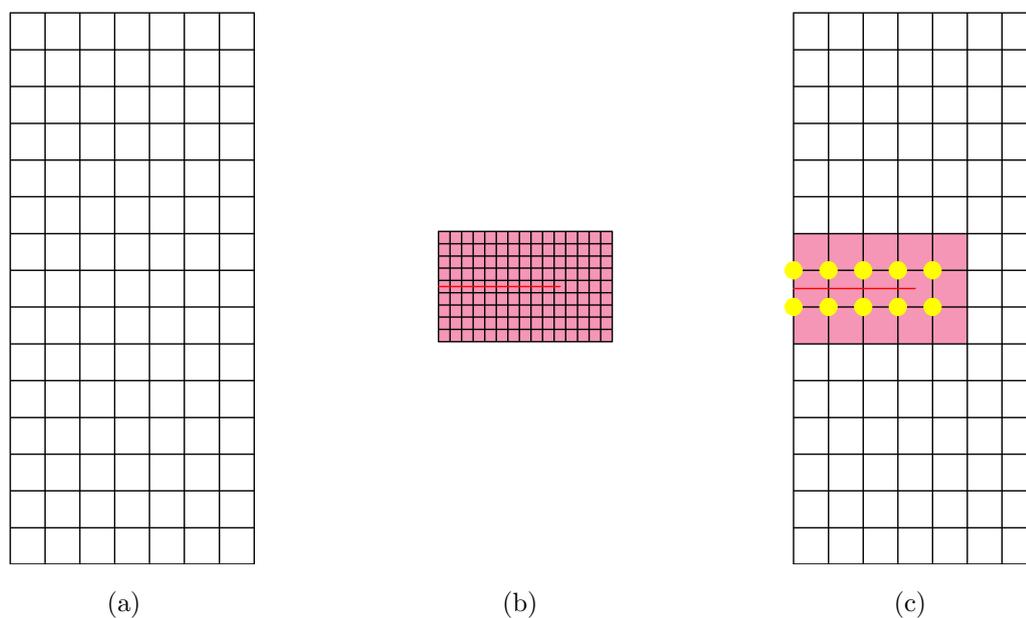


Figura 4.10: Representação das malhas utilizadas na análise do MEF^{gl} para a geometria da Figura 4.9. (a) Problema global inicial. (b) Problema local. (c) Problema global enriquecido, com os nós enriquecidos com a solução local destacados em amarelo.

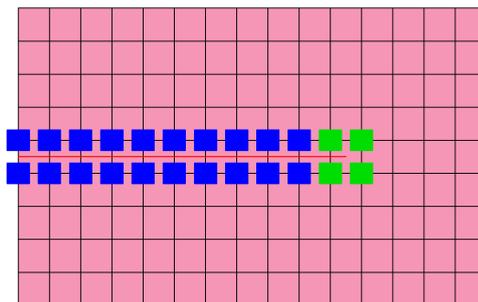


Figura 4.11: Detalhe da malha local gerada para o problema da Figura 4.9. Em azul, os nós enriquecidos com a função de Heaviside. Em verde, os nós enriquecidos com as funções de singularidade.

Na presente análise, adotou-se o enriquecimento polinomial de primeiro grau em todos os nós dos modelo global. Os resultados obtidos para os fatores de intensidade de tensão são apresentados na Tabela 4.4, que exibe também os erros calculados em relação aos valores de referência. Os resultados são relacionados a cada ciclo global-local realizado, permitindo avaliar a evolução dos erros à medida que mais ciclos são executados.

Tabela 4.4: Comparação entre os valores de K_I e K_{II} obtidos com o MEFG^{gl} e a solução de referência.

Ciclo	1	2	3	4	5	6	7
K_I – Modelo	0,5828	25,6415	33,4636	33,7299	33,7892	33,8110	33,8201
K_{II} – Modelo	0,5828	5,6787	5,2954	4,8588	4,6794	4,6003	4,5646
Erro K_I (%)	98,29	24,58	1,58	0,79	0,62	0,56	0,53
Erro K_{II} (%)	87,19	24,81	16,38	6,79	2,84	1,11	0,32

Os erros apresentados na Tabela 4.4 são exibidos também na Figura 4.12, que mostra graficamente a evolução dos mesmos ao longo da execução dos ciclos global-local.

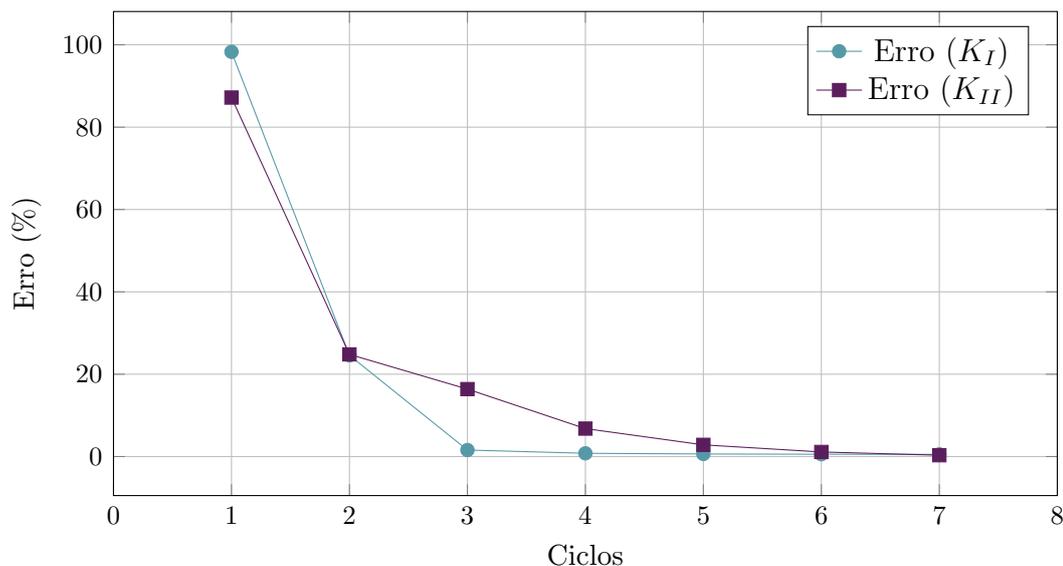


Figura 4.12: Evolução dos erros avaliados em relação à solução de referência ao longo da execução dos ciclos global-local.

Os valores finais encontrados para K_I e K_{II} foram bastante precisos, apresentando erros de 0,53 e 0,32%, respectivamente, em relação à solução de referência. Esses resultados confirmam, portanto, a eficácia da implementação proposta em extrair fatores de intensidade de tensão para a solicitação em modo misto de abertura.

A evolução dos erros exibida na Tabela 4.4 e na Figura 4.12 torna clara a efetividade da estratégia de ciclos global-local adotada. Os valores obtidos no primeiro ciclo são muito distantes da solução de referência, em virtude da baixa qualidade das condições de contorno impostas ao problema local. Neste caso, a solução do problema global inicial, que não possui a representação da trinca, é incapaz de representar adequadamente a solução no contorno local. Uma significativa redução do erro é verificada, em especial, do primeiro para o segundo ciclo, a partir do qual a aproximação do problema global, enriquecida pela solução numérica do problema local, passa a representar a descontinuidade presente no problema.

Em relação ao exemplo anterior, foi observado um maior número de ciclos global-local para que fossem obtidos erros finais da mesma ordem de grandeza (abaixo de 1%, em relação à solução de referência). Foram executados 7 ciclos no presente caso

e um valor máximo de 3 no exemplo anterior (caracterizado pela predominância do modo I de abertura). Isso se deve, provavelmente, à maior complexidade na descrição do modo misto, exigindo-se um número superior de ciclos para se obter a qualidade necessária da solução global a ser imposta como condição de contorno no problema local.

O problema estudado nesta seção foi utilizado, adicionalmente, para a análise da energia de deformação. Trata-se de uma grandeza global, em contraste com os fatores de intensidade de tensão – que sintetizam características locais da solução. Busca-se avaliar, através da energia de deformação, como a estratégia adotada contribui para representar globalmente o comportamento físico do problema.

Para viabilizar uma comparação dos resultados, o problema analisado foi modelado no software *ANSYS*[®], utilizando o MEF convencional, valendo-se de uma malha bastante refinada. Foram utilizados 76184 elementos quadrilaterais do tipo Q8, sendo a descontinuidade representada através da duplicação de nós e a singularidade induzida por elementos do tipo “*quarter point*”. O valor obtido para a energia de deformação, definido como referência nesta análise, foi de $2,467211 \times 10^{-2}$.

Os resultados da energia de deformação obtidos através do MEF^{gl} – avaliados ao longo dos 7 ciclos global-local realizados – são apresentados na Tabela 4.5, que exibe também os erros calculados em relação à solução de referência.

Tabela 4.5: Valores da energia de deformação extraídos do modelo e erros em relação à solução de referência.

Ciclo	1	2	3	4	5	6	7
Energia	0,0224506	0,0245437	0,0245870	0,0245930	0,2045942	0,0245944	0,0245945
Erro (%)	9,00	0,52	0,35	0,32	0,32	0,31	0,31

Conforme mostrado na Tabela 4.5, o valor final encontrado para a energia de

deformação alcançou a precisão de 0,31% em relação à solução de referência. Assim como foi verificado para os fatores de intensidade de tensão, o erro diminuiu significativamente do primeiro para o segundo ciclo global-local. Além disso, o erro relacionado à energia diminuiu mais rapidamente, apresentando um valor abaixo de 1% (em relação à referência) após a execução de apenas 2 ciclos. Isso se deve ao fato de que a energia de deformação, por ser uma grandeza global, é menos dependente do aprimoramento da solução local relacionado à estratégia de ciclos.

4.2.3 Ensaio DCB Modificado

O exemplo estudado nesta seção foi analisado por Belytschko e Black (1999) e corresponde a uma modificação do ensaio DCB (*“Double Cantilever Beam”*). Em sua configuração padronizada, esse ensaio é amplamente utilizado para a determinação da tenacidade à fratura sob a condição de modo I de abertura. A modificação sugerida pelos autores, ilustrada na Figura 4.13, consiste em uma pequena perturbação no entalhe inicial, caracterizada por um segmento inclinado de um ângulo $\Delta\theta$.

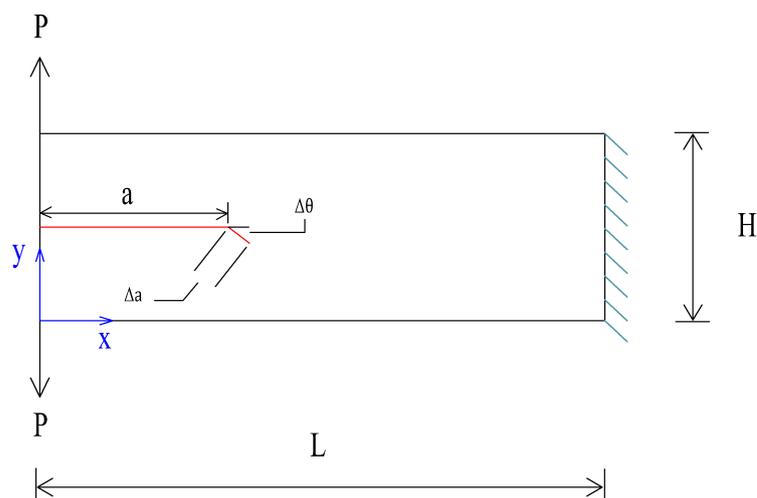
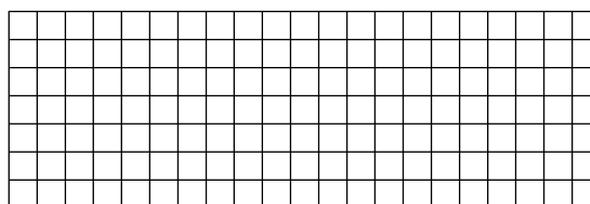


Figura 4.13: Representação da viga engastada submetida às forças concentradas na extremidade livre. Os parâmetros indicados são $H = 3,94$, $L = 11,8$, $P = 197$, $a = 3,94$ e $\Delta a = 0,3$ (em unidades consistentes). O entalhe inicial é posicionado na metade da altura da viga e o ângulo $\Delta\theta$ assume os valores de 1,43, 2,86 e 5,71°.

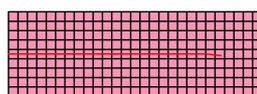
O problema é analisado considerando estado plano de tensão, com $E = 3 \times 10^7$ e $\nu = 0,3$ (em unidades consistentes).

A perturbação adicionada ao problema leva ao surgimento do modo II de abertura da trinca, em função da inclinação existente na extremidade do entalhe inicial. Quanto maior o ângulo $\Delta\theta$, mais significativo é esse fenômeno. Belytschko e Black (1999) apresentam as trajetórias de propagação da trinca para valores distintos de $\Delta\theta$, buscando avaliar o efeito da inclinação sobre as condições do problema estudado.

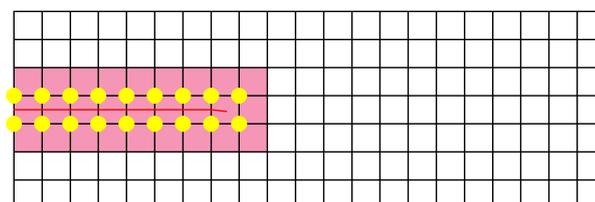
Dito isso, o objetivo deste exemplo é avaliar a implementação proposta na obtenção das trajetórias de propagação de uma trinca, considerando a condição de modo misto de abertura. A geometria da Figura 4.13 foi modelada para a análise do MEF^{gl}, conforme mostra a Figura 4.14 (ilustrada para o primeiro passo da propagação, considerando $\Delta\theta = 5,71^\circ$).



(a)



(b)



(c)

Figura 4.14: Malhas utilizadas na análise do MEF^{gl} para a geometria da Figura 4.13. (a) Problema global inicial. (b) Problema local. (c) Problema global enriquecido, com os nós enriquecidos com a solução local destacados em amarelo.

A malha global é composta por 147 elementos quadrilaterais de 4 nós, com dimensões de $0,562 \times 0,563$. A malha local, por sua vez, é gerada a cada passo da propagação pelo procedimento descrito na seção 3.3. Na Figura 4.14(b), apresenta-se a malha local correspondente ao primeiro passo do processo (ilustrada para o caso de $\Delta\theta = 5,71^\circ$), definida de modo a englobar o entalhe inicial. Essa malha, exibida em detalhe na Figura 4.15, possui 243 elementos quadrilaterais de 4 nós, com dimensões de $0,187 \times 0,188$. Novamente, é utilizado o enriquecimento polinomial de primeiro grau em todos os nós do modelo global.

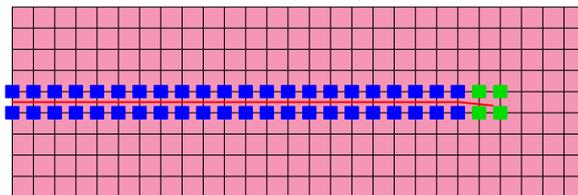


Figura 4.15: Detalhe da malha local gerada para o primeiro passo da propagação (para o caso de $\Delta\theta = 5,71^\circ$). Em azul, os nós enriquecidos com a função de Heaviside. Em verde, os nós enriquecidos com as funções de singularidade.

Para a abordagem exposta na seção 3.3, definiu-se o incremento de trinca $\Delta a = 0,1875$. Buscando a comparação com as trajetórias obtidas por Belytschko e Black (1999), o problema da Figura 4.13 foi analisado considerando os três valores sugeridos para $\Delta\theta$ ($1,43$, $2,86$ e $5,71^\circ$). As trajetórias encontradas são apresentadas na Figura 4.16, detalhadas para o trecho inicial da propagação.

As trajetórias encontradas são coerentes com aquelas obtidas por Belytschko e Black (1999). Observa-se que a inclinação das curvas aumenta em função de $\Delta\theta$, devido ao surgimento do modo II de abertura da trinca. Ao se aumentar o ângulo da perturbação imposta ao entalhe inicial, mais relevante se torna a tensão cisalhante atuante sobre a extremidade da trinca, o que provoca um desvio mais acentuado na trajetória da propagação. Ressalta-se que a diferença existente entre as trajetórias da Figura 4.16 e as de Belytschko e Black (1999) se justifica pelo nível de discretização

da malha local e maior valor de Δa adotados neste trabalho

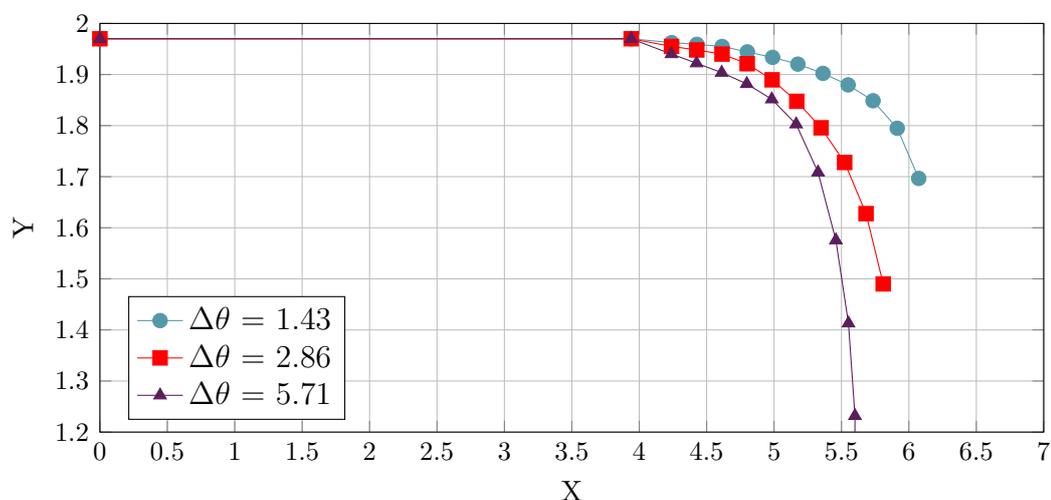
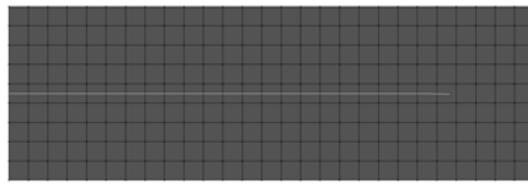
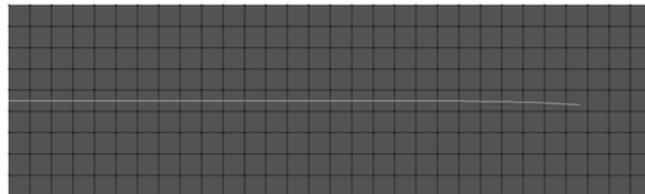


Figura 4.16: Trajetórias de propagação do entalhe inicial considerando três valores do ângulo $\Delta\theta$. O sistema de eixos adotado é o mesmo da Figura 4.13.

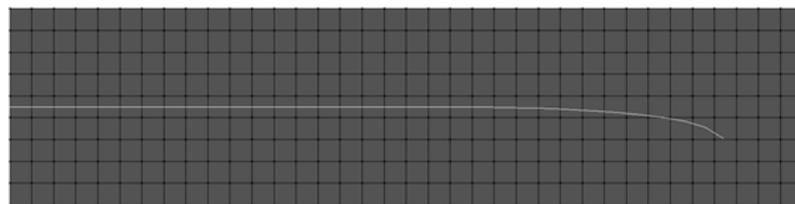
Na Figura 4.17, apresentam-se alguns passos da trajetória de propagação da trinca (considerando o ângulo $\Delta\theta = 5,71^\circ$) fornecidas pelo pós-processador do sistema INSANE. É possível observar a evolução do modelo local ao longo do crescimento da trinca, que viabiliza a total representação da descontinuidade no interior do seu domínio. Para a trajetória desenvolvida no presente exemplo, a definição prévia de um problema local fixo – conforme o procedimento utilizado até então no sistema INSANE – seria bastante trabalhosa para o usuário e onerosa computacionalmente, devendo envolver uma grande região do domínio do problema. A automatização proposta neste trabalho permite, portanto, que trajetórias mais complexas sejam representadas, mesmo que não exista um conhecimento antecipado a respeito do caminho a ser seguido pela trinca analisada.



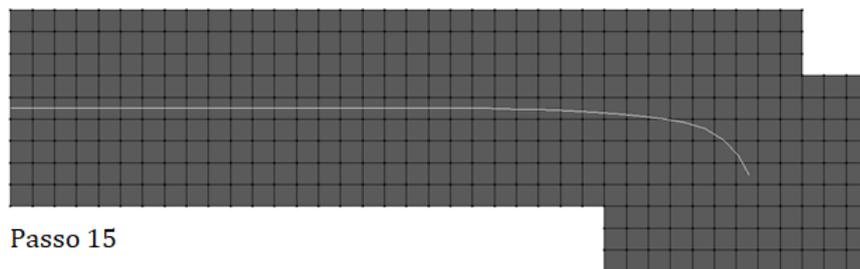
Passo 1



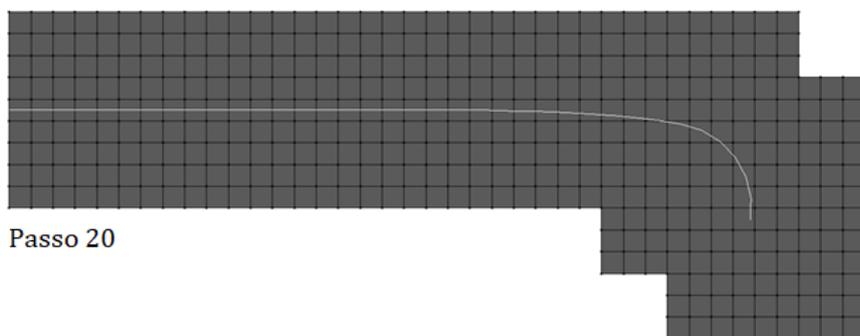
Passo 5



Passo 10



Passo 15



Passo 20

Figura 4.17: Representação de alguns passos da trajetória de propagação da trinca, considerando o ângulo $\Delta\theta = 5,71^\circ$.

4.2.4 Trinca Inclinada em Modo Misto de Abertura

O exemplo exposto nesta seção foi analisado por Moes et al. (1999) e consiste em uma chapa tracionada contendo uma trinca inclinada em seu centro. A geometria do problema é ilustrada na Figura 4.18.

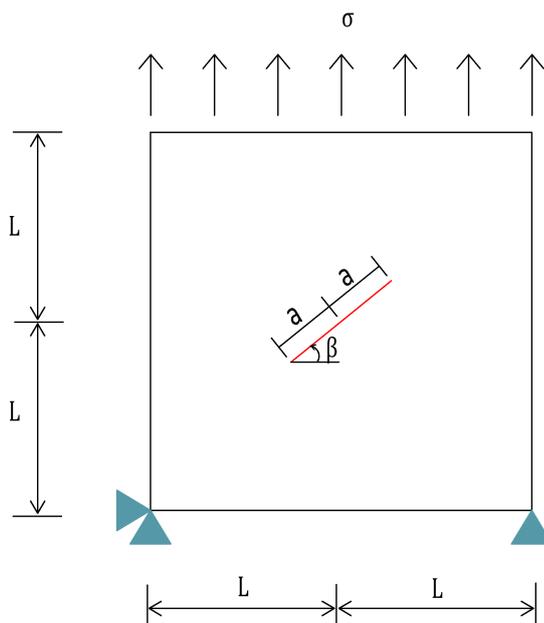


Figura 4.18: Representação da chapa tracionada contendo uma trinca inclinada em seu centro. Os parâmetros indicados são $L = 5,0$, $a = 0,5$ e $\sigma = 1,0$ (em unidades consistentes).

O problema é analisado considerando estado plano de tensão, com $E = 3 \times 10^7$ e $\nu = 0,3$ (em unidades consistentes).

Como solução de referência para o presente exemplo, Moes et al. (1999) sugerem, em razão do tamanho pequeno da trinca em relação às dimensões do problema, a seguinte solução analítica para o modelo de chapa infinita:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \cos^2(\beta) \quad (4.7)$$

$$K_{II} = \sigma \sqrt{\pi a} \sen(\beta) \cos(\beta) \quad (4.8)$$

Considerando a abordagem do MEF G^{gl} , são apresentadas na Figura 4.19 as malhas utilizadas nas três etapas da análise. A malha global é composta por 81 elementos quadriláteros de 4 nós, com dimensões de $1,111 \times 1,111$. Já a malha local é construída, a cada passo da propagação, conforme o procedimento descrito na seção 3.3. Na Figura 4.19(b), representa-se a malha local definida para o primeiro passo do processo (ilustrada para o caso de $\beta = 30^\circ$). Tal malha, apresentada em detalhe na Figura 4.20, possui 81 elementos quadriláteros de 4 nós, com dimensões de $0,370 \times 0,370$. Mais uma vez, é utilizado o enriquecimento polinomial de primeiro grau em todos os nós do modelo global.

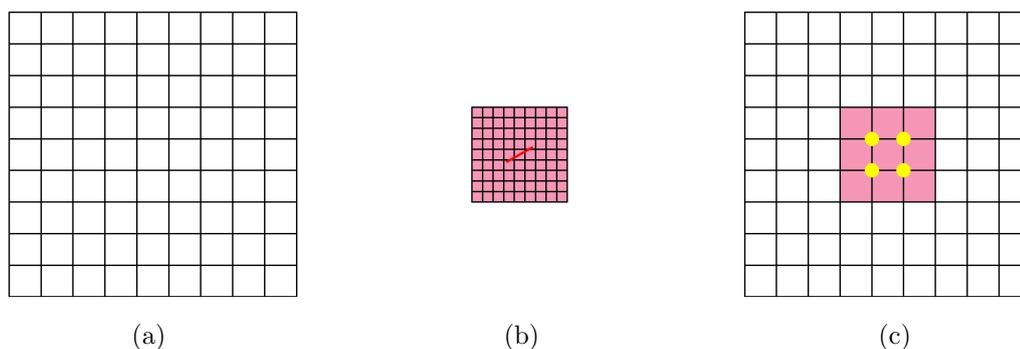


Figura 4.19: Malhas utilizadas na análise do MEF G^{gl} para o primeiro passo da propagação. (a) Problema global inicial. (b) Problema local (para $\beta = 30^\circ$). (c) Problema global enriquecido, com os nós enriquecidos com a solução local destacados em amarelo.

O objetivo deste exemplo é avaliar a implementação proposta na simulação da propagação de uma trinca centrada. Para isso, o procedimento descrito na seção 3.3 foi empregado de modo a considerar a propagação das duas pontas da trinca presente no problema.

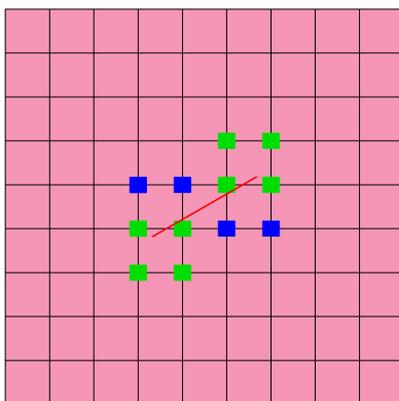


Figura 4.20: Malha local gerada para o primeiro passo da propagação (com $\beta = 30^\circ$). Em azul, os nós enriquecidos com a função de Heaviside. Em verde, os nós enriquecidos com as funções de singularidade.

Primeiramente, o problema foi simulado considerando o valor de $\beta = 30^\circ$. Desse modo, foram extraídos os fatores de intensidade de tensão para o primeiro passo da propagação (considerando somente o entalhe inicial), buscando uma comparação com os valores das Equações (4.7) e (4.8). Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 4.6, em função do número de ciclos global-local realizados.

Tabela 4.6: Comparação entre os valores de K_I e K_{II} extraídos do modelo (considerando a estratégia do problema local automatizado) e da solução de referência.

Ciclo	1	2	3
K_I (MEFG ^{gl})	0,8289	0,9489	0,9505
K_{II} (MEFG ^{gl})	0,8289	0,5525	0,5511
K_I (Referência)	0,9400	0,9400	0,9400
K_{II} (Referência)	0,5427	0,5427	0,5427
Erro K_I (%)	11,82	0,94	1,12
Erro K_{II} (%)	52,74	1,81	1,55

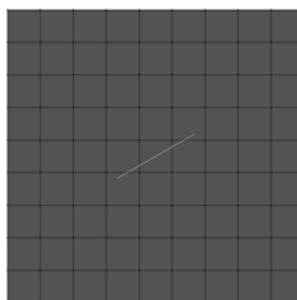
Conforme observado na Tabela 4.6, a estratégia de ciclos global-local, mais uma vez, foi essencial para o aprimoramento dos resultados. Observa-se, entretanto, um

pequeno aumento do erro referente a K_I no último ciclo, situação esta que não ocorreu nos três exemplos apresentados anteriormente. Testes complementares mostraram a estabilização do erro à medida que mais ciclos foram realizados, mantendo-se na ordem de 1,12%. Uma vez que os valores de K_I permaneceram próximos entre si e da solução de referência, pode-se afirmar que esses resultados não comprometem as conclusões obtidas neste exemplo.

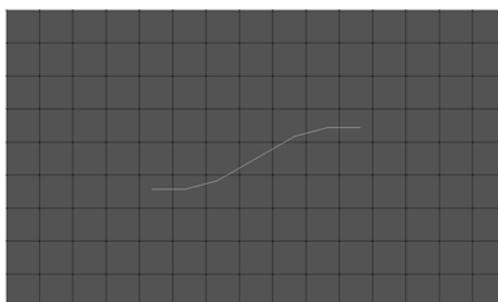
Após o cálculo de K_I e K_{II} para a configuração do entalhe inicial, desenvolveu-se o processo de propagação das duas pontas da trinca. A trajetória resultante é mostrada na Figura 4.21, na qual são exibidos alguns passos da propagação provenientes do pós-processador do sistema INSANE. O valor do incremento de trinca adotado é de 0,370.

As trajetórias exibidas na Figura 4.21 são coerentes com o comportamento físico já esperado para este exemplo. Após os passos iniciais do processo, o modo I de abertura da trinca passa a ser dominante no problema, fazendo com que a propagação siga uma tendência horizontal. Tal resultado foi também obtido por Malekan (2017). É possível observar, ainda, a expansão do problema local ao longo do crescimento da trinca, permitindo a completa descrição da descontinuidade em seu domínio. Esses resultados confirmam, portanto, a eficiência da implementação realizada na descrição da propagação de uma trinca a partir de dois pontos distintos, possibilitando a modelagem de diversos problemas da Mecânica da Fratura.

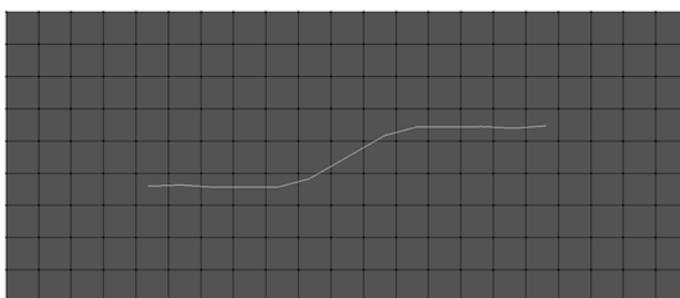
Visando avaliar a eficiência computacional da abordagem de problemas locais automatizados – agora para o caso de uma trinca centrada – o presente exemplo foi também modelado através de um problema local fixo. Assim como na seção 4.2.1, definiu-se um modelo local que abrange uma faixa horizontal na região onde se prevê a propagação da trinca. A análise utilizou o mesmo problema global e o mesmo refinamento da malha local empregados na abordagem com o problema local automatizado, conforme mostra a Figura 4.22. Neste caso, o número de nós globais enriquecidos com a solução local não se altera ao longo da propagação.



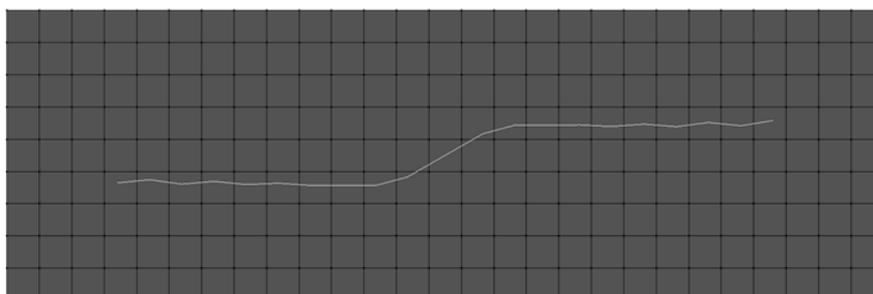
Passo 1



Passo 3



Passo 6



Passo 10

Figura 4.21: Representação de alguns passos da trajetória de propagação da trinca (através do problema local automatizado), considerando o ângulo inicial $\beta = 30^\circ$.

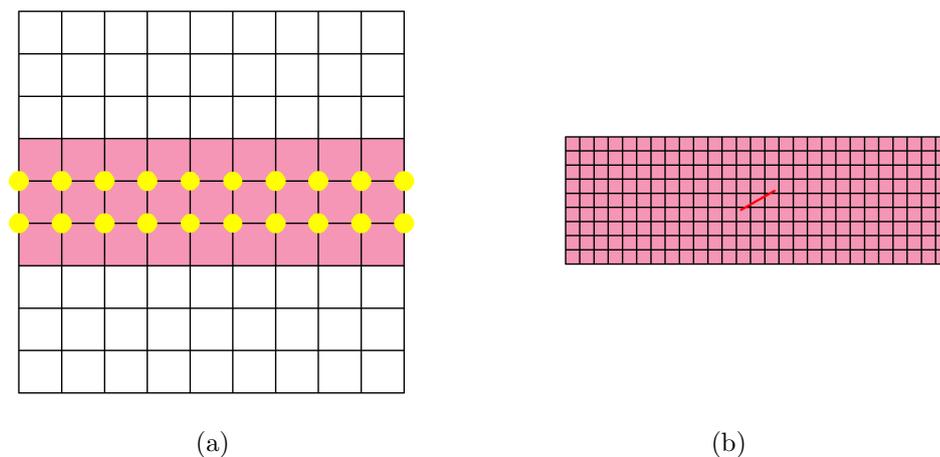


Figura 4.22: Representação das malhas utilizadas na análise do MEFG^{gl} , considerando um problema local fixo. (a) Problema global enriquecido, com os nós enriquecidos com a solução local destacados em amarelo. (b) Problema local.

Os valores de K_I e K_{II} obtidos através do problema local fixo, avaliados para a configuração do entalhe inicial, são apresentados na Tabela 4.7. Cabe ressaltar que a análise foi feita com os mesmos parâmetros da abordagem que emprega o problema local automatizado.

Tabela 4.7: Comparação entre os valores de K_I e K_{II} extraídos do modelo (considerando a estratégia do problema local fixo) e da solução de referência.

Ciclo	1	2	3
K_I (MEFG^{gl})	0,8366	0,9507	0,9515
K_{II} (MEFG^{gl})	0,8366	0,5512	0,5506
K_I (Referência)	0,9400	0,9400	0,9400
K_{II} (Referência)	0,5427	0,5427	0,5427
Erro K_I (%)	11,00	1,14	1,22
Erro K_{II} (%)	54,15	1,57	1,46

Os resultados da Tabela 4.7 são semelhantes aos da Tabela 4.6, apresentando

erros finais muito próximos entre si. Confirmam-se, desse modo, as conclusões da seção 4.2.1 no que diz respeito à influência do tamanho do problema local e do número de nós globais enriquecidos com a solução local.

Para analisar o custo computacional das duas abordagens (problema local fixo e automatizado), avaliou-se o tempo total de processamento em cada caso, considerando 10 passos de propagação. Os valores registrados são apresentados na Figura 4.23, correspondentes à média de três medições de tempo realizadas em um computador com 16 GB de memória e processador Intel[®] CORE i7.

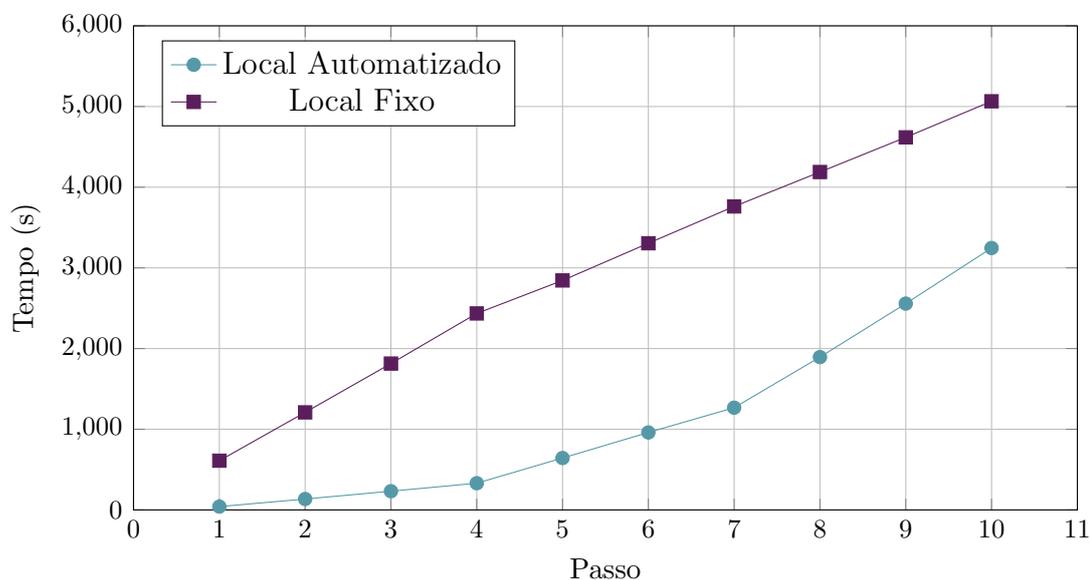


Figura 4.23: Tempo total gasto no processamento de dez passos de propagação da trinca a partir do entalhe inicial, considerando as abordagens de problema local fixo e automatizado.

Conforme consta na Figura 4.23, a abordagem de problemas locais automatizados reduz o custo computacional da análise. A geração de um novo problema local que acompanha a propagação das duas pontas da trinca, efetuada a cada passo da propagação, não penaliza significativamente a eficiência do processamento. Tais conclusões reforçam os resultados já discutidos na seção 4.2.1.

Adicionalmente, o presente exemplo foi utilizado para o estudo do efeito da inclinação da trinca sobre os fatores de intensidade de tensão. Para isso, foi empregada a abordagem de problemas locais automatizados para a representação do entalhe inicial, considerando uma faixa de valores para o ângulo β (ilustrado na Figura 4.18), variando entre 0 e 90°. As malhas utilizadas são as mesmas da Figura 4.19, alterando-se apenas a inclinação da trinca no problema local. Os resultados finais obtidos para K_I e K_{II} são apresentados na Figura 4.24, que exibe também as curvas provenientes da solução de referência (Equações (4.7) e (4.8)).

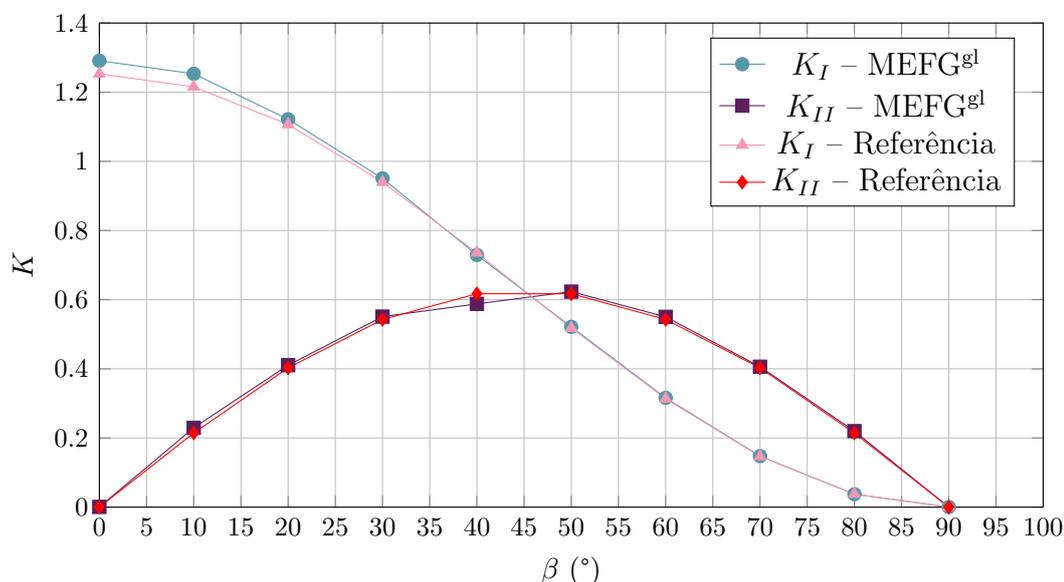


Figura 4.24: Fatores de intensidade de tensão avaliados para uma faixa de valores do ângulo β .

Os resultados obtidos através do MEFG^{gl} exibem boa concordância com a solução de referência, conforme se observa na Figura 4.24. Conforme o esperado, os valores de K_I diminuem com o aumento do ângulo β , à medida que a direção da trinca muda em relação às direções de tensões principais. Os valores de K_{II} , por sua vez, crescem até o ângulo $\beta = 45^\circ$ – valor no qual a tensão cisalhante é máxima – e retornam a zero quando $\beta = 90^\circ$, situação na qual o segmento de trinca torna-se paralelo ao carregamento atuante.

Finalmente, o exemplo estudado nesta seção foi modelado através de uma malha global irregular. Busca-se avaliar, neste caso, a sensibilidade da estratégia de problemas locais automatizados para o caso de malhas distorcidas. Na Figura 4.25 é apresentada a malha global utilizada, gerada a partir de deslocamentos dos nós da malha regular ilustrada na Figura 4.19.

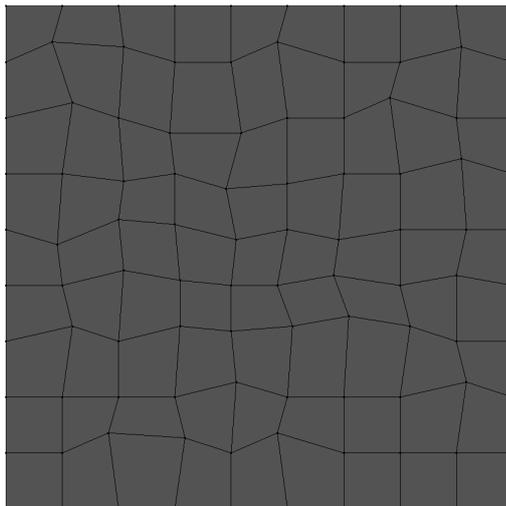


Figura 4.25: Malha global irregular definida para a análise do MEF^{gl}.

Para a geração da malha local, foram utilizadas as mesmas informações definidas para o caso da malha regular, considerando o ângulo $\beta = 30^\circ$. O processo de propagação da trinca também foi desenvolvido com os mesmos parâmetros da análise anterior. Os resultados obtidos para os fatores de intensidade de tensão são apresentados na Tabela 4.8, que inclui os erros avaliados em relação à solução de referência (Equações (4.7) e (4.8)).

Tabela 4.8: Comparação entre os valores de K_I e K_{II} extraídos do modelo (considerando a estratégia do problema local automatizado e malha irregular) e da solução de referência.

Ciclo	1	2	3
K_I (MEFG ^{gl})	0,8006	0,9440	0,9464
K_{II} (MEFG ^{gl})	0,8006	0,5552	0,5535
K_I (Referência)	0,9400	0,9400	0,9400
K_{II} (Referência)	0,5427	0,5427	0,5427
Erro K_I (%)	14,83	0,42	0,69
Erro K_{II} (%)	47,52	2,31	1,99

Conforme observado na Tabela 4.8, o valor de K_I calculado a partir da malha irregular apresentou erro de apenas 0,69% em relação à solução de referência. O erro associado a K_{II} , por sua vez, foi um pouco mais elevado em relação aos valores obtidos com as malhas regulares. Esse comportamento pode ser justificado pelo efeito da distorção dos elementos na malha irregular, que pode prejudicar a descrição da trinca presente no problema.

Considerando a geração do problema local a partir da malha irregular da Figura 4.25, apresenta-se na Figura 4.26 a evolução do problema local ao longo da propagação da trinca. As trajetórias encontradas exibem ótima concordância com o resultado esperado, já discutido para o caso da malha regular. Confirma-se, portanto, a validade da geração automatizada de domínios locais para malhas distorcidas, viabilizando a modelagem de geometrias mais complexas através do MEFG^{gl}.

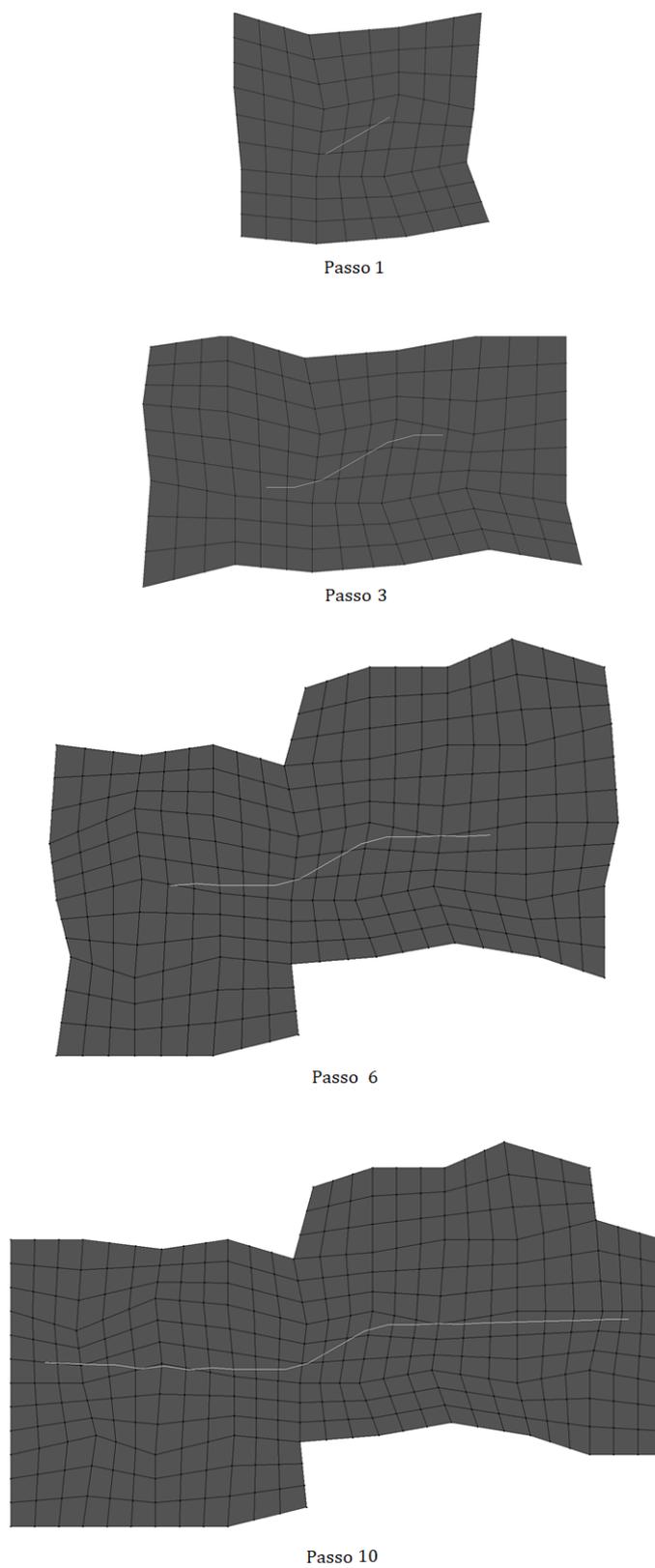


Figura 4.26: Representação de alguns passos da trajetória de propagação da trinca, considerando uma malha irregular e o ângulo inicial $\beta = 30^\circ$.

4.3 Simulações Utilizando a Abordagem do MEFGE^{gl}

Os exemplos presentes nesta seção utilizam a abordagem do MEFGE^{gl} para a análise da propagação de trincas no âmbito da Mecânica da Fratura Linear Elástica. Neste caso, aplica-se a estratégia estável somente sobre o enriquecimento numericamente obtido da solução local. Dois exemplos apresentados na seção 4.2 são novamente analisados, buscando avaliar o efeito do enriquecimento global-local estável sobre os resultados do MEFGE^{gl}. Os problemas selecionados são:

1. Trinca de borda em modo I de abertura.
2. Trinca de borda em modo misto de abertura.

4.3.1 Trinca de borda em modo I de abertura – MEFGE^{gl}

O problema aqui analisado é o mesmo da seção 4.2.1, correspondendo a uma chapa tracionada com a presença de uma trinca de borda, conforme mostrado na Figura 4.1. Para a análise do MEFGE^{gl}, foram empregadas as mesmas malhas da seção 4.2.1, com os mesmos parâmetros para a geração do problema local e para o procedimento de propagação da trinca a partir do entalhe inicial.

Dito isso, o objetivo deste exemplo é avaliar o efeito do enriquecimento global-local estável sobre os fatores de intensidade de tensão, considerando a condição de modo I de abertura. Assim como na seção 4.2.1, são feitas análises incluindo ou não o enriquecimento polinomial de primeiro grau no modelo global, buscando avaliar a efetividade da estratégia estável nestes dois casos.

Primeiramente, apresentam-se na Tabela 4.9 os resultados obtidos através do MEFGE^{gl}, considerando a inclusão do enriquecimento polinomial de primeiro grau no modelo global. São exibidos os erros calculados em relação à solução de referência, assim como na seção 4.2.1.

Conforme observado na Tabela 4.9, os resultados fornecidos pelo MEFGE^{gl} apresentaram erros muito pequenos em relação à solução de referência. Em comparação

com a abordagem padrão do MEFG^{gl} (resultados da Tabela 4.2), verificam-se erros da mesma ordem de grandeza, com uma pequena diminuição no caso do MEFGE^{gl} . Para melhor visualização, os resultados das Tabelas 4.9 e 4.2 são reunidos na Figura 4.27.

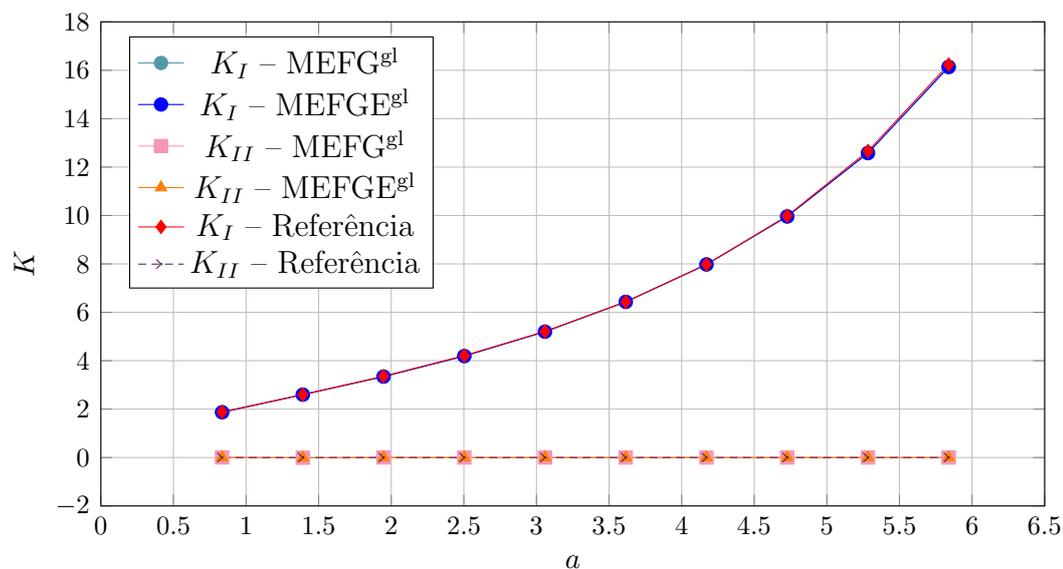


Figura 4.27: Fatores de intensidade de tensão avaliados ao longo da propagação da trinca (através do MEFG^{gl} e do MEFGE^{gl}), considerando o enriquecimento polinomial de primeiro grau no modelo global.

A partir da Figura 4.27, é possível concluir que, quando é incluído o enriquecimento polinomial no problema global, as abordagens do MEFG^{gl} e do MEFGE^{gl} fornecem resultados bastante semelhantes. Neste caso, os valores obtidos com o MEFG^{gl} já apresentavam erros muito pequenos. Desse modo, o aprimoramento fornecido pelo enriquecimento global-local estável foi pouco significativo, uma vez que a solução da abordagem padrão já era suficientemente precisa.

Considerando, agora, a solução que não inclui o enriquecimento polinomial no modelo global, apresentam-se na Tabela 4.10 os resultados fornecidos pelo MEFGE^{gl} . Assim como no caso anterior, são reunidos na Figura 4.28 as soluções obtidas com o MEFG^{gl} e o MEFGE^{gl} .

Tabela 4.9: Comparação entre os valores de K_I e K_{II} extraídos do modelo (considerando a solução do MEFGE^{gl} com enriquecimento polinomial no modelo global) e da solução de referência.

a	0,835	1,391	1,947	2,503	3,059	3,615	4,171	4,727	5,283	5,839
K_I (MEFGE ^{gl})	1,871	2,599	3,343	4,192	5,200	6,434	7,980	9,961	12,581	16,143
K_I (Referência)	1,884	2,602	3,359	4,211	5,210	6,430	7,974	9,986	12,658	16,235
K_{II} (MEFGE ^{gl})	4,66E-03	-8,20E-03	2,50E-03	-1,27E-03	-3,01E-04	-4,66E-04	-2,07E-04	1,46E-04	6,40E-04	9,53E-04
Erro K_I (%)	0,67	0,14	0,49	0,45	0,22	0,05	0,08	0,25	0,61	0,57

Tabela 4.10: Comparação entre os valores de K_I e K_{II} extraídos do modelo (considerando a solução do MEFGE^{gl} sem enriquecimento polinomial no modelo global) e da solução de referência.

a	0,835	1,391	1,947	2,503	3,059	3,615	4,171	4,727	5,283	5,839
K_I (MEFGE ^{gl})	1,813	2,514	3,231	4,086	5,041	6,252	7,748	9,526	12,163	15,465
K_I (Referência)	1,884	2,602	3,359	4,211	5,210	6,430	7,974	9,986	12,658	16,235
K_{II} (MEFGE ^{gl})	2,63E-03	-4,62E-03	1,57E-03	-7,52E-04	-1,28E-04	-2,36E-04	-1,83E-04	-5,12E-05	1,77E-04	2,78E-04
Erro K_I (%)	3,77	3,38	3,82	2,97	3,26	2,77	2,84	4,61	3,91	4,75

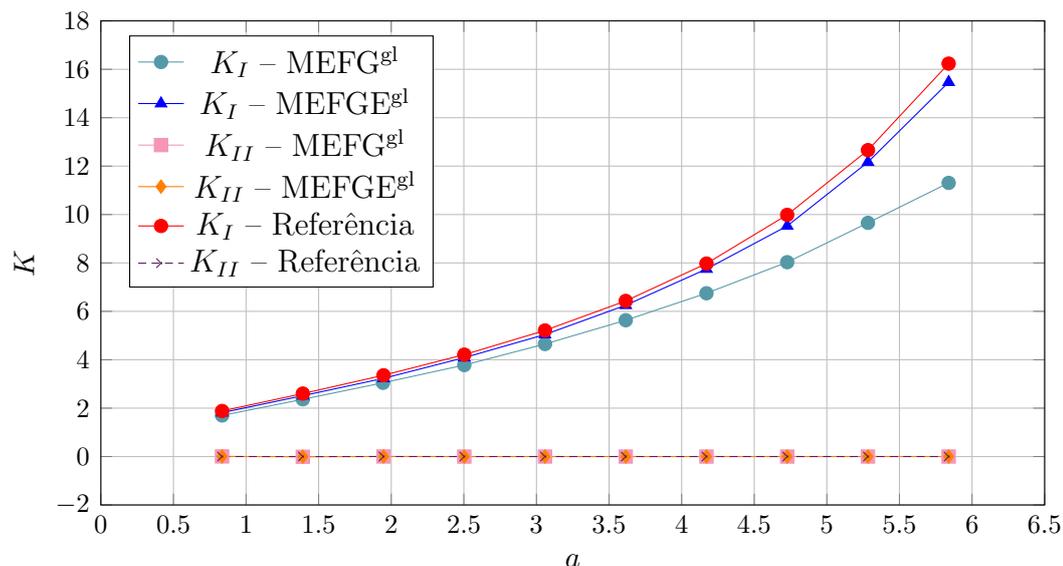


Figura 4.28: Fatores de intensidade de tensão avaliados ao longo da propagação da trinca (através do MEFGE^{gl} e do MEFGE^{gl}), sem o enriquecimento polinomial de primeiro grau no modelo global.

Os valores da Tabela 4.10 e da Figura 4.28 mostram que – quando não é incluído o enriquecimento polinomial no modelo global – o MEFGE^{gl} alcança resultados mais próximos da solução de referência, apresentando erros inferiores a 5% ao longo de toda a propagação. Considerando as mesmas condições, a solução do MEFGE^{gl} forneceu erros que ultrapassaram o valor de 30%, conforme mostrado na Tabela 4.1. Esses resultados confirmam a efetividade da abordagem do MEFGE^{gl}, cujo potencial tornou-se mais evidente quando a solução do MEFGE^{gl} não alcançou resultados satisfatórios.

Diante do exposto, conclui-se que os resultados apresentados nesta seção são bastante motivadores em relação ao uso do enriquecimento global-local estável para a obtenção de fatores de intensidade de tensão. É necessário, ainda, avaliar o efeito dessa estratégia na presença do modo II de abertura da trinca. Tal situação será discutida no exemplo da próxima seção.

4.3.2 Trinca de borda em modo misto de abertura – MEFGE^{gl}

O problema estudado nesta seção é o mesmo da seção 4.2.2, que corresponde a uma chapa solicitada por cisalhamento contendo uma trinca de borda, conforme mostrado na Figura 4.9. Foram empregadas, assim como no exemplo anterior, as mesmas malhas adotadas para o MEFG^{gl} (ilustradas na Figura 4.10). A solução de referência para K_I e K_{II} é dada pelas Equações (4.5) e (4.6) .

Primeiramente, apresentam-se na Tabela 4.11 os resultados do MEFGE^{gl} considerando o enriquecimento polinomial de primeiro grau no modelo global.

Tabela 4.11: Comparação entre os valores de K_I e K_{II} extraídos com o MEFGE^{gl} (considerando o enriquecimento polinomial no modelo global) e a solução de referência.

Ciclo	1	2	3	4	5	6	7
K_I – MEFGE ^{gl}	0,5828	25,8089	33,5288	33,7812	33,8396	33,8612	33,8703
K_{II} – MEFGE ^{gl}	0,5828	5,6746	5,2902	4,8569	4,6795	4,6012	4,5658
Erro K_I (%)	98,29	24,09	1,39	0,64	0,47	0,41	0,38
Erro K_{II} (%)	87,19	24,72	16,27	6,75	2,85	1,13	0,35

Conforme observado na Tabela 4.11, os resultados finais obtidos com o MEFGE^{gl} foram muito próximos da solução de referência, apresentando erros de 0,38 e 0,35% para K_I e K_{II} , respectivamente. Quando comparados aos valores da Tabela 4.4, obtidos com o MEFG^{gl} nas mesmas condições, verificam-se erros semelhantes. Tal fato confirma as conclusões da seção 4.3.1, evidenciando que a estratégia estável é pouco significativa quando a abordagem padrão do MEFG^{gl} já fornece soluções precisas.

Para o caso da solução que não inclui o enriquecimento polinomial no problema global, são mostrados na Tabela 4.12 os resultados fornecidos pelo MEFG^{gl} e pelo MEFGE^{gl}.

Tabela 4.12: Comparação entre os valores de K_I e K_{II} extraídos com o MEFG^{gl} e o MEFGE^{gl} (sem o enriquecimento polinomial no modelo global) e a solução de referência.

Ciclo	1	2	3	4	5	6	7	8
$K_I - \text{MEFG}^{\text{gl}}$	0,6117	4,9687	15,0025	20,3908	21,3798	21,5223	21,5419	21,5446
$K_I - \text{MEFGE}^{\text{gl}}$	0,6117	20,8584	30,1599	31,1208	31,3579	31,4411	31,4752	31,4905
$K_{II} - \text{MEFG}^{\text{gl}}$	0,6117	2,6050	2,3305	2,4898	2,5833	2,5996	2,6019	2,6022
$K_{II} - \text{MEFGE}^{\text{gl}}$	0,6117	7,3817	6,3918	5,3697	4,8792	4,6394	4,5211	4,4626
Erro $K_I - \text{MEFG}^{\text{gl}}$ (%)	98,20	85,39	55,88	40,03	37,12	36,70	36,64	36,63
Erro $K_I - \text{MEFGE}^{\text{gl}}$ (%)	98,20	38,65	11,29	8,47	7,77	7,53	7,43	7,38
Erro $K_{II} - \text{MEFG}^{\text{gl}}$ (%)	86,56	42,75	48,78	45,28	43,22	42,87	42,82	42,81
Erro $K_{II} - \text{MEFGE}^{\text{gl}}$ (%)	86,56	62,23	40,48	18,01	7,24	1,97	0,63	1,92

Os erros expostos na Tabela 4.12 são apresentados também na Figura 4.29, que mostra a evolução dos mesmos ao longo dos ciclos global-local.

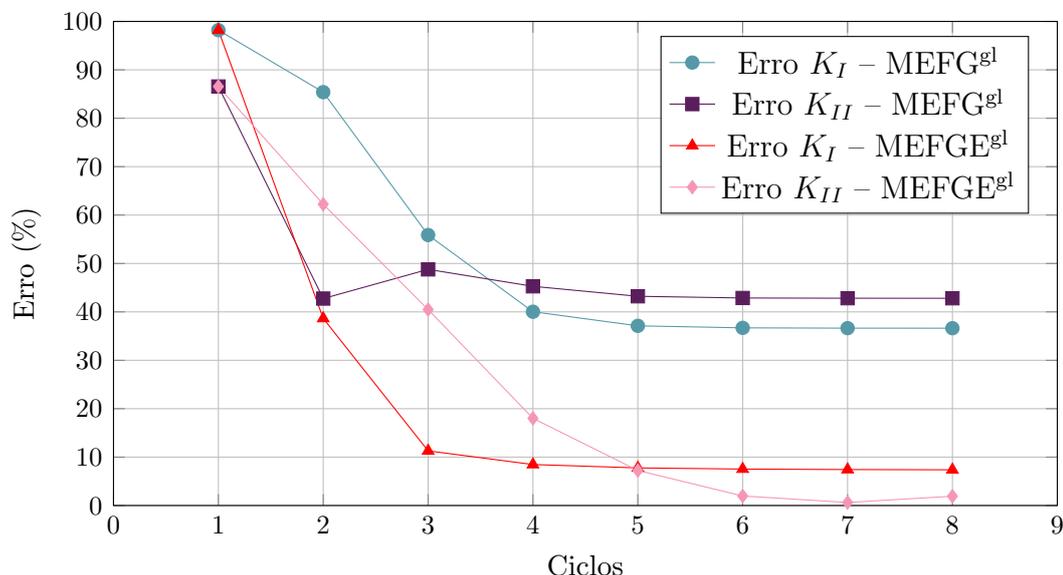


Figura 4.29: Evolução dos erros avaliados em relação à solução de referência ao longo da execução dos ciclos global-local, considerando as soluções do MEFG^{gl} e o MEFGE^{gl} (sem o enriquecimento polinomial no problema global).

Os resultados da Tabela 4.12 e da Figura 4.29 confirmam a eficiência do enriquecimento global-local estável para a sollicitação em modo misto de abertura. Assim como na seção 4.3.1, a abordagem do MEFGE^{gl} forneceu valores de K_I e K_{II} mais próximos da solução de referência, contribuindo substancialmente para o aprimoramento da solução.

Finalmente, busca-se avaliar o efeito do enriquecimento global-local estável sobre os resultados da energia de deformação. Conforme apresentado na seção 4.2.2, adotou-se o valor de $2,467211 \times 10^{-2}$ como referência para essa grandeza. A evolução da energia avaliada através do MEFG^{gl} e do MEFGE^{gl} é apresentada nas Figuras 4.30 e 4.31, considerando, respectivamente, as soluções com e sem a inclusão do enriquecimento polinomial no problema global.

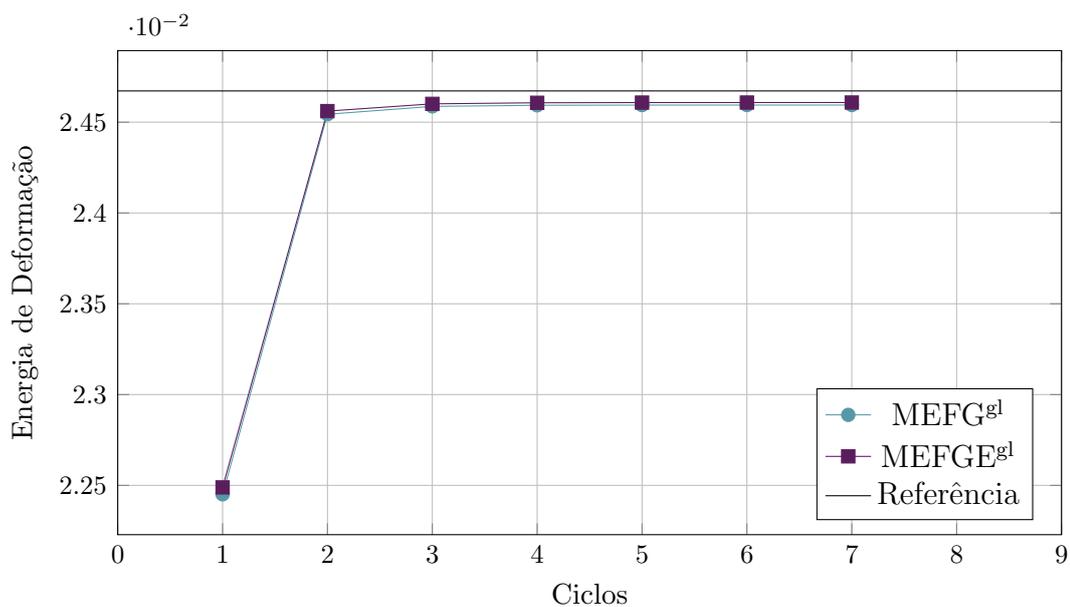


Figura 4.30: Energia de deformação avaliada em função do número de ciclos global-local. Consideram-se as soluções do MEFGE^{gl} e o MEFG^{gl}, com a inclusão do enriquecimento polinomial de primeiro grau no modelo global.

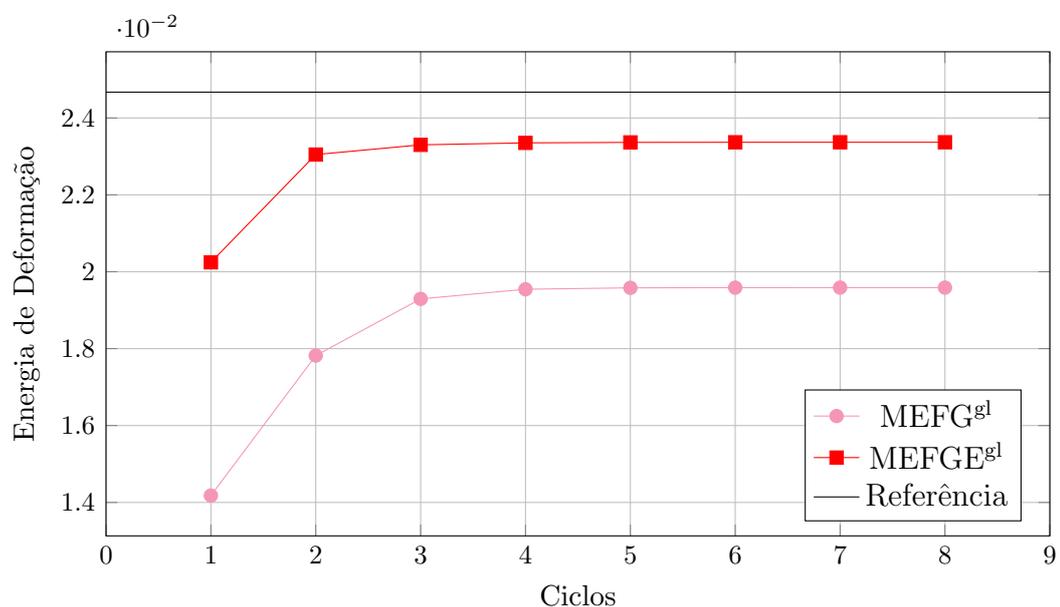


Figura 4.31: Energia de deformação avaliada em função do número de ciclos global-local. Consideram-se as soluções do MEFGE^{gl} e o MEFG^{gl}, sem a inclusão do enriquecimento polinomial de primeiro grau no modelo global.

Os resultados obtidos para a energia de deformação apresentaram tendências

análogas àquelas verificadas para os fatores de intensidade de tensão. Verifica-se a que, ao longo da execução dos ciclos global-local, a energia atinge valores cada vez mais próximos do valor de referência. A solução do MEFGE^{gl}, mais uma vez, mostrou maior eficiência em relação ao MEFG^{gl} para a configuração que não adota o enriquecimento polinomial no modelo global. Tais conclusões, somadas àquelas obtidas para os fatores de intensidade de tensão, comprovam a validade do enriquecimento global-local estável na análise de problemas bidimensionais da Mecânica da Fratura Linear Elástica.

Capítulo 5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

5.1 Contribuições deste Trabalho

O presente trabalho se dedicou à aplicação do Método dos Elementos Finitos Generalizados com Enriquecimento Global-Local (MEFG^{gl}) a problemas bidimensionais da Mecânica da Fratura Linear Elástica. Para viabilizar esse estudo, atuou-se na expansão do sistema INSANE, projeto de software livre desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais. Tal sistema já contava com recursos diversos relacionados à análise do MEFG^{gl}, mas apresentava demandas por procedimentos automatizados que reduzissem a interferência do usuário no processamento. Nesse sentido, a implementação descrita neste trabalho efetuou a automatização da geração de problemas locais, a partir de critérios associados à sua localização e ao tamanho de seu domínio, eliminando a necessidade de elaborar um arquivo de entrada específico para este modelo.

Além de promover a geração automatizada de problemas locais para qualquer tipo de análise do MEFG^{gl}, foi proposto um procedimento para a simulação da propagação de trincas através deste método. Buscou-se associar o domínio local à geometria da descontinuidade modelada, permitindo a completa representação da trinca no interior do problema local. Dessa forma, viabilizou-se a definição de um modelo local que acompanha o crescimento de uma trinca, tornando possível descrever corretamente a sua trajetória ao longo da propagação.

Uma vez que o processo de propagação de uma trinca – no contexto da Mecânica da Fratura Linear Elástica – depende da análise dos fatores de intensidade de tensão, foi empregado um procedimento para o cálculo destes através do método da Integral de Interação. Conforme descrito na seção 3.4, tal método consiste na transformação da Integral J em uma integral de área, facilitando a extração dos fatores de intensidade de tensão através de elementos finitos bidimensionais.

Os experimentos numéricos do Capítulo 4 validaram a implementação realizada e exemplificaram a sua aplicação a modelos com solicitações diversas. Os resultados fornecidos pelo MEF^{gl}, quando comparados a soluções de referência, podem ser considerados satisfatórios. Seja para a condição de modo I ou II de abertura da trinca, os modelos foram capazes de obter valores apurados para os fatores de intensidade de tensão ao longo da propagação de uma trinca a partir de um entalhe inicial. Além disso, foram obtidas trajetórias de propagação coerentes com o comportamento físico do problema analisado em todos os casos.

A eficiência computacional do procedimento proposto foi avaliada através do tempo total de processamento, sendo comparada à abordagem previamente existente no sistema INSANE para a propagação de trincas valendo-se do MEF^{gl}. Assim como verificado por Pereira et al. (2012), foi possível concluir que a estratégia de problemas locais automatizados diminuiu significativamente o custo computacional da análise, além de reduzir a influência do usuário no processo.

A abordagem estável do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFGE), foi também avaliada no que se refere à qualidade na extração dos fatores de intensidade de tensão e da energia de deformação. A aplicação dessa estratégia sobre o enriquecimento numericamente obtido da solução local forneceu resultados sempre equivalentes ou melhores que aqueles obtidos com a abordagem convencional do MEF^{gl}. A investigação realizada em termos de ciclos global-local e soluções globais enriquecidas ou não polinomialmente distingue-se do que se tem conhecimento da literatura, configurando uma importante conclusão deste trabalho.

Diante do exposto, pode-se concluir que o presente trabalho forneceu uma contribuição significativa para o aprimoramento das ferramentas de análise de problemas da Mecânica da Fratura disponíveis no sistema INSANE. Considera-se, ainda, que foram alcançadas conclusões importantes a respeito da sensibilidade das análises pelos métodos numéricos empregados, confirmando a percepção do MEFGE^{gl} como poderosa estratégia para a análise de problemas com a presença de singularidades.

5.2 Sugestões para Trabalhos Futuros

Com base nas conclusões do presente trabalho, podem ser sugeridos os seguintes tópicos como propostas para trabalhos futuros:

1. Expansão do arcabouço desenvolvido para a geração automatizada de problemas locais em três dimensões.
2. Implementação de um gerador de malha que possibilite um refinamento geométrico no modelo local, capaz de acompanhar a ponta de uma trinca no processo de propagação.
3. Compatibilização do procedimento de propagação de trincas para problemas de comportamento não-linear.
4. Avaliação de diferentes procedimentos para o cálculo dos fatores de intensidade de tensão.
5. Ampliação da geração automatizada de problemas locais para a descrição de outros fenômenos de interesse da solução, considerando diferentes modelos constitutivos.
6. Investigação sobre as taxas de convergência e o número de condicionamento relacionados ao MEFGE^{gl}.

Apêndice A

Geometria Computacional no Sistema INSANE

Neste Apêndice, apresentam-se os métodos de geometria computacional utilizados no processo de automatização da geração de problemas locais no MEFG^{gl}.

Conforme mencionado no Capítulo 3, as operações necessárias de geometria computacional foram viabilizadas por métodos já existentes no sistema INSANE. Tais métodos estão presentes na classe *ComputationalGeometry*, conforme consta na Figura A.1.

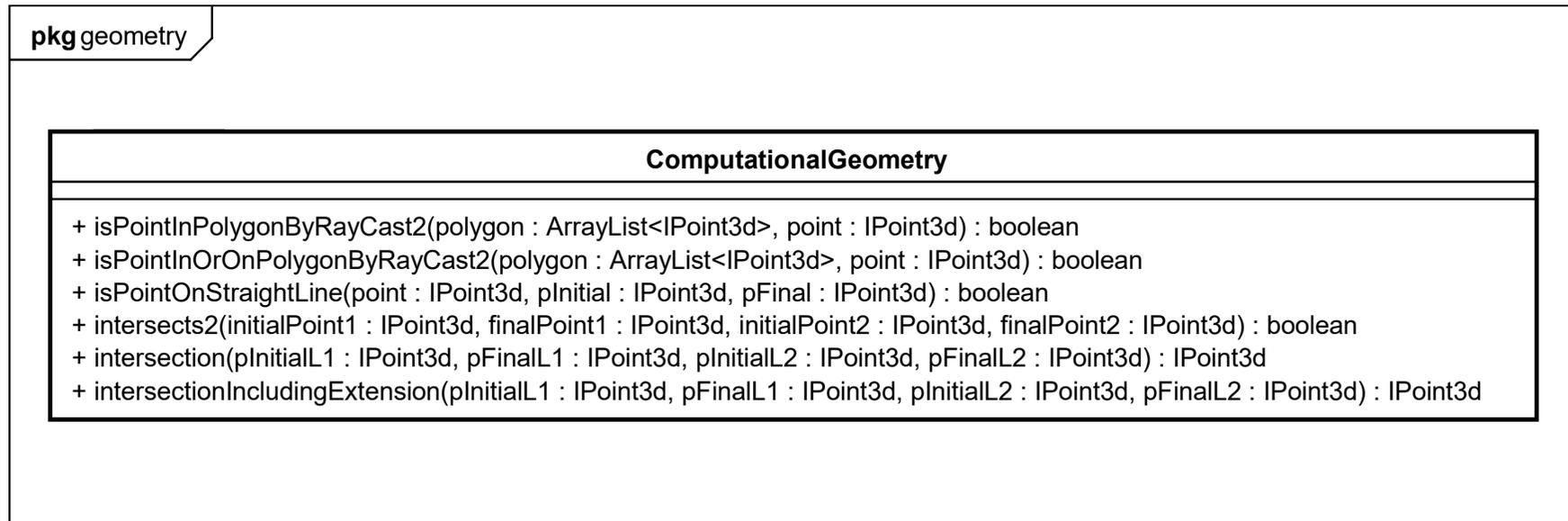


Figura A.1: Métodos da classe *ComputationalGeometry* empregados na presente implementação.

Os métodos apresentados na Figura A.1 são descritos brevemente a seguir.

- + `isPointInPolygonByRayCast2(ArrayList<IPoint3d>, IPoint3d)`: verifica se o ponto de interesse é localizado no interior ou no exterior do polígono recebido como argumento.
- + `isPointInOrOnPolygonByRayCast2(ArrayList<IPoint3d>, IPoint3d)`: verifica se o ponto de interesse é localizado no interior, no exterior ou sobre alguma aresta do polígono recebido como argumento.
- + `isPointOnStraightLine(IPoint3d, IPoint3d, IPoint3d, IPoint3d)`: verifica se o ponto de interesse pertence ao segmento formado pelos dois pontos recebidos como argumentos.
- + `intersects2(IPoint3d, IPoint3d, IPoint3d, IPoint3d)`: avalia se o segmento de reta formado pelos dois primeiros pontos recebidos como argumentos intersecta o segmento formado pelos dois últimos pontos também recebidos.
- + `intersection(IPoint3d, IPoint3d, IPoint3d, IPoint3d)`: retorna o ponto de interseção (caso exista) entre os segmentos de reta formados pelos dois pares de pontos recebidos como argumentos.
- + `intersectionIncludingExtension(IPoint3d, IPoint3d, IPoint3d, IPoint3d)`: retorna o ponto de interseção entre os segmentos de reta (considerando, também, suas extensões) formados pelos dois pares de pontos recebidos como argumentos.

Referências Bibliográficas

- Alves, P. D., 2012. Estratégia global-local aplicada ao método dos elementos finitos generalizados. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Anderson, T. L., 2005. *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications*. Tayloy & Francis.
- Babuška, I., Caloz, G. e Osborn, J. E., 1994. ‘Special Finite Element Methods for a Class of Second Order Elliptic Problems with Rough Coefficients’. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 31(4), pp. 945–981.
- Babuška, I. e Melenk, J. M., 1997. ‘The partition of unity method’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 40(4), pp. 727–758.
- Babuška, I. e Banerjee, U., 2012. ‘Stable generalized finite element method (sgfem)’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 201.
- Barros, F. B., 2002. Métodos Sem Malha e Método dos Elementos Finitos Generalizados em Análise Não-Linear de Estruturas. Tese de Doutorado, EESC - USP, São Carlos, SP, Brasil.
- Belytschko, T. e Black, T., 1999. ‘Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 45(5), pp. 601–620.
- Belytschko, T., Gracie, R. e Ventura, G., 2009. ‘A review of extended/generalized finite element methods for material modeling’. , vol. 17(4), pp. 24.

- Chessa, J., Wang, H. e Belytschko, T., 2003. ‘On the construction of blending elements for local partition of unity enriched finite elements’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 57, pp. 1015–1038.
- Duarte, C. A., Babuška, I. e Oden, J. T., 2000. ‘Generalized finite element methods for three-dimensional structural mechanics problems’. *Computers and Structures*, vol. 77(2), pp. 215–232.
- Duarte, C. A. e Kim, D. J., 2008. ‘Analysis and applications of a generalized finite element method with global-local enrichment functions’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 197(6-8), pp. 487–504.
- Duarte, C. A. e Oden, J. T., (1995), Hp-Clouds - A Meshless Method to Solve Boundary-Value Problems, Technical report.
- Erdogan, F. e Sih, G. C., 1963. ‘On the Crack Extension in Plates Under Plane Loading and Transverse Shear’. *Journal of Basic Engineering*, vol. 85(4), pp. 519.
- Ferreira, G. N. A. e Pitangueira, R. L. S., 2015. ‘Geradores de Malha em uma Aplicação Gráfica Interativa para Modelos Bidimensionais do Método dos Elementos Finitos’. *XXXVI Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, .
- Fries, T.-P., 2008. ‘A corrected xfm approximation without problems in blending elements’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 75, pp. 503–532.
- Gonçalves, M. A. B., 2004. Geração de malhas bidimensionais de elementos finitos baseada em mapeamentos transifinitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais.
- Gupta, P., Duarte, C. A. e Dhankhar, A., 2017. ‘Accuracy and robustness of stress intensity factor extraction methods for the generalized/eXtended Finite Element Method’. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 179, pp. 120–153.
- Gupta, V., 2014. Improved Conditioning and Accuracy of a two-scale Generalized Finite Element Method for Fracture Mechanics. Tese de Doutorado, University of Illinois, Urbana-Champaign, EUA.

- Gupta, V., Duarte, C. A., Babuška, I. e Banerjee, U., 2013. ‘A stable and optimally convergent generalized FEM (SGFEM) for linear elastic fracture mechanics’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 266, pp. 23–39.
- Gupta, V., Duarte, C. A., Babuška, I. e Banerjee, U., 2015. ‘Stable gfem (sg-fem): Improved conditioning and accuracy of gfem/xfem for three-dimensional fracture mechanics’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 289, pp. 355–386.
- Gupta, V., Kim, D. J. e Duarte, C. A., 2012. ‘Analysis and improvements of global-local enrichments for the Generalized Finite Element Method’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 245-246, pp. 47–62.
- Ingraffea, A. R. e Wawrzynek, P. A., 2004. ‘Computational Fracture Mechanics: A survey of the field’. *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, .
- Kim, D. J., Duarte, C. A. e Sobh, N. A., 2011. ‘Parallel simulations of three-dimensional cracks using the generalized finite element method’. *Computational Mechanics*, vol. 47, pp. 265–282.
- Kim, D. J., Pereira, J. P. e Duarte, C. A., 2010. ‘Analysis of three-dimensional fracture mechanics problems: A two-scale approach using coarse-generalized FEM meshes’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 81(3), pp. 335–365.
- Li, H. e Duarte, C. A., 2018. ‘A two-scale generalized finite element method for parallel simulations of spot welds in large structures’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 337, pp. 28–65.
- Malekan, M., 2017. Crack propagation modeling in plane structures using two-scale Generalized/Extended Finite Element Method. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Mantyla, M., 1988. *An Introduction to Solid Modeling*. Computer Science Press.
- Melenk, J. M., 1995. On generalized finite element methods. Tese de Doutorado, University of Maryland, College Park, Maryland, EUA.

- Melenk, J. M. e Babuška, I., 1996. ‘The partition of unity finite element method: Basic theory and applications’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139(1-4), pp. 289–314.
- Moes, N., Dolbow, J. e Belytschko, T., 1999. ‘A finite element method for crack growth without remeshing’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 46(1), pp. 131–150.
- Nguyen, V. P., Rabczuk, T., Bordas, S. e Duflo, M., (2008), Meshless methods: A review and computer implementation aspects, Technical report.
- Noor, A. K., 1986. ‘Global-local methodologies and their application to nonlinear analysis’. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 2(4), pp. 333–346.
- OHara, P., Duarte, C. A. e Eason, T., 2009. ‘Generalized finite element analysis of three-dimensional heat transfer problems exhibiting sharp thermal gradients’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 198(21-26), pp. 1857–1871.
- OHara, P., Duarte, C. A. e Eason, T., 2016. ‘A two-scale generalized finite element method for interaction and coalescence of multiple crack surfaces’. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 163, pp. 274–302.
- OHara, P., Hollkamp, J., Duarte, C. A. e Eason, T., 2016. ‘A two-scale generalized finite element method for fatigue crack propagation simulations utilizing a fixed, coarse hexahedral mesh’. *Computational Mechanics*, vol. 57, pp. 55–74.
- Oliveira, T. S., 2018. Análise de problemas bidimensionais pelo método dos elementos finitos generalizados estãvel (mefge). Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Penna, S. S., 2007. Pós-processador para modelos bidimensionais não lineares do metodo dos elementos finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Pereira, J. P., Kim, D. J. e Duarte, C. A., 2012. ‘A two-scale approach for the analysis of propagating three-dimensional fractures’. *Computational Mechanics*, vol. 49(1), pp. 99–121.

- Plews, J. A. e Duarte, C. A., 2016. ‘A two-scale generalized finite element approach for modeling localized thermoplasticity’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 108, pp. 1123–1158.
- Silva, L. L., 2016. Sistema gráfico interativo para análise de nucleação e propagação de trincas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Strouboulis, T., Babuška, I. e Copps, K., 2000. ‘The design and analysis of the Generalized Finite Element Method’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 181(1-3), pp. 43–69.
- Szabo, B. e Babuska, I., 1991. *Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, Inc.
- Tada, H., Paris, P. C. e Irwin, G. R., 2000. *The Stress Analysis of Cracks Handbook*. ASME Press.
- Wilson, W. K., 1969. Combined-Mode Fracture Mechanics. Tese de Doutorado, University of Pittsburgh.
- Yau, J. F., Wang, S. S. e Corten, H. T., 1980. ‘A Mixed-Mode Crack Analysis of Isotropic Solids Using Conservation Laws of Elasticity’. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 16, pp. 247–259.