

**ANÁLISE DE PROBLEMAS BIDIMENSIONAIS
PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS
GENERALIZADOS ESTÁVEL (MEFGE)**

Thaianne Simonetti de Oliveira

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

**ANÁLISE DE PROBLEMAS BIDIMENSIONAIS PELO
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS
GENERALIZADOS ESTÁVEL (MEFGE)**

Thaianne Simonetti de Oliveira

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de “Mestre em Engenharia de Estruturas”.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Felício Bruzzi Barros
DEES - UFMG (Orientador)

Prof. Dr. Sergio Persival Baroncini Proença (a distância)
EESC-USP

Prof. Dr. Gabriel de Oliveira Ribeiro
DEES - UFMG

Belo Horizonte, 26 de Fevereiro de 2018

O48a

Oliveira, Thaianne Simonetti de.

Análise de problemas bidimensionais pelo método dos elementos finitos generalizados estável (MEFGE) [manuscrito] / Thaianne Simonetti de Oliveira. - 2018.

xiv, 100 f., enc.: il.

Orientador: Felício Bruzzi Barros.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Apêndices: f. 88-95.

Bibliografia: f. 96-100.

1. Engenharia de estruturas - Teses. 2. Método dos elementos finitos - Teses. 3. Programação orientada a objetos (Computação) - Teses. 4. Java (Linguagem de programação de computador) - Teses. I. Barros, Felício Bruzzi. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. III. Título.

CDU: 624(043)

Para hacer las cosas bien es necesario: primero, el amor; segundo, la técnica

Antoni Gaudí

Ao Israel e à minha família.

Índice

Índice	ii
Lista de Tabelas	iv
Lista de Figuras	vii
Lista de Abreviaturas e Siglas	viii
Lista de Símbolos	ix
Resumo	xii
Abstract	xiii
Agradecimentos	xiv
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Contextualização	1
1.2 Justificativa	4
1.3 Objetivos	5
1.3.1 Objetivo Geral	5
1.3.2 Objetivos Específicos	5
1.4 Organização do Texto	6
2 O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS	8
2.1 Introdução	8
2.2 Formulação	9
2.3 Considerações sobre o MEFG	12
3 O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS ESTÁVEL	14
3.1 Formulação	14
3.2 Formulação para o Problema de Valor de Contorno	17
3.3 Condicionamento dos Sistemas de Equações Lineares Associados ao MEFG e ao MEFGE	19
3.4 Desempenho dos Métodos na Existência de Elementos de Mistura	21

4	IMPLEMENTAÇÃO DO MEFGE NO SISTEMA INSANE	24
4.1	Introdução	24
4.2	Visão Geral	25
4.3	O MEFG no INSANE	27
4.3.1	Interface <i>Persistence</i>	27
4.3.2	Classe Abstrata <i>Solution</i>	28
4.3.3	Interface <i>Assembler</i>	29
4.3.4	Classe Abstrata <i>Model</i>	30
4.3.5	MEFG no Pré-Processador Gráfico Interativo	32
4.4	Modelagem de Descontinuidades (Entalhes) - MEFG	36
4.5	Implementação MEFGE -INSANE	41
4.5.1	Generalização	42
4.5.2	Modelagem de Descontinuidades (Entalhes) - MEFGE	46
5	EXEMPLOS NUMÉRICOS	52
5.1	Cisalhamento de uma Chapa	53
5.2	Chapas com Trinca em Modo I de Abertura	61
5.2.1	Exemplo I	61
5.2.2	Exemplo II	67
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	84
6.1	Contribuições deste Trabalho	84
6.2	Sugestões para Trabalhos Futuros	86
A	Arquivo de entrada de dados do INSANE	88
B	Aproximações alcançadas pelos enriquecimentos da seção 5.1	93
	Referências Bibliográficas	96

Lista de Tabelas

5.1	Energia de deformação ($U(\tilde{\mathbf{u}})$) e norma energia do erro relativa ($\ \mathbf{e}\ ^{rel}$) obtidas para as malhas 1, 2 e 3 da Figura 5.2, conforme as diversas simulações realizadas.	57
5.2	Número de Condicionamento Escalonado (NC) e número de graus de liberdade (NGL) obtidos para as malhas 1, 2 e 3 da Figura 5.2, conforme as diversas simulações realizadas.	59
5.3	Comparativo de energia de deformação ($U(\tilde{\mathbf{u}})$), bem como da norma energia do erro relativa ($\ \mathbf{e}\ ^{rel}$) e do número de graus de liberdade (NGL) obtidos para as diversas simulações realizadas.	65
5.4	Energia de deformação ($U(\tilde{\mathbf{u}})$) e número de graus de liberdade (NGL) obtidos para as malhas 1, 2 e 3 da Figura 5.10, conforme as estratégias de enriquecimento adotadas.	72
5.5	Números de Condicionamento (NC) obtidos para as malhas 1, 2 e 3 da Figura 5.10, conforme as estratégias de enriquecimento adotadas.	74
5.6	Energia de deformação ($U(\tilde{\mathbf{u}})$) e número de graus de liberdade (NGL) obtidos para as malhas 1, 2 e 3 da Figura 5.11, conforme as estratégias de enriquecimento adotadas.	76
5.7	Números de Condicionamento (NC) obtidos para as malhas 1, 2 e 3 da Figura 5.11, conforme as estratégias de enriquecimento adotadas.	78
5.8	Energia de deformação ($U(\tilde{\mathbf{u}})$) e número de graus de liberdade (NGL) obtidos para as malhas 1, 2 e 3 das Figuras 5.10 e 5.11 para a combinação Heav Linear Mod MEFGE + SCrack1.	79
5.9	Números de Condicionamento (NC) obtidos para as malhas 1, 2 e 3 das Figuras 5.10 e 5.11 para a combinação Heav Linear Mod MEFGE + SCrack1.	80

Lista de Figuras

2.1	Estratégia de enriquecimento da nuvem ω_j (Barros, 2002).	10
3.1	Construção do enriquecimento associado ao MEFGE. À esquerda, esquema do enriquecimento da Partição da Unidade empregado no MEFGE. No centro, nota-se a arquitetura do enriquecimento modificado. À direita, por sua vez, tem-se o esquema do enriquecimento da PU associada ao MEFGE (Gupta et al., 2013).	16
3.2	Diferentes tipos de elementos classificados conforme a quantidade de nós enriquecidos. Adaptado de Lins (2015).	22
4.1	Representação da convenção adotada para identificar as classes modificadas e criadas nas implementações envolvendo o MEFGE.	25
4.2	Organização do núcleo numérico do INSANE. Adaptado de Fonseca (2008).	26
4.3	Diagrama UML do pacote <i>EnrichmentType</i> antes das modificações realizadas neste trabalho.	32
4.4	Diálogo inicial do sistema INSANE (Silva, 2016).	33
4.5	Módulo <i>Atributos</i> do pré-processador gráfico interativo (Silva, 2016).	34
4.6	Diálogo de criação de funções de enriquecimento de singularidade (Silva, 2016).	35
4.7	Diálogo de atribuição de funções de enriquecimento aos nós. (Silva, 2016).	36
4.8	Diagrama UML de <i>DiscontinuityByGfem</i> , com os métodos e variáveis pertinentes a este trabalho.	38
4.9	Exemplo de investigação do valor do multiplicador do enriquecimento (Silva, 2016).	39
4.10	Diálogo de criação de descontinuidades (Silva, 2016).	41

4.11	Diagrama UML de <i>StableEnrichmentType</i>	43
4.12	Diálogo de criação de um enriquecimento polinomial estável. Na seleção em vermelho, destaca-se a funcionalidade acrescentada no presente trabalho.	45
4.13	Diagrama UML de <i>LinearDiscontinuousEnrichment</i>	48
4.14	Diagrama UML de <i>DiscontinuityByGfem</i> , com os métodos e variáveis acrescentados neste trabalho.	49
4.15	Diálogo de criação de descontinuidades incorporando a possibilidade de se empregar a abordagem estável e a função de Heaviside linearizada. Na seleção em vermelho, destacam-se as funcionalidades acrescentadas no presente trabalho.	51
5.1	Representação da chapa quadrada em cisalhamento, bem como do quadrante considerado para as análises. Dimensões em <i>mm</i>	54
5.2	Malhas utilizadas nas análises da chapa quadrada em cisalhamento, associadas às simulações denominadas como 1, 2 e 3, respectivamente.	55
5.3	Análise de convergência da solução, de acordo com as simulações realizadas, para o problema em análise.	57
5.4	Crescimento dos números de condicionamento das respectivas matrizes de rigidez escalonadas, conforme as simulações realizadas, para o problema em análise.	60
5.5	Geometria e carregamento da chapa submetida a esforço de tração (Alves, 2012).	62
5.6	Eixo local de elemento de trinca. Adaptado de Alves (2012).	63
5.7	Nós enriquecidos com função de singularidade. Adaptado de Alves (2012).	64
5.8	Componente de tensão na região de singularidade.	66
5.9	Geometria, carregamento e condições de contorno do problema utilizado nas simulações numéricas desta seção (dimensões em unidades consistentes).	67
5.10	Malhas utilizadas na análise do problema apresentado para o caso em que a trinca atravessa os elementos (caso I), bem como estratégia de enriquecimento adotada.	69

5.11	Malhas utilizadas na análise do problema apresentado para o caso em que a trinca coincide com as arestas dos elementos (caso II), bem como estratégia de enriquecimento adotada para o MEFGE.	69
5.12	Detalhe da estratégia de enriquecimento utilizada nas análises empregando o MEFGE no caso II (Malha 1).	71
5.13	Análise de convergência da solução, conforme as estratégias de enriquecimento, para o problema em análise.	73
5.14	Crescimento dos números de condicionamento das respectivas matrizes de rigidez escalonadas, conforme as estratégias de enriquecimento, para o problema em análise.	74
5.15	Análise de convergência da solução, conforme as estratégias de enriquecimento, para o problema em análise.	77
5.16	Crescimento dos números de condicionamento das respectivas matrizes de rigidez escalonadas, conforme as estratégias de enriquecimento, para o problema em análise.	78
5.17	Análise de convergência da solução no caso I, contrapondo o desempenho de Heav Linear Mod MEFGE + SCrack1 com as demais estratégias de enriquecimento, para o problema em análise.	81
5.18	Construção do enriquecimento modificado associado ao termo $\mathcal{H} \frac{(y-y_j)}{h_j}$ em uma nuvem centrada num nó de coordenadas (0,0) cortado pela trinca.	82
5.19	Construção do enriquecimento modificado associado ao termo \mathcal{H} em uma nuvem centrada num nó de coordenadas (0,0) cortado pela trinca.	82
5.20	Construção do enriquecimento modificado associado ao termo $\mathcal{H} \frac{(x-x_j)}{h_j}$ em uma nuvem centrada num nó de coordenadas (0,0) cortado pela trinca.	83

Lista de Abreviaturas e Siglas

MEF	Método dos Elementos Finitos
MEFG	Método dos Elementos Finitos Generalizados
MEFE	Método dos Elementos Finitos Estendidos
MEFGE	Método dos Elementos Finitos Generalizados Estável
INSANE	<i>INteractive Structural ANalysis Environment</i>
PU	Partição da Unidade
PVC	Problema de Valor de Contorno
MM	Métodos sem Malha
MEC	Método dos Elementos de Contorno
UML	<i>Unified Modelling Language</i>
XML	<i>eXtensible Markup Language</i>
Q4	Elemento finito quadrilateral de 4 nós
Q8	Elemento finito quadrilateral de 8 nós
Q12	Elemento finito quadrilateral de 12 nós
NC	Número de condicionamento escalonado
NGL	Número de graus de liberdade

Lista de Símbolos

Capítulo 2

\mathbf{x}_j	Vetor de coordenadas de um nó j
ω_j	Nuvem de elementos que concorrem no nó j
\mathbb{R}^2	Domínio bidimensional
$N_j(\mathbf{x})$	Funções de Lagrange lineares
L_{ji}	Função de enriquecimento do MEFG
$\{\phi_{ji}\}_{i=1}^{q_j}$	Função de forma do MEFG
u_j	Parâmetros nodais associados ao MEF
b_{ji}	Parâmetros nodais associados ao MEFG
h_j	Tamanho característico do maior elemento finito que compartilha o nó j

Capítulo 3

\tilde{L}_{ji}	Função de enriquecimento do MEFGE
I_{ω_j}	Função interpoladora ou interpolante
$\{\tilde{\phi}_{ji}\}_{i=1}^{q_j}$	Função de forma do MEFGE
c_{ji}	Parâmetros nodais associados ao MEFGE
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor de tensões

\mathbf{C}	Tensor de Hooke
$\boldsymbol{\epsilon}$	Tensor de deformações
λ_{max}	Maior autovalor de uma matriz \mathbf{K} simétrica
λ_{min}	Menor autovalor de uma matriz \mathbf{K} simétrica
$C(\mathbf{K})$	Número de condicionamento de uma matriz \mathbf{K} simétrica
$\hat{\mathbf{K}}$	Matriz simétrica escalonada
δ_{ij}	Delta de Dirac
$k(\mathbf{K})$	Número de condicionamento de uma matriz \mathbf{K} escalonada

Capítulo 4

\mathbf{C}	Matriz de rigidez
\mathbf{X}	Vetor de graus de liberdade
\mathbf{D}	Vetor de forças
$\mathcal{H}(x, y)$	Função de Heaviside
$\mathcal{H}_L^j(x, y)$	Função de Heaviside linearizada

Capítulo 5

E	Módulo de elasticidade
ν	Coefficiente de Poisson
U	Energia de deformação
$\ \mathbf{e}\ ^{rel}$	Norma energia do erro relativa
u_{ex}	Solução exata de um dado problema

\tilde{u}	Solução aproximada numericamente para um dado problema
G	Módulo de elasticidade transversal
λ	Parâmetro de suavidade
$\mathcal{H}_L^{j,mod}(x, y)$	Função de Heaviside linearizada modificada

Resumo

Este trabalho objetiva avaliar o desempenho do Método dos Elementos Finitos Generalizados Estável (MEFGE), oriundo de uma simples modificação do enriquecimento do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), na análise linear de problemas bidimensionais com carregamento no plano. Para tal, atuou-se na expansão do sistema INSANE (*INteractive Structural ANalysis Environment*), um projeto de software livre desenvolvido pelo Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais, de forma a incorporar a este ambiente um módulo que provisse a análise requerida de forma genérica, independentemente da natureza da função enriquecedora escolhida, segundo a abordagem do MEFGE. Essa implementação é validada a partir da realização de simulações numéricas de problemas diversos, envolvendo enriquecimentos de características distintas. Entre estes, se encontram funções polinomiais, funções de singularidade, que descrevem a solução no entorno de uma trinca em modo I de abertura, e funções de salto, que incorporam uma descontinuidade geométrica. Em cada um desses problemas, o desempenho do MEFGE é contraposto àquele verificado para o MEFG. Nesse sentido, são avaliados parâmetros de interesse para os dois métodos, como as taxas de convergência, o erro da solução e as taxas de crescimento para os números de condicionamento associados às matrizes de rigidez escalonadas. A performance na existência de elementos de mistura também é estudada.

Palavras-Chave: Método dos Elementos Finitos Generalizados Estável, Método dos Elementos Finitos Generalizados, Mecânica Computacional, Programação Orientada a Objetos, JAVA.

Abstract

The present work aims to evaluate the performance of the Stable Generalized Finite Element Method (SGFEM), a new approach that derives from a simple modification of enrichment functions used in Generalized Finite Element Method (GFEM), in the linear analysis of two-dimensional problems with plan loading. For this, the expansion of the INSANE (*INteractive Structural ANalysis Environment*) system, an open source project developed at the Structural Engineering Department of the Federal University of Minas Gerais, is carried out in such a manner that incorporates to this environment a component that provides the required analysis in a generic way, regardless of the nature of the enrichment function chosen and under the approach of SGFEM. This implementation is validated by numerical experiments with different problems, involving enrichment functions with distinct features. Among these, there are polynomial functions, singular functions, that describe the solution around a crack in mode I of opening, and jump functions, that incorporate the geometric discontinuity. In each one of these problems, the performance of SGFEM is compared to GFEM. In this way, interesting parameters for both methods are evaluated, such as rates of convergence, solution error, and rates of growth for the scaled condition number. The performance of these methods in the presence of blending elements is also studied.

Keywords: Stable Generalized Finite Element Method, Generalized Finite Element Method, Computational Mechanics, Object Oriented Programming, JAVA.

Agradecimentos

Guimarães Rosa escreveu certa vez que *“O correr da vida embrulha tudo. A vida é assim: esquenta e esfria, aperta e daí afrouxa, sossega e depois desinquieta. O que ela quer da gente é coragem”*. No correr desse mestrado, não faltaram apertos, inquietudes e desassossegos, e se tive coragem para prosseguir, foi apenas por ter as pessoas certas ao meu lado. Primeiramente, então, a Deus, pelo amor infinito que me fez sentir nesse trajeto, mesmo quando estive à beira do desespero, e pelo cuidado e carinho constantes que me fazem chamá-lo desde tempos imemoriáveis de “Pai”. Aos meus pais, pela paciência, suporte, pelo valor que deram à minha educação e por darem novo significado com cada gesto pequenino a essa palavrinha mágica chamada “amor”. À minha irmã, por quem a distância só fez aumentar meu carinho, por todas as conversas, brincadeiras, conselhos, incentivos e por honrar tão nobremente a palavra que caracteriza seu parentesco. Ao Israel, que está sempre comigo de uma forma que não sou capaz de exprimir, e sem o qual eu certamente não estaria aqui. Essa dissertação também é sua, como tudo o mais que conquisei nesses 7 anos e meio. À minha família, de modo geral, por ser meu amparo e minha alegria.

Aos meus amigos, pela paciência e compreensão nas minhas ausências, e por não terem desanimado, nem mesmo com elas, de tentar me arrancar sorrisos e me convidar para o saudoso “rolê”. Em especial, aos amigos da pós, companheiros de trilhas e congressos, e aos amigos do Equalizar, que estiveram mais próximos nessa reta final e torceram por mim. Aos meus alunos, por me motivarem a ser uma pessoa melhor todos os dias.

Aos mestres de toda a minha vida, em especial aos professores do Departamento de Engenharia de Estruturas, por todos os ensinamentos passados no intuito de contribuir para nosso crescimento e nosso sucesso. Ainda mais especialmente, ao professor Felício, pela orientação e amizade de longa data, e por ser o modelo de profissional que um dia pretendo me tornar.

Aos funcionários do DEES, colegas do INSANE e ex-colegas de trabalho, e a todos que de alguma forma contribuíram para minha formação.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

1.1 Contextualização

Situações de interesse da Engenharia em que a forma tradicional da aproximação do já consolidado Método dos Elementos Finitos (MEF) não provê resultados satisfatórios ou tem custo computacional inviável - tais como análises que envolvem grandes deformações ou propagação de trincas - motivaram, nas últimas décadas, o desenvolvimento de novas estratégias para a resolução de problemas de valor de contorno. Nesse contexto, surge o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), considerado como produto de formulações dos Métodos sem Malha propostas nos anos 90 (Alves, 2012) e entendido como uma abordagem equivalente ao Método dos Elementos Finitos Estendidos (MEFE) (Belytschko, Gracie e Ventura, 2009). O MEFG foi, conforme Gupta et al. (2013), intensamente desenvolvido nos últimos dezenove anos. Sua utilização em problemas que escapam à eficiente simulação pela forma tradicional do MEF se consolidou de tal forma que hoje o método já é um recurso empregado inclusive em softwares comerciais como o Abaqus, na versão denominada MEFE.

Segundo Barros (2002), o MEFG pode ser compreendido como uma formulação não convencional do MEF, uma vez que se utiliza da estrutura deste para definir uma Partição de Unidade (PU), sobre a qual se realiza o enriquecimento das funções de forma que caracteriza o método e responde por sua qualidade. Tal particularidade

permite que a aproximação seja construída de forma a minimizar a importância da malha de elementos finitos (Oliveira e Barros, 2016). Esta relativa independência da malha aproxima o MEFGE da vantajosa abordagem dos Métodos sem Malha (Nguyen et al., 2008). Diferentemente destes, porém, no MEFGE a aproximação é construída com base nas funções de forma do MEF convencional, sobre uma malha de elementos, eliminando-se os problemas de integração numérica vivenciados naquelas formulações (Strouboulis, Babuška e Copps, 2000). Ao mesmo tempo, pode-se utilizar o grande arcabouço computacional existente para a forma convencional do MEF, adaptando-o quando pertinente para as particularidades do MEFGE.

De acordo com Gupta et al. (2013), as propriedades notáveis do MEFGE residem numa escolha criteriosa das funções de enriquecimento, de forma a permitir uma aproximação satisfatória da solução esperada. Em muitas aplicações, no entanto, como em problemas da mecânica da fratura, essas funções são necessárias apenas em pequenas sub-regiões do domínio de análise. Conseqüentemente, nestas situações, haverá elementos da malha apenas parcialmente enriquecidos, que se denominam “*blending elements*” - elementos de mistura. Chessa, Wang e Belytschko (2003) demonstraram que o erro nesses elementos pode ser superior ao verificado nos “*non-blending elements*” (elementos totalmente enriquecidos ou totalmente desprovidos de enriquecimento). Isso poderia afetar as taxas de convergência do método. Lins (2015) realiza uma breve revisão bibliográfica das técnicas até então propostas para se lidar com esta questão, entre as quais se destaca o *Stable Generalized Finite Element Method* (SGFEM) - Método dos Elementos Finitos Generalizados Estável (MEFGE), originalmente proposto por Babuška e Banerjee (2012).

O MEFGE é construído a partir de uma simples modificação local (a ser explicada no capítulo 3) do enriquecimento empregado no MEFGE, de tal forma que os problemas causados pelo efeito dos elementos de mistura são superados (Gupta et al., 2013). Além deste benefício, o método se torna especialmente atraente por se propor a lidar com outra desvantagem associada ao MEFGE: o mau condicionamento de sua

matriz de rigidez, se comparado ao verificado pela forma tradicional do MEF. Esta foi, segundo Lins (2015), a motivação original para o desenvolvimento do MEFGE. A rigor, um sistema de equações pode ser considerado como mal condicionado se uma pequena perturbação na matriz de coeficientes ou no vetor de termos independentes implica uma grande mudança no vetor solução (Belsley, Kuh e Welsch, 1980). Isso resulta, conseqüentemente, em perda de precisão na solução do sistema de equações lineares associado ao MEFG (Babuška e Banerjee, 2012). Gupta et al. (2013) mostram para o problema bidimensional tratado em seu artigo que, no MEFGE, diferentemente do que ocorre no MEFG, o condicionamento verificado para a matriz de rigidez não é inferior ao apresentado pelo MEF tradicional. Isso já havia sido provado, para o caso unidimensional, por Babuška e Banerjee (2012).

Diante do exposto, fica clara a necessidade do estudo do MEFGE, uma vez que o método propõe não somente a manutenção de todas as vantagens apresentadas pelo MEFG - contornando, segundo Oliveira e Barros (2016), as limitações oriundas da formulação clássica do MEF e investigando, com flexibilidade, fenômenos que escapam à eficiente simulação de sua forma convencional, mas também a resolução das principais questões negativas que eventualmente afetavam seu desempenho. Para que esse estudo possa ser viabilizado, faz-se necessário dispor de recursos computacionais adequados.

O sistema computacional INSANE (*INteractive Structural ANalysis Environ-ment*) é um projeto de software livre, implementado em linguagem Java segundo o paradigma de Programação Orientada a Objetos, desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia (DEES) da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) e disponível em <https://www.insane.dees.ufmg.br> (Fonseca e Pitangueira, 2007). Este sistema dispõe de diversos recursos para análise estrutural, entre os quais se destaca o arcabouço desenvolvido para o MEFG (que conta inclusive com interface gráfica) e classes específicas que versam sobre o MEFGE, destinadas a fins igualmente específicos (Malekan, 2017). Este arcabouço

previamente disponibilizado, assim como o ambiente computacional segmentado, amigável a mudanças e escalável em complexidade propiciado pelo INSANE possibilitou a realização de modificações no núcleo numérico do sistema empregado que permitiram sua expansão de tal forma a incorporar um módulo que viabilizasse, de forma genérica, a análise numérica de problemas bidimensionais utilizando o MEFGE. Para tornar este módulo acessível aos distintos usuários do INSANE, seu uso foi disponibilizado também, mediante uma simples adaptação (capítulo 4), no pré-processador gráfico interativo existente no sistema.

1.2 Justificativa

Como visto, o MEFGE propõe a manutenção de todas as vantagens associadas ao MEF - como a minimização da importância da malha de elementos finitos sem necessariamente penalizar a integração numérica, o que possibilita contornar as limitações oriundas da formulação clássica do MEF e investigar fenômenos que escapam à sua eficiente simulação - e a superação dos obstáculos que eventualmente prejudicavam o desempenho do MEF - como o mau condicionamento de sua matriz de rigidez e sua performance quando existem elementos de mistura. Um método que apresenta um potencial tão significativo certamente merece estudos mais aprofundados acerca de seu desempenho. Mais particularmente, merece investigações porque esse potencial parece vir a um custo: nos trabalhos recentes envolvendo seu emprego em problemas bi (Gupta et al., 2013) e tridimensionais (Gupta et al., 2015), as vantagens oferecidas só puderam ser mantidas mediante estratégias de enriquecimento específicas.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo Geral

O objetivo geral deste trabalho consiste em desenvolver um ambiente que permita a análise de problemas bidimensionais segundo a abordagem do MEFGE, empregando diversos tipos de enriquecimento.

1.3.2 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos a serem alcançados foram listados nos itens que se seguem:

1. Generalizar a implementação do código existente no INSANE para que possa comportar a análise empregando o MEFGE sem a necessidade de definição de enriquecimentos específicos para esta abordagem.
2. Utilizar a implementação desenvolvida para o MEFGE para análise de problemas bidimensionais que envolvam a utilização de enriquecimento polinomial e/ou a modelagem de trincas, avaliando o desempenho do método, bem como a necessidade de serem empregadas estratégias de enriquecimento especiais, como aquelas apresentadas em Gupta et al. (2013) e Gupta et al. (2015). Nesse sentido, utilizar-se-á também do trabalho de Silva (2016), que desenvolveu no INSANE a representação de uma descontinuidade estática segundo a abordagem do MEFGE.
3. Disponibilizar a implementação realizada para o MEFGE no pré-processador gráfico interativo do INSANE, permitindo a modelagem de problemas bidimensionais segundo esta abordagem a partir desta aplicação.

1.4 Organização do Texto

O trabalho aqui desenvolvido, bem como os resultados obtidos, estão organizados em seis capítulos e dois apêndices, segundo o disposto nos parágrafos seguintes.

No capítulo 1, realiza-se uma breve introdução ao trabalho, contextualizando o tema, justificando-o, expondo os objetivos a serem atingidos e apresentando a organização do texto.

O capítulo 2 engloba os princípios gerais e a formulação elementar do MEFGE, dispondo sobre seu histórico e suas vantagens e desvantagens.

O capítulo 3 versa sobre o MEFGE, detalhando qual a modificação realizada em relação ao método que lhe deu origem e explicitando sua formulação, além de discutir outras características de interesse do método.

No capítulo 4, o sistema INSANE é apresentado de forma geral, com ênfase no arcabouço previamente existente para resolução de problemas via MEFGE e para modelagem de trincas, além das novas implementações que permitiram a realização de análise de problemas bidimensionais de forma genérica segundo a abordagem do MEFGE. As intervenções realizadas no núcleo numérico são detalhadas, bem como as modificações necessárias para incorporar o módulo implementado ao pré-processador gráfico interativo.

O capítulo 5 apresenta exemplos numéricos que ilustram e validam a implementação realizada no capítulo 4, com a utilização de enriquecimentos de naturezas distintas. Tais exemplos são ainda utilizados como forma de avaliar os desempenhos do MEFGE e do MEFGE.

No capítulo 6, são oferecidas as considerações finais sobre o trabalho, incluindo uma análise do que foi desenvolvido e sugestões para trabalhos futuros.

O apêndice A apresenta um arquivo de entrada de dados do INSANE, a fim de ilustrar o marcador acrescido a este para representar um enriquecimento segundo a abordagem do MEFGE.

O apêndice B, por sua vez, discrimina a aproximação alcançada pelos diversos

enriquecimentos polinomiais empregados em um dos problemas apresentados no capítulo 5 sobre uma partição da unidade (PU) composta por elementos finitos do tipo Q4 segundo a abordagem do MEFG.

Capítulo 2

O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS

2.1 Introdução

De acordo com Duarte, Babuška e Oden (2000), o MEFG foi proposto independentemente por:

- Babuška e colaboradores em Babuška, Caloz e Osborn (1994); Babuška e Melenk (1997) e Melenk e Babuška (1996), sob as denominações de Método dos Elementos Finitos Especiais, Método dos Elementos Finitos Generalizados e Método dos Elementos Finitos da Partição da Unidade, respectivamente;
- Duarte e Oden em Duarte e Oden (1995); Duarte e Oden (1996*a*); Duarte e Oden (1996*b*) e Duarte (1996) como formulação do método das nuvens; e em Oden, Duarte e Zienkiewicz (1998) como uma formulação híbrida do MEF.

Barros (2002) destaca ainda que a primeira ocorrência do emprego de sua titulação atual (Método dos Elementos Finitos Generalizados) ocorreu em Melenk (1995).

O MEFG pode ser entendido como uma generalização da forma convencional do MEF. A estratégia utilizada pelo MEFG consiste em empregar as funções de forma do MEF como funções do tipo Partição da Unidade (PU) (Barros, 2002). As funções PU funcionam, desta forma, como suporte compacto às funções de forma do MEFG.

O emprego das funções de forma do MEF como PU, além de facilitar a aplicação do método, garante que a aproximação seja conforme e evita problemas de instabilidade numérica, na medida que, diferentemente de várias formulações sem malha, impõe diretamente as condições de contorno. O resultado do produto dessas funções por outras funções especialmente escolhidas define as funções de forma da aproximação global do método.

Esta estratégia de enriquecimento extrínseco é similar, como apresentado na seção 1.1, àquela apresentada pelo Método dos Elementos Finitos Estendido (MEFE) - introduzido por Moës, Dolbow e Belytschko (1999) e Belytschko e Black (1999) (Alves et al., 2013). Segundo Fries e Belytschko (2010), o que distinguiu a abordagem adotada pelo MEFE dos primeiros trabalhos relacionados ao MEFG foi sua aplicação a problemas em que o enriquecimento era necessário apenas em partes do domínio. Essa característica local era alcançada através do enriquecimento de um subconjunto de nós. No entanto, os mesmos autores afirmam que as diferenças entre este método e o MEFG se tornaram nebulosas. De fato, apesar da consideração citada feita por Fries e Belytschko (2010), em Duarte, Babuška e Oden (2000), sob abordagem do MEFG, já são utilizadas funções especiais para enriquecer apenas alguns nós do domínio. Deste modo, os métodos podem ser considerados praticamente idênticos, o que foi assumido neste trabalho.

2.2 Formulação

O MEFG apresenta, assim como os Métodos sem Malha, domínios de influência denominados nuvens, que são formados, no caso daquele, por conjuntos de elementos finitos que concorrem nos pontos nodais cujo vetor de coordenadas é \mathbf{x}_j (representados, na Figura 2.1, por ω_j). Empregando-se as funções de Lagrange lineares (do MEF), dentro do domínio \mathbb{R}^2 , representadas por $N_j(\mathbf{x})$ (Figura 2.1), forma-se a Partição de Unidade (PU), assim definida pois, para qualquer posição do domínio do

problema de n pontos nodais tem-se (Alves, 2012):

$$\sum_{j=1}^n N_j(\mathbf{x}) = 1 \quad (2.1)$$

Segundo Barros (2002), o enriquecimento permite a ampliação desse espaço a partir da multiplicação da função base de cada nó de coordenadas \mathbf{x}_j por um novo conjunto de q_j funções linearmente independentes definidas por:

$$\mathcal{I}_j \stackrel{def}{=} \{L_{j1}(\mathbf{x}), L_{j2}(\mathbf{x}), \dots, L_{jq_j}(\mathbf{x})\} = \{L_{ji}(\mathbf{x})\}_{i=1}^{q_j} \quad (2.2)$$

com $L_{j1}(\mathbf{x}) = 1$.

As funções de forma $\phi_{ji}(\mathbf{x})$ do MEFG, atreladas ao nó de coordenadas \mathbf{x}_j e correspondentes à nuvem ω_j , são definidas pelo produto entre as funções básicas que formam a PU e as funções de enriquecimento:

$$\{\phi_{ji}\}_{i=1}^{q_j} = N_j(\mathbf{x}) \times \{L_{ji}(\mathbf{x})\}_{i=1}^{q_j} \quad (2.3)$$

sem somatório em j .

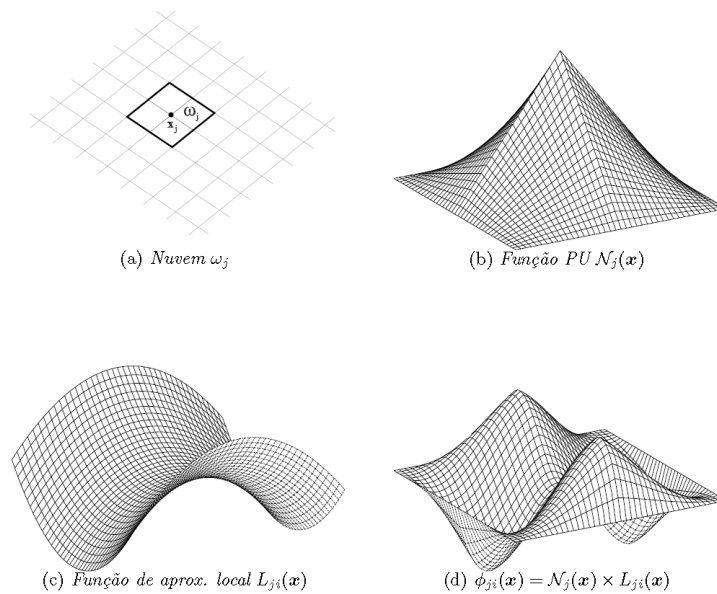


Figura 2.1: Estratégia de enriquecimento da nuvem ω_j (Barros, 2002).

A função produto possibilita a descrição precisa da aproximação da solução de alguns trechos do domínio, que, devido à complexidade da solução, não poderiam ser descritos, por exemplo, por funções polinomiais. A função enriquecedora é, portanto, selecionada conforme o problema em análise.

Pela maneira como é realizado, o enriquecimento pode variar entre elementos, mas a construção da solução a partir da PU permite chegar a uma aproximação sem “costura” (Duarte, Babuška e Oden, 2000), verificando o critério de conformidade dos elementos (Alves, 2012).

Finalmente, conforme Barros (2002), obtém-se uma aproximação genérica $\tilde{u}(\mathbf{x})$ pela seguinte combinação linear das funções de forma:

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N N_j(\mathbf{x}) \left\{ u_j + \sum_{i=2}^{q_j} L_{ji}(\mathbf{x}) b_{ji} \right\} \quad (2.4)$$

onde,

u_j e b_{ji} são parâmetros nodais associados com cada componente $N_j(\mathbf{x})$ do MEF e $N_j(\mathbf{x}) \cdot L_{ji}(\mathbf{x})$ do MEFG, respectivamente.

Com o objetivo de minimizar os erros de arredondamento durante o processo computacional, Duarte, Babuška e Oden (2000) sugerem uma transformação nas funções $L_{ij}(\mathbf{x})$, quando elas são do tipo polinomial. Neste caso, a coordenada x é substituída por:

$$x \rightarrow \frac{x - x_j}{h_j} \quad (2.5)$$

onde,

h_j é o tamanho característico do maior elemento finito que compartilha o nó j , aqui definido como a maior distância entre dois dos vértices deste elemento.

Tal transformação é adotada na implementação do MEFG no sistema INSANE, utilizado como ferramenta base neste trabalho.

Deste modo, como resultado final de todo o processo, a função produto é obtida. Esta função apresenta as características aproximadoras da função de aproximação local concomitantemente à herança do suporte compacto da PU (Alves, 2012).

2.3 Considerações sobre o MEFG

É importante observar que, apesar de superar as limitações relativas à integração numérica (quando as funções de enriquecimento são polinomiais e pelo fato das aproximações serem construídas sobre a malha de elementos), bem como à prescrição das condições de contorno, verificados na abordagem dos Métodos sem Malha (MM), o MEFG pode incorrer num conjunto de funções linearmente dependentes (Duarte, Babuška e Oden, 2000). Isso ocorre, basicamente, quando se enriquece com monômios uma PU polinomial. A consequência imediata desse fato é que o modelo passa a apresentar uma matriz de rigidez semi-definida positiva, mesmo após a eliminação dos movimentos de corpo rígido (Barros, 2002). Em outras palavras, a matriz não pode ser invertida. Além disso, a estratégia de enriquecimento também penaliza, por conseguinte, o condicionamento do sistema. O primeiro problema pode ser contornado empregando-se as estratégias numéricas sugeridas em Strouboulis, Babuška e Copps (2000), entre as quais se encontra um método iterativo denominado em Barros (2002) procedimento de Babuška. Esse procedimento encontra-se implementado no sistema INSANE, de acordo com o algoritmo detalhado em Barros (2002), e é utilizado na resolução do sistema de equações lineares associado ao MEFG, a partir de uma perturbação da matriz singular escalonada. O segundo problema, relativo ao condicionamento da matriz de rigidez, bem como a questão do desempenho do MEFG em situações de ocorrência de elementos de mistura, será melhor abordado no capítulo 3.

Pode-se dizer, entretanto, que o problema da dependência linear entre as funções de forma é um preço razoável a ser pago se comparado à potencialidade do MEFG

(Barros, 2002). De fato, o método abriu a possibilidade de simular, de maneira eficiente, problemas em que o campo de tensões apresente alguma singularidade, superando várias das limitações verificadas tanto no MEF quanto nos MM.

Capítulo 3

O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS ESTÁVEL

3.1 Formulação

O MEFGE, como mencionado previamente, foi originalmente proposto por Babuška e Banerjee (2012) para lidar com a questão do mau condicionamento da matriz de rigidez verificado no MEF. Adicionalmente, percebeu-se que o método apresentava bom desempenho também nas situações que envolviam elementos de mistura, conduzindo os problemas analisados a taxas ótimas de convergência mesmo sem a utilização de funções rampa. O emprego dessas funções é exigido em outras abordagens que tentam superar os efeitos negativos dessa classe de elementos, como o *Corrected XFEM* - MEF Corrigido (Babuška e Banerjee, 2012). As funções rampa se caracterizam por variarem linearmente de 0 a 1, assumindo, no caso dos elementos de mistura, o valor da unidade nos nós enriquecidos e valor nulo nos nós desprovidos de enriquecimento. Outras estratégias utilizadas para contornar esta questão podem ser encontradas em Lins (2015).

O MEFGE é arquitetado a partir de uma modificação local do enriquecimento característico do MEF. Essa modificação consiste basicamente na eliminação dos termos redundantes que aparecem na PU, suprimindo das funções de enriquecimento

suas projeções no espaço de funções daquela. Realiza-se, então, de modo análogo ao que ocorria no MEFGE, o produto do novo enriquecimento pelas funções de forma que compõem a PU, originando as funções de forma do método como um todo. Matematicamente, o enriquecimento modificado pode ser expresso como (Gupta et al., 2013):

$$\tilde{L}_{ji} = L_{ji} - I_{\omega_j}(L_{ji}) \quad (3.1)$$

onde,

I_{ω_j} é a função interpoladora (ou interpolante) definida por:

$$I_{\omega_j}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n N_k(\mathbf{x}) L_{ji}(\mathbf{x}_k) \quad (3.2)$$

onde,

\mathbf{x}_k é o vetor de coordenadas do nó k do elemento que contém a posição de cálculo \mathbf{x} ; n se refere ao número de pontos nodais do elemento que contém a posição de cálculo \mathbf{x} ;

$L_{ji}(\mathbf{x}_k)$ é a função enriquecedora original da equação (2.2).

Finalmente, são obtidas as funções de forma para o MEFGE:

$$\{\tilde{\phi}_{ji}\}_{i=1}^{q_j} = N_j(\mathbf{x}) \times \{\tilde{L}_{ji}(\mathbf{x})\}_{i=1}^{q_j} \quad (3.3)$$

sem somatório em j .

Para melhor compreensão do método, a Figura 3.1 mostra a construção do enriquecimento modificado e sua respectiva aplicação para compor a função de forma do MEFGE.

Pode-se, ainda, de forma análoga ao realizado na equação 2.4, obter uma aproximação genérica $\tilde{u}(\mathbf{x})$ para o MEFGE pela seguinte combinação linear das funções de forma:

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N N_j(\mathbf{x}) \left\{ u_j + \sum_{i=2}^{q_j} \tilde{L}_{ji}(\mathbf{x}) c_{ji} \right\} \quad (3.4)$$

onde,

u_j e c_{ji} são parâmetros nodais associados com cada componente $N_j(\mathbf{x})$ do MEF e $N_j(\mathbf{x}) \cdot \tilde{L}_{ji}(\mathbf{x})$ do MEFGE, respectivamente.

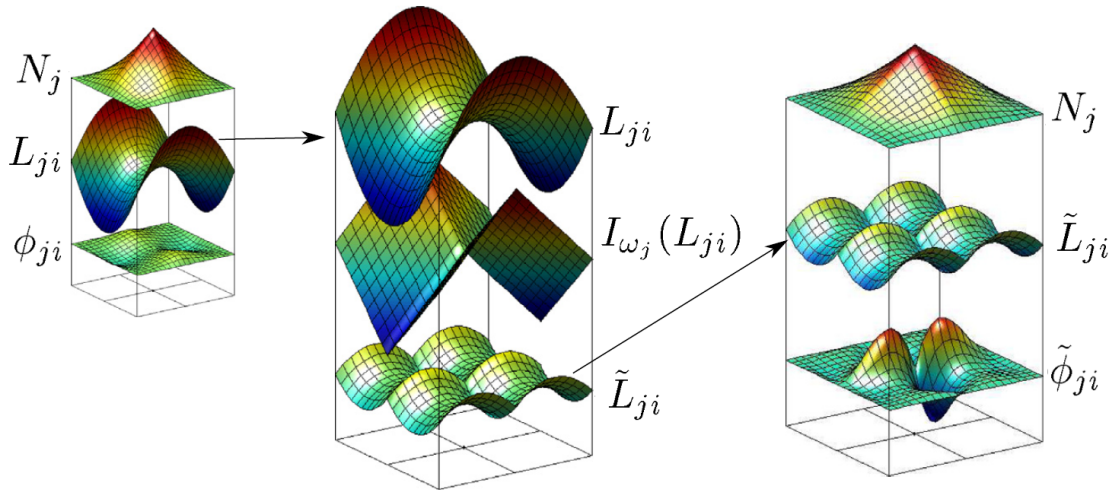


Figura 3.1: Construção do enriquecimento associado ao MEFGE. À esquerda, esquema do enriquecimento da Partição da Unidade empregado no MEFGE. No centro, nota-se a arquitetura do enriquecimento modificado. À direita, por sua vez, tem-se o esquema do enriquecimento da PU associada ao MEFGE (Gupta et al., 2013).

Assim, de forma semelhante ao que se verificava no MEFGE, o espaço de aproximação do MEFGE pode ser entendido como a composição do espaço de aproximação da forma tradicional do MEF e o espaço aumentado relativo às funções de enriquecimento modificadas (Sato, 2017). Tal lógica torna relativamente simples a implementação do MEFGE. Um aspecto que poderia ser apontado como complicador concerne à determinação do gradiente do interpolante I_{ω_j} , uma vez que seu cálculo se faz necessário para determinação do gradiente do enriquecimento:

$$\nabla \tilde{L}_{ji} = \nabla L_{ji} - \nabla I_{\omega_j}(L_{ji}) \quad (3.5)$$

No entanto, o cálculo deste gradiente não exige a determinação do gradiente das funções de enriquecimento $L_{ji}(\mathbf{x}_k)$ (equação 2.2) nos nós, por ser este invariável em \mathbf{x} . Desta forma, conforme explicitado em Gupta et al. (2013), tem-se:

$$\nabla I_{\omega_j}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n L_{ji}(\mathbf{x}_k) \nabla N_k(\mathbf{x}) \quad (3.6)$$

O gradiente das funções de forma $\nabla N_k(\mathbf{x})$ do MEF, por sua vez, já é calculado em qualquer implementação relacionada ao MEFGE, comprovando a simplicidade, neste quesito, do MEFGE. Maiores detalhes sobre a implementação numérica podem ser encontrados, da mesma forma, em Gupta et al. (2013).

3.2 Formulação para o Problema de Valor de Contorno

Esta seção pretende elucidar a formulação típica dos problemas tratados nas simulações numéricas aqui realizadas, conforme os diferentes métodos numéricos utilizados. Considere-se, então, o domínio $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ em \mathbb{R}^n , cujo contorno é dividido em $\partial\Omega = \partial\Omega^u \cup \partial\Omega^\sigma$ com $\partial\Omega^u \cap \partial\Omega^\sigma = \emptyset$. Os índices u e σ indicam, respectivamente, as regiões onde são aplicadas as condições de contorno de Dirichlet e de Neumann, conforme as equações 3.7 e 3.8 que se seguem:

$$\mathbf{u} = 0 \text{ em } \partial\Omega^u \text{ (homogênea por simplificação)} \quad (3.7)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \text{ em } \partial\Omega^\sigma \quad (3.8)$$

onde,

$\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor de tensões;

\mathbf{n} é o vetor unitário normal para $\partial\Omega^\sigma$;

$\bar{\mathbf{t}}$ é o carregamento prescrito.

Deve-se observar que soluções de contorno não homogêneas poderiam ser incluídas por estratégias como o método da penalidade. A equação de equilíbrio da Teoria da Elasticidade, por sua vez, pode ser expressa como:

$$-\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{b}} \text{ em } \Omega \quad (3.9)$$

onde,

$\bar{\mathbf{b}}$ é o vetor de forças de corpo.

A relação constitutiva, por sua vez, é dada pela Lei de Hooke Generalizada:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon} \quad (3.10)$$

onde,

\mathbf{C} é o tensor de Hooke;

$\boldsymbol{\epsilon}$ é o tensor de deformações.

A solução aproximada do problema de valor de contorno (PVC), definido pelas equações 3.7, 3.8 e 3.9, é dada por $\tilde{\mathbf{u}}$ na equação 3.11, tanto na análise via MEF quanto nas análises via MEFM ou MEFME:

$$\text{Encontre } \tilde{\mathbf{u}} \in \tilde{\mathcal{X}}^0(\Omega) \subset \mathcal{H}^1(\Omega) \forall \mathbf{v} \in \tilde{\mathcal{X}}^0(\Omega)$$

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{u}}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega^{\sigma}} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} ds + \int_{\Omega} \bar{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{v} \quad (3.11)$$

onde,

$\tilde{\mathcal{X}}^0(\Omega)$ é a discretização de $\mathcal{H}^1(\Omega)$, um espaço de Hilbert definido em Ω construído com as funções de forma do método utilizado (MEF, MEFM ou MEFME) e que atende às condições de contorno homogêneas de Dirichlet (equação 3.7).

3.3 Condicionamento dos Sistemas de Equações Lineares Associados ao MEFG e ao MEFGE

Segundo Gupta et al. (2015), a questão do mau condicionamento da matriz de rigidez associada ao MEFG é bem conhecida desde os primórdios do desenvolvimento deste método - uma breve revisão bibliográfica das tentativas realizadas para se lidar com esta questão pode ser encontrada em Lins (2015). De fato, como visto na seção anterior, o enriquecimento que se utiliza de funções polinomiais conduz a uma dependência linear que exige a utilização de processos iterativos para sua solução. A dependência linear está, como se explana posteriormente no texto, negativamente associada ao condicionamento de uma matriz. Lins (2015) destaca que o emprego de outros tipos de enriquecimentos, embora não conduza em geral a um condicionamento tão prejudicial, também produz um efeito desfavorável sobre este aspecto. A consequência deste fato é que os resultados obtidos pelo MEFG podem se tornar poluídos por erros de arredondamento, no caso de se utilizarem procedimentos de solução diretos ou terem as taxas de convergência significativamente afetadas quando são empregados procedimentos iterativos (Gupta et al., 2015), comprometendo sua precisão.

Tradicionalmente, quantifica-se o grau de condicionamento de uma matriz por um escalar denominado número de condicionamento. Szabó e Babuška (1991) definem o número de condicionamento de uma matriz \mathbf{K} simétrica como sendo a razão entre o maior (λ_{max}) e o menor (λ_{min}) de seus autovalores:

$$C(\mathbf{K}) \stackrel{def}{=} \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \geq 1 \quad (3.12)$$

Deve-se notar que, apesar de a definição empregada na equação 3.12 ser o conceito clássico de número de condicionamento, a determinação deste escalar, no presente trabalho, se dá a partir de uma definição mais genérica apresentada por Strang (1976):

$$C(\mathbf{K}) = \|\mathbf{K}\| \|\mathbf{K}^{-1}\| \quad (3.13)$$

onde,

$\|\mathbf{K}\|$ é a norma de \mathbf{K} ;

$\|\mathbf{K}^{-1}\|$ é a norma da inversa de \mathbf{K} .

Isso se deveu ao fato de que o sistema INSANE já possuía um método que provisse tal cálculo segundo essa abordagem, a partir da decomposição da matriz \mathbf{K} em análise em valores singulares (em inglês, *Singular Value Decomposition*, SVD). É importante destacar ainda que, nos exemplos numéricos expostos neste trabalho, o número de condicionamento é determinado, como recomendado em Gupta et al. (2013), a partir da aplicação da equação 3.13, com base na norma $\|\cdot\|_2$, sobre a matriz de rigidez escalonada $\hat{\mathbf{K}}$, definida como:

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{D}\mathbf{K}\mathbf{D} \quad (3.14)$$

onde,

\mathbf{D} é a matriz diagonal tal que $D_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\sqrt{K_{ij}}}$

Desta forma, pode-se chegar ao que os autores chamam de *Scaled Condition Number* - número de condicionamento escalonado (k), definido em Gupta et al. (2013) como:

$$k(\mathbf{K}) \stackrel{def}{=} \kappa_2(\hat{\mathbf{K}}) = \kappa_2(\mathbf{D}\mathbf{K}\mathbf{D}) = \|\hat{\mathbf{K}}\|_2 \|\hat{\mathbf{K}}^{-1}\|_2 \quad (3.15)$$

Quanto maior o valor do número de condicionamento, pior condicionada está a matriz. Por convenção, este escalar avaliado para uma matriz singular é infinito. Babuška e Banerjee (2012) demonstram que a taxa de variação do número de condicionamento escalonado associado à matriz de rigidez do MEEG é da ordem de

h^{-4} , enquanto no MEF convencional se obtém h^{-2} , onde h é o tamanho característico do elemento finito. Dito de outro modo, percebe-se que, à medida que a malha é refinada, ou seja, que o tamanho característico dos elementos se reduz, o número de condicionamento associado ao MEFGE cresce vertiginosamente se comparado ao apresentado pelo MEF. Os mesmos autores demonstram, para um caso unidimensional, que a taxa (escalonada) relacionada ao MEFGE é da mesma ordem de grandeza da verificada pelo MEF tradicional: h^{-2} . Posteriormente, Gupta et al. (2013) e Gupta et al. (2015) comprovaram que isso também acontece para os casos bi e tridimensionais, porém sob determinadas condições que exigiram adaptações na forma como estes organizaram suas estratégias de enriquecimento, de forma a garantir a manutenção de taxas ótimas de convergência. Pode-se perceber, portanto, que o método tem sido bem sucedido em estabilizar o condicionamento da matriz de rigidez a ele associada, embora tenha apresentado, também, particularidades para se alcançar tal fim, as quais merecem um estudo mais aprofundado.

3.4 Desempenho dos Métodos na Existência de Elementos de Mistura

No que concerne aos elementos de mistura, Fries e Belytschko (2010) apontam que as desvantagens associadas a estes foram também percebidas desde os primeiros trabalhos envolvendo o MEFGE. Como visto no capítulo 1, os elementos de mistura se caracterizam por apresentarem enriquecimento parcial, não contemplando todos os nós que os constituem (Figura 3.2). Isso faz com que a função enriquecedora não possa mais ser plenamente reproduzida, além de permitir a adição de termos parasitas à aproximação. Fries e Belytschko (2010) exemplificam esse último caso imaginando um elemento com apenas um dos nós enriquecido por uma função não polinomial, e concluem que surgirão termos que não poderão ser compensados pela aproximação polinomial padrão do MEF. Estes autores afirmam, no entanto, que o efeito negativo à aproximação causado pela presença dos elementos de mistura

não é facilmente previsível. De acordo com Fries (2008), o tipo de enriquecimento empregado pode servir como indicativo de alerta para as futuras limitações provocadas. Por exemplo, o emprego de *abs-enrichments* - enriquecimentos que envolvem funções que empregam valor absoluto - quando ocorrerem elementos de mistura, em geral, conduzirá à redução das taxas de convergência. Por sua vez, a utilização do enriquecimento de ponta da trinca (Fries, 2008) usualmente apenas amplia o valor absoluto do erro, enquanto as taxas de convergência permanecem inalteradas.

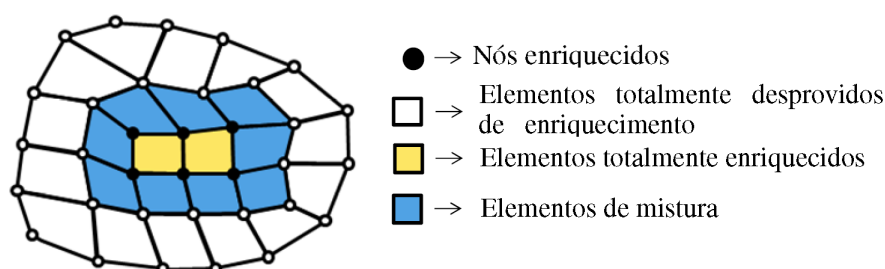


Figura 3.2: Diferentes tipos de elementos classificados conforme a quantidade de nós enriquecidos. Adaptado de Lins (2015).

Gupta et al. (2013) realizam diversas análises numéricas de um problema envolvendo uma chapa quadrada com trinca horizontal em uma de suas bordas. Os autores mostram que, nos diversos experimentos, o erro verificado quando empregado o MEFGE é superior na zona de enriquecimento, próxima à ponta da trinca. Este comportamento é atribuído à presença dos elementos de mistura nos contornos dessa zona. Para o MEFGE, os autores demonstram graficamente que a redução do erro nessa zona em relação ao MEFG é significativa, comprovando o bom desempenho do método nessa situação e indicando que este pode prover resultados mais precisos para o fator de intensidade de tensão. Resultados similares são obtidos em Babuška e Banerjee (2012) e Gupta et al. (2015). De fato, isso é esperado, uma vez que, como se pode inferir pelas equações 3.1 e 3.3, as funções de forma associadas ao MEFGE são nulas nos nós. Isso reduz o efeito dos termos indesejados que eventualmente seriam acrescidos pelas funções de enriquecimento e dispensa um tratamento

especial para lidar com a questão dos elementos de mistura (Sato, 2017).

Capítulo 4

IMPLEMENTAÇÃO DO MEFGE NO SISTEMA INSANE

4.1 Introdução

Neste capítulo, propõe-se apresentar o sistema INSANE, explicitando sua organização geral, a estrutura básica previamente existente para resolução de problemas segundo a abordagem do MEFGE e como se dá, neste ambiente, a modelagem de trincas. Além disso, naturalmente, discorrer-se-á sobre as intervenções realizadas para o estabelecimento do módulo que permite a realização de análises utilizando o MEFGE. Para tal, as modificações no projeto orientado a objetos proposto para o MEFGE são discutidas. Os exemplos que as validam, por sua vez, serão apresentados no capítulo 5.

Como mencionado no capítulo 1, o INSANE é um ambiente computacional desenvolvido pelo DEES (UFMG) segundo o paradigma de Programação Orientada a Objetos (Fonseca e Pitangueira, 2007). Implementado em linguagem Java, além de propiciar o ambiente amigável, segmentado e que suporte novas implementações sem a necessidade de modificações estruturais já citado, a utilização de tal linguagem garante portabilidade a esse sistema, uma vez que, conforme Alves (2012), o INSANE pode ser executado sem adaptações em diversos sistemas operacionais e arquiteturas

de máquina. Antes do presente trabalho, este software já era capaz de resolver problemas de valor de contorno sob abordagens numéricas distintas, como a teoria clássica do MEF e outras formulações mais recentes, entre as quais se destacam o Método dos Elementos de Contorno (MEC), os Métodos sem Malha (MM) e o próprio MEFGE. Além disso, havia ainda algumas classes de enriquecimento específicas que viabilizavam parcialmente análises no contexto do MEFGE (Malekan, 2017). As linhas de pesquisa correntemente desenvolvidas no âmbito do INSANE, bem como publicações relacionadas a implementações anteriores, podem ser encontradas no mesmo endereço em que o software é disponibilizado (<https://www.insane.dees.ufmg.br>).

Seguindo convenção semelhante à apresentada em Alves (2012), com o objetivo de orientar o leitor, as classes modificadas nos diagramas apresentados no presente trabalho serão representadas pela cor amarela, enquanto as classes criadas serão identificadas pela cor verde (Figura 4.1).

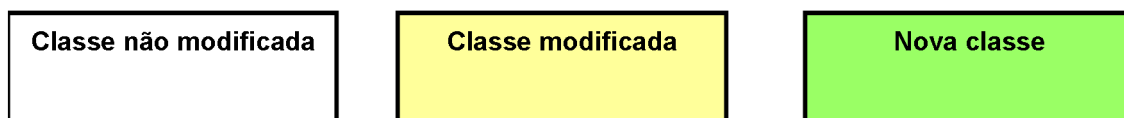


Figura 4.1: Representação da convenção adotada para identificar as classes modificadas e criadas nas implementações envolvendo o MEFGE.

4.2 Visão Geral

O sistema INSANE, em linhas gerais, pode ser dividido em três grandes aplicações: pré-processador, processador e pós-processador. Conforme Fonseca (2008), o pré e o pós-processador são aplicações gráficas interativas que fornecem ferramentas para construir as diversas representações discretas de um problema estrutural, além de visualização de resultados. O processador, por sua vez, constitui o núcleo numérico e é responsável pela obtenção de resultados dos modelos. As modificações implementadas em termos de código para o presente trabalho foram realizadas

majoritariamente nesta aplicação.

O núcleo numérico do INSANE é estruturado em interfaces e classes abstratas que representam as diversas abstrações da solução por modelos discretos. Sua organização é centrada nas relações entre as interfaces *Assembler* e *Persistence*, além das classes abstratas *Model* e *Solution* (Fonseca, 2008). A Figura 4.2 apresenta o diagrama *Unified Modeling Language* (UML) das classes citadas, destacando a comunicação entre as mesmas.

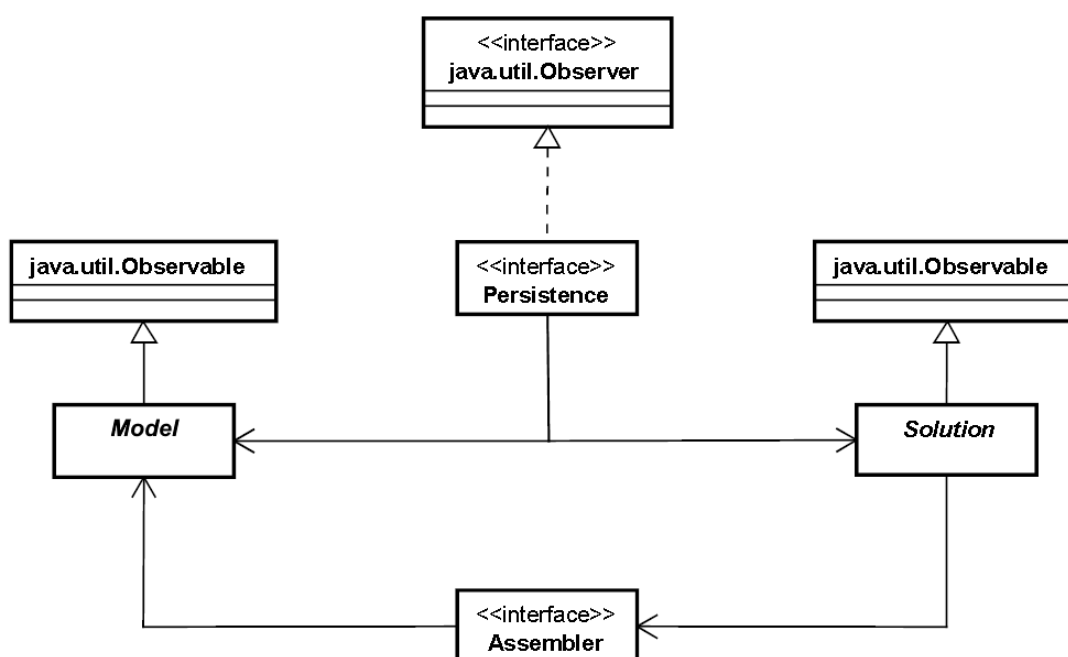


Figura 4.2: Organização do núcleo numérico do INSANE. Adaptado de Fonseca (2008).

Segundo Fonseca (2008), a interface *Assembler* é responsável pela montagem do sistema que representa genericamente a forma discreta de um problema de valor de contorno expresso por:

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\mathbf{X} = \mathbf{D} \quad (4.1)$$

onde,

\mathbf{X} é o vetor solução;

\mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} são matrizes;

\mathbf{D} é um vetor.

A classe abstrata *Solution*, por sua vez, desencadeia o processo de solução e detém os recursos necessários para a resolução do sistema, seja ele linear ou não-linear. A classe abstrata *Model* contém todos os dados do modelo discreto, e fornece à interface *Assembler* as informações necessárias para a montagem da equação 4.1. *Model* e *Solution* se comunicam com a interface *Persistence*, que interpreta os dados de entrada e provê os dados de saída para outras aplicações, sempre que alterações no estado do modelo discreto são realizadas (Fonseca, 2008).

4.3 O Mefg no INSANE

O objetivo desta seção é descrever de forma simplificada aspectos de interesse do projeto orientado a objetos desenvolvido por Alves (2012) para tornar exequível a utilização do Mefg enquanto método numérico para solução de problemas de valor de contorno no contexto do INSANE, de tal forma a facilitar a compreensão sobre as modificações realizadas para compatibilização com o Mefge nas seções posteriores. Maiores detalhes sobre a implementação do Mefg poderão ser encontrados em Alves (2012) e Alves et al. (2013). Além disso, buscar-se-á ilustrar, qualitativamente e sem entrar em minúcias relativas ao código, como a lógica de Alves (2012) estava até o corrente trabalho acessível no pré-processador gráfico interativo.

Para isso, será descrita a estruturação geral do Mefg nos quatro componentes principais do núcleo numérico: *Persistence*, *Assembler*, *Model* e *Solution*.

4.3.1 Interface *Persistence*

O padrão *Observer-Observable* é responsável por governar as modificações no modelo discreto do sistema INSANE. Nesse contexto, a interface *Persistence* consiste no componente observador, enquanto as classes abstratas *Solution* e *Model* atuam

como componentes observados. Entre as funções que cumpre, a interface *Persistence* é responsável pelo preenchimento dos dados de entrada através dos arquivos. Tais arquivos podem ter sido gerados tanto no pré-processador gráfico interativo do INSANE quanto em qualquer outra ferramenta capaz de fornecer um formato compatível com o sistema. A persistência de dados é baseada em arquivos XML. Outros detalhes sobre a tecnologia, bem como sobre a interface *Persistence*, podem ser encontrados em Fonseca (2008).

Como visto, os dados de entrada gerados são empregados para preenchimento das informações do modelo (*Model*). Tais informações se prestam à montagem do sistema da equação 4.1 em *Assembler*, para posterior desencadeamento do processo de solução em *Solution*. Uma vez resolvido o sistema, a interface *Persistence* é ainda responsável por preencher o arquivo com os dados de saída pertinentes que podem ser utilizados em outras aplicações, como o pós-processador.

No que diz respeito especificamente ao MEFG, a entrada de dados precisou ser modificada em Alves (2012) para que pudesse representar as particularidades do método, com a criação, por exemplo, de parâmetros nodais associados ao enriquecimento eventualmente atribuído pelo usuário. Nesse sentido, pode-se destacar o método *fillEnrichmentListFromFile*, responsável por preencher a lista de funções de enriquecimento do modelo de acordo com a biblioteca de enriquecimentos disponíveis cadastrados no pacote *br.ufmg.dees.insane.model.gfemmodel.enrichmenttype* no âmbito de *Model*.

4.3.2 Classe Abstrata *Solution*

Como visto, a classe *Solution* é a responsável pela resolução da equação 4.1. No contexto de seu pacote, há classes filhas com processos de soluções distintos para os diferentes problemas em análise. Entre estas, destaca-se a *SteadyState*, destinada à solução de problemas lineares estáticos. Um objeto desta classe tem como atributos dois outros objetos do tipo *Assembler* e *LinearEquationSystems*. Este último contém

métodos destinados propriamente à solução do sistema 4.1 para o caso de problemas estáticos lineares, como os métodos de Crout, Cholesky e, a partir do trabalho de Silva et al. (2009), também o já citado procedimento de Babuška apresentado em Strouboulis, Babuška e Copps (2000) e assim denominado em Barros (2002). A etapa inicial deste procedimento, antes de perturbar a matriz de rigidez (algoritmos do procedimento podem ser encontrados, como visto, em Barros (2002) e também em Alves (2012)), é escaloná-la da forma disposta na equação 3.14. Por essa razão, será no contexto dessa classe que será realizado, nos problemas lineares, o cálculo do número de condicionamento escalonado nas simulações numéricas expostas neste trabalho.

4.3.3 Interface *Assembler*

Os métodos necessários para a montagem das matrizes e vetores do sistema da equação 4.1 são encontrados na interface *Assembler*. Ela é implementada pela classe *FemAssembler*, que possui, como filha, a classe *GFemAssembler*. Esta, por sua vez, é a responsável por incorporar as particularidades do MEEG nos métodos citados, particularmente no caso de análises estáticas. Para este tipo de análise, a equação 4.1 pode ser simplificada, a partir da eliminação das matrizes **A** e **B**, associadas a problemas de análise dinâmica, obtendo-se (Alves, 2012):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{uu} & \mathbf{C}_{up} \\ \mathbf{C}_{pu} & \mathbf{C}_{pp} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_u \\ \mathbf{X}_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{D}_p \\ \mathbf{D}_u \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

onde,

C representa a matriz de rigidez do modelo;

X o vetor de graus de liberdade (como deslocamentos nodais, por exemplo);

D o vetor de forças;

u e *p* são índices associados a graus de liberdade desconhecidos e prescritos, respectivamente.

Cada parcela das matrizes e vetores indicados na equação 4.2 pode ser obtida por um método específico nas classes que implementam a interface *Assembler*.

4.3.4 Classe Abstrata *Model*

Na classe abstrata *Model*, cujo principal objetivo é representar o modelo discreto a ser analisado, é que se realizaram talvez as mudanças mais significativas de Alves (2012) para comportar um ambiente de análise através do MEFG.

No que diz respeito ao MEF, a classe filha de *Model*, *FemModel*, é a responsável pelos modelos discretos produzidos segundo a abordagem desta formulação. Esta classe possui diversas variáveis que caracterizam tais modelos, como listas de nós, elementos, modelos de análise, funções de forma, degenerações, materiais e carregamentos. A partir de *FemModel* e derivada diretamente desta, foi implementada a classe *GFemModel*, que incorporou propriedades específicas de um modelo do MEFG, como a lista de funções de enriquecimento e outros métodos de acesso e manipulação de variáveis (Alves, 2012).

Para garantir a coerência com um modelo do MEFG, no entanto, visto que as classes derivadas de *Model* são constituídas por componentes diversos, foram necessárias intervenções em outras classes que representassem esses componentes. Na classe *Node*, por exemplo, que representava um nó, foram acrescentados atributos relacionados ao enriquecimento nodal e à nuvem de elementos. No que concerne aos elementos, a classe abstrata *Element*, por sua vez, é a responsável por representar um elemento finito genérico e possui entre suas filhas a classe *ParametricElement* (incumbida da reprodução de elementos finitos paramétricos). Desta derivou-se a classe *GFemElement*, que possui métodos compatíveis para a obtenção das variáveis de estado e das variáveis internas segundo o MEFG. Outra intervenção de destaque foi a criação da classe *EnrichedShape*, destinada a construir a função de forma característica do MEFG a partir das funções de enriquecimento atribuídas aos nós

pertinentes e da classe da qual derivou, *Shape*, a qual, por sua vez representa a função de forma de um elemento finito, que na abordagem do MEEG é a função da PU. Houve ainda a criação, no âmbito da interface *ProblemDriver*, que possui a função de informar a *Assembler* as grandezas necessárias para montagem da equação final do modelo, da classe *GFemParametric*. Esta realiza, entre outras funções, a montagem de matrizes e vetores relacionados aos atributos dos elementos, como a matriz de rigidez destes. Houve ainda modificações necessárias no âmbito das classes que forneciam parâmetros relacionados ao modelo de análise (*AnalysisModel*) e classes que representavam um carregamento (pacote *Load*), que não serão aqui descritas. Tais intervenções, bem como as anteriores citadas e os diagramas UML pertinentes, podem ser encontrados em maiores detalhes em Alves (2012).

Há que se destacar, no entanto, uma última alteração, realizada por Alves (2012), no contexto de *Model*: a criação da classe abstrata *EnrichmentType*, dentro do pacote homônimo já citado. Esta classe é a responsável por armazenar e manipular informações relacionadas às funções e estratégias de enriquecimento. Cada objeto da classe *GFemModel*, por exemplo, possui uma lista de objetos *EnrichmentType*. Os métodos existentes em *EnrichmentType*, classe cujo pacote de origem e classes dela derivadas estão representados no diagrama UML da Figura 4.3, fornecem informações pertinentes para o cálculo das funções de forma do MEEG (equação 2.3) nos pontos considerados na análise de determinado elemento finito, fornecendo inclusive o valor das funções de enriquecimento e de suas derivadas. Como a classe citada é de fato abstrata, as classes que caracterizam em si enriquecimentos específicos são classes dela derivadas. Entre elas, podem ser citadas, por exemplo, as classes *PolynomialEnrichment*, *CrackEnrichmentMode1* (Alves, 2012) e *DiscontinuousEnrichment* (Silva, 2016), que representam, respectivamente, enriquecimentos do tipo polinomial, com funções de singularidade correspondentes ao modo I de abertura (Szabó e Babuška, 1991) e funções descontínuas do tipo Heaviside. É relevante ainda observar que a implementação de Alves (2012) nesse sentido se deu de forma

genérica, facilitando o acréscimo de outros tipos de funções enriquecedoras, se fosse o caso, em trabalhos futuros. Para tal, bastaria criar a classe pertinente no pacote *EnrichmentType*, como filha da classe homônima, e realizar modificações simples destinadas à leitura e atribuição de dados do enriquecimento em *EnrichedShape* e *Persistence*, sem exigir alterações significativas em qualquer dos métodos existentes nestas.

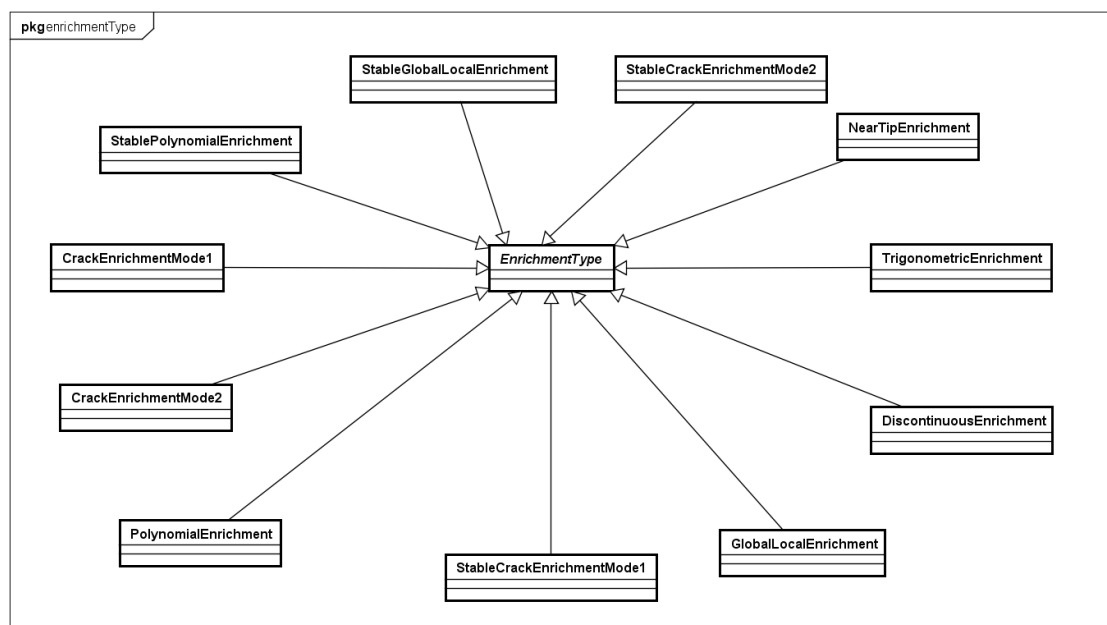


Figura 4.3: Diagrama UML do pacote *EnrichmentType* antes das modificações realizadas neste trabalho.

4.3.5 MEFG no Pré-Processador Gráfico Interativo

Esta seção objetiva descrever brevemente o módulo bidimensional do pré-processador gráfico interativo do software empregado nas simulações numéricas deste trabalho. Em particular, deseja-se elucidar como se poderia realizar uma análise segundo a abordagem do MEFG a partir desta aplicação.

O aperfeiçoamento da entrada de dados do sistema INSANE se deu no trabalho de Silva (2016). Correntemente, o pré-processador gráfico integrado permite a análise unidimensional, bidimensional e de modelos pré-definidos. As análises uni

e bidimensionais podem ainda, juntamente com a análise tridimensional, ser realizadas a partir do processamento direto do arquivo XML compatível. O ambiente gráfico de análise bidimensional, que foi o foco de Silva (2016) e que é também o módulo sobre o qual se debruça este trabalho, permitia, até a realização deste, as análises lineares e fisicamente não-lineares com carregamento no plano segundo as abordagens do MEF e do MEEG, e as análises com carregamento normal ao plano (placas) no contexto do MEF.

A entrada no ambiente gráfico se inicia justamente com a escolha da classificação espacial da análise (Figura 4.4). Escolhido o módulo bidimensional, e após a indicação da pasta para armazenamento dos dados do modelo, o primeiro dos três módulos componentes do pré-processador gráfico é aberto automaticamente. Este versa sobre a geometria do modelo, e dispõe de recursos para desenho, seleção e visualização de entidades geométricas (Silva, 2016). Com a geometria definida, prossegue-se para o módulo seguinte, que trata da geração de malhas e detém as ferramentas necessárias para tal, bem como para seleção e visualização.

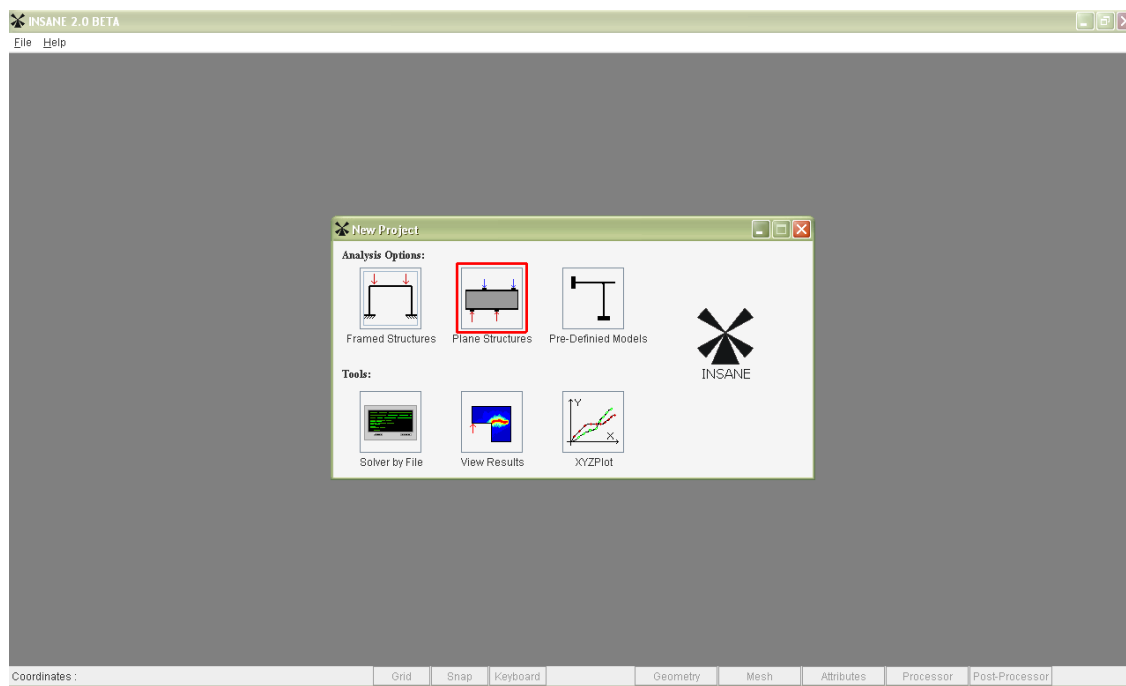


Figura 4.4: Diálogo inicial do sistema INSANE (Silva, 2016).

Após a discretização da geometria do modelo, e escolhido um modelo de análise compatível com o carregamento no plano, uma vez que a simulação de placas via MEFM não se encontra disponível nesta aplicação, procede-se a seleção do elemento finito que se deseja utilizar e se chega ao último módulo do pré-processador: aquele que trata dos atributos e é constituído pelos recursos indicados na Figura 4.5. Neste módulo, são definidos o modelo constitutivo, os materiais, as degenerações e as condições de contorno, além de atributos opcionais (Silva, 2016) e do carregamento da estrutura. O comando identificado com o número (4) na Figura 4.5 é aquele que permite a criação de uma função de enriquecimento nesta aplicação.

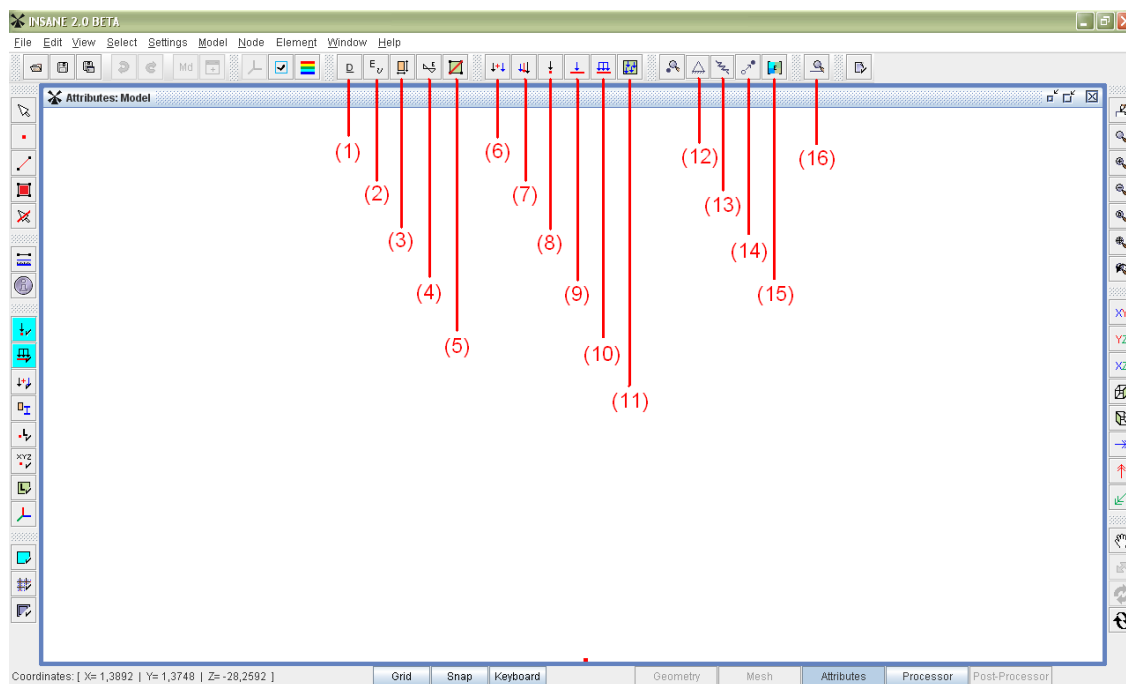


Figura 4.5: Módulo *Atributos* do pré-processador gráfico interativo (Silva, 2016).

Atualmente, no ambiente gráfico, na janela que se abre com o comando especificado (Figura 4.6), são permitidos os já citados enriquecimentos polinomial e de singularidade correspondente ao modo I de abertura (Szabó e Babuška, 1991). Enriquecimentos do tipo global-local e com funções trigonométricas estão, segundo Silva (2016), em fase de desenvolvimento. Os parâmetros do enriquecimento que devem ser preenchidos pelo usuário variam com o tipo de função enriquecedora adotada e

podem ser vistos, para o caso do enriquecimento de singularidade, na Figura 4.6. Além disso, a janela citada contém ainda opções para adição, modificação e remoção de um determinado enriquecimento, bem como o botão “*Apply*”, que confirma os dados dos parâmetros passados e desencadeia o processo de armazenamento destes dados no modelo.

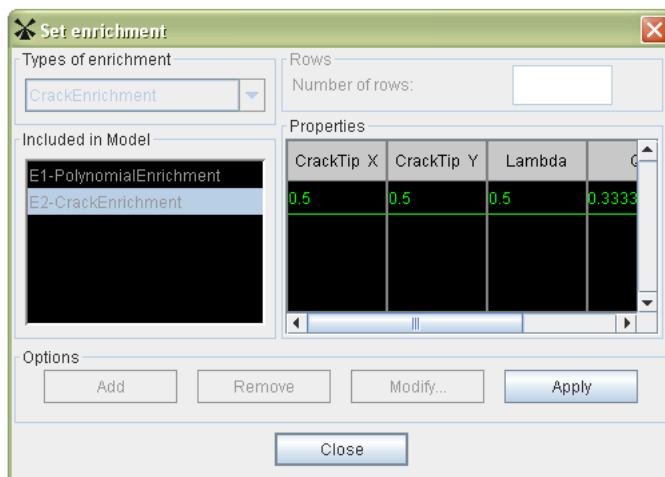


Figura 4.6: Diálogo de criação de funções de enriquecimento de singularidade (Silva, 2016).

Após o preenchimento da lista de enriquecimentos a partir do comando (4) da Figura 4.5, pode-se atribuir uma determinada função de enriquecimento a um ou mais nós. Para tal, basta selecioná-los com a ferramenta de seleção disponível e acionar o comando indicado por (15) (Figura 4.5). Se nenhum nó for selecionado antes do acionamento deste comando, a função será atribuída a todos os nós do modelo. Em seguida, pode-se modificar a escolha da função enriquecedora atribuída ao(s) nó(s) em questão por meio do diálogo apresentado na Figura 4.7. Elegendo a opção “*No enrichment*”, os nós selecionados não terão nenhum enriquecimento a si atribuídos. A partir do momento que um nó passa a ter uma função enriquecedora a ele atribuída, o sistema passa a operar com um modelo que recorra à classe *GFemModel* e às demais classes a ela relacionadas.

É importante observar que o ambiente gráfico permite a atribuição de diversas

funções de enriquecimento nodal, porém apenas uma delas pode ser atribuída por nó. Faz-se notar no entanto que um nó pode estar associado a mais de um enriquecimento no arquivo XML.

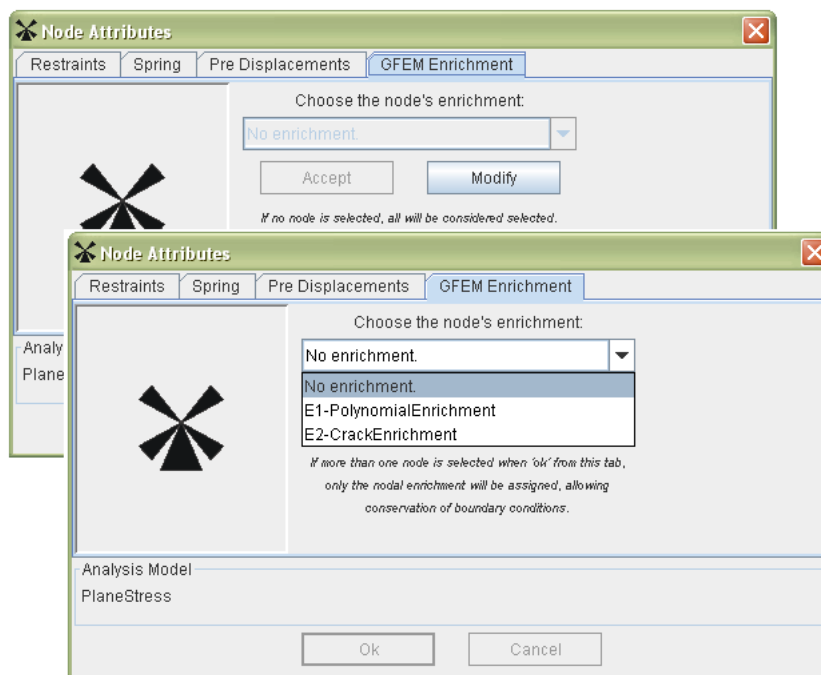


Figura 4.7: Diálogo de atribuição de funções de enriquecimento aos nós. (Silva, 2016).

4.4 Modelagem de Descontinuidades (Entalhes) - MEF_G

Esta seção visa discutir as particularidades da modelagem de trincas estáticas (ou seja, meras descontinuidades, sem sua propagação, que são denominadas, em Silva (2016), como entalhes) segundo a abordagem do MEF_G em problemas bidimensionais no contexto do INSANE. Isso porque análises numéricas com este tipo de trinca serão apresentadas posteriormente neste trabalho, tanto segundo a abordagem do MEF_G quanto do MEF_{GE}, o que também exigiu modificações no arcabouço construído por Silva (2016). Estas trincas são simuladas a partir do enriquecimento dos nós pertinentes do modelo com funções que reproduzem uma descontinuidade. No caso, as funções empregadas são as funções de Heaviside, definidas da seguinte

forma em Silva (2016):

$$\mathcal{H}(\xi) = \begin{cases} 1, & \forall \xi > 0 \\ 0, & \forall \xi < 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

onde,

ξ é a posição em relação à descontinuidade assumida em $\xi = 0$.

A função da equação 4.3 foi implementada por Silva (2016) na classe *DiscontinuousEnrichment*, já citada na seção 4.3.4. No entanto, a classe que reproduz o enriquecimento não era em si mesma suficiente para representar a descontinuidade no modelo. Isso ocorria devido à necessidade de existirem, no modelo, informações como àquelas relativas à geometria da trinca ou uma lista de elementos aos quais seria associada uma descontinuidade, que são utilizadas no cálculo do enriquecimento, mas que não são armazenadas na classe que o representa. Para que isso acontecesse devidamente, foi criada, no âmbito de *Model*, a classe *DiscontinuityByGfem*, responsável pelo gerenciamento de trincas e entalhes (Silva, 2016). Esta classe é extensa, e maiores detalhes sobre seus métodos e sobre as funções que ela realiza podem ser encontrados em Silva (2016). Um diagrama UML desta, com os métodos e variáveis relevantes para o presente trabalho, pode ser encontrado na Figura 4.8. A classe *GFemModel* foi, da mesma forma, modificada e passou a ter, entre suas variáveis, uma lista de descontinuidades.

A trinca estática ou entalhe, na abordagem de Silva (2016), é simulada a partir de dois parâmetros de entrada, preenchidos após a leitura dos dados relativos à lista de elementos do modelo: o ponto inicial e o ponto final da descontinuidade. Cada descontinuidade deste tipo tem associada a si estes parâmetros, e representa geometricamente, portanto, um segmento de reta. Para que a obtenção destes dados fosse possível, a interface *Persistence*, particularmente a classe que a implementa, *PersistenceAsXml*, precisou ser modificada com a criação de um método que realizasse a leitura destes elementos, que passaram a constituir, no arquivo de entrada, a lista

de descontinuidades do modelo. Neste método, por sua vez, era desencadeado um construtor de *DiscontinuityByGfem* que recebia como atributos os pontos inicial e final da descontinuidade, um objeto do tipo *String* que a identificava e um objeto do tipo *Model*. A partir destes atributos, além de armazenar os valores pertinentes para as variáveis da classe (que são descritas em detalhes no trabalho de Silva (2016)), o construtor atribuía um objeto do tipo *DiscontinuityByGfem* a um enriquecimento do tipo *DiscontinuousEnrichment*, também variável da classe. Além disso, este deflagrava ainda um método existente em *DiscontinuityByGfem* que era o responsável, propriamente, pela construção do entalhe, chamado *buildNotch*.

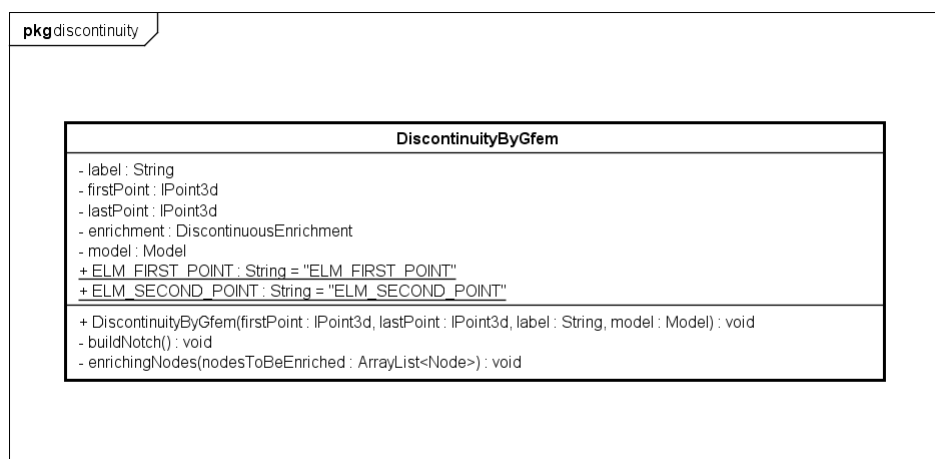


Figura 4.8: Diagrama UML de *DiscontinuityByGfem*, com os métodos e variáveis pertinentes a este trabalho.

O *buildNotch* identifica, a partir de uma busca centrada nos pontos inicial e final de uma dada descontinuidade que envolve métodos de geometria computacional de uma classe denominada *ComputationalGeometry*, quais elementos são cortados pelo entalhe simulado (até o presente trabalho, não era possível simular um entalhe que coincidissem com a aresta de um elemento). Os elementos encontrados são atribuídos à variável da classe que representa a lista de elementos com descontinuidade do modelo. Na sequência, realiza-se a determinação, em cada um destes elementos, dos pontos inicial e final da descontinuidade. Estes pontos são armazenados a partir

de chaves no mapa *elementValues* que cada elemento possui (Silva, 2016). Por fim, o método seleciona os nós que deverão ser enriquecidos, considerando os elementos presentes na lista de descontinuidades, com as funções de Heaviside da equação 4.3, e deflagra um outro método interno denominado *enrichingNodes*. Este recebe como atributo a lista de nós a serem enriquecidos e é responsável por associar aos nós escolhidos os atributos nodais relacionados ao enriquecimento, compatibilizando-os, quando pertinente, com os graus de liberdade adicionais acrescidos pela função 4.3.

É só então que se inicia propriamente o processamento dos dados do modelo, e os cálculos realizados na classe *DiscontinuousEnrichment* passam a ser necessários para a construção das matrizes e vetores pertinentes a cada elemento e , conseqüentemente, das matrizes e vetores apresentadas na equação 4.1. Como visto, a cada instância de *DiscontinuityByGfem*, tem-se associada uma instância de *DiscontinuousEnrichment*. A partir das informações fornecidas por aquela, esta é capaz de retornar um multiplicador de valor igual a 0 ou 1 para construção da função de forma do nó enriquecido no ponto em análise, por meio da investigação da posição deste ponto em relação à correspondente trinca (Silva, 2016). Para tal, é verificado o sinal do produto vetorial entre o segmento de trinca e o vetor definido pelo ponto inicial deste segmento e o ponto em análise. Na Figura 4.9, essa investigação é ilustrada em um dos pontos de integração do elemento cortado pela trinca.

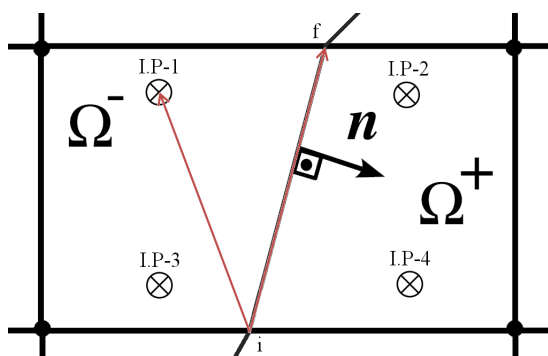


Figura 4.9: Exemplo de investigação do valor do multiplicador do enriquecimento (Silva, 2016).

Matematicamente, se \mathbf{A} for considerado o vetor formado pelos pontos inicial e final do segmento de trinca e \mathbf{B} o vetor formado pelo ponto em análise e o ponto inicial do segmento de trinca, pode-se escrever:

$$\text{Se } \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} (x_f - x_i) & (y_f - y_i) \\ (x_p - x_i) & (y_p - y_i) \end{vmatrix} \begin{cases} < 0, & H = 1 \\ \geq 0, & H = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

onde,

x_i, y_i são as coordenadas no plano do ponto inicial do segmento de trinca;

x_f, y_f são as coordenadas no plano do ponto final do segmento de trinca;

x_p, y_p são as coordenadas no plano do ponto em análise;

H é o multiplicador que simula o efeito da função de Heaviside.

Desta forma, caso o ponto em análise esteja à direita do vetor formado pelo segmento de trinca (\mathbf{A}), o multiplicador retornado tem valor unitário. Caso o ponto citado esteja à esquerda deste segmento, o multiplicador possui valor nulo. É interessante observar que, até este trabalho, a função expressa por 4.3 era a única função de salto disponível no arcabouço de *EnrichmentType* para simular a incorporação de uma descontinuidade geométrica

Toda esta estrutura desenvolvida por Silva (2016) para a representação de um entalhe foi disponibilizada, pelo próprio autor, no módulo destinado a problemas bidimensionais do pré-processador gráfico interativo do sistema INSANE. Dadas as particularidades da modelagem, que incluem, por exemplo, não deixar a escolha dos nós enriquecidos por Heaviside a cargo do usuário, a fim de evitar erros, tal funcionalidade foi ofertada de forma distinta do que foi apresentado na seção 4.3.5 em relação ao preenchimento das funções de enriquecimento. Deste modo, a incorporação de descontinuidades preexistentes na estrutura se dá através do diálogo mostrado na Figura 4.10 a partir do acionamento do comando (5) da Figura 4.5.

Como se pode perceber na Figura 4.10, como descrito previamente, a descontinuidade é criada a partir da definição das coordenadas de seus pontos inicial e final.

Por meio desta entrada, como mencionado e segundo Silva (2016), o programa se encarrega de determinar todos os elementos cortados por esta descontinuidade e de definir e enriquecer com a função da equação 4.3 os nós necessários para a simulação do salto no campo de deslocamentos. Silva (2016) observa ainda que, visto que as descontinuidades são, em todo processo, simuladas como entalhes, não há em nenhum momento a consideração de existência de forças de coesão atuantes em seus planos.

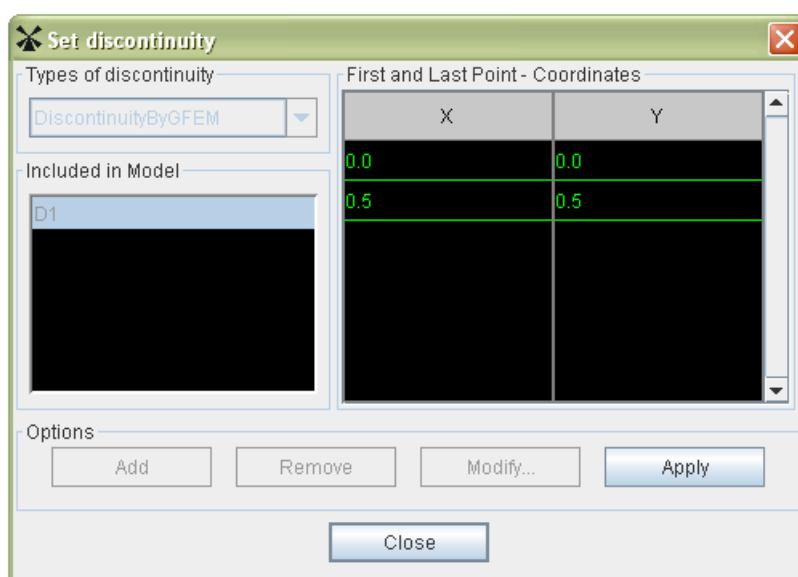


Figura 4.10: Diálogo de criação de descontinuidades (Silva, 2016).

4.5 Implementação MEFGE -INSANE

Objetiva-se aqui detalhar as intervenções realizadas a nível do processador do INSANE para comportar um ambiente que viabilizasse a análise linear de problemas bidimensionais pelo MEFGE. Graças ao arcabouço genérico desenvolvido por Alves (2012) para o MEFGE, as modificações necessárias para se atingir tal fim foram simples, na medida em que se compreende o MEFGE como uma versão estável do MEFGE, cuja diferença fundamental é o cálculo do enriquecimento modificado expresso pela equação 3.1. Mostrar-se-á também, sem detalhar as alterações no código, como essas modificações foram incorporadas ao pré-processador gráfico interativo, de

tal forma a permitir também uma análise bidimensional linear com carregamento no plano via MEFGE nesta aplicação. Finalmente, serão discriminadas as intervenções exigidas para garantir que esse método funcionasse no caso específico da modelagem de entalhes. As mudanças que isso acarretou no pré-processador gráfico interativo serão também expostas.

4.5.1 Generalização

Como mencionado previamente, antes deste trabalho, já existiam, no sistema INSANE, classes que representavam enriquecimentos no contexto do MEFGE de forma específica, provenientes do trabalho de Malekan (2017). Tratavam-se de versões estáveis das classes que já se encontravam na biblioteca deste sistema implementadas para representar as funções enriquecedoras segundo a lógica do MEFGE. Dois exemplos que podem ser citados são *StablePolynomialEnrichment* e *StableCrackEnrichmentMode1*, versões estáveis das já citadas *PolynomialEnrichment* e *CrackEnrichmentMode1*.

Apesar destas classes funcionarem para os fins a que se propunham, havia um aspecto negativo em seguir tratando os enriquecimentos característicos do MEFGE desta forma: embora a construção do enriquecimento modificado seja genérica (ou seja, a estrutura dos cálculos discriminados pelas equações 3.1 e 3.2 é, em essência, sempre a mesma), nesta lógica, sempre que se implementasse um novo enriquecimento segundo a abordagem do MEFGE, caso se desejasse avaliá-lo também no âmbito do MEFGE, seria necessária a implementação de uma nova classe específica para esta representação. Considerando o exposto sobre os cálculos que caracterizam a construção do enriquecimento do MEFGE, isso constituiria um trabalho desnecessário. Nesse sentido, para resolver essa desvantagem, foi criada uma classe destinada a representar genericamente qualquer enriquecimento construído dentro da abordagem do MEFGE: a *StableEnrichmentType*, derivada direta da classe abstrata *EnrichmentType*, da qual também possui um objeto como atributo, que representa

o enriquecimento L_{ji} a ser utilizado na estratégia da equação 3.1. O diagrama UML desta classe pode ser visto na Figura 4.11.

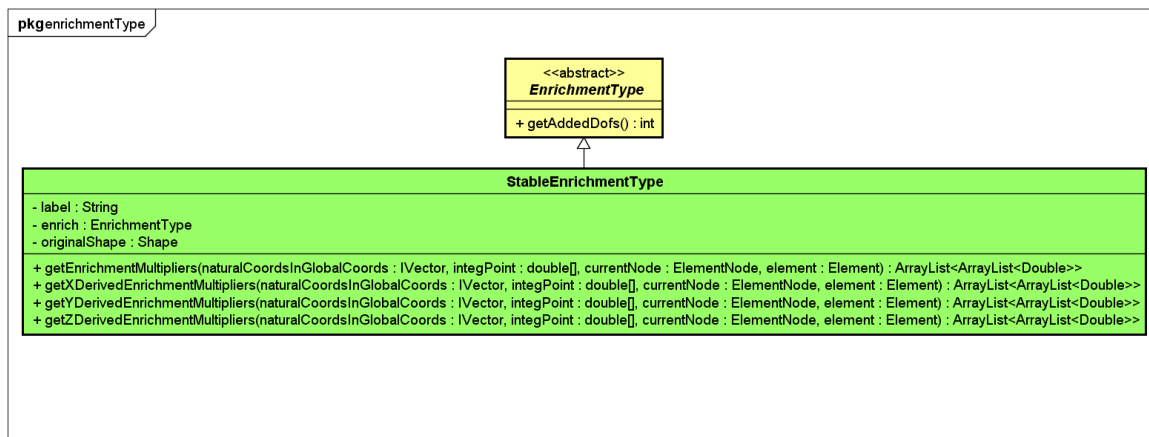


Figura 4.11: Diagrama UML de *StableEnrichmentType*.

O objeto do tipo *EnrichmentType* é utilizado para a obtenção do valor da função enriquecedora, tanto no ponto em análise (L_{ji} na equação 3.1) quanto nos nós ($L_{ji}(\mathbf{x}_k)$ na equação 3.2) para cálculo do interpolante I_{ω_j} . Da mesma forma, nos métodos relacionados à obtenção das derivadas de *StableEnrichmentType*, mostrados na Figura 4.11, o objeto citado é utilizado na determinação das derivadas da função de enriquecimento ∇L_{ji} no ponto em análise e novamente para cálculo do gradiente do interpolante, como disposto na seção 3.1. O objeto de *Shape*, a variável *originalShape*, por sua vez, permite a obtenção dos valores das funções de forma do elemento finito empregado nos pontos em análise, também para cálculo da função interpoladora. Da mesma maneira, nos métodos relacionados às derivadas do enriquecimento estável, há uma sequência de procedimentos destinada a obter as derivadas de *originalShape* para determinação do gradiente do interpolante. Na Figura 4.11, pode-se notar ainda uma modificação em *EnrichmentType*: a adição do método *getAddedDofs*. Este método retorna um inteiro com o número de graus de liberdade acrescidos por nó pela função enriquecedora, com base na dimensão do problema em análise. Esta modificação se prestou sobretudo a facilitar uma implementação igualmente genérica no que concerne às funções de enriquecimento no

código relativo ao pré-processador gráfico interativo.

Uma vez criada e testada a classe *StableEnrichmentType*, considerando o que foi apresentado no preâmbulo desta seção, não foram necessárias outras mudanças significativas na estrutura implementada para o MEFGE para compatibilização com o MEFGE no âmbito da interface *Assembler* ou da classe abstrata *Solution* (a não ser, no caso desta, a adição da chamada do método para determinação do número de condicionamento escalonado em *LinearEquationSystems*). Isso porque, como discutido na seção 3.1, a lógica do MEFGE é muito semelhante à do MEFGE, e não foi preciso realizar adaptações na forma como o sistema da equação 4.2 era montado ou na maneira como este era resolvido. Da mesma forma, na classe *EnrichedShape* foi necessário apenas disponibilizar, para seu acesso, a classe *StableEnrichmentType*, sem obrigação de modificar de fato qualquer de seus métodos para garantir que a função de forma característica do MEFGE (equação 3.3) fosse devidamente calculada.

As intervenções finais, que não são também estruturais, foram aplicadas no contexto de *Persistence*, particularmente em *PersistenceAsXml*. De forma análoga ao que ocorreu em *EnrichedShape*, era preciso disponibilizar o acesso a *StableEnrichmentType* nos métodos de preenchimento da lista de nós e da lista de enriquecimentos do modelo, de tal forma a conseguir uma entrada de dados compatível. Destaca-se, no entanto, a criação de um marcador no arquivo de entrada que anteriormente não existia para identificação da abordagem utilizada pela função enriquecedora. O marcador tem o valor de “*Standard*”, caso se trate de uma análise padrão pelo MEFGE, e “*Stable*”, no caso de uma análise via MEFGE. Este marcador pôde ser inserido a partir de uma pequena alteração no método que preenchia a lista de enriquecimentos do modelo em *PersistenceAsXml*. Um arquivo de entrada compatível com uma análise via MEFGE está disponível no apêndice A.

Uma vez que o arcabouço estruturado para o MEFGE foi validado, passou-se à sua implementação no contexto do pré-processador gráfico, a fim de acrescentar

como funcionalidade a esta aplicação a possibilidade de uma análise linear com carregamento no plano via MEFGE. As intervenções também neste caso foram simples, e buscou-se inclusive que fossem mínimas. A ideia geral foi atuar apenas no diálogo ilustrado na Figura 4.6, acrescentando a possibilidade de tornar o enriquecimento estável. Para isso, adicionou-se uma caixa de seleção que, caso ativada, tratava o enriquecimento empregado segundo a abordagem do MEFGE. Caso contrário, este enriquecimento seria representado segundo o MEFG. O diálogo resultante desta modificação pode ser visto na Figura 4.12.

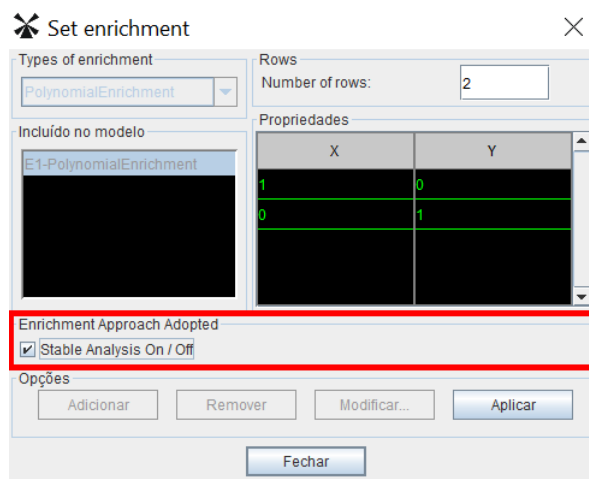


Figura 4.12: Diálogo de criação de um enriquecimento polinomial estável. Na seleção em vermelho, destaca-se a funcionalidade acrescentada no presente trabalho.

Deve-se notar que o preenchimento dos parâmetros do enriquecimento, bem como as funcionalidades dos demais comandos do diálogo, não foram alterados. É relevante ainda observar que, pela maneira como se deu a implementação, o ambiente gráfico permite a existência, para um mesmo modelo, tanto de funções de enriquecimento que sigam a formulação do MEFG quanto daquelas que sigam a formulação do MEFGE. A limitação de atribuição de apenas uma função por nó, no entanto, neste ambiente, foi mantida.

4.5.2 Modelagem de Descontinuidades (Entalhes) - MEFGE

Esta seção versa sobre as modificações necessárias para completar, de certa forma, a generalização do código estruturada, no contexto do sistema INSANE, para o MEFGE. Isso objetivando permitir que a abordagem deste método pudesse ser utilizada também na modelagem de entalhes a partir de um enriquecimento descontínuo. Para tal, foi preciso adaptar a classe que, como se viu na seção 4.4, era responsável até então pelo gerenciamento de descontinuidades desta natureza: *DiscontinuityByGfem*. Além de incorporar as mudanças requeridas para compatibilização com o MEFGE, a classe foi também alterada no intuito de permitir que se utilizasse variações da função de salto (ou seja, não especificamente aquela expressa pela equação 4.3) enquanto enriquecimento e de possibilitar a modelagem de uma descontinuidade que coincidissem com a aresta de um elemento, o que, como visto, não era possível até então.

O primeiro ponto a ser destacado foi a necessidade de se adaptar internamente o método que retorna os multiplicadores da classe *DiscontinuousEnrichment* para que pudesse viabilizar o caso citado de simulação de entalhe coincidente com a aresta de um elemento. Desta forma, o código expresso em seu corpo passou a representar, no presente trabalho, a seguinte formulação:

$$\mathcal{H}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } \bar{y} \leq 0 \\ 0, & \text{se } \bar{y} > 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

onde,

\bar{y} é, de forma análoga à equação 4.3, a posição em relação à descontinuidade assumida, no sistema local de eixos da trinca, em $\bar{y} = 0$.

É interessante observar que independentemente da posição em que os elementos aos quais é atribuída a descontinuidade estejam em relação à esta (esquerda ou direita, considerando o vetor determinado pelos pontos final e inicial, respectivamente, da trinca), a coerência com o enriquecimento de salto foi garantida no caso em que a

trinca é coincidente com a aresta de um elemento a partir das intervenções realizadas no método citado de *DiscontinuousEnrichment*. Para isso, a classe recebe, depois da determinação da posição do ponto em análise em relação à trinca (segundo a lógica de Silva (2016) apresentada na seção 4.4), a informação sobre a posição dos elementos em relação à descontinuidade. Tal informação é transmitida a partir de um *booleano* oriundo de *DiscontinuityByGfem*. Este *booleano* determina, também mediante o sinal do produto vetorial entre o vetor que representa o segmento de trinca e o vetor formado por um ponto pertencente ao elemento em análise e o ponto inicial da descontinuidade, se os elementos associados a determinada descontinuidade estão à direita ou à esquerda desta. Estando à direita, o *booleano* retorna como valor verdadeiro, e a lógica apresentada na equação 4.4 se mantém. Caso contrário, a variável retorna falso, e a equação 4.4 passa a ser considerada em *DiscontinuousEnrichment* da seguinte forma:

$$\text{Se } \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} (x_f - x_i) & (y_f - y_i) \\ (x_p - x_i) & (y_p - y_i) \end{vmatrix} \begin{cases} \leq 0, & H = 1 \\ > 0, & H = 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

com a mesma simbologia apresentada na equação 4.4.

Isso assegura que o enriquecimento consiga simular adequadamente um campo de deslocamentos descontínuo nos elementos pertinentes.

Outro ponto de destaque é a possibilidade que se abriu de utilizar outras funções de salto para incorporação da descontinuidade geométrica. Nas simulações numéricas aqui realizadas, a outra função implementada foi aquela sugerida por Gupta et al. (2013) a fim de garantir um desempenho adequado para a abordagem estável, para o nó \mathbf{x}_j , de coordenadas (x_j, y_j) :

$$\mathcal{H}_L^j(x, y) = \left\{ \mathcal{H}, \mathcal{H} \frac{(x - x_j)}{h_j}, \mathcal{H} \frac{(y - y_j)}{h_j} \right\} \quad (4.7)$$

onde,

\mathcal{H} é definido pela equação 4.5;

h_j é o fator de escala determinado a partir do tamanho característico do maior elemento que concorre no nó \mathbf{x}_j .

O diagrama UML da classe *LinearDiscontinuousEnrichment*, implementada neste trabalho para representar a função da equação 4.7, pode ser encontrado na Figura 4.13. Lógica análoga à de Silva (2016) para a *DiscontinuousEnrichment* foi utilizada na investigação do valor dos multiplicadores do enriquecimento (Figura 4.9). Foi mantida também, da mesma forma, a coerência com a função de salto neste caso independentemente da posição dos elementos em relação à descontinuidade na situação em que a trinca coincide com a aresta de um elemento, por meio do *booleano* citado.

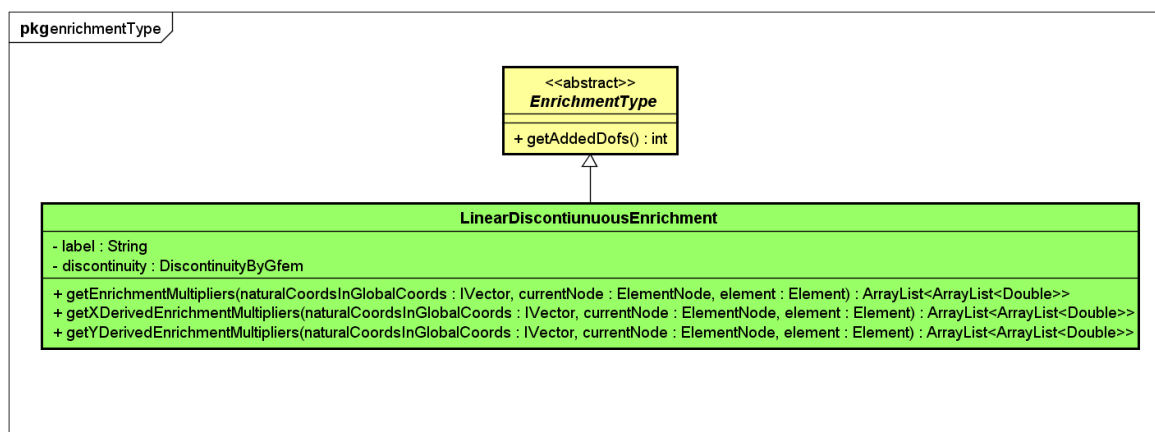


Figura 4.13: Diagrama UML de *LinearDiscontinuousEnrichment*.

A incorporação da função simulada por *LinearDiscontinuousEnrichment*, bem como das versões estáveis desta e de *DiscontinuousEnrichment*, enquanto enriquecimentos associados às descontinuidades, que por sua vez são gerenciadas, como mencionado, por *DiscontinuityByGfem*, só foi possível graças às intervenções realizadas nesta classe. Para tal, um objeto da classe *EnrichmentType* passou a ser variável desta, de modo a possibilitar que a função de enriquecimento responsável pela incorporação da descontinuidade geométrica pudesse vir de outras origens que

não apenas *DiscontinuousEnrichment*. O próximo passo foi criar um novo construtor para a classe, que recebesse como atributo não apenas os pontos inicial e final da descontinuidade, um objeto do tipo *String* e um objeto do tipo *Model*, mas também mais dois objetos do tipo *String* para identificação respectivamente da abordagem associada ao enriquecimento (“*Standard*” ou “*Stable*”) e do tipo de função de Heaviside utilizada (“*Standard*” no caso da formulação da equação 4.5 e “*Linear*” no caso da formulação da equação 4.7). A partir destes objetos, de forma semelhante ao que já ocorria, o construtor atribui por sua vez um objeto do tipo *DiscontinuityByGfem* a *LinearDiscontinuousEnrichment* ou a *DiscontinuousEnrichment*, com base no *String* passado como parâmetro. Caso a abordagem seja estável, esse enriquecimento ao qual é associado o objeto *DiscontinuityByGfem* é passado como atributo a um novo enriquecimento do tipo *StableEnrichmentType*. Na sequência, como antes deste trabalho, o método *buildNotch* é deflagrado. O diagrama UML da classe *DiscontinuityByGfem* com as variáveis e métodos acrescentados pode ser visto na Figura 4.14.

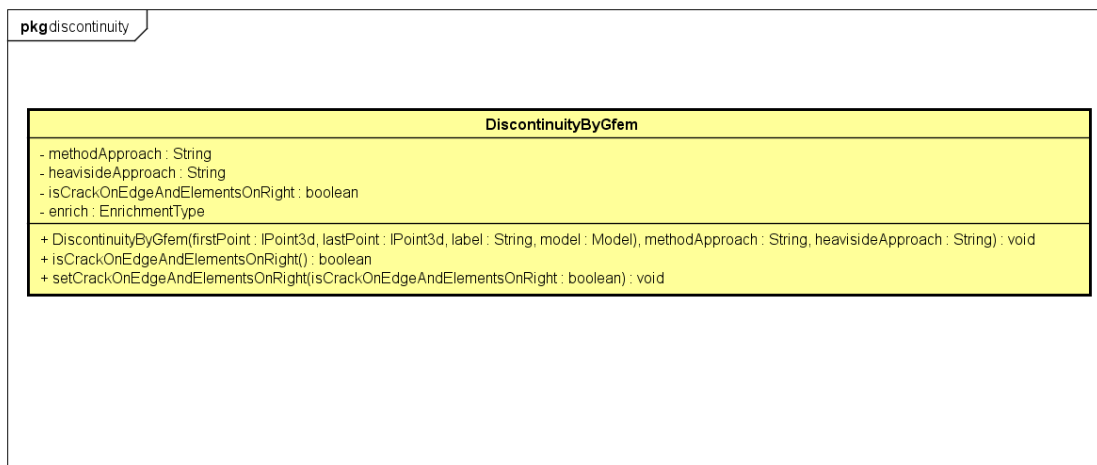


Figura 4.14: Diagrama UML de *DiscontinuityByGfem*, com os métodos e variáveis acrescentados neste trabalho.

A estrutura do método citado não foi essencialmente alterada. Particularmente, as modificações se deram apenas no sentido de acrescentar o caso que até então não

era previsto: o entalhe coincidente com a aresta do elemento. Para tal, foi desenvolvido um novo método no âmbito de *ComputationalGeometry* a fim de verificar se um segmento era parte de outro (no caso, a trinca pode ser parte da aresta ou uma aresta pode ser parte da trinca). Este método passou a ser chamado em *buildNotch*, a fim de adicionar, nessa situação, os elementos finitos pertinentes pesquisados com base nos pontos final e inicial do entalhe à lista de elementos associados à descontinuidade. A partir disso, a lógica anterior se mantém. A intervenção final em *DiscontinuityByGfem* se deu no método *enrichingNodes*, que anteriormente estava associado apenas a um enriquecimento do tipo *DiscontinuousEnrichment* e passou, depois deste trabalho, a se relacionar, na verdade, com a variável genérica oriunda de *EnrichmentType*. Pode-se dizer, portanto, que, apesar das intervenções realizadas, a estrutura de *DiscontinuityByGfem* se manteve, em essência, praticamente a mesma.

Por fim, as modificações necessárias para compatibilização com o novo construtor criado para a classe citada em *PersistenceAsXml* foram realizadas. Passou-se então, de forma semelhante ao que aconteceu na primeira etapa da generalização, à disponibilização dos recursos implementados a partir do pré-processador gráfico do INSANE. A lógica adotada foi análoga àquela já apresentada na seção anterior. A intervenção desta vez se deu, no entanto, no diálogo de criação de descontinuidades (Figura 4.10). Foram disponibilizadas, além dos recursos que já existiam, duas caixas de seleção (Figura 4.15) para que o usuário possa eleger a abordagem que pretende utilizar para as funções de Heaviside. A caixa relativa a “*Stable Analysis*” funciona como aquela apresentada na Figura 4.12. A caixa de seleção associada a “*Linear Heaviside*”, por sua vez, determina qual a modalidade de enriquecimento de Heaviside será utilizada para construção da função enriquecedora, independentemente da abordagem adotada. Caso seja selecionada, a descontinuidade será simulada a partir da equação 4.7. Caso contrário, a partir da equação 4.5.

Assim como acontecia anteriormente, o programa continua a se encarregar de

determinar os elementos que possuem uma descontinuidade associada a eles e de definir e enriquecer os nós necessários para bem simular o salto no campo de deslocamentos. Da mesma forma, seguiu-se sem considerar a existência de forças de coesão nos planos do entalhe.

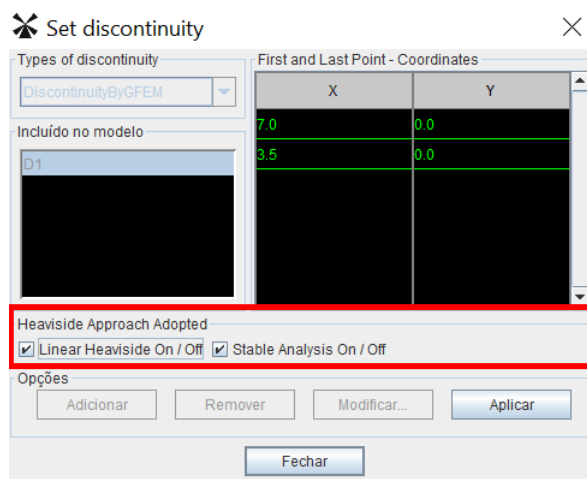


Figura 4.15: Diálogo de criação de descontinuidades incorporando a possibilidade de se empregar a abordagem estável e a função de Heaviside linearizada. Na seleção em vermelho, destacam-se as funcionalidades acrescentadas no presente trabalho.

Capítulo 5

EXEMPLOS NUMÉRICOS

Após o exposto no capítulo anterior, este capítulo almeja abordar algumas simulações numéricas que ilustram e validam a generalização da implementação do MEFGE em problemas bidimensionais no sistema INSANE. Para que tal meta possa ser atingida, são simulados três tipos de problemas, visando empregar as distintas classes de enriquecimento já existentes na biblioteca do INSANE para o MEFGE segundo a abordagem estável. Os problemas analisados são utilizados como ponto de partida para comparar o desempenho do MEFGE e do MEFGE, particularmente em relação aos temas abordados nas seções 3.3 e 3.4. Estes problemas, bem como os objetivos que se buscavam com eles, são listados nos itens que se seguem:

- *Problema da seção 5.1:* Cisalhamento de uma Chapa - este exemplo se destina à avaliação do enriquecimento polinomial. Para isso, uma chapa quadrada em cisalhamento é analisada a partir de combinações de enriquecimentos com ordens polinomiais variadas em relação à aproximação da solução e às taxas de crescimento do número de condicionamento escalonado;
- *Problema da seção 5.2.1:* exemplo I de chapa com trinca em modo I de abertura - neste exemplo, é feita a análise de uma chapa com trinca inicial submetida a esforço de tração. O objetivo neste caso é avaliar o comportamento dos métodos na presença da função de enriquecimento de singularidade já

citada previamente neste trabalho (aquela relativa à classe *CrackEnrichment-Mode1*), além de investigar a questão do desempenho do MEFG e do MEFGE na presença dos elementos de mistura. Isso é feito a partir da determinação da componente de tensão em torno da região de singularidade nas diferentes condições avaliadas;

- *Problema da seção 5.2.2*: exemplo II de chapa com trinca em modo I de abertura - almejou-se neste exemplo de uma chapa nas mesmas condições descritas no item anterior, mas com geometria diversa, avaliar o comportamento de funções de enriquecimento de singularidade combinadas às funções de salto (equações 4.5 e 4.7), segundo a abordagem dos métodos em estudo. Para isso, malhas aninhadas são utilizadas para análise da aproximação da solução e das taxas de crescimento do número de condicionamento.

5.1 Cisalhamento de uma Chapa

O problema aqui estudado foi proposto em Babuška e Szabó (1982) e avaliado segundo o MEF hierárquico e o MEFG, respectivamente, em Duarte (1991) e Barros (2002). Trata-se de uma chapa quadrada em estado plano de deformação cuja geometria pode ser vista na Figura 5.1. As condições de contorno às quais a chapa está sujeita são as seguintes:

- deslocamento vertical $u_y = 0$ ao longo dos lados FG e EC ;
- deslocamento horizontal $u_x = -1mm$ ao longo do lado FG ;
- deslocamento horizontal $u_x = 1mm$ ao longo do lado EC ;

De tal forma que a chapa encontra-se solicitada por cisalhamento. A antimetria do problema permite que apenas o quadrante destacado na Figura 5.1 seja considerado. O valor adotado para o módulo de elasticidade E é de $1 N/mm^2$ e o coeficiente de Poisson ν aqui considerado assume valor igual a 0,3. A solução de referência em

termos de energia de deformação para o quadrante em questão foi estimada por Babuška e Szabó (1982) como $U(\mathbf{u}) = 0,130680N \times mm$.

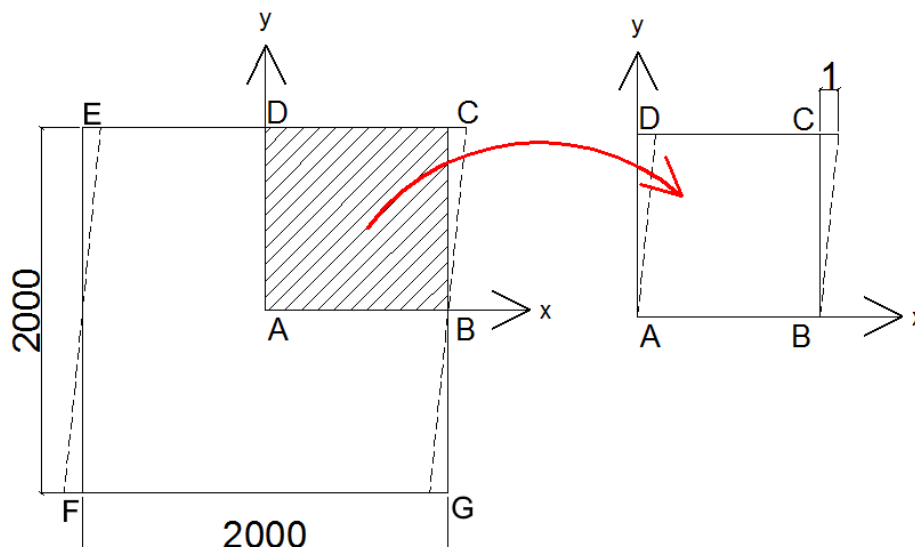


Figura 5.1: Representação da chapa quadrada em cisalhamento, bem como do quadrante considerado para as análises. Dimensões em *mm*.

Como visto, com a modelagem deste problema objetivava-se investigar o desempenho dos métodos em estudo na utilização de enriquecimento polinomial. Isto foi feito a partir da resolução do problema mediante refinamento h , com as malhas aninhadas dispostas na Figura 5.2, na qual são expostas também as condições de contorno relativas às restrições de deslocamentos impostas no sistema INSANE. Observa-se que o deslocamento $u_x = 1mm$ foi também imposto ao longo da borda superior da chapa. Deve-se notar ainda que, nas análises empregando enriquecimento, todos os nós do interior do domínio são igualmente enriquecidos. Por sua vez, no contorno, o enriquecimento é conduzido de tal forma que se garanta, não apenas a aproximação almejada, como também se verifique exatamente, nos nós e nas arestas dos elementos, as restrições impostas. Com isso, buscou-se avaliar, para os diferentes enriquecimentos utilizados, as taxas de crescimento do número de condicionamento e a aproximação da solução, esta mediante o cálculo da norma energia do erro relativa $\|\mathbf{e}\|^{rel}$, que pode ser calculada, graças à propriedade de ortogonalidade de Galerkin,

para o presente problema, como:

$$\|\mathbf{e}\|^{rel} = \sqrt{\frac{U(\tilde{\mathbf{u}}) - U(\mathbf{u})}{U(\mathbf{u})}} \quad (5.1)$$

onde,

$U(\mathbf{u})$ é a energia de deformação considerada como de referência neste problema e estimada por Babuška e Szabó (1982);

$U(\tilde{\mathbf{u}})$ é a energia de deformação calculada a partir da solução $\tilde{\mathbf{u}}$.

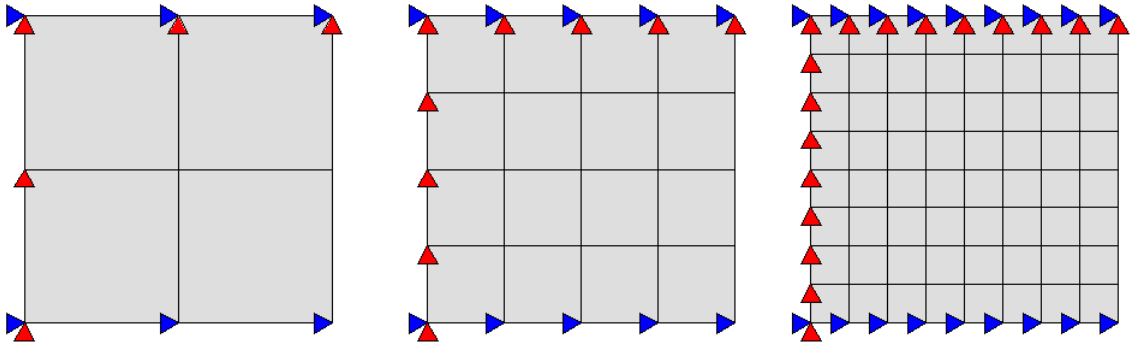


Figura 5.2: Malhas utilizadas nas análises da chapa quadrada em cisalhamento, associadas às simulações denominadas como 1, 2 e 3, respectivamente.

A fim de analisar apropriadamente os parâmetros citados, as malhas da Figura 5.2 foram simuladas:

- segundo a forma tradicional do MEF com os elementos Q4 (MEF Q4), Q8 (MEF Q8) e Q12 (MEF Q12), correspondentes, respectivamente, aos elementos quadriláteros de 4, 8 e 12 nós;
- segundo a abordagem convencional do MEFG, utilizando como enriquecimento, sobre uma PU composta por elementos Q4, as funções $\{1 \ x \ y\}$ (MEFG PU0 - p1), $\{1 \ x \ y \ x^2 \ y^2\}$ (MEFG PU0 - p2), $\{1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^3 \ y^3\}$ (MEFG PU0 - p3) e $\{1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^3 \ x^2y \ xy^2 \ y^3 \ x^4 \ y^4\}$ (MEFG PU0 - p4);

- segundo a abordagem do MEF_G, empregando como enriquecimento sobre a mesma PU as funções descritas no item anterior, sem os termos que já constam na PU $(x, y \text{ e } xy)$: $\{1 \ x^2 \ y^2\}$ (MEF_G PU0 - p2 sem lin), $\{1 \ x^2 \ y^2 \ x^3 \ y^3\}$ (MEF_G PU0 - p3 sem lin) e $\{1 \ x^2 \ y^2 \ x^3 \ x^2y \ xy^2 \ y^3 \ x^4 \ y^4\}$ (MEF_G PU0 - p4 sem lin);
- conforme a forma tradicional do MEF_{GE}, empregando como enriquecimento original sobre a mesma PU as funções descritas no item precedente: $\{1 \ x^2 \ y^2\}$ (MEF_{GE} PU0 - p2), $\{1 \ x^2 \ y^2 \ x^3 \ y^3\}$ (MEF_{GE} PU0 - p3) e $\{1 \ x^2 \ y^2 \ x^3 \ x^2y \ xy^2 \ y^3 \ x^4 \ y^4\}$ (MEF_{GE} PU0 - p4).

Os espaços de aproximação alcançados pelas funções de enriquecimento apresentadas a partir de sua multiplicação pela PU empregada são expostos no apêndice B. Deve-se observar que as funções enriquecedoras foram representadas do modo disposto nos itens precedentes por mera simplificação. Como visto, no INSANE, é realizada a transformação dos enriquecimentos expressa a partir da equação 2.5. Faz-se notar ainda que todas as malhas foram simuladas utilizando 6 x 6 pontos de Gauss para a integração numérica.

Os resultados para a energia de deformação, bem como sua norma energia do erro relativa para cada uma das malhas e para cada uma das simulações citadas, podem ser vistos na Tabela 5.1. O gráfico relacionado ao erro da solução pode ser visualizado, por sua vez, na Figura 5.3. Convém recordar a observação de Barros (2002), o qual destaca que, uma vez que a estrutura do problema é submetida a deslocamentos impostos, à medida que a aproximação é melhorada, tornando-se mais flexível, as tensões resultantes são reduzidas. Isso faz com que ocorra uma diminuição da energia de deformação interna, como pode ser percebido nas diferentes simulações apresentadas na Tabela 5.1. Esta é também a razão da inversão, na subtração da equação 5.1, dos termos $U(\tilde{\mathbf{u}})$ e $U(\mathbf{u})$.

Tabela 5.1: Energia de deformação ($U(\tilde{\mathbf{u}})$) e norma energia do erro relativa ($\|\mathbf{e}\|^{rel}$) obtidas para as malhas 1, 2 e 3 da Figura 5.2, conforme as diversas simulações realizadas.

Tipo de Simulação	$U(\tilde{\mathbf{u}})$			$\ \mathbf{e}\ ^{rel}$		
	1	2	3	1	2	3
MEF Q4	0,1411	0,1342	0,1318	28,23%	16,34%	9,44%
MEF Q8	0,1328	0,1314	0,1309	12,81%	7,39%	4,39%
MEF Q12	0,1325	0,1313	0,1309	11,73%	6,85%	4,07%
MEFG PU0 - p1	0,1328	0,1314	0,1309	12,81%	7,39%	4,39%
MEFG PU0 - p2	0,1325	0,1313	0,1309	11,73%	6,85%	4,07%
MEFG PU0 - p3	0,1316	0,1310	0,1308	8,53%	5,04%	3,01%
MEFG PU0 - p4	0,1312	0,1309	0,1307	6,40%	3,81%	2,27%
MEFG PU0 - p2 sem lin	0,1347	0,1318	0,1310	17,51%	9,26%	5,29%
MEFG PU0 - p3 sem lin	0,1332	0,1314	0,1309	13,88%	7,67%	4,44%
MEFG PU0 - p4 sem lin	0,1320	0,1311	0,1308	9,89%	5,60%	3,30%
MEFGE PU0 - p2	0,1340	0,1317	0,1310	15,97%	8,93%	5,26%
MEFGE PU0 - p3	0,1334	0,1316	0,1310	14,52%	8,30%	4,91%
MEFGE PU0 - p4	0,1319	0,1311	0,1308	9,66%	5,73%	3,44%

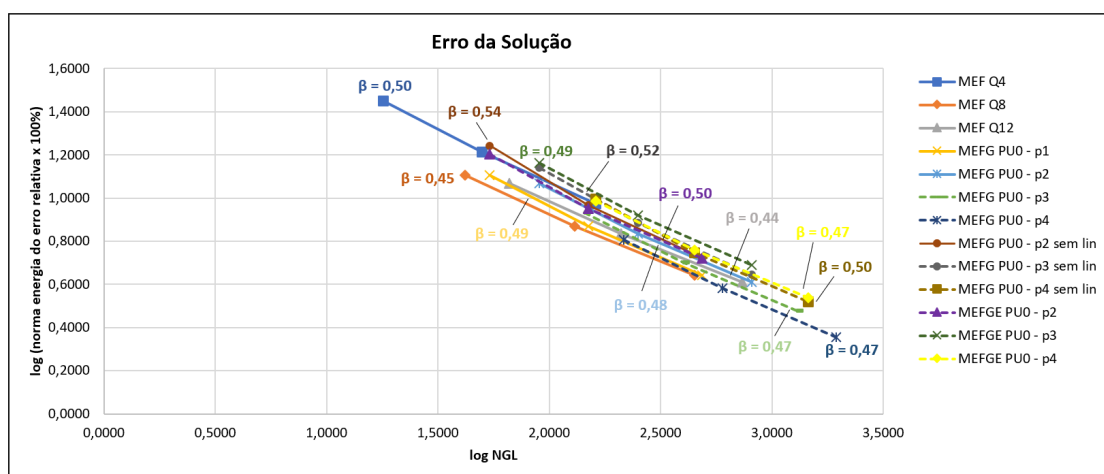


Figura 5.3: Análise de convergência da solução, de acordo com as simulações realizadas, para o problema em análise.

Pode-se observar que o comportamento das diferentes abordagens é semelhante em relação ao erro da solução. De fato, como havia sido apontado por Duarte (1991), a taxa de convergência da versão h é independente da ordem polinomial da aproximação, visto que a solução do problema possui um comportamento singular nos vértices F e C. É possível notar ainda que o menor erro é verificado na simulação MEFGE PU0 - p4, o que também era esperado, visto que a utilização do enriquecimento discriminado para esta abordagem multiplicado pela aproximação da PU produz a aproximação de ordem polinomial mais elevada (ver apêndice B). A simulação MEFGE PU0 - p4 sem lin, embora produza o mesmo espaço de aproximação, não possui o mesmo desempenho. Tal fato pode ser atribuído à ausência dos termos x , y e xy na função enriquecedora, o que afetaria negativamente o *ranking* da matriz de rigidez do problema, penalizando a aproximação (Oliveira e Barros, 2016). Por fim, deve-se apontar que, para o problema em questão, o desempenho do MEFGE em relação ao erro da solução é muito semelhante ao verificado por seu equivalente, em termos da função enriquecedora L_{ji} , na forma tradicional do MEFGE (MEFGE PU0 - pn sem lin, onde n é 2, 3 ou 4). Com efeito, apesar dessa similaridade, a precisão da versão estável só é superior, neste caso, quando se utiliza o enriquecimento incompleto de grau 2. Deve-se observar que essa incompletude, no caso do MEFGE, se deve às particularidades existentes na construção de seu enriquecimento de fato (\tilde{L}_{ji}), uma vez que a utilização dos termos suprimidos introduziram, por ocasião do cálculo do interpolante, multiplicadores de valor nulo que não condizem com a realidade.

Tão importante quanto avaliar o erro da aproximação, quando se contrapõem MEFGE e MEFGE, é analisar os números de condicionamento verificados para as matrizes de rigidez associadas a cada abordagem. Os resultados para este parâmetro, bem como o número de graus de liberdade para cada uma das malhas e para cada uma das simulações aqui estudadas, podem ser vistos na Tabela 5.2. O gráfico relacionado ao crescimento do número de condicionamento escalonado, por sua vez,

pode ser visualizado na Figura 5.4.

Tabela 5.2: Número de Condicionamento Escalonado (NC) e número de graus de liberdade (NGL) obtidos para as malhas 1, 2 e 3 da Figura 5.2, conforme as diversas simulações realizadas.

Tipo de Simulação	NC			NGL		
	1	2	3	1	2	3
MEF Q4	6,93	29,47	121,00	18	50	162
MEF Q8	54,61	237,15	967,25	42	130	450
MEF Q12	160,43	649,33	2600,85	66	210	738
MEFG PU0 - p1	8,06E+16	8,23E+16	7,96E+16	54	150	486
MEFG PU0 - p2	1,49E+18	4,93E+17	2,47E+17	90	250	810
MEFG PU0 - p3	6,01E+17	4,34E+17	5,87E+17	144	400	1296
MEFG PU0 - p4	3,67E+18	8,20E+17	5,62E+19	216	600	1944
MEFG PU0 - p2 sem lin	13,30	50,17	200,11	54	150	486
MEFG PU0 - p3 sem lin	262,57	228,05	230,62	90	250	810
MEFG PU0 - p4 sem lin	1,29E+17	1,00E+17	6,76E+17	162	450	1458
MEFGE PU0 - p2	13,92	50,53	200,44	54	150	486
MEFGE PU0 - p3	1220,74	1197,54	1236,99	90	250	810
MEFGE PU0 - p4	3,73E+17	4,18E+17	4,78E+17	162	450	1458

Pode-se observar que a versão estável entrega o que promete no que concerne ao número de condicionamento quando são utilizados os enriquecimentos de segundo e terceiro graus, visto que os valores encontrados são próximos aos verificados para o MEF e, quando um pouco acima (MEFGE PU0 - p3), as taxas de crescimento são praticamente nulas (ou seja, o número de condicionamento é praticamente invariável mesmo com o refinamento da malha). Isso seria notável, não fosse o fato de que o mesmo efeito é conseguido por seu equivalente no MEFG, pela mera supressão dos

termos x, y e xy . Desta forma, não se pode atribuir este bom desempenho à formulação estável de fato, embora essa similaridade entre os comportamentos do MEFGE e do MEFG sem lin fosse de certa forma esperada, uma vez que a proposta da versão estável, a partir da retirada do interpolante da função de enriquecimento original, pode ser entendida, no caso polinomial aqui tratado, como um efeito de supressão dos termos lineares no MEFG. Além disso, quando se passou ao enriquecimento de grau 4, o valor absoluto do número de condicionamento cresceu consideravelmente para as três malhas em estudo, sugerindo que houve a criação de modos espúrios quando este tipo de enriquecimento foi utilizado. Isso também ocorreu com o MEFG PU0 - p4 sem lin. Resultados similares foram encontrados em Li (2014).

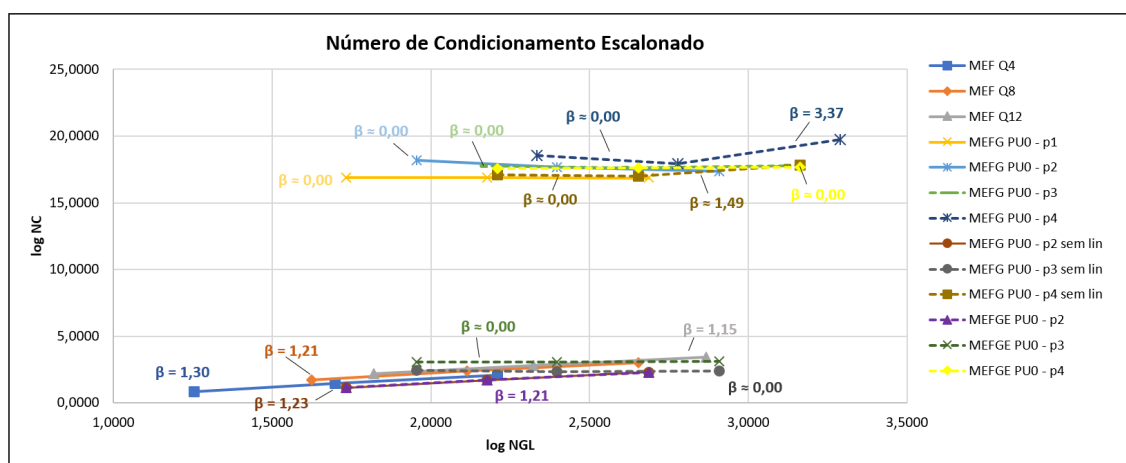


Figura 5.4: Crescimento dos números de condicionamento das respectivas matrizes de rigidez escalonadas, conforme as simulações realizadas, para o problema em análise.

É possível notar ainda que, sem a supressão dos termos x, y e xy , a forma convencional do MEFG apresenta de fato valores elevados para o número de condicionamento (o que era esperado), embora estes valores pareçam também ter atingido certa estabilidade, visto que suas taxas de crescimento estão próximas de zero. Isto não é expressivo, uma vez que, com tal ordem de grandeza dos números de condicionamento encontrados, os erros podem ser tão significativos que inviabilizam qualquer conclusão sólida sobre as taxas de crescimento se manterem constantes

nesse tipo de situação. A exceção ocorre na simulação MEFG PU0 - p4, em que há um salto mais expressivo da segunda para a terceira malha. Comportamento similar para enriquecimentos de ordens mais elevadas também foi apontado em Li (2014). Deve-se observar que, na Tabela 5.2, são registradas algumas quedas no número de condicionamento de uma malha para outra. Levando em conta que a ordem de grandeza se manteve, isso foi atribuído a erro numérico, e foi considerado que o NC não variou de uma malha para outra nesses casos.

Uma última observação é pertinente sobre o problema em análise. Para verificar adequadamente as condições de contorno nas abordagens do MEFG e do MEFGE, os graus de liberdade adicionais associados aos termos $u_x \cdot x^n$ e $u_y \cdot y^n$, com $n = 1, 2, 3, \dots$, tiveram de ser restringidos, respectivamente, ao longo das arestas AB e AD. Ao longo da aresta DC, por sua vez, todos os graus de liberdade adicionais introduzidos pelos enriquecimentos foram restritos.

5.2 Chapas com Trinca em Modo I de Abertura

5.2.1 Exemplo I

O problema tratado nesta seção pode ser encontrado em Alves (2012). Trata-se de uma chapa submetida a um estado plano de tensão, com uma trinca em modo I de abertura, a partir de um carregamento de tração. Como se sabe, a presença da trinca produz um campo de tensões de grande singularidade. A geometria e o carregamento a que chapa foi submetida podem ser vistos na Figura 5.5.

Os valores assumidos para os parâmetros de carregamento e material são os mesmos adotados por Alves (2012), em unidades consistentes:

- Módulo de Elasticidade $E = 1,0$;
- Coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$;
- Tensão $\sigma = 1,0$, equivalente a uma força uniformemente distribuída de $f_y = 0,1$ atuando na parte superior da chapa, com u_y restrito ao longo da borda

inferior desta e u_x restrito no nó da extrema esquerda da mesma borda.

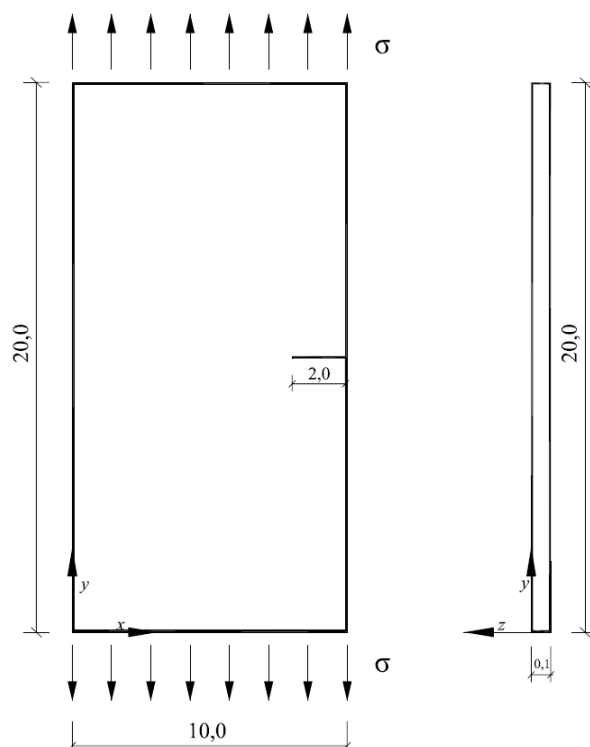


Figura 5.5: Geometria e carregamento da chapa submetida a esforço de tração (Alves, 2012).

A solução de referência para o problema em estudo foi obtida numericamente também em Alves (2012) a partir de uma malha com 12.087 p -elementos modelada no software *ANSYS*[®]. O valor obtido para a energia de deformação, nesse contexto, para todo o domínio em análise foi de 10,98326746.

Ainda no trabalho de Alves (2012), utiliza-se uma malha bem menos refinada, com 36 elementos do tipo Q4 e 7 x 7 pontos de integração nestes elementos, construída a partir do sistema INSANE, a fim de demonstrar que a solução de referência pode ser alcançada com um grau de precisão satisfatório com muito menos elementos a partir do emprego de um enriquecimento adequado na abordagem do MEF_G. Este enriquecimento é aquele representado pela classe *CrackEnrichmentMode1*, que descreve a solução do campo de deslocamentos nas proximidades de uma trinca em modo I de abertura (Szabó e Babuška, 1991):

$$u_{xi}^{(1)} = \frac{1}{2G} r^{\lambda_i^{(1)}} [(k - Q_i^{(1)}(\lambda_i^{(1)} + 1)) \cos \lambda_i^{(1)} \theta - \lambda_i^{(1)} \cos(\lambda_i^{(1)} - 2)\theta] \quad (5.2)$$

$$u_{yi}^{(1)} = \frac{1}{2G} r^{\lambda_i^{(1)}} [(k + Q_i^{(1)}(\lambda_i^{(1)} + 1)) \sin \lambda_i^{(1)} \theta + \lambda_i^{(1)} \sin(\lambda_i^{(1)} - 2)\theta] \quad (5.3)$$

onde,

G é o Módulo de Elasticidade Transversal;

$Q = 1/3$, na situação em análise;

$\lambda = 0,5$, no problema estudado;

$k = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ em Estado Plano de Tensão;

θ e r variam conforme a posição em que as funções são calculadas, tendo como referência o sistema de eixos local na ponta de uma dada trinca, representado na Figura 5.6.

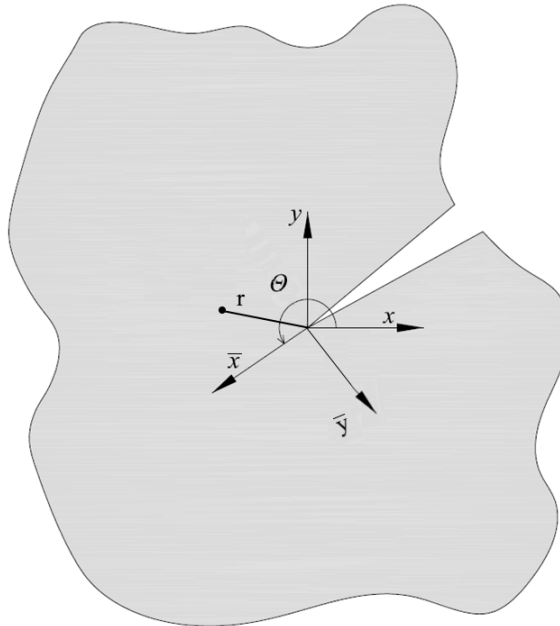


Figura 5.6: Eixo local de elemento de trinca. Adaptado de Alves (2012).

A mesma lógica será seguida neste trabalho para comparação dos desempenhos do MEFGE e MEFGE. Para isso, foi simulado o caso em que a ponta da trinca

não coincidia com um vértice, a partir das estratégias de enriquecimento apresentadas na Figura 5.7. Além de avaliar a precisão da solução em termos energéticos, como visto, neste exemplo objetiva-se investigar também a componente de tensão na região de singularidade. O estudo desta componente visa a servir como um indicativo do desempenho dos métodos na presença de elementos de mistura, visto que o problema em análise apresenta apenas parte de seu domínio enriquecido, o que ocasiona o surgimento deste tipo de elemento. Considerando que este parâmetro é calculado justamente no entorno da singularidade, ou seja, no domínio local enriquecido, considerou-se que ele constituiria um indicador satisfatório no presente caso. Deve-se observar que, na primeira das malhas da Figura 5.7, a função enriquecedora não é plenamente reproduzida no elemento que contém a trinca, pois apenas duas das quatro PUs do elemento referido estão sendo enriquecidas.

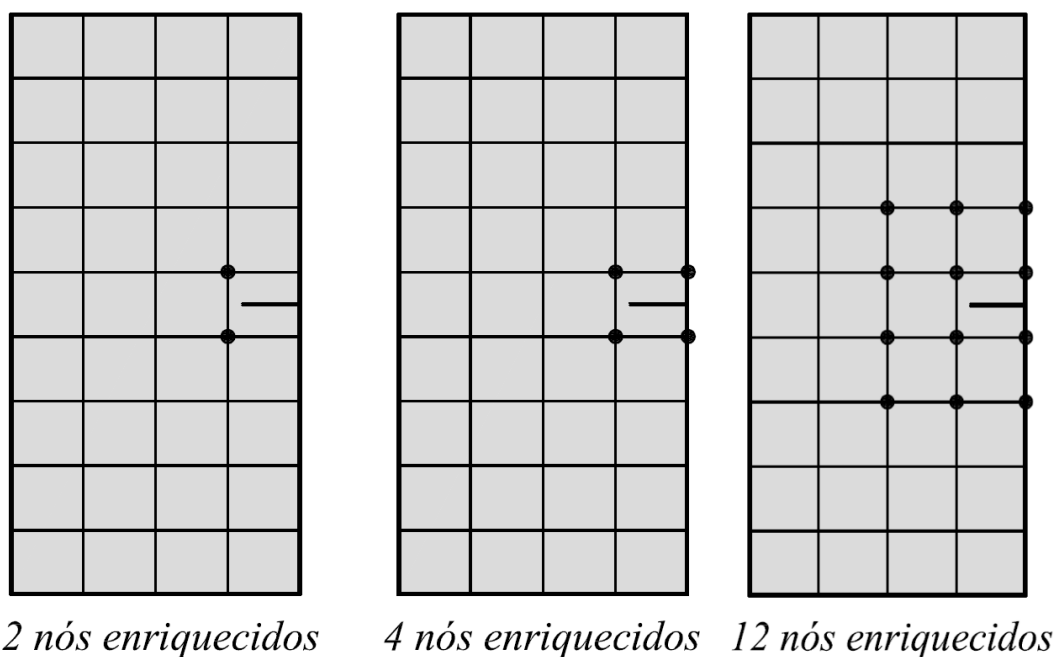


Figura 5.7: Nós enriquecidos com função de singularidade. Adaptado de Alves (2012).

Os resultados para a energia de deformação $U(\tilde{\mathbf{u}})$ e número de condicionamento escalonado NC para as diferentes simulações realizadas, bem como o número de graus de liberdade associado aos modelos, podem ser encontrados na Tabela 5.3.

Deve-se destacar que a norma energia do erro relativa neste caso foi calculada a partir de sua forma tradicional, a saber:

$$\|\mathbf{e}\|^{rel} = \sqrt{\frac{U(\mathbf{u}) - U(\tilde{\mathbf{u}})}{U(\mathbf{u})}} \quad (5.4)$$

com os mesmos significados para a simbologia apresentados na equação 5.1, com $U(\mathbf{u})$ representando, nesse caso, o valor de energia de deformação estimado como referência por Alves (2012).

Isso se justifica por este se tratar de um problema em que as forças foram impostas e, nesse caso, à medida que a solução se torna mais flexível, os deslocamentos aumentam, aumentando também a energia de deformação calculada no domínio. Isso pode ser constatado na Tabela 5.3. A Figura 5.8, por sua vez, apresenta o gráfico que representa a componente de tensão nas proximidades da singularidade para as diferentes análises efetuadas. A solução de referência para este parâmetro, como mencionado, foi fornecida por Alves (2012).

Tabela 5.3: Comparativo de energia de deformação ($U(\tilde{\mathbf{u}})$), bem como da norma energia do erro relativa ($\|\mathbf{e}\|^{rel}$) e do número de graus de liberdade (NGL) obtidos para as diversas simulações realizadas.

Tipo de Simulação	NGL	$U(\tilde{\mathbf{u}})$	$\ \mathbf{e}\ ^{rel}$	NC
Resultado de referência	-	10,9833	-	-
MEFG - 2 nós	104	10,0936	28,46%	1676
MEFG - 4 nós	108	10,7748	13,78%	2119
MEFG - 12 nós	124	10,8736	9,99%	2385
MEFGE - 2 nós	104	10,2164	26,42%	1949
MEFGE - 4 nós	108	10,9210	7,53%	2671
MEFGE - 12 nós	124	10,9599	4,61%	2746

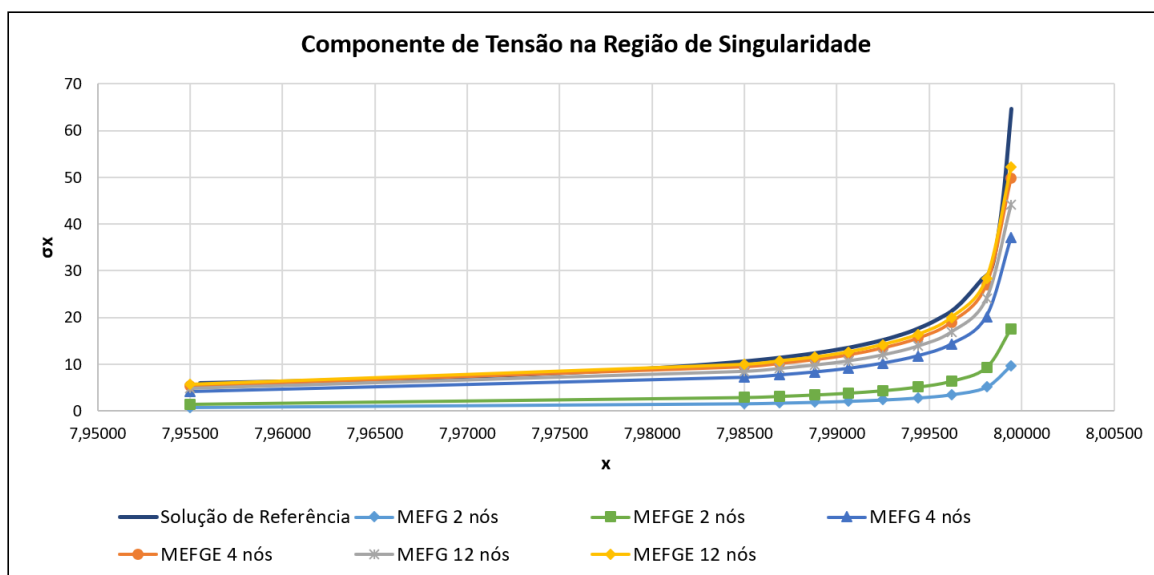


Figura 5.8: Componente de tensão na região de singularidade.

Pode-se observar que, para o problema em análise, a versão estável é sempre mais precisa que seu equivalente na forma tradicional do MEFGE, chegando a um resultado consideravelmente próximo da energia de referência mesmo com apenas 124 graus de liberdade. Além disso, é notável constatar pelo gráfico da Figura 5.8 que mesmo a solução fornecida a partir do MEFGE para a componente de tensão com apenas 4 nós enriquecidos está mais próxima da referência do que aquela obtida a partir do MEFGE com 12 nós enriquecidos. De fato, esse comportamento pode ser atribuído a um desempenho superior da abordagem estável na presença de elementos de mistura, já que, como visto, para o MEFGE o erro verificado nesses elementos pode ser superior ao existente nos demais elementos da malha (Chessa, Wang e Belytschko, 2003). É o que parece indicar o parâmetro estudado, calculado nas imediações da singularidade. Em relação aos números de condicionamento apresentados na Tabela 5.3, pouco ou nada pode ser dito. As simulações realizadas nesta seção não se utilizaram de refinamento h para avaliação das taxas de crescimento destes números, já que este não era seu objetivo principal. Pode-se constatar apenas que os valores verificados para as duas abordagens estão próximos e são valores relativamente baixos. A fim de realizar uma avaliação mais profunda desta questão numa situação de

enriquecimento singular/funções de salto, o problema da seção 5.2.2 foi proposto.

5.2.2 Exemplo II

O problema aqui apresentado pode ser considerado uma variação do problema avaliado na seção anterior. Como se desejava efetuar análises empregando também as funções de salto (equações 4.5 e 4.7), associadas enquanto enriquecimentos às funções das equações 5.2 e 5.3, buscou-se uma situação em que a trinca tivesse um comprimento mais significativo em relação à largura da chapa. Deste modo, o problema modelado consiste em uma chapa, de espessura unitária, submetida a estado plano de tensão, com carregamento de tração também unitário aplicado em sua extremidade superior. A chapa possui ainda, como mencionado, uma trinca em sua estrutura, cuja ponta se localiza em seu centro geométrico. O deslocamento nas direções vertical e horizontal é restringido no nó mais a esquerda da extremidade inferior, enquanto os demais nós da mesma extremidade têm restritos apenas os deslocamentos na direção vertical. Além disso, as características do material empregado (em unidades consistentes) são Módulo de Elasticidade $E = 1,0$ e Coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. A chapa descrita pode ser visualizada na Figura 5.9.

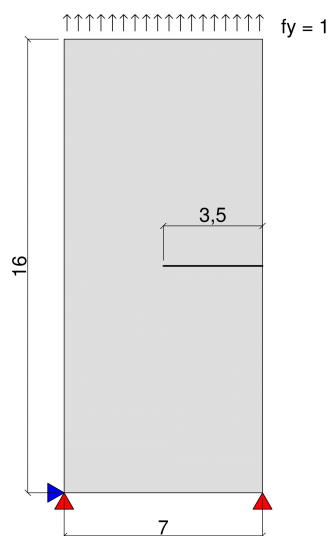


Figura 5.9: Geometria, carregamento e condições de contorno do problema utilizado nas simulações numéricas desta seção (dimensões em unidades consistentes).

A solução de referência nesse caso foi obtida também numericamente a partir da modelagem do problema em questão no software *ANSYS*[®]. Para tal, foi empregado o elemento SOLID183, e, na vizinhança da ponta da trinca, elementos do tipo quarter-point. A partir disso, a malha inicialmente utilizada foi refinada até que se atingisse a convergência. Na malha em que esta se verificou, com 40.930 nós, obteve-se, como referência para a energia de deformação, o valor de $U = 130,74931$.

Como se sabe, as simulações aqui realizadas visam a comparar o MEFGE e o MEFM em relação às taxas de convergência de uma determinada solução, aos números de condicionamento verificados para as matrizes de rigidez escalonadas associadas a cada um dos métodos, e às normas energia do erro relativas, definida de acordo com a equação 5.4.

Para avaliar em particular as taxas de convergência, bem como a taxa de crescimento do número de condicionamento, faz-se necessário trabalhar com malhas aninhadas. Nesse sentido, optou-se pela análise de duas situações distintas: em uma das situações, a trinca atravessa os elementos da malha (caso I, Figura 5.10), enquanto na outra a trinca é coincidente com a(s) aresta(s) do(s) elemento(s) finito(s) (caso II, Figura 5.11).

Cada uma dessas situações, como pode ser visto nas figuras citadas, conta com três malhas aninhadas entre si. Para o primeiro caso (trinca cortando elementos), as malhas posteriores à primeira são geradas a partir da divisão do elemento finito original em 9 outros de mesma dimensão (de forma a garantir que a ponta da trinca permaneça no interior de um elemento), enquanto que, para o segundo caso (trinca coincidente com a aresta), as malhas posteriores são geradas a partir da divisão do elemento original em outros 4 idênticos. Em todos os casos, os elementos finitos empregados foram do tipo Q4, com 12 x 12 pontos de integração nos elementos cortados ou cuja aresta era coincidente com a trinca e 4 x 4 pontos nos demais elementos.

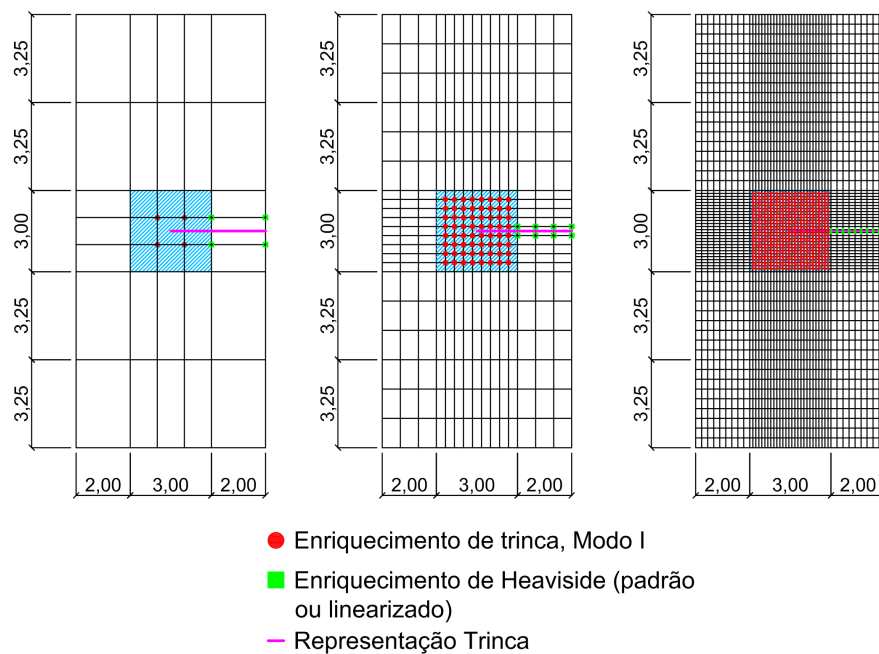


Figura 5.10: Malhas utilizadas na análise do problema apresentado para o caso em que a trinca atravessa os elementos (caso I), bem como estratégia de enriquecimento adotada.

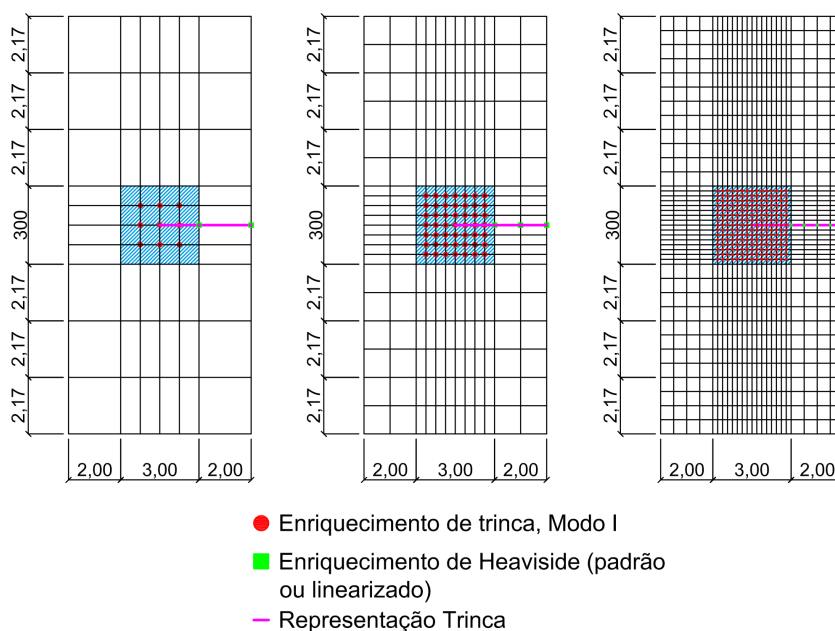


Figura 5.11: Malhas utilizadas na análise do problema apresentado para o caso em que a trinca coincide com as arestas dos elementos (caso II), bem como estratégia de enriquecimento adotada para o MEF.

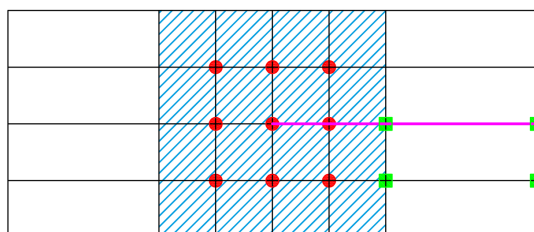
Além disso, para simular de forma eficiente a descontinuidade forte (trinca) existente no problema, foram empregadas combinações de funções de enriquecimento que representassem seu comportamento. Particularmente, tanto na estratégia estável quanto na forma tradicional do MEFGE, se utilizou, como mencionado previamente, uma combinação entre funções que representassem a singularidade (equações 5.2 e 5.3, também aqui denominadas enriquecimento de trinca, modo I) e funções que incorporassem a descontinuidade geométrica. Neste trabalho, essas funções foram representadas por aquelas expressas na equação 4.5 ou na equação 4.7.

As Figuras 5.10 e 5.11 expõem ainda os nós enriquecidos de acordo com as funções de enriquecimento adotadas. Deve-se observar que o enriquecimento singular atua como um enriquecimento geométrico, para a sequência de malhas do refinamento h da solução, em ambos os casos, mantendo sempre a região hachurada nas figuras como região de enriquecimento em todas as malhas para cada situação. Os nós enriquecidos com Heaviside (padrão ou linear), por sua vez, simulam a descontinuidade após o término dos nós enriquecidos pela função de singularidade.

Faz-se notar ainda que, apesar de a Figura 5.10 representar as estratégias de enriquecimento adotadas tanto para as análises via MEFGE quanto para as análises via MEFGE, a Figura 5.11 o faz apenas para a forma padrão do MEFGE. Isso porque, nessa situação, enriquecer apenas a linha da trinca com Heaviside na abordagem estável não é suficiente para produzir uma boa aproximação, como já foi apontado em Gupta et al. (2013). A exigência do cálculo do interpolante para produzir a modificação na função enriquecedora original faz com que tal função tenha que ser calculada nos nós, justamente onde existe a descontinuidade. Portanto, para representá-la corretamente, faz-se necessário enriquecer também ou a linha imediatamente acima da trinca ou imediatamente abaixo. Por coerência com a equação 4.5 aqui apresentada, adotou-se neste trabalho o enriquecimento da linha imediatamente abaixo da trinca. Isso porque, nesta equação, ao longo e acima da(s) aresta(s) coincidente(s) com a trinca, o enriquecimento assume valor unitário, para as malhas analisadas. O

valor nulo ocorre para o domínio abaixo da trinca. Calcular a função de Heaviside linearizada (equação 4.7) nesse caso nos elementos acima da trinca produziria um interpolante igual à função de enriquecimento, o que por sua vez implicaria uma função \tilde{L}_{ji} nula. Isso não ocorre nos elementos abaixo da trinca. Os nós enriquecidos pelo enriquecimento de trinca, modo I, por outro lado, se mantêm os mesmos na abordagem estável. Um detalhe da região enriquecida para o MEFGE nesta situação pode ser visto na Figura 5.12.

Além das estratégias de enriquecimento ilustradas nas Figuras 5.10, 5.11 e 5.12, no caso II foram modeladas também malhas sem o enriquecimento de Heaviside, a partir da duplicação dos nós, para descrever geometricamente a trinca, associadas aos mesmos nós representados na Figura 5.11. Empregou-se, portanto, nessas malhas apenas o enriquecimento de trinca, modo I em ambas as abordagens (MEFG e MEFGE). Tal modelagem se destinou a avaliar a qualidade do enriquecimento de Heaviside na situação citada.



- Enriquecimento de trinca, Modo I
- Enriquecimento de Heaviside (padrão ou linearizado)

Figura 5.12: Detalhe da estratégia de enriquecimento utilizada nas análises empregando o MEFGE no caso II (Malha 1).

5.2.2.1 Caso I: Trinca Atravessa Elementos

Nesta seção, são apresentados e discutidos os resultados para as estratégias de enriquecimento distintas empregadas nas análises envolvendo as malhas da Figura 5.10. As diferentes combinações de enriquecimento utilizadas podem ser divididas

por abordagem: nas simulações que empregaram o MEFGE, houve a combinação do enriquecimento de Heaviside padrão (equação 4.5) com enriquecimento de trinca, Modo I (equações 5.2 e 5.3), denominado Heav MEFGE + Crack1, bem como das funções de Heaviside linearizadas (equação 4.7) com as mesmas funções de singularidade (Heav Linear MEFGE + Crack1). De forma análoga, na estratégia estável, foram combinadas as funções de Heaviside padrão e linearizada com o enriquecimento de trinca, modo I, sob mesma abordagem (Heav MEFGE + SCrack1 e Heav Linear MEFGE + SCrack1, respectivamente). Os resultados para a energia de deformação obtidos para as combinações citadas, bem como o número de graus de liberdade verificado para cada uma das malhas, podem ser visualizados na Tabela 5.4. Os dados relativos ao número de condicionamento para cada uma das matrizes de rigidez escalonadas das respectivas malhas, por sua vez, podem ser observados na Tabela 5.5.

Os resultados apresentados nas Tabelas 5.4 e 5.5 foram avaliados graficamente nas Figuras 5.13 e 5.14, a partir, respectivamente, da plotagem do logaritmo da norma energia do erro relativa (equação 5.4) em porcentagem pelo logaritmo do número de graus de liberdade, e do logaritmo do número de condicionamento também pelo logaritmo do número de graus de liberdade.

Tabela 5.4: Energia de deformação ($U(\tilde{\mathbf{u}})$) e número de graus de liberdade (NGL) obtidos para as malhas 1, 2 e 3 da Figura 5.10, conforme as estratégias de enriquecimento adotadas.

Estratégia de Enriquecimento	$U(\tilde{\mathbf{u}})$			NGL		
	1	2	3	1	2	3
Heav MEFGE + Crack1	115,53	128,65	130,61	112	848	7280
Heav Linear MEFGE + Crack1	117,42	128,98	130,64	128	880	7360
Heav MEFGE + SCrack1	109,85	124,55	128,7791	112	848	7280
Heav Linear MEFGE + SCrack1	125,11	130,38	130,82	128	880	7360

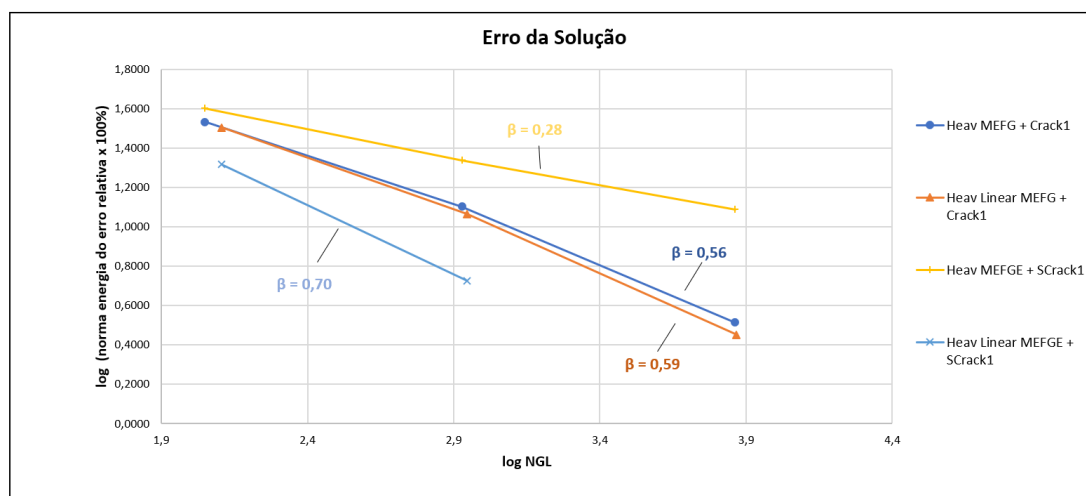


Figura 5.13: Análise de convergência da solução, conforme as estratégias de enriquecimento, para o problema em análise.

Pode-se notar, na figura 5.13, que, em geral, as combinações adotadas atingem taxas ótimas de convergência β - para o problema em questão (bem como para o caso II), tais taxas deveriam se aproximar de 0,5, uma vez que, considerando que a singularidade é bem simulada pelas funções de enriquecimento, as taxas mínimas são regidas por $\frac{1}{2}p$, sendo p o grau polinomial da aproximação (Szabó e Babuška, 1991) - com exceção da combinação Heav MEFGE + SCrack1. O emprego das funções de Heaviside padrão sob abordagem do MEFGE já havia sido contraindicado por Gupta et al. (2013), uma vez que, em tal situação, este enriquecimento não seria capaz de aproximar apropriadamente o erro $u - I_{\omega_j}(u)$, condição fundamental para conseguir um bom desempenho no MEFGE. Além disso, pode-se constatar que, apesar de as diferentes estratégias de enriquecimento apresentarem comportamentos semelhantes, a combinação Heav Linear MEFGE + SCrack1 é a que apresenta, a princípio, o menor erro em relação à solução de referência. Nota-se, inclusive, que, na última malha, a análise que empregou essa combinação ultrapassou tal valor. No presente trabalho, considerou-se que essa superação da solução de referência significou que esta foi atingida, e o que a excedeu seria oriundo de erros numéricos (relativos à integração no elemento, por exemplo). Por isso, apenas os pontos relativos às

análises das malhas 1 e 2 (Figura 5.10) foram representados graficamente para a combinação Heav Linear MEFGE + SCrack1 na Figura 5.13.

Tabela 5.5: Números de Condicionamento (NC) obtidos para as malhas 1, 2 e 3 da Figura 5.10, conforme as estratégias de enriquecimento adotadas.

Estratégia de Enriquecimento	NC		
	1	2	3
Heav MEFG + Crack1	8,52E+03	9,09E+04	8,68E+05
Heav Linear MEFG + Crack1	1,53E+04	1,39E+05	1,31E+06
Heav MEFGE + SCrack1	8,32E+03	8,90E+04	8,62E+05
Heav Linear MEFGE + SCrack1	1,66E+04	1,42E+05	1,32E+06

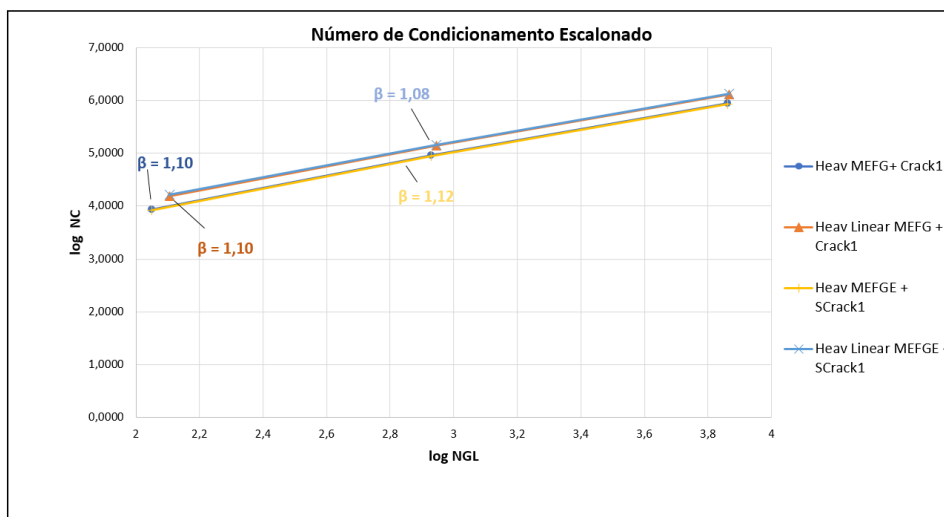


Figura 5.14: Crescimento dos números de condicionamento das respectivas matrizes de rigidez escalonadas, conforme as estratégias de enriquecimento, para o problema em análise.

No que concerne ao número de condicionamento, a figura 5.14 revela que tanto os comportamentos quanto as taxas de crescimento apresentadas pelas combinações distintas estão bastante próximas, enquanto na Tabela 5.5 se pode notar que os valores apresentados pela estratégia de enriquecimento que utiliza as funções de Heaviside padrão sob abordagem do MEFGE são apenas ligeiramente inferiores aos

verificados por seu par no MEFGE. Por outro lado, a estratégia que utiliza a combinação Heav Linear MEFGE + SCrack1 apresenta seus números de condicionamento ligeiramente superiores às demais combinações, incluindo seu equivalente na forma tradicional do MEFGE, Heav Linear MEFGE + Crack1. Supõe-se, a partir disso, que a presumida vantagem apresentada pelo MEFGE neste quesito não pôde ser avaliada, uma vez que as matrizes de rigidez do MEFGE já apresentavam um número de condicionamento possivelmente próximo do que seria verificado caso se utilizasse a aproximação padrão do MEF. Isso se fundamenta no fato de que as taxas de crescimento verificadas para o MEFGE são próximas do esperado para o MEFGE se comparadas ao exposto no trabalho de Gupta et al. (2013). De fato, espera-se para o MEF uma taxa em h^{-2} (Babuška e Banerjee, 2012), o que corresponderia, em termos de graus de liberdade, a algo da ordem de NGL. Observa-se, pelo gráfico da figura 5.14, que em todos os modelos a convergência apresentou taxa próxima da unitária, sendo assim, a ótima esperada.

5.2.2.2 Caso II: Trinca Coincide com a Aresta

Nesta seção, por sua vez, são apresentados e discutidos os resultados para as estratégias de enriquecimento distintas empregadas nas análises envolvendo as malhas da Figura 5.11. As diferentes combinações de enriquecimento utilizadas são as mesmas descritas na seção 5.2.2.1, com dois acréscimos. Além das estratégias já explicitadas, foram também realizadas simulações utilizando apenas o enriquecimento singular, na configuração ilustrada pela Figura 5.11, com nós duplicados para descrever geometricamente a trinca (Crack1, nós duplicados). Como mencionado anteriormente, tais simulações se destinaram a avaliar a eficácia do enriquecimento de Heaviside utilizado, ao se comparar as análises realizadas com a presença deste enriquecimento com aquelas em que é substituído pela duplicação dos nós na descrição da descontinuidade do deslocamento ao longo da trinca. De forma análoga,

na estratégia estável, sob mesma justificativa, foram também efetuadas análises utilizando apenas o enriquecimento de trinca, modo I com nós duplicados para atingir o mesmo fim (SCrack1, nós duplicados).

Os resultados para a energia de deformação obtidos para as combinações citadas, bem como o número de graus de liberdade verificado para cada uma das malhas, podem ser visualizados na Tabela 5.6. Os dados relativos ao número de condicionamento para cada uma das malhas, por sua vez, podem ser observados na Tabela 5.7. As taxas de convergência da solução do problema em análise, bem como as taxas de crescimento dos números de condicionamento para as distintas estratégias de enriquecimento, podem ser observadas, respectivamente, nas Figuras 5.15 e 5.16.

Tabela 5.6: Energia de deformação ($U(\tilde{\mathbf{u}})$) e número de graus de liberdade (NGL) obtidos para as malhas 1, 2 e 3 da Figura 5.11, conforme as estratégias de enriquecimento adotadas.

Estratégia de Enriquecimento	$U(\tilde{\mathbf{u}})$			NGL		
	1	2	3	1	2	3
Heav MEFG + Crack1	123,58	128,61	130,21	176	650	2510
Heav Linear MEFG + Crack1	124,22	128,81	130,26	184	662	2530
Heav MEFGE + SCrack1	123,91	128,93	130,33	180	656	2520
Heav Linear MEFGE + SCrack1	126,89	129,73	130,53	196	680	2560
Crack1, nós duplicados	124,86	128,98	130,30	180	662	2538
SCrack1, nós duplicados	126,91	129,74	130,53	180	662	2538

Novamente, as diferentes combinações de enriquecimento empregadas demonstraram taxas ótimas de convergência, incluindo desta vez a combinação Heav MEFGE + SCrack1. Nota-se também pela Figura 5.15 que a melhor solução, neste caso, foi a que descreveu a descontinuidade geometricamente a partir da duplicação dos nós da malha e se utilizou do enriquecimento de trinca, modo I, sob abordagem estável (SCrack1, nós duplicados), como era esperado. É interessante notar, entretanto, que a solução mais próxima desta não foi a que se utilizou do mesmo artifício via

MEFG, mas a combinação Heav Linear MEFGE + SCrack1, validando a implementação realizada e demonstrando também o bom desempenho da estratégia estável. É relevante observar ainda que mesmo a combinação Heav MEFGE + SCrack1 obteve, na última malha, erro inferior ao verificado pela melhor das soluções da forma tradicional do MEFGE (Crack1, nós duplicados).

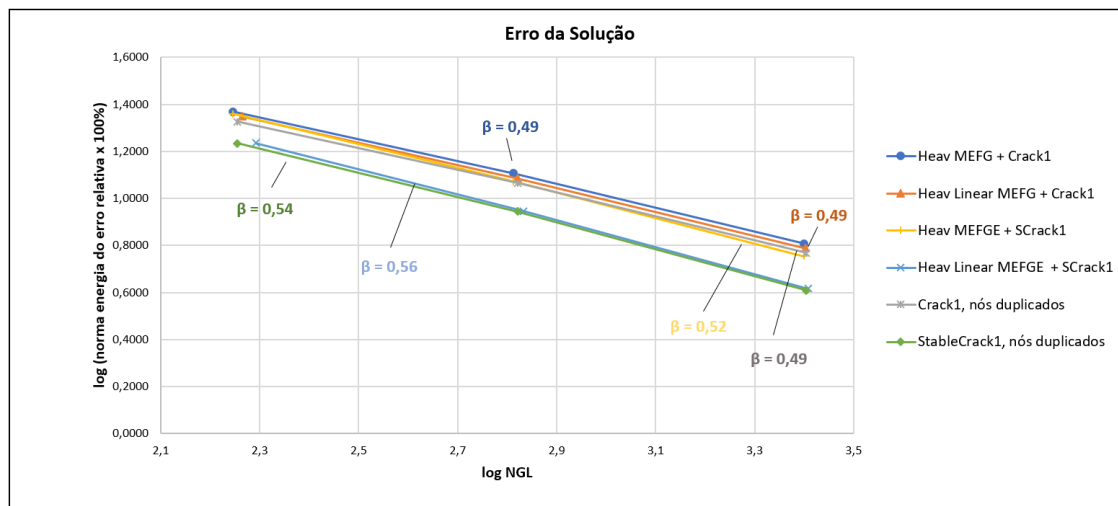


Figura 5.15: Análise de convergência da solução, conforme as estratégias de enriquecimento, para o problema em análise.

No entanto, é importante destacar que, nesse tipo de problema (trinca coincidente com a aresta), em que há possibilidades de se descrever a descontinuidade geometricamente a partir da duplicação dos nós cortados pela trinca, será sempre preferível fazê-lo a simulá-la “artificialmente” mediante enriquecimento por função descontínua.

As tendências observadas para o número de condicionamento neste caso (Figura 5.16) se mantiveram as mesmas relatadas para o caso I, excetuando-se a anomalia que ocorreu com a combinação Heav Linear MEFGE + SCrack1, na qual o número de condicionamento apresentado em todas as malhas foi significativamente superior ao verificado para as outras combinações, embora tenha apresentado uma taxa de crescimento praticamente nula. Tal resultado atípico indica a necessidade de mais estudos sobre o tema, o que motivou as análises realizadas na seção que se segue.

Tabela 5.7: Números de Condicionamento (NC) obtidos para as malhas 1, 2 e 3 da Figura 5.11, conforme as estratégias de enriquecimento adotadas.

Estratégia de Enriquecimento	NC		
	1	2	3
Heav MEFG + Crack1	1,32E+04	5,83E+04	2,47E+05
Heav Linear MEFG + Crack1	1,78E+04	6,68E+04	2,73E+05
Heav MEFGE + SCrack1	1,32E+04	5,65E+04	2,35E+05
Heav Linear MEFGE + SCrack1	1,11E+17	1,00E+17	1,04E+17
Crack1, nós duplicados	1,34E+04	6,17E+04	2,63E+05
SCrack1, nós duplicados	1,18E+04	5,30E+04	2,31E+05

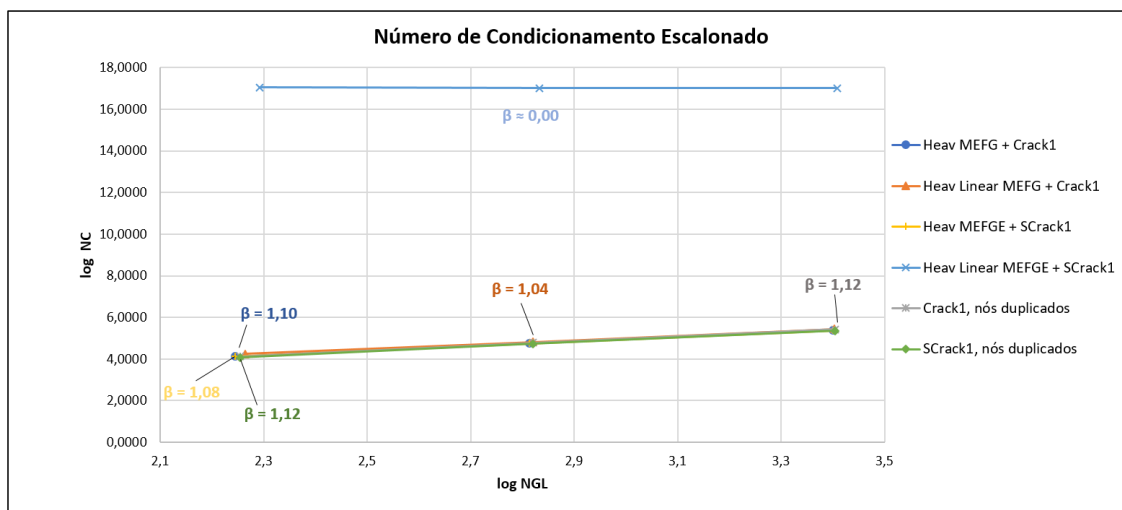


Figura 5.16: Crescimento dos números de condicionamento das respectivas matrizes de rigidez escalonadas, conforme as estratégias de enriquecimento, para o problema em análise.

5.2.2.3 Outras Simulações

Em face do resultado atípico, em relação às outras combinações, obtido em termos de número de condicionamento por Heav Linear MEFGE + SCrack1, foi levantada uma hipótese para tentar explicar o comportamento desta estratégia de enriquecimento: o termo $\mathcal{H} \frac{(y-y_j)}{h_j}$ estaria em “excesso” na equação 4.7, uma vez que

a razão da proposição da formulação expressa nesta equação por Gupta et al. (2013) foi representar o erro $u - I_{\omega_j}(u)$ na descrição da descontinuidade na direção x , já que na direção y a função original de Heaviside (equação 4.5) já seria suficiente para fazê-lo. Deste modo, em um primeiro momento, o termo citado não estaria representando ganhos significativos em termos de aproximação e estaria penalizando o condicionamento da matriz de rigidez associada ao MEFGE. Para investigar a veracidade da hipótese levantada, alguns testes numéricos foram realizados, segundo a abordagem estável, para esse “novo”enriquecimento de Heaviside, definido como:

$$\mathcal{H}_L^{j,mod}(x, y) = \left\{ \mathcal{H}, \mathcal{H} \frac{(x - x_j)}{h_j} \right\} \quad (5.5)$$

cuja simbologia detém os mesmos significados apresentados na equação 4.7.

O enriquecimento singular, bem como as estratégias de enriquecimento ilustradas nas Figuras 5.10, 5.11 e 5.12, foram mantidos nos dois casos (I e II). Os resultados para energia de deformação e número de graus de liberdade para essa nova combinação, segundo a estratégia estável (Heav Linear Mod MEFGE + SCrack1), podem ser vistos na Tabela 5.8. Os dados relativos aos números de condicionamento escalonados, por sua vez, podem ser encontrados na Tabela 5.9.

Tabela 5.8: Energia de deformação ($U(\tilde{\mathbf{u}})$) e número de graus de liberdade (NGL) obtidos para as malhas 1, 2 e 3 das Figuras 5.10 e 5.11 para a combinação Heav Linear Mod MEFGE + SCrack1.

Caso	$U(\tilde{\mathbf{u}})$			NGL		
	1	2	3	1	2	3
I	111,57	124,80	128,81	120	864	7320
II	126,89	129,72	130,53	188	668	2540

Tabela 5.9: Números de Condicionamento (NC) obtidos para as malhas 1, 2 e 3 das Figuras 5.10 e 5.11 para a combinação Heav Linear Mod MEFGE + SCrack1.

Caso	NC		
	1	2	3
I	1,27E+04	1,15E+05	1,10E+06
II	2,08E+04	7,31E+04	2,99E+05

Pode-se perceber que a retirada do termo $\mathcal{H}\frac{(y-y_j)}{h_j}$ da função enriquecedora de salto de fato impacta positivamente o número de condicionamento escalonado registrado para as malhas do caso II. O comportamento desta combinação se assemelha, inclusive, no que concerne a este parâmetro, ao verificado para as demais estratégias de enriquecimento avaliadas neste caso, atingindo até mesmo as taxas esperadas de crescimento. O mesmo se pode dizer a respeito deste quesito no caso I. No entanto, embora a aproximação continue extremamente satisfatória e bastante próxima do desempenho alcançado em termos de erro da solução ao de Heav Linear MEFGE + SCrack1 no caso II, a retirada do termo associado a y do enriquecimento de Heaviside linearizado penaliza consideravelmente a taxa de convergência verificada para a combinação Heav Linear Mod MEFGE + SCrack1 no caso I. Com efeito, a aproximação se torna muito próxima daquilo que foi alcançado segundo a abordagem estável pela estratégia Heav MEFGE + SCrack1, como se pode ver na Figura 5.17.

Deste modo, embora os resultados buscados em termos de condicionamento para o MEFGE tenham sido alcançados pela retirada do termo $\mathcal{H}\frac{(y-y_j)}{h_j}$ do enriquecimento de Heaviside linearizado, isso não se verificou em termos de aproximação para ambos os casos, e o termo em questão faz-se necessário para que se atinja uma aproximação satisfatória segundo esta abordagem em casos semelhantes ao caso I. No caso II, nos elementos associados à descontinuidade (totalmente enriquecidos pelas funções de Heaviside), o enriquecimento modificado relacionado a esse termo era

nulo em toda a nuvem associada a um nó cortado pela trinca, como pode ser constatado na Figura 5.18. Isto não ocorre com os enriquecimentos estáveis associados aos demais termos expressos na equação 5.5 (Figuras 5.19 e 5.20). Desta forma, a utilização de $\mathcal{H} \frac{(y-y_j)}{h_j}$ na função enriquecedora estava de fato penalizando o condicionamento, sem contribuir de maneira efetiva, ao contrário de seus pares, para a melhora da solução. No caso I, em que a trinca existe no domínio do elemento associado a uma descontinuidade, esta particularidade não acontece, e o termo contribui de fato para uma simulação satisfatória do fenômeno estudado.

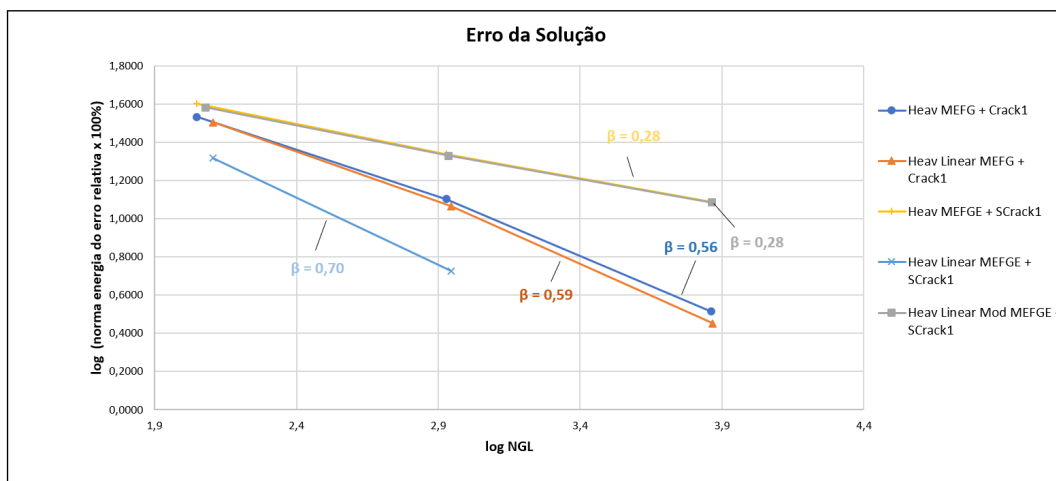


Figura 5.17: Análise de convergência da solução no caso I, contrapondo o desempenho de Heav Linear Mod MEFGE + SCrack1 com as demais estratégias de enriquecimento, para o problema em análise.

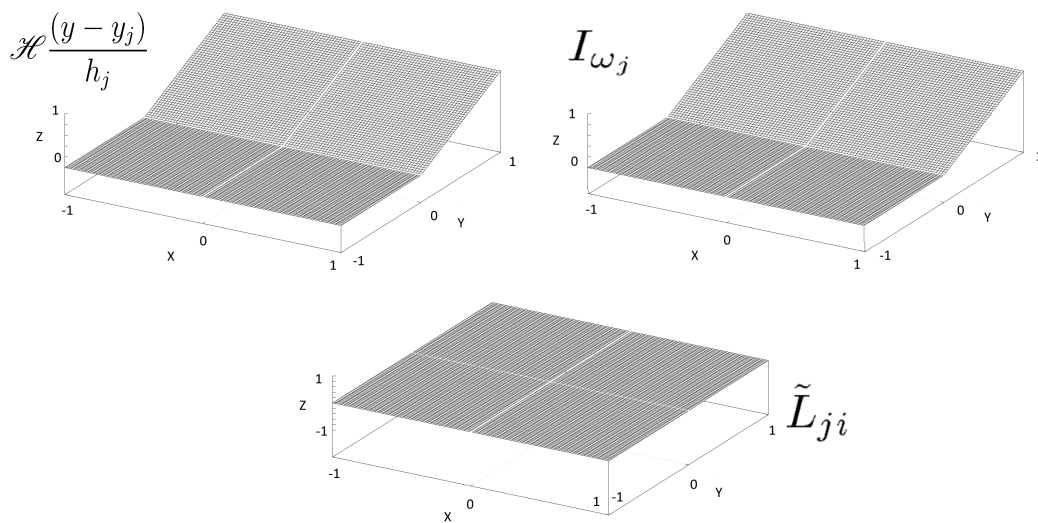


Figura 5.18: Construção do enriquecimento modificado associado ao termo $\mathcal{H} \frac{(y-y_j)}{h_j}$ em uma nuvem centrada num nó de coordenadas $(0,0)$ cortado pela trinca.

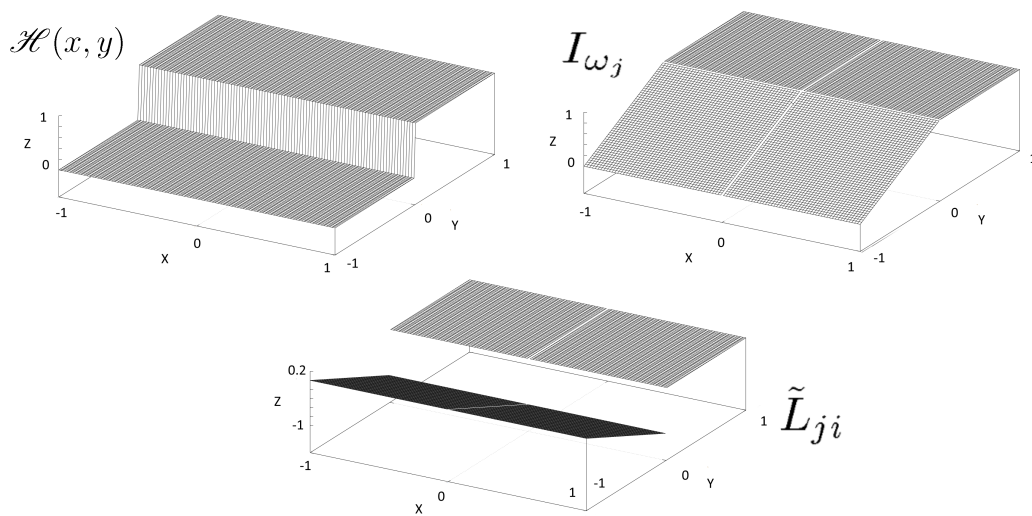


Figura 5.19: Construção do enriquecimento modificado associado ao termo \mathcal{H} em uma nuvem centrada num nó de coordenadas $(0,0)$ cortado pela trinca.

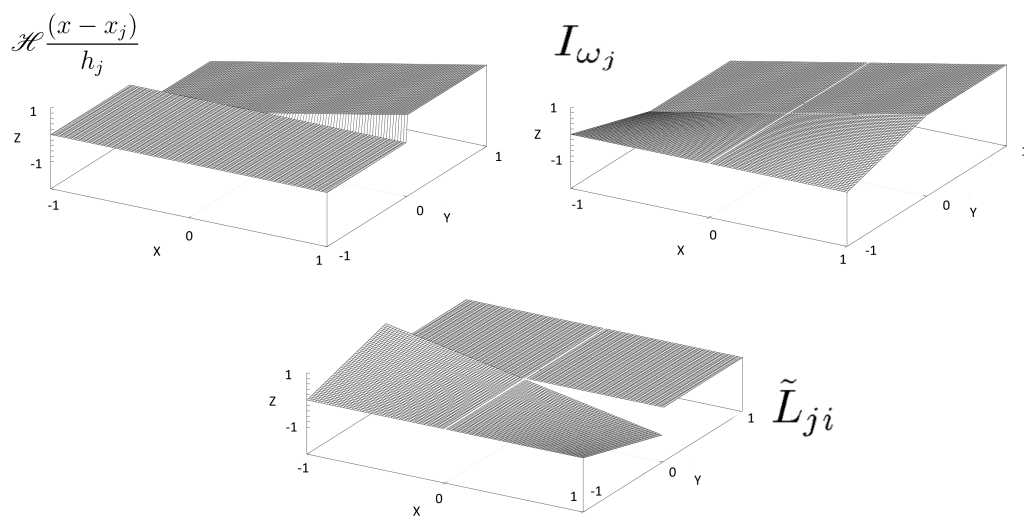


Figura 5.20: Construção do enriquecimento modificado associado ao termo $\mathcal{H} \frac{(x-x_j)}{h_j}$ em uma nuvem centrada num nó de coordenadas $(0,0)$ cortado pela trinca.

Capítulo 6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

6.1 Contribuições deste Trabalho

Este trabalho se dedicou ao estudo do Método dos Elementos Finitos Generalizados Estável (MEFGE), considerado como uma nova abordagem do já consolidado Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), em problemas bidimensionais. Para que esse estudo fosse possível, o sistema INSANE, projeto de software livre do Departamento de Engenharia de Estruturas (DEES) da Escola de Engenharia da UFMG, foi expandido. Essa expansão se deu no sentido de incorporar um módulo que realizasse análises estruturais no contexto do MEFGE de forma genérica, de tal forma a viabilizar o funcionamento deste segmento independentemente da função de enriquecimento utilizada. A generalização construída para o método em estudo foi disponibilizada, mediante uma simples modificação, no diálogo de criação de enriquecimentos no pré-processador gráfico interativo do sistema INSANE.

A fim de concluir o projeto de generalização proposto para o MEFGE, foram realizadas intervenções em outro segmento do sistema, que viabilizava a simulação de entalhes segundo a abordagem do MEFG. Este segmento foi também estendido, de forma a permitir que essa simulação se desse também no contexto do MEFGE e que a descontinuidade fosse incorporada não só a partir da função de Heaviside padrão (equação 4.5) como também da função de Heaviside linearizada (equação 4.7), independentemente do método escolhido para análise (MEFG ou MEFGE). Além disso, o módulo responsável pela modelagem de entalhes foi ainda modificado

neste trabalho de maneira a viabilizar a simulação de entalhes que coincidissem com a(s) aresta(s) de elemento(s) finito(s), o que não era possível até então. As alterações realizadas nesse sentido foram, da mesma forma, disponibilizadas no pré-processador gráfico, seguindo lógica semelhante àquela utilizada na incorporação da versão estável no diálogo de criação de enriquecimentos.

Os experimentos numéricos validaram a implementação realizada e ilustraram sua aplicação com funções de enriquecimento diversas, como funções polinomiais, funções de singularidade e funções de Heaviside em sua forma padrão ou modificada. Além disso, permitiram a avaliação do desempenho do MEFGE contraposto ao método que lhe deu origem, o MEF. Embora o MEFGE tenha atingido taxas de crescimento dentro de ou inferiores à faixa prevista por Babuška e Banerjee (2012) para o número de condicionamento associado à matriz de rigidez escalonada (crescimento com h^{-2}), isso não implicou que os números de condicionamento fossem necessariamente baixos ou próximos daqueles apresentados pelo Método dos Elementos Finitos (MEF). No entanto, as simulações numéricas apresentadas no trabalho de Sato (2017) corroboram a constatação de que, embora os números de condicionamento (e não apenas as taxas) associados ao MEFGE possam ser realmente próximos àqueles verificados para o MEF em problemas unidimensionais, estes parâmetros podem, com efeito, apresentar valores consideráveis em problemas bidimensionais. Ou seja, a modificação local no enriquecimento original do MEF para construção, por sua vez, do enriquecimento do MEFGE não é condição suficiente para garantir a estabilidade do método em termos de condicionamento (Sato, 2017). Essa percepção já havia sido formalizada em Zhang, Banerjee e Babuška (2014), que propõem uma modificação do MEFGE de forma a garantir um bom condicionamento da matriz de rigidez associada ao método independentemente da dimensão do problema.

No que concerne ao desempenho na presença de elementos de mistura e em relação à aproximação da solução, pôde-se constatar que o MEFGE de fato demonstra

uma performance satisfatória, de precisão considerável nos problemas analisados na seção 5.2. Constatou-se, ainda, no problema da seção 5.2.2, assim como em Gupta et al. (2013), a instabilidade envolvendo a utilização, sob abordagem do MEFGE, do enriquecimento de Heaviside padrão, devido à impossibilidade de bem reproduzir o erro $u - I_{\omega_j}(u)$. Neste trabalho, contudo, além de se considerar a trinca coincidente com a aresta do elemento como em Gupta et al. (2013), foram analisadas as situações em que a trinca atravessa o elemento e também a descrição geométrica da trinca com a utilização de nós duplos.

No que diz respeito ao enriquecimento polinomial, não se pôde observar vantagem perceptível na utilização da abordagem estável, uma vez que resultados muito semelhantes puderam ser obtidos segundo a forma convencional do MEFGE pela mera supressão dos termos que apareciam na PU (x , y e xy) da função enriquecedora. Além disso, a aproximação de ambas as abordagens é penalizada pela inexistência de tais termos. Resultados similares nesse sentido já haviam sido encontrados por Li (2014).

Desta forma, pode-se concluir que o presente trabalho contribuiu não só para expansão do sistema INSANE, viabilizando a análise de problemas bidimensionais segundo a ótica do MEFGE, como também para as recentes discussões acerca de novas abordagens que buscam manter as vantajosas propriedades do MEFGE superando as limitações que o cercam.

6.2 Sugestões para Trabalhos Futuros

Com base neste trabalho, sugerem-se os seguintes tópicos como propostas para trabalhos futuros:

1. Ampliar o módulo concebido para o MEFGE a nível do pré-processador gráfico para que possa comportar também a análise com carregamento perpendicular ao plano (placas);

2. Expandir o arcabouço desenvolvido para o MEFGE em problemas bidimensionais para problemas tridimensionais (em estudo);
3. Incluir o enriquecimento com solução local, dentro da estratégia global-local, na generalização construída neste trabalho para o MEFGE;
4. Avaliar a possibilidade de se desenvolver, no sistema INSANE, implementações de outras abordagens estáveis, como aquela já mencionada e proposta por Zhang, Banerjee e Babuška (2014), intitulada *High Order SGFEM* - MEFGE de alta ordem, em tradução livre;
5. Compatibilizar a estrutura elaborada para o MEFGE no sistema INSANE com o código existente para outras abordagens, de tal maneira que se torne possível a simulação da propagação de trincas em problemas bidimensionais também por esse método.

Apêndice A

Arquivo de entrada de dados do INSANE

Neste apêndice, é apresentado um modelo de arquivo XML compatível com uma análise em que o enriquecimento utilizado segue a abordagem do MEFGE. O arquivo aqui disponibilizado é o mais simples possível, visto que o objetivo em exibi-lo é apenas ilustrar o marcador que se acrescentou para que a análise ocorresse segundo esta abordagem. Trata-se do arquivo empregado para simulação do problema da seção 5.1, com enriquecimento original equivalente a $\{1 \ x^2 \ y^2\}$.

```
1 <?xml version="1.0" encoding="utf-8"?>
2 <Insane xmlns="http://www.dees.ufmg.br" xmlns:xsi="http://www.w3.org/2001/
   XMLSchema-instance" xsi:schemaLocation="http://www.dees.ufmg.br/insane.xsd">
3   <Solution class="SteadyState">
4     <SolverType>1</SolverType>
5   </Solution>
6   <Model class="GFemModel">
7     <ProblemDriver>GFemParametric</ProblemDriver>
8     <GlobalAnalysisModel>GFemPlaneStrain</GlobalAnalysisModel>
9     <MaterialList>
10      <Material class="LinearElasticIsotropic" label="Material">
11        <Elasticity>1000000.0</Elasticity>
12        <Poisson>0.3</Poisson>
13        <ThermalCoeff>1.2E-5</ThermalCoeff>
14      </Material>
15    </MaterialList>
16    <DegenerationList>
17      <Degeneration class="PrescribedDegeneration" label="Section">
```

```

18     <Height>1.000000</Height>
19     <CSMaterial>Material</CSMaterial>
20     <Thickness>1.000000</Thickness>
21     </Degeneration>
22 </DegenerationList>
23 <EnrichmentList>
24     <Enrichment class="PolynomialEnrichment" label="E1-PolynomialEnrichment">
25         <X>2 0</X>
26         <Y>0 2</Y>
27         <Z>0 0</Z>
28         <Approach>Stable</Approach>
29     </Enrichment>
30 </EnrichmentList>
31 <NodeList>
32     <Node label="1">
33         <Coord>0.000000 0.000000 0.000000</Coord>
34         <NodeValues>
35             <DOFLabels>Dx Dy e1 e2 e3 e4</DOFLabels>
36             <Restrains>true true true false false true</Restrains>
37             <EnrichmentType>E1-PolynomialEnrichment</EnrichmentType>
38             <ScalingFactor>7.0710678118654760E-01</ScalingFactor>
39         </NodeValues>
40     </Node>
41     <Node label="2">
42         <Coord>0.500000 0.000000 0.000000</Coord>
43         <NodeValues>
44             <DOFLabels>Dx Dy e1 e2 e3 e4</DOFLabels>
45             <Restrains>true false true false false false</Restrains>
46             <EnrichmentType>E1-PolynomialEnrichment</EnrichmentType>
47             <ScalingFactor>7.0710678118654760E-01</ScalingFactor>
48         </NodeValues>
49     </Node>
50     <Node label="3">
51         <Coord>0.500000 0.500000 0.000000</Coord>
52         <NodeValues>
53             <DOFLabels>Dx Dy e1 e2 e3 e4</DOFLabels>
54             <Restrains>>false false false false false false</Restrains>
55             <EnrichmentType>E1-PolynomialEnrichment</EnrichmentType>
56             <ScalingFactor>7.0710678118654760E-01</ScalingFactor>
57         </NodeValues>
58     </Node>
59     <Node label="4">

```

```

60     <Coord>0.000000 0.500000 0.000000</Coord>
61     <NodeValues>
62         <DOFLabels>Dx Dy e1 e2 e3 e4</DOFLabels>
63         <Restrains>>false true false false false true</Restrains>
64         <EnrichmentType>E1-PolynomialEnrichment</EnrichmentType>
65         <ScalingFactor>7.0710678118654760E-01</ScalingFactor>
66     </NodeValues>
67 </Node>
68 <Node label="5">
69     <Coord>1.000000 0.000000 0.000000</Coord>
70     <NodeValues>
71         <DOFLabels>Dx Dy e1 e2 e3 e4</DOFLabels>
72         <Restrains>>true false true false false false</Restrains>
73         <EnrichmentType>E1-PolynomialEnrichment</EnrichmentType>
74         <ScalingFactor>7.0710678118654760E-01</ScalingFactor>
75     </NodeValues>
76 </Node>
77 <Node label="6">
78     <Coord>1.000000 0.500000 0.000000</Coord>
79     <NodeValues>
80         <DOFLabels>Dx Dy e1 e2 e3 e4</DOFLabels>
81         <Restrains>>false false false false false false</Restrains>
82         <EnrichmentType>E1-PolynomialEnrichment</EnrichmentType>
83         <ScalingFactor>7.0710678118654760E-01</ScalingFactor>
84     </NodeValues>
85 </Node>
86 <Node label="7">
87     <Coord>0.500000 1.000000 0.000000</Coord>
88     <NodeValues>
89         <DOFLabels>Dx Dy e1 e2 e3 e4</DOFLabels>
90         <Restrains>>true true true true true true</Restrains>
91         <PreDisplacements>1.00E-03 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00</PreDisplacements>
92         <EnrichmentType>E1-PolynomialEnrichment</EnrichmentType>
93         <ScalingFactor>7.0710678118654760E-01</ScalingFactor>
94     </NodeValues>
95 </Node>
96 <Node label="8">
97     <Coord>0.000000 1.000000 0.000000</Coord>
98     <NodeValues>
99         <DOFLabels>Dx Dy e1 e2 e3 e4</DOFLabels>
100        <Restrains>>true true true true true true</Restrains>
101        <PreDisplacements>1.00E-03 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00</PreDisplacements>

```

```

102     <EnrichmentType>E1-PolynomialEnrichment</EnrichmentType>
103     <ScalingFactor>7.0710678118654760E-01</ScalingFactor>
104   </NodeValues>
105 </Node>
106 <Node label="9">
107   <Coord>1.000000 1.000000 0.000000</Coord>
108   <NodeValues>
109     <DOFLabels>Dx Dy e1 e2 e3 e4</DOFLabels>
110     <Restraints>true true true true true true</Restraints>
111     <PreDisplacements>1.00E-03 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00</PreDisplacements>
112     <EnrichmentType>E1-PolynomialEnrichment</EnrichmentType>
113     <ScalingFactor>7.0710678118654760E-01</ScalingFactor>
114   </NodeValues>
115 </Node>
116 </NodeList>
117 <ElementList>
118   <Element class="ParametricElement.Quadrilateral.Q4" label="E1">
119     <Incidence>1 2 3 4</Incidence>
120     <AnalysisModel>GFemPlaneStrain</AnalysisModel>
121     <IntegrationOrder>6 6 0</IntegrationOrder>
122     <ConstitutiveModel>LinearElasticConstModel</ConstitutiveModel>
123     <ElmDegenerations>Section</ElmDegenerations>
124   </Element>
125   <Element class="ParametricElement.Quadrilateral.Q4" label="E2">
126     <Incidence>2 5 6 3</Incidence>
127     <AnalysisModel>GFemPlaneStrain</AnalysisModel>
128     <IntegrationOrder>6 6 0</IntegrationOrder>
129     <ConstitutiveModel>LinearElasticConstModel</ConstitutiveModel>
130     <ElmDegenerations>Section</ElmDegenerations>
131   </Element>
132   <Element class="ParametricElement.Quadrilateral.Q4" label="E3">
133     <Incidence>3 7 8 4</Incidence>
134     <AnalysisModel>GFemPlaneStrain</AnalysisModel>
135     <IntegrationOrder>6 6 0</IntegrationOrder>
136     <ConstitutiveModel>LinearElasticConstModel</ConstitutiveModel>
137     <ElmDegenerations>Section</ElmDegenerations>
138   </Element>
139   <Element class="ParametricElement.Quadrilateral.Q4" label="E4">
140     <Incidence>6 9 7 3</Incidence>
141     <AnalysisModel>GFemPlaneStrain</AnalysisModel>
142     <IntegrationOrder>6 6 0</IntegrationOrder>
143     <ConstitutiveModel>LinearElasticConstModel</ConstitutiveModel>

```

```

144     <ElmDegenerations>Section</ElmDegenerations>
145   </Element>
146 </ElementList>
147 </Model>
148 <LoadingList>
149   <Loading label="Carregamento_1">
150     <LineLoad elm="E2">
151       <PointLoad>
152         <Point>1.000000E00 0.000000E00 0.000000E00</Point>
153         <Load>0.000000E00 0.000000E00</Load>
154       </PointLoad>
155       <PointLoad>
156         <Point>1.000000E00 5.000000E-01 0.000000E00</Point>
157         <Load>0.000000E00 0.000000E00</Load>
158       </PointLoad>
159     </LineLoad>
160     <LineLoad elm="E4">
161       <PointLoad>
162         <Point>1.000000E00 5.000000E-01 0.000000E00</Point>
163         <Load>0.000000E00 0.000000E00</Load>
164       </PointLoad>
165       <PointLoad>
166         <Point>1.000000E00 1.000000E00 0.000000E00</Point>
167         <Load>0.000000E00 0.000000E00</Load>
168       </PointLoad>
169     </LineLoad>
170   </Loading>
171 </LoadingList>
172 <ScalarFunctions>
173   <ScalarFunction type="ConstantFunction" label="Function-1.0">
174     <Amplitude>1.000E00</Amplitude>
175   </ScalarFunction>
176 </ScalarFunctions>
177 <LoadCombinations>
178   <LoadCombination label="LoadCombination1">
179     <LoadCase loading="Carregamento_1" inc="false" scalarFunction="Function
180       -1.0"></LoadCase>
181   </LoadCombination>
182 </LoadCombinations>
</Insane>

```

Apêndice B

Aproximações alcançadas pelos enriquecimentos da seção 5.1

Este apêndice visa elucidar a ordem polinomial alcançada pelas aproximações produzidas a partir do produto das funções enriquecedoras propostas na seção 5.1 segundo a abordagem do MEFGE pela PU do elemento quadrilateral Q4, que é utilizado em todas as análises segundo as abordagens do MEFGE e MEFGE nesta seção.

Sabe-se que a base de monômios do espaço de aproximação gerado em um elemento Q4 pode ser expressa por:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x & y \\ xy \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

Multiplicando as funções da PU do elemento Q4 pelo primeiro dos enriquecimentos propostos para o MEFGE (MEFGE PU0 - p1), tem-se:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x & y \\ xy \end{bmatrix} \times \{1 \ x \ y\} = \begin{bmatrix} 1 \\ x & y \\ x^2 & xy & y^2 \\ x^2y & xy^2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

O que equivale à aproximação proporcionada por um elemento quadrilateral do tipo Q8.

Considerando, da mesma forma, o enriquecimento MEFGE PU0 - p2, tem-se:

Finalmente, para o enriquecimento MEFGE PU0 - p4, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x & y \\ xy \end{bmatrix} \times \{1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^3 \ x^2y \ xy^2 \ y^3 \ x^4 \ y^4\} = \begin{bmatrix} 1 \\ x & y \\ x^2 & xy & y^2 \\ x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 \\ x^4 & x^3y & x^2y^2 & xy^3 & y^4 \\ x^5 & x^4y & x^3y^2 & x^2y^3 & xy^4 & y^5 \\ x^5y & & & & & xy^5 \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Dessa vez, de forma semelhante ao que ocorre na equação B.3, o enriquecimento incompleto MEFGE PU0 - p4 sem lin, $\{1 \ x^2 \ y^2 \ x^3 \ x^2y \ xy^2 \ y^3 \ x^4 \ y^4\}$, é capaz de produzir o mesmo espaço, pelo produto sobre a PU, que MEFGE PU0 - p4.

Deve-se salientar que a explanação realizada neste apêndice se deu para fins didáticos, a fim de deixar claro qual espaço poderia ser reproduzido para cada uma das funções polinomiais utilizadas como enriquecimento no contexto do MEFGE na seção 5.1. É importante ressaltar, ainda, que nenhum desses espaços é propriamente equivalente àquele que seria produzido a partir de um enriquecimento pelo MEFGE, visto que não são as funções L_{ji} que são multiplicadas sobre a PU, mas sim as funções \tilde{L}_{ji} .

Referências Bibliográficas

- Alves, P. D., 2012. Estratégia global-local aplicada ao Método dos Elementos Finitos Generalizados. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Alves, P. D., Barros, F. B. e Pitangueira, R. L. S., 2013. ‘An object oriented approach to the Generalized Finite Element Method’. *Advances in Engineering Software*, vol. (59), pp. 1–18.
- Babuška, I. e Banerjee, U., 2012. ‘Stable Generalized Finite Element Method (SG-FEM)’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 201-204, pp. 91–111.
- Babuška, I., Caloz, G. e Osborn, J. E., 1994. ‘Special Finite Element Method for a classe of second order elliptic problems whith rough coefficients’. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 31 (4), pp. 745-981.
- Babuška, I. e Melenk, J. M., 1997. ‘The Partition of Unity Finite Element Method’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 40, pp. 727-758.
- Babuška, I. e Szabó, B. A., 1982. ‘On the rates of convergence of the Finite Element Method’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 18, pp. 323-341.
- Barros, F. B., 2002. Métodos Sem Malha e Método dos Elementos Finitos Generalizados em Análise Não-Linear de Estruturas. Tese de Doutorado, EESC - USP, São Carlos, SP, Brasil.
- Belsley, D. A., Kuh, E. e Welsch, R. E., 1980. ‘The condition number’. In: *Regression*

diagnostics: identifying influential data and sources of collinearity. New York, NY, USA: John Wiley & Sons, Inc., 1980, pp. 100-104. ISBN 0-471-05856-4.

Belytschko, T. e Black, T., 1999. ‘Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 45, pp. 601-620.

Belytschko, T., Gracie, R. e Ventura, G., 2009. ‘A review of Extended/Generalized Finite Element Methods for material modeling’. *Modelling and Simulations in Materials Science and Engineering*, vol. 17 (4) : 24.

Chessa, J., Wang, H. e Belytschko, T., 2003. ‘On the construction of blending elements for local partition of unity enriched finite elements’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 57, pp. 1015-1038.

Duarte, C. A., 1991. Estudo da versão p do Método dos Elementos Finitos para problemas de elasticidade e de potencial. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brasil.

Duarte, C. A., 1996. The hp cloud method. Tese de Doutorado, University of Texas, Austin, TX, EUA.

Duarte, C. A., Babuška, I. e Oden, J. T., 2000. ‘Generalized Finite Element Methods for three-dimensional structural mechanics problems’. *Computer & Structures*, vol. 77 (2), pp. 215-232.

Duarte, C. A. e Oden, J. T., 1995. Hp clouds - A meshless method to solve boundary-value problems. Relatório Técnico 95-05, TICAM — University of Texas, Austin, TX, EU.

Duarte, C. A. e Oden, J. T. 1996a. ‘An hp adaptive method using clouds’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139, pp. 237-262.

Duarte, C. A. e Oden, J. T. 1996b. ‘ Hp clouds - an hp meshless method’. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, vol. 12, pp. 673-705.

- Fonseca, F. T., 2008. Sistema computacional para análise dinâmica geometricamente não-linear através do Método dos Elementos Finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Fonseca F. T. e Pitangueira, R. L. S., 2007. ‘An object oriented class organization for dynamic geometrically non-linear’. *CMNE (Congress on Numerical Methods in Engineering)/CILAMCE (Iberian-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering)*.
- Fries, T-P., 2008. ‘A corrected XFEM approximation without problems in blending elements’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 75, pp. 503-532.
- Fries, T-P. e Belytschko, T., 2010. ‘The Extended/Generalized Finite Element Method: An overview of the method and its applications’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 84, pp. 253-304.
- Gupta, V., Duarte, C. A., Babuška, I. e Banerjee, U., 2013. ‘A stable and optimally convergent generalized FEM (SGFEM) for linear elastic fracture mechanics’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 266, pp. 23-39.
- Gupta, V., Duarte, C. A., Babuška, I. e Banerjee, U., 2015. ‘Stable GFEM (SGFEM): Improved conditioning and accuracy of GFEM/XFEM for three-dimensional fracture mechanics’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 289, pp. 355-386.
- Li, H., 2014. Investigation of stability and accuracy of high order Generalized Finite Element Methods. Dissertação de Mestrado, University of Illinois, Urbana, IL, EUA.
- Lins, R. M., 2015. A posteriori error estimations for the Generalized Finite Element Method and modified versions. Tese de Doutorado — EESC - USP, São Carlos, SP, Brasil.
- Malekan, M., 2017. Crack propagation modeling in plane structures using two-scale Generalized/Extended Finite Element Method. Tese de Doutorado — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.

- Melenk, J. M., 1995. On Generalized Finite Element Methods. Tese de Doutorado, University of Maryland, College Park, MD, EUA.
- Melenk, J. M. e Babuška, I., 1996. 'The Partition of Unity Finite Element Method: basic theory and applications'. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139, pp. 289-314.
- Moës, N., Dolbow, J. e Belytschko, T., 1999. 'A Finite Element Method for crack growth without remeshing'. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 46, pp. 131-150.
- Navarra, E. O. I., 1995. Calculo de Estructuras por el Metodo de Elementos Finitos - Análisis estático lineal. Barcelona, España : Artes Gráficas Torres, S. A. ISBN 84-87867-00-6.
- Nguyen, V. P, Rabczuk, T., Bordas, S e Duflo, M., 2008. 'Meshless methods: A review and computer implementation aspects'. *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 79, pp. 763-813.
- Oden, J. T, Duarte, C. A. e Zienkiewicz, O. C., 1998. 'A new cloud-based *hp* Finite Element Method'. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 153, pp. 117-126.
- Oliveira, T. S. e Barros, F. B., 2016. 'Avaliação do enriquecimento polinomial no Método dos Elementos Finitos Generalizados'. *Anais do XII Simpósio de Mecânica Computacional*, pp. 484-491, Diamantina, MG, Brasil.
- Sato, F. M., 2017. Numerical experiments with stable versions of the Generalized Finite Element Method. Dissertação de Mestrado, — EESC - USP, São Carlos, SP, Brasil.
- Silva, F., Santos, A., Barros, F. e Pitangueira, R., 2009. 'Detalhes da implementação do Método dos Elementos Finitos Generalizados em ambiente de programação orientada a objetos - matriz de rigidez semi-definida positiva'. *XXX CILAMCE*, Brasil.

- Silva, L. L., 2016. Sistema gráfico interativo para análise de nucleação e propagação de trincas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Strang, G., 1976. Linear algebra and its applications New York, NY, USA: Academic Press, Inc., ISBN 0-12-673650-2.
- Strouboulis, T., Babuška, I. e Copps, K., 2000. ‘The design and analysis of the Generalized Finite Element Method’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 181(1-3), pp. 43-69.
- Szabó, B. A. e Babuška, I., 1991. Finite element analysis. New York, NY, USA: John Wiley & Sons, Inc., ISBN 0-471-50273-1.
- Zhang, Q., Banerjee, U. e Babuška, I., 2014. ‘Higher order Stable Generalized Finite Element Method’. *Numerische Mathematik*, vol. 128 1-29, DOI:10.1007/s00211-014-0609-1.