

**MÉTODO DE CONTROLE DE  
COMPRIMENTO DE ARCO POR VARIAÇÃO  
DE ENERGIA PARA ANÁLISE NÃO LINEAR  
DE ESTRUTURAS**

**Christian Frédéric Jean**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

**MÉTODO DE CONTROLE DE COMPRIMENTO DE  
ARCO POR VARIAÇÃO DE ENERGIA PARA ANÁLISE  
NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS**

Christian Frédéric Jean

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de “Mestre em Engenharia de Estruturas”.

Comissão Examinadora:

---

Prof. Dr. Roque Luiz da Silva Pitangueira  
DEES - UFMG (Orientador)

---

Profa. Dra. Jamile Salim Fuina  
FEA - FUMEC (Co-Orientador)

---

Prof. Dr. Felício Bruzzi Barros  
DEES - UFMG

---

Prof. Dr. Ramon Pereira da Silva  
DEES - UFMG

---

Prof. Dr. Rodrigo Guerra Peixoto  
DEES - UFMG

Belo Horizonte, 11 de agosto de 2017

J43m	<p>Jean, Christian Frédéric.  Método de controle de comprimento de arco por variação de energia para análise não linear de estruturas [manuscrito] / Christian Frédéric Jean. – 2017.  xxii, 144 f., enc.: il.</p> <p>Orientador: Roque Luiz da Silva Pitangueira.  Coorientadora: Jamile Salim Fuina.</p> <p>Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.</p> <p>Apêndices: f. 121-138.</p> <p>Bibliografia: f. 139-144.</p> <p>1. Engenharia de estruturas - Teses. 2. Método dos elementos finitos - Teses. I. Pitangueira, Roque Luiz da Silva. II. Fuina, Jamile Salim. III. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. IV. Título.</p> <p style="text-align: right;">CDU: 624(043)</p>
------	---

*Ninguém é tão ignorante que não tenha algo a ensinar. Ninguém é tão sábio que não tenha algo a aprender.*

Blaise Pascal

*Aos meus pais, Cristiana e Yves Carol.*

# Índice

Índice	iv
Lista de Tabelas	vii
Lista de Figuras	xi
Lista de Abreviaturas e Siglas	xii
Lista de Símbolos	xiii
Resumo	xx
Abstract	xxi
Agradecimentos	xxii
<b>1 INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1 Objetivos . . . . .	3
1.1.1 Objetivo Geral . . . . .	3
1.1.2 Objetivos Específicos . . . . .	4
1.2 Organização do Texto . . . . .	4
<b>2 CONTROLE DE COMPRIMENTO DE ARCO BASEADO EM TAXAS DE ENERGIA</b>	<b>7</b>
2.1 Procedimento Incremental-Iterativo . . . . .	9
2.2 Formulação para Equação de Restrição . . . . .	12
2.3 Segunda Lei da Termodinâmica para Comportamento Dissipativo . .	15
2.4 Controle de Comprimento de Arco baseado em Energia Dissipada . .	17
2.4.1 Formulação . . . . .	17
2.4.2 Solução Incremental-Iterativa . . . . .	22
2.5 Controle de Comprimento de Arco baseado em Energia Interna . . . .	23
2.5.1 Formulação . . . . .	23
2.5.2 Solução Incremental-Iterativa . . . . .	24

<b>3</b>	<b>IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL</b>	<b>27</b>
3.1	Implementações Computacionais para Problemas Não Lineares . . . . .	28
3.1.1	Organização do Núcleo Numérico . . . . .	29
3.1.2	Implementação das Soluções Não Lineares . . . . .	31
3.1.3	Processo de Solução Não Linear Estática . . . . .	35
3.2	Implementação do Controle de Comprimento de Arco baseado em Taxas de Energia . . . . .	36
3.2.1	Classe <i>EnergyRateControl</i> e interfaces <i>InternalEnergyControl</i> e <i>DissipatedEnergyControl</i> . . . . .	37
3.2.2	Implementação do processo de mudança de função de controle	39
<b>4</b>	<b>EXEMPLOS NUMÉRICOS DE PROBLEMAS GEOMETRICAMENTE NÃO LINEARES</b>	<b>43</b>
4.1	Pórticos com Não Linearidade Geométrica . . . . .	44
4.1.1	Pórtico de Williams . . . . .	45
4.1.2	Pórtico de Lee . . . . .	48
4.1.3	<i>Diamond Frame</i> . . . . .	52
4.2	Viga em Balanço . . . . .	57
4.3	Arcos Circulares . . . . .	61
4.3.1	Semi-círculo Birrotulado . . . . .	62
4.3.2	Arco Rotulado-Engastado de Grande Altura . . . . .	65
<b>5</b>	<b>EXEMPLOS NUMÉRICOS DE PROBLEMAS FISICAMENTE NÃO LINEARES</b>	<b>71</b>
5.1	Solicitações Axiais . . . . .	73
5.1.1	Tração Axial . . . . .	74
5.1.2	Compressão Axial . . . . .	80
5.2	Compressão Diametral . . . . .	85
5.3	Flexão em Três Pontos . . . . .	97
5.4	Cisalhamento em Quatro Pontos . . . . .	102
5.5	Painel em “L” . . . . .	110
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>116</b>
6.1	Sugestões para Trabalhos Futuros . . . . .	120
<b>A</b>	<b>Metodologia de Obtenção dos Parâmetros da Equação de Restrição</b>	<b>121</b>
A.1	Controle de Carga . . . . .	121
A.2	Controle Direto de Deslocamento . . . . .	122
A.3	Controle de Comprimento de Arco . . . . .	123
A.4	Controle de Deslocamento Generalizado . . . . .	125
<b>B</b>	<b>Discretização Temporal para Controle de Comprimento de Arco</b>	<b>127</b>
B.1	Discretização Temporal para Taxa de Energia Dissipada . . . . .	128
B.2	Discretização Temporal para Taxa de Energia Interna . . . . .	129

<b>C</b>	<b>Classe <i>StandardNewtonRaphson</i></b>	<b>130</b>
<b>D</b>	<b>Relações Tensão-Deformação e Equação de Evolução Polinomial do Dano</b>	<b>134</b>
D.1	Relações Tensão-Deformação . . . . .	134
D.1.1	Proposta de Boone et al. (1986) . . . . .	135
D.1.2	Proposta de Carreira e Chu (1985, 1986) . . . . .	136
D.1.3	Aproximação Bilinear . . . . .	137
D.2	Equação de Evolução do Dano com Variação Polinomial . . . . .	138
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>139</b>

# Lista de Tabelas

5.1	Passos incrementais segundo tamanho de trinca inicial. . . . .	87
5.2	Resistências à compressão diametral. . . . .	92

# Lista de Figuras

2.1	Algoritmo para métodos de controle (Fuina, 2009). . . . .	11
2.2	Representação esquemática do incremento de dissipação de energia por unidade de volume (area sombreada). . . . .	21
3.1	Notação UML usada para representar classes e interfaces. . . . .	28
3.2	Organização do núcleo numérico do INSANE. . . . .	29
3.3	Diagrama de implementação da interface <i>Persistence</i> . . . . .	30
3.4	Diagrama da classe abstrata <i>Solution</i> . . . . .	32
3.5	Diagrama de herança e objetos da classe <i>StandardNewtonRaphson</i> . . .	33
3.6	Diagrama de implementações da interface <i>IterativeStrategy</i> . . . . .	34
3.7	Diagrama de implementações das interfaces <i>InternalEnergyControl</i> e <i>DissipatedEnergyControl</i> . . . . .	37
3.8	Diagrama de intervenções na interface <i>IterativeStrategy</i> e na classe <i>StandardNewtonRaphson</i> . . . . .	40
3.9	Método de obtenção de trajetória de equilíbrio usando controle baseado em taxas de energia interna e dissipada. . . . .	41
4.1	Pórtico de Williams: configuração geométrica. . . . .	45
4.2	Pórtico de Williams: deformada. . . . .	46
4.3	Pórtico de Williams: deslocamento vertical do ponto de controle. . . .	47
4.4	Pórtico de Lee: configuração geométrica. . . . .	48
4.5	Pórtico de Lee: deformada. . . . .	49
4.6	Pórtico de Lee: deslocamento vertical do ponto de controle. . . . .	50
4.7	Pórtico de Lee: deslocamento horizontal do ponto de controle. . . . .	51
4.8	<i>Diamond Frame</i> : configuração geométrica e malha de elementos finitos. .	53
4.9	<i>Diamond Frame</i> : deformada. . . . .	54
4.10	<i>Diamond Frame</i> : deslocamento horizontal do canto direito. . . . .	55

4.11	<i>Diamond Frame</i> : deslocamento vertical do canto inferior. . . . .	56
4.12	Viga em Balanço: configuração geométrica. . . . .	57
4.13	Viga em balanço: deformada. . . . .	58
4.14	Viga em balanço: deslocamento vertical da extremidade livre. . . . .	59
4.15	Viga em balanço: deslocamento horizontal da extremidade livre. . . . .	60
4.16	Semi-círculo: configuração geométrica e malha de elementos finitos. . . . .	62
4.17	Semi-círculo: deformada. . . . .	63
4.18	Semi-círculo: deslocamento vertical do nó central. . . . .	64
4.19	Arco de grande altura: configuração geométrica. . . . .	66
4.20	Arco de grande altura: deformada. . . . .	67
4.21	Arco de grande altura: deslocamento vertical normalizado. . . . .	68
4.22	Arco de grande altura: deslocamento horizontal normalizado. . . . .	69
5.1	Tração axial: configuração geométrica. . . . .	74
5.2	Lei Carreira e Chu (1986) para tração: deformação $\epsilon_{xx}$ . . . . .	76
5.3	Lei Carreira e Chu (1986) para tração: deformada. . . . .	76
5.4	Lei Carreira e Chu (1986) para tração: trajetórias de equilíbrio. . . . .	77
5.5	Lei Boone et al. (1986) para tração: trajetórias de equilíbrio. . . . .	78
5.6	Aproximação bilinear para tração: trajetórias de equilíbrio. . . . .	79
5.7	Compressão axial: configuração geométrica. . . . .	81
5.8	Lei Carreira e Chu (1985) para compressão: deformação $\epsilon_{xx}$ . . . . .	82
5.9	Lei Carreira e Chu (1985) para compressão: deformada. . . . .	82
5.10	Lei Carreira e Chu (1985) para compressão: trajetórias de equilíbrio. . . . .	83
5.11	Aproximação bilinear para compressão: trajetórias de equilíbrio. . . . .	84
5.12	Compressão diametral: configuração geométrica e malha de elementos finitos (Adaptado de Penna (2011)). . . . .	86
5.13	Trajetoórias do deslocamento horizontal do ponto de controle. . . . .	87
5.14	Trajetoórias do deslocamento vertical do contato do bloco com o cilindro. . . . .	88
5.15	Compressão diametral: Trinca inicial de 4 mm: (a) Tensão $\sigma_{xx}$ ; (b) Deformada. . . . .	88
5.16	Compressão diametral: Trinca inicial de 8 mm: (a) Tensão $\sigma_{xx}$ ; (b) Deformada. . . . .	89
5.17	Compressão diametral: Trinca inicial de 12 mm: (a) Tensão $\sigma_{xx}$ ; (b) Deformada. . . . .	89

5.18	Compressão diametral: Trinca inicial de 16 <i>mm</i> : (a) Tensão $\sigma_{xx}$ ; (b) Deformada. . . . .	90
5.19	Compressão diametral: Trinca inicial de 20 <i>mm</i> : (a) Tensão $\sigma_{xx}$ ; (b) Deformada. . . . .	90
5.20	Compressão diametral: Trinca inicial de 24 <i>mm</i> : (a) Tensão $\sigma_{xx}$ ; (b) Deformada. . . . .	91
5.21	Compressão diametral: Trinca inicial de 28 <i>mm</i> : (a) Tensão $\sigma_{xx}$ ; (b) Deformada. . . . .	91
5.22	Compressão diametral: variação da resistência nominal. . . . .	93
5.23	Deslocamento horizontal do ponto de controle: trajetórias de equilíbrio.	94
5.24	Deslocamento vertical do contato com o bloco: trajetórias de equilíbrio.	95
5.25	Trinca de 12 <i>mm</i> : deformação principal $\epsilon_{xx}$ nas proximidades da região de bifurcação. . . . .	96
5.26	Trinca de 12 <i>mm</i> : deformada nas proximidades da região de bifurcação.	97
5.27	Flexão em três pontos: configuração geométrica e malha de elementos finitos (Adaptado de Penna (2011)). . . . .	98
5.28	Flexão em três pontos: deformação $\epsilon_{xx}$ . . . . .	99
5.29	Flexão em três pontos: deformação $\epsilon_{yy}$ . . . . .	99
5.30	Flexão em três pontos: deformação $\gamma_{xy}$ . . . . .	100
5.31	Flexão em três pontos: deformada. . . . .	100
5.32	Flexão em três pontos: trajetórias de equilíbrio do deslocamento vertical do ponto de controle. . . . .	101
5.33	Cisalhamento em quatro pontos: configuração geométrica e malha de elementos finitos (Adaptado de Penna (2011)). . . . .	103
5.34	Leis Carreira e Chu (1985, 1986): tensão $\tau_{xy}$ . . . . .	104
5.35	Leis Carreira e Chu (1985, 1986): deformada. . . . .	105
5.36	Leis Carreira e Chu (1985); Boone et al. (1986): tensão $\tau_{xy}$ . . . . .	105
5.37	Leis Carreira e Chu (1985); Boone et al. (1986): deformada. . . . .	106
5.38	Leis Carreira e Chu (1985, 1986): trajetórias de equilíbrio. . . . .	107
5.39	Leis Carreira e Chu (1985); Boone et al. (1986): trajetórias de equilíbrio.	108
5.40	Cisalhamento em quatro pontos: trajetória de equilíbrio do deslizamento tangencial relativo das extremidades da trinca (CMSD). . . . .	109
5.41	Painel em “L”: configuração geométrica e malha de elementos finitos (Adaptado de Penna (2011)). . . . .	111

5.42	Painel em “L”: evolução do dano na direção da deformação principal.	112
5.43	Painel em “L”: evolução da deformada. . . . .	113
5.44	Painel em “L”: trajetórias de equilíbrio do deslocamento vertical máximo. . . . .	114
D.1	Lei de Boone et al. (1986). . . . .	135
D.2	Leis de Carreira e Chu (1985, 1986): (a) Compressão; (b) Tração. . .	136
D.3	Aproximação bilinear: (a) Compressão; (b) Tração. . . . .	137

# Lista de Abreviaturas e Siglas

BEM	<i>Boundary Element Method</i>
CLACM	<i>Cylindrical Arc-Length Control Method</i>
CMSD	<i>Crack Mouth Sliding Displacement</i>
CNPq	Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
DDCM	<i>Direct Displacement Control Method</i>
ERCM	<i>Energy Rate Control Method</i>
FUMEC	Fundação Mineira de Educação e Cultura
GDCM	<i>Generalized Displacement Control Method</i>
GSP	<i>Generalized Stiffness Parameter</i>
MEF	Método dos Elementos Finitos
MSM	Método sem Malha
POO	Programação Orientada a Objetos
UFMG	Universidade Federal de Minas Gerais
UML	<i>Unified Modelling Language</i>
XFEM	<i>Extended Finite Element Method</i>
XML	<i>Extensible Markup Language</i>

# Lista de Símbolos

## Capítulo 2

- $[K]_{j-1}^i$  Matriz de rigidez tangente da iteração  $j - 1$  do passo  $i$
- $\{\delta U\}_j^i$  Vetor de deslocamentos incrementais da iteração  $j$  do passo  $i$
- $\delta \lambda_j^i$  Incremento do fator de carga da iteração  $j$  do passo  $i$
- $\{P\}$  Vetor de cargas de referência ou vetor de forças externas normalizado
- $\{Q\}_{j-1}^i$  Vetor de forças residuais da iteração  $j - 1$  do passo  $i$
- $\{\delta U^P\}_j^i$  Vetor de deslocamentos incrementais da iteração  $j$  do passo  $i$  associado à carga de referência
- $\{\delta U^Q\}_j^i$  Vetor de deslocamentos incrementais da iteração  $j$  do passo  $i$  associado à carga residual
- $\lambda_j^i$  Fator de carga proporcional da iteração  $j$  do passo  $i$
- $\{U\}_j^i$  Vetor de deslocamentos da iteração  $j$  do passo  $i$
- $\{F\}_j^i$  Vetor de forças equivalentes às tensões internas ao final da iteração  $j$  do passo  $i$
- $\varphi(U, \lambda)$  Equação de restrição
- $\{C\}$  Vetor de constantes da equação de restrição
- $k$  Constante da equação de restrição

$H_j^i$	Parâmetro incremental de controle da iteração $j$ do passo $i$ da equação de restrição
$[K^P]_{j-1}^i$	Matriz de rigidez tangente generalizada da iteração $j - 1$ do passo $i$ associada à carga de referência
$[K^Q]_{j-1}^i$	Matriz de rigidez tangente generalizada da iteração $j - 1$ do passo $i$ associada à carga residual
$[L]$	Matriz triangular inferior
$[D]$	Matriz diagonal
$ K $	Determinante da matriz de rigidez
$ D $	Determinante da matriz diagonal
$\{T_1\}$	Vetor de transformações referente à carga de referência
$\{T_2\}$	Vetor de transformações referente à carga residual
$ K^P $	Determinante da matriz $[K^P]$
$[A]$	Matriz de cofatores de elementos da matriz $[K^P]$
$\{C_1^f\}$	Vetor de cofatores de elementos da matriz $[K^P]$
$\{C_2^f\}$	Vetor de cofatores de elementos da matriz $[K^P]$
$\dot{S}_{int}$	Incremento interno de entropia
$\dot{S}$	Incremento total de entropia
$\dot{Q}$	Calor externo absorvido pela estrutura
$T$	Temperatura associada à densidade da entropia
$\dot{D}$	Dissipação de energia

$\psi$	Energia livre de Helmholtz
$\dot{\psi}$	Taxa de energia livre de Helmholtz
$\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}$	Dissipação devida aos efeitos plásticos e termoelásticos
$d$	Parâmetro de dano ( $\in [0, 1]$ )
$g(d)$	Função de dano
$C_{ijkl}$	Tensor constitutivo do material
$\sigma_{ij}, \sigma_{kl}$	Tensores de tensões
$\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{kl}$	Tensores de deformações
$\delta_{ik}, \delta_{jl}$	Delta de Kronecker de componentes $ik$ e $jl$ , respectivamente
$\dot{\varepsilon}_{ij}$	Taxa de evolução das deformações
$\dot{d}$	Taxa de evolução da variável de dano
$\Omega$	Subdomínio do problema
$\tau^D$	Energia dissipada total
$\tau^U$	Energia interna total
$\tau^{\dot{D}}$	Taxa de variação da energia dissipada
$\tau^{\dot{U}}$	Taxa de variação da energia interna
$\{\varepsilon\}^\Omega$	Vetor de deformações do subdomínio $\Omega$
$\{U\}^\Omega$	Vetor de deslocamentos nodais do subdomínio $\Omega$
$[B]^\Omega$	Matriz de transformação dos deslocamentos nodais em deformações do subdomínio $\Omega$
$\{\dot{U}\}$	Vetor de variação de deslocamentos $U$

$\{\sigma\}$	Vetor de tensão generalizada
$\{\dot{\sigma}\}$	Vetor de variação da tensão generalizada
$\{f\}^{\text{int}}$	Vetor de força interna
$\{\dot{f}\}^{\text{int}}$	Vetor de variação da força interna
$\dot{\lambda}$	Taxa de variação do fator de carga proporcional
$\varphi^D(U, \lambda)$	Função de restrição do controle de comprimento de arco baseada na energia dissipada
$\varphi^U(U, \lambda)$	Função de restrição do controle de comprimento de arco baseada na energia interna
$\varphi^F(U, \lambda)$	Função de restrição do controle de carga
$\delta\tau^D$	Incremento de energia dissipada
$\delta\tau^U$	Incremento de energia interna
$\delta\tau_1^F$	Incremento de carga na primeira iteração

### Capítulo 3

$X$	Vetor de variáveis de estado do problema
$\dot{X}$	Vetor que representa a primeira variação das grandezas de estado
$\ddot{X}$	Vetor que representa a segunda variação das grandezas de estado
$A, B, C$	Matrizes de coeficientes da equação de equilíbrio, que podem ou não depender da variável de estado e suas derivadas
$R, F$	Vetores independentes do sistema de equações
$a$	Parâmetro de controle de precisão

$\delta\tau^u$	Tamanho do passo de energia interna prescrito
$\delta\tau^{u,1}$	Incremento de energia interna prescrito referente ao primeiro passo da análise, calculado a partir do incremento de carga $\delta\lambda$
$\delta\tau^d$	Tamanho do passo de energia dissipada obtido a partir de $\delta\tau^{u,1}$ e do parâmetro $a$

## Capítulo 4

$E$	Módulo de elasticidade
$I_z$	Momento de inércia da área em relação ao eixo $z$
$M_0$	Momento de referência aplicado
$L$	Comprimento total
$\alpha$	Ângulo referente à direção de aplicação da carga

## Capítulo 5

$\nu$	Coefficiente de Poisson
$E_0$	Módulo de elasticidade elástico
$E_2$	Módulo tangente do ramo descendente da lei bilinear
$f_t$	Resistência à tração
$\varepsilon_t$	Deformação relativa ao limite elástico na tração
$G_f$	Energia de fratura
$f_c$	Resistência à compressão
$\varepsilon_c$	Deformação relativa ao limite elástico na compressão
$L_c$	Comprimento característico

$\beta_r$	Fator de retenção ao cisalhamento
$\epsilon_{xx}$	Deformação normal na direção $x$
$\epsilon_{yy}$	Deformação normal na direção $y$
$\gamma_{xy}$	Deformação de cisalhamento no plano $xy$
$c$	Extensão inicial da trinca
$\sigma_{xx}$	Tensão normal na direção $x$
$P_{max}$	Carga máxima aplicada
$\sigma_r$	Resistência à compressão diametral
$D_{ef}$	Diâmetro efetivo
$t$	Espessura
$\tau_{xy}$	Tensão de cisalhamento no plano $xy$
$f_e$	Tensão equivalente relativa ao limite de resistência do material
$\kappa_0$	Valor da deformação equivalente a partir do qual o processo de dano se inicia
$\tilde{E}$	Módulo de elasticidade equivalente

## Apêndice A

$f(x(t))$	Função de domínio $\in \mathbf{R}$
$\dot{x}(t)$	Varição da variável $x$ em um determinado tempo $t$
$x_i, x_{i+1}$	Solução para a variável $x$ nos incrementos $i$ e $i + 1$ da análise, respectivamente
$\Delta t$	Intervalo de tempo

$\alpha$	Parâmetro que define o método de aproximação da análise numérica
$\Delta\tau^D$	Variação da energia dissipada para um determinado incremento da análise
$\Delta\tau^U$	Variação da energia interna para um determinado incremento da análise

## Apêndice B

$\{\delta U\}_j^c$	Incremento de deslocamento para um componente $c$ do vetor de deslocamentos
$\{\delta U^P\}_j^c$	Incremento de deslocamento associado à carga de referência para um componente $c$ do vetor de deslocamentos
$\{\delta U^Q\}_j^c$	Incremento de deslocamento associado à carga residual para um componente $c$ do vetor de deslocamentos
$\{\Delta U\}$	Vetor de deslocamentos acumulados num determinado passo incremental
$\Delta S$	Variação do comprimento do arco

## Apêndice D

$\sigma$	Tensão corrente
$\sigma_c, \sigma_t$	Tensões equivalentes de compressão e de tração, respectivamente
$\varepsilon$	Deformação corrente
$\varepsilon_{c,u}, \varepsilon_{t,u}$	Deformações últimas admissíveis na compressão e tração, respectivamente
$E^s$	Módulo de elasticidade longitudinal secante
$E^t$	Módulo de elasticidade longitudinal tangente
$\tilde{\varepsilon}$	Medida de deformação equivalente

# Resumo

Esta dissertação de mestrado tem como objetivo a implementação computacional do método de controle de comprimento de arco baseado em taxas de energia interna e dissipada para análise não linear de estruturas. Tal implementação foi realizada no núcleo numérico do sistema INSANE (*INteractive Structural ANalysis Environment*).

Os procedimentos para solucionar as equações de equilíbrio de problemas não lineares baseiam-se no processo iterativo de Newton-Raphson, ao qual são acoplados métodos de controle. A ideia de tais métodos é tratar o parâmetro de carga como uma variável, e impor uma condição de restrição ao sistema de equações que descreve o equilíbrio, de forma que tal parâmetro possa ser determinado.

As formulações para o equacionamento de métodos de controle são descritas enfatizando-se suas respectivas limitações para descrever uma trajetória de equilíbrio. Propõe-se o método de controle de comprimento de arco baseado em taxas de energia como uma alternativa para contornar tais limitações. O método proposto apresenta ainda a possibilidade de alterar as suas equações de controle dissipativas e não dissipativas de forma natural durante a análise. Simulações numéricas de problemas física e geometricamente não lineares são apresentadas, assim como conclusões gerais sobre a eficiência e a aplicabilidade deste método em relação aos principais métodos clássicos de controle.

Palavras-Chave: Análise Não Linear, Controle de Comprimento de Arco, Métodos Numéricos, Soluções Incrementais-Iterativas, Taxa de Energia

# Abstract

This master's thesis is concerned about the computational implementation of the arc-length control method based on the rates of internal and dissipated energy for nonlinear analysis of structures. This implementation has been fulfilled in the numerical core of the INSANE system (INteractive Structural ANalysis Environment).

In nonlinear problems, most of the procedures for solving equilibrium equations are based on the iterative process of Newton-Raphson in which control methods are linked. The idea of these methods is to consider the loading parameter as a variable and to set a restraint condition into the system of equilibrium equations, in such a way that this parameter can be evaluated.

Formulations for the equation of control methods and their respective limitations for tracing an equilibrium path are discussed. The arc-length control method based on rates of energy is proposed as an alternative to overcome these limitations. The proposed method also presents the feature of switching its dissipative and non-dissipative control equations in a natural way during the analysis. Numerical simulations of physically and geometrically nonlinear problems are presented, along with general conclusions about the efficiency and the applicability of the method when compared to the classical control methods.

Keywords: Nonlinear Analysis, Arc-Length Control, Numerical Methods, Incremental-Iterative Solutions, Energy Rate

# Agradecimentos

Aos meus pais, pelo esforço, pelo sacrifício, pela presença constante, pelo amor incondicional e por me impulsionar, sempre me ensinando a ser forte sem perder a humildade.

Ao Professor Dr. Roque Pitangueira, pela confiança depositada em mim, pela paciência, pela disponibilidade e pela excelência na orientação deste trabalho.

À Professora Dra. Jamile Fuina, pelos ensinamentos, pelos conselhos, pelas oportunidades e pela excelência na orientação das pesquisas nas quais trabalhamos juntos.

Aos demais professores do Departamento de Engenharia de Estruturas da UFMG, pela contribuição à minha formação e no desenvolvimento deste trabalho.

Aos funcionários do Departamento de Engenharia de Estruturas da UFMG, pela presteza e qualidade nos serviços.

À Universidade FUMEC, pela sólida formação que me proporcionou na graduação.

À UFMG, por possibilitar a consolidação da minha formação através do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas.

Aos meus amigos do mestrado e à equipe INSANE, por compartilharem desta caminhada sempre dispostos a ajudar.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

# Capítulo 1

## INTRODUÇÃO

A Mecânica Estrutural é o ramo da Engenharia que estuda o comportamento de estruturas sob a ação de forças. Este comportamento é dito linear quando o campo de deslocamentos ou deformações não interfere na rigidez da estrutura, isto é, há proporcionalidade entre tensões e deformações. Quando ocorre amolecimento ou enrijecimento da rigidez durante o processo de carregamento ou descarregamento, o comportamento é dito não linear, podendo apresentar trechos de instabilidade. O comportamento não linear de uma estrutura é pouco intuitivo e, em uma análise numérica, pode ser descrito em sua totalidade por uma trajetória de equilíbrio, ressaltando assim a importância de uma busca constante por soluções que sejam adequadas para obter a sua representação.

A modelagem pelo Método dos Elementos Finitos (MEF) de fenômenos em problemas não lineares requer a solução de um sistema de equações algébricas não lineares. Conforme Fuina (2004), diversos procedimentos têm sido propostos para obtenção da solução que obedeça aos critérios impostos pelas leis cinemáticas, as condições de equilíbrio e o modelo do material. Estes procedimentos, de modo geral, envolvem um processo incremental-iterativo de tal forma que uma variável ou um conjunto de variáveis do problema sejam controladas. Por este motivo, os procedimentos para solucionar as equações não lineares são também denominados de métodos de controle da análise não linear.

A ocorrência de pontos de instabilidade têm sido a principal dificuldade na obtenção

da solução de uma trajetória de equilíbrio, tornando-se assunto de diversos temas de pesquisas nas últimas décadas. Estas pesquisas resultaram no desenvolvimento de uma grande variedade de métodos de controle para determinar as referidas trajetórias. Dentre estes, destacam-se os métodos clássicos de controle de carga e de controle direto de deslocamento (Batoz e Dhat, 1979). Apesar das limitações destes métodos, os mesmos passaram a constituir uma base para o desenvolvimento de outros métodos mais gerais e eficazes, nos quais combinam-se deslocamentos e fator de carga. Tal classe de métodos de controle é conhecida como método de comprimento de arco constante (Wempner, 1971; Ricks, 1972, 1979; Ramm, 1980; Crisfield, 1981, 1983).

Em seguida, na tentativa de se obter melhores descrições para as trajetórias, surgiram diferentes métodos importantes, podendo-se citar o controle de deslocamento generalizado (Yang e Shieh, 1990; Yang e Kuo, 1994), o controle por trabalho (Yang e McGuire, 1985), o controle de resíduo ortogonal (Krenk e Hededal, 1993; Krenk, 1995), o controle indireto de deslocamento (de Borst, 1986, 1987), o controle de deformações (Chen e Schreyer, 1990; Fuina, 2004), o controle por dissipação de energia (Gutiérrez, 2004), entre outros. A escolha do método de controle a ser usado durante uma análise requer cautela, pois estes podem apresentar limitações que resultem em instabilidade numérica na transição de um ponto limite para outro. A utilização do método de controle de carga, por exemplo, consegue descrever apenas o ramo ascendente de uma trajetória de equilíbrio. O método de controle direto de deslocamento, por sua vez, é capaz de descrever o comportamento pós-crítico; todavia, falha sempre que se encontra fenômenos de decréscimo de carga acompanhado de decréscimo de deslocamento.

A fim de se obter com precisão a representação de tal trajetória, os algoritmos usados devem estar aptos a detectar a ocorrência de pontos limites durante toda a análise. Os métodos de controle de comprimento de arco tornam-se, em muitos casos, indispensáveis na análise não linear de estruturas devido à eficiência destes

em representar os múltiplos fenômenos de decréscimo de carga com acréscimo de deslocamento e de decréscimo de carga acompanhado de decréscimo de deslocamento encontrados.

O sistema computacional INSANE (*INteractive Structural ANalysis Environ-ment*) é um projeto de software livre e de código aberto, implementado em linguagem Java segundo o paradigma de Programação Orientada a Objetos, desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais e disponível em <http://www.insane.dees.ufmg.br>. Este sistema dispõe de um núcleo numérico capaz de solucionar diferentes tipos de modelos discretos de análise estrutural. O INSANE dispõe ainda de recursos para solucionar problemas não lineares que puderam ser expandidos para o trabalho aqui proposto.

Tal expansão consistiu em implementar o método de controle de comprimento de arco, baseado em taxas de energia interna e dissipada, no núcleo numérico do sistema. Este método de controle, fundamentado nos trabalhos de Gutiérrez (2004) e de Borst et al. (2016), requer apenas um parâmetro a ser informado pelo usuário para traçar completamente uma trajetória de equilíbrio. Além disso, o mesmo mostra-se eficaz para os fenômenos citados anteriormente.

## 1.1 Objetivos

### 1.1.1 Objetivo Geral

Esta dissertação insere-se na linha de pesquisa de Métodos Numéricos e Computacionais do Departamento de Engenharia de Estruturas da UFMG. Refere-se à implementação no núcleo numérico do sistema INSANE do método de controle de comprimento de arco baseado em taxas de energia interna e dissipada.

### 1.1.2 Objetivos Específicos

A implementação do método de controle de comprimento de arco baseado em taxas de energia foi realizada expandindo-se os recursos já existentes no núcleo numérico do sistema INSANE. A solução de equações não lineares de equilíbrio deste sistema é realizada através de um procedimento incremental-iterativo no qual são acoplados os métodos de controle da análise não linear, seguindo o algoritmo proposto por Yang e Shieh (1990). Este algoritmo foi implementado utilizando-se o paradigma de programação orientada a objetos e tem como função padronizar os métodos de controle em um único procedimento numérico.

A fim de possibilitar a implementação do método de controle de comprimento de arco aqui proposto, as formulações apresentadas nos trabalhos de Gutiérrez (2004) e de de Borst et al. (2016) tiveram que ser reescritas de forma a serem compatíveis com a abordagem proposta por Yang e Shieh (1990).

Assim, mantendo o foco no objetivo geral, os seguintes objetivos específicos foram perseguidos:

1. Formular o método de controle de comprimento de arco baseado em taxas de energia segundo a abordagem apresentada por Yang e Shieh (1990);
2. Implementar o método de controle de comprimento de arco baseado em taxas de energia no núcleo numérico do sistema INSANE;
3. Realizar simulações numéricas de problemas física e geometricamente não lineares utilizando o método de controle proposto, validando os resultados com as respostas de outros métodos de controle disponíveis no sistema.

## 1.2 Organização do Texto

Esta dissertação está organizada em 6 capítulos e 4 apêndices.

No capítulo 1, apresenta-se a Introdução do trabalho, justificando-se a escolha do tema, além de definir os objetivos e mostrar a organização do texto.

No capítulo 2, os recursos empregados para solução de problemas não lineares são abordados, assim como a formulação para avaliar a consistência de métodos de controle da análise não linear. Em seguida, apresentam-se as formulações do controle baseado em taxas de energia interna e dissipada obtidas a partir da segunda lei da termodinâmica.

No capítulo 3, as implementações computacionais do sistema INSANE para processamento de problemas não lineares são apresentadas, bem como o projeto orientado a objetos implementado no núcleo numérico deste sistema para representar o método de controle baseado em taxas de energia.

No capítulo 4, apresentam-se simulações numéricas de problemas geometricamente não lineares para avaliar o desempenho deste método, comparando o mesmo com diferentes métodos clássicos de controle.

No capítulo 5, apresentam-se simulações numéricas de problemas fisicamente não lineares para avaliar o desempenho e a generalidade deste método. Ainda neste capítulo, são realizadas simulações com diferentes métodos clássicos de controle para efeitos de comparação.

No capítulo 6, são apresentadas as conclusões gerais sobre a eficiência e a aplicabilidade do método implementado para solucionar problemas que apresentam não linearidade física e geométrica, bem como sugestões para trabalhos futuros.

No apêndice A, Metodologia de Obtenção dos Parâmetros da Equação de Restrição, apresentam-se os principais métodos clássicos de controle da análise não linear e como são obtidos os parâmetros de restrição para cada caso.

No apêndice B, Discretização Temporal para Controle de Comprimento de Arco, apresentam-se alguns métodos de aproximação da análise numérica e como as equações de restrição de comprimento de arco baseadas em taxas de energia foram obtidas a partir destes.

No apêndice C, a classe *StandardNewtonRaphson*, responsável por proporcionar a solução de um passo incremental-iterativo, é detalhada para consolidar as teorias apresentadas nos Capítulos 2 e 3.

Por fim, no apêndice D, as relações tensão-deformação e a equação de evolução do dano com variação polinomial usadas nos exemplos do Capítulo 5 são apresentadas, de forma a consolidar as especificações sobre os modelos adotados.

## Capítulo 2

# CONTROLE DE COMPRIMENTO DE ARCO BASEADO EM TAXAS DE ENERGIA

O processo de obtenção de trajetórias de equilíbrio, em virtude dos numerosos fenômenos de decréscimo de carga com acréscimo de deslocamento (pontos limites de carga) e de decréscimo de carga com decréscimo de deslocamento (pontos limites de deslocamento) encontrados, requer cada vez mais métodos de controle que sejam capazes de detectar a ocorrência de regiões de instabilidade e de localização de deformações durante toda a análise não linear.

Na tentativa de superar as limitações dos métodos clássicos no referido processo, propõe-se o método de controle de comprimento de arco em termos de taxas de energia interna e dissipada baseado nos trabalhos de Gutiérrez (2004) e de Borst et al. (2016). A ideia de um método de controle baseado em taxas de variação de energia parte do fato de que problemas fisicamente não lineares apresentam uma dissipação de energia que cresce de forma monotônica no processo de evolução de uma falha estrutural. Tal fato foi primeiramente estudado no trabalho de Gutiérrez (2004), onde o autor formula uma equação de restrição baseada na energia que é liberada após a ruptura da estrutura e aplica a mesma para modelos discretos de dano contínuo. A ideia foi então prosseguida e aprimorada por Verhoosel et al.

(2009) para modelos de plasticidade e problemas geometricamente não lineares com dano. Este último demonstra que a representação da dissipação de energia torna-se complexa ou até mesmo impossível em termos de quantidades nodais para problemas envolvendo não linearidade geométrica, onde as descrições Lagrangeanas são usadas.

Esta classe de métodos de controle de comprimento de arco (Gutiérrez, 2004; Verhoosel et al., 2009) emprega o controle de carga no início do processo de carregamento e, quando a taxa de energia dissipada atinge um determinado valor, permuta para o controle de comprimento de arco baseado em energia dissipada.

Posteriormente, o uso de um controle de carga para descrever os trechos não dissipativos foi substituído por uma função de controle baseada em taxas de energia interna e foi devidamente testado para duas situações envolvendo fratura frágil (de Borst et al., 2016). Em seu método, o autor utiliza um parâmetro adicional para efetuar a mudança entre as funções de controle, requerindo do usuário uma certa experiência em antecipar o comportamento da estrutura.

O método de controle aqui proposto permuta automaticamente entre energia interna e energia dissipada, sendo completamente baseado em energia. O tamanho do passo de energia é calculado no início do processo e, durante toda a fase de carregamento, um controle baseado em energia interna é usado. No regime em que se inicia o processo de dissipação de energia do corpo, o controle baseado em energia interna permuta para o controle baseado em energia dissipada.

Este capítulo apresenta o principal procedimento incremental-iterativo disponível na literatura para solução de equações não lineares de equilíbrio, o método de Newton-Raphson Padrão, assim como a formulação de restrição proposta por Yang e Shieh (1990) para avaliar a consistência de métodos de controle. Em seguida, apresentam-se as formulações do controle baseado em taxas de energia dissipada e do controle baseado em taxas de energia interna obtidas a partir da segunda lei da termodinâmica, conforme a abordagem de Yang e Shieh (1990).

## 2.1 Procedimento Incremental-Iterativo

Em uma análise não linear, confronta-se com o problema de resolver um sistema com  $n + 1$  incógnitas, sendo  $n$  deslocamentos incrementais e um incremento no fator de carga, e  $n + 1$  equações, sendo  $n$  equações de equilíbrio e uma equação de restrição (Yang e Shieh, 1990). Para obter a solução de tal sistema, faz-se necessário a utilização de um processo incremental-iterativo, ao qual são acoplados um ou mais métodos de controle.

Conforme Fuina (2009), o método de Newton-Raphson Padrão, procedimento incremental-iterativo mais conhecido nos dias atuais, pressupõe que a matriz de rigidez tangente é recalculada a cada iteração. Neste caso, a equação incremental de equilíbrio correspondente à iteração  $j$  do passo  $i$  pode ser escrita conforme a seguinte expressão:

$$[K]_{j-1}^i \cdot \{\delta U\}_j^i = \delta \lambda_j^i \{P\} + \{Q\}_{j-1}^i \quad (2.1)$$

onde,

$[K]_{j-1}^i$  é a matriz de rigidez tangente na iteração  $j - 1$  do passo  $i$ , função do campo de deslocamentos  $\{U\}_{j-1}^i$ ;

$\{\delta U\}_j^i$  é o vetor deslocamentos incrementais da iteração  $j$  do passo  $i$ ;

$\delta \lambda_j^i$  é o incremento do fator de cargas na iteração  $j$  do passo  $i$ ;

$\{P\}$  é o vetor de cargas de referência;

$\{Q\}_{j-1}^i$  é o vetor de forças residuais da iteração  $j - 1$  do passo  $i$ .

Prescrito um valor para  $\delta \lambda_j^i$  em função do método de controle adotado, pode-se obter  $\{\delta U\}_j^i$  em função das parcelas associadas à carga de referência  $\{\delta U^P\}_j^i$  e à carga residual  $\{\delta U^Q\}_j^i$ , na forma:

$$\{\delta U\}_j^i = \delta \lambda_j^i \{\delta U^P\}_j^i + \{\delta U^Q\}_j^i \quad (2.2)$$

com

$$[K]_{j-1}^i \cdot \{\delta U^P\}_j^i = \{P\} \quad (2.3)$$

e

$$[K]_{j-1}^i \cdot \{\delta U^Q\}_j^i = \{Q\}_{j-1}^i. \quad (2.4)$$

A atualização do fator de carga,  $\lambda_j^i$ , e do vetor de deslocamentos,  $\{U\}_j^i$ , é feita da seguinte forma:

$$\lambda_j^i = \lambda_{j-1}^i + \delta\lambda_j^i \quad (2.5)$$

$$\{U\}_j^i = \{U\}_{j-1}^i + \{\delta U\}_j^i. \quad (2.6)$$

O vetor de cargas residuais,  $\{Q\}_j^i$ , é obtido a partir do vetor de forças equivalentes às tensões internas ao final da iteração  $j$ ,  $\{F\}_j^i$ , como:

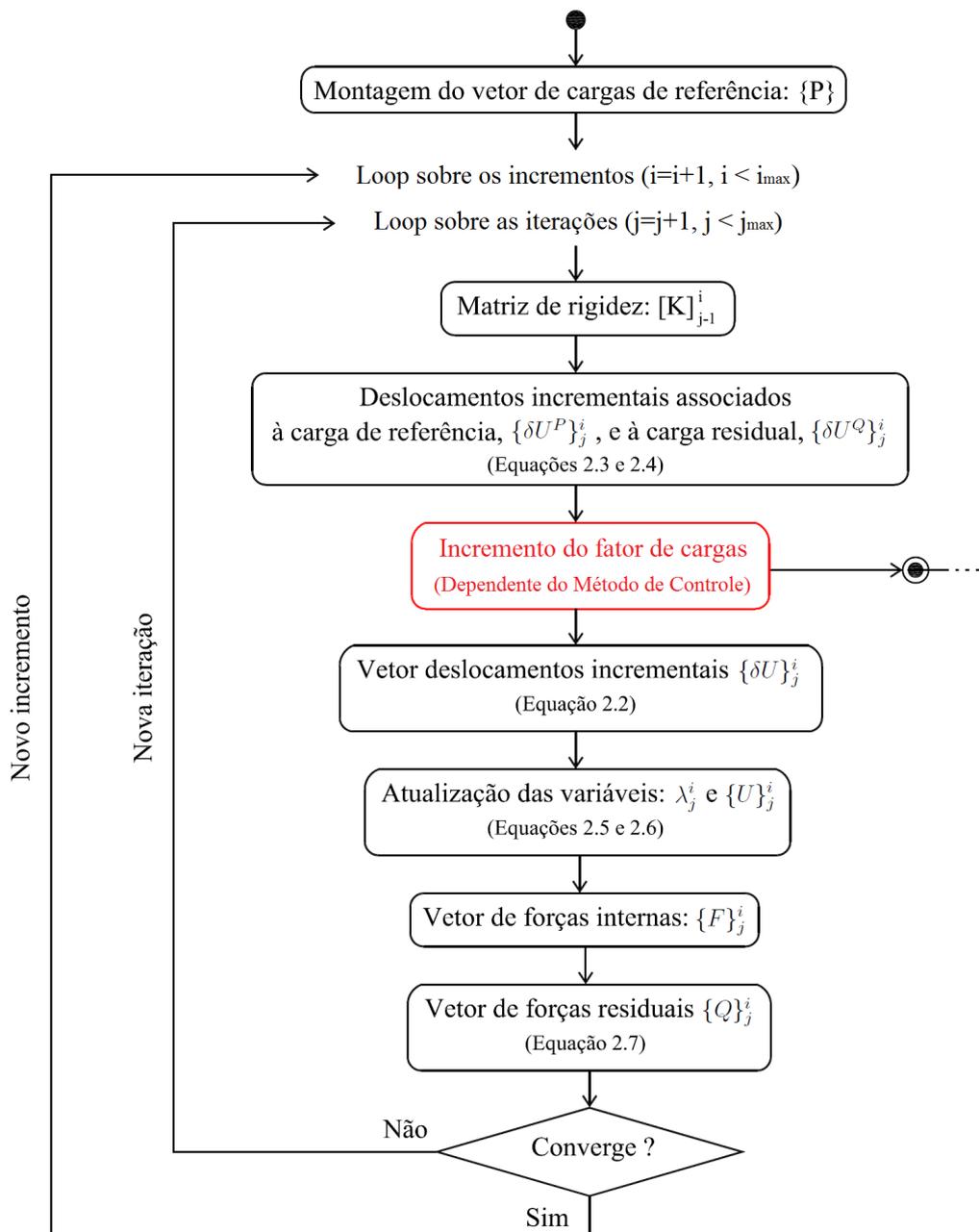
$$\{Q\}_j^i = \lambda_j^i \{P\} - \{F\}_j^i. \quad (2.7)$$

Observa-se que no início de cada passo incremental,  $\{Q\}_j^i$  é assumido ser nulo.

Ao final de cada iteração, a convergência é verificada por meio da magnitude do vetor de forças residuais  $\{Q\}_j^i$  e/ou da magnitude do vetor de deslocamentos incrementais  $\{\delta U\}_j^i$ . O procedimento iterativo continua até que o desejado critério de convergência seja alcançado.

O diagrama da Figura 2.1 resume os principais passos do algoritmo genérico de Yang e Shieh (1990) para representar o processo realizado pelo método de Newton-Raphson Padrão.

O procedimento em evidência refere-se à obtenção do incremento do fator de cargas,  $\delta\lambda_j^i$ , através de uma equação de restrição que envolve combinações de grandezas do problema. Tal equação de restrição, definida pelo tipo de controle adotado, pode ser formulada com base em conceitos de estabilidade estrutural, por meio de parâmetros de restrição.



**Figura 2.1:** Algoritmo para métodos de controle (Fuina, 2009).

## 2.2 Formulação para Equação de Restrição

A representação de uma equação de restrição, comumente denominada por  $\varphi$ , pode ser generalizada na forma abaixo (Yang e Shieh, 1990):

$$\varphi(U, \lambda) = \{C\}^T \cdot \{\delta U\}_j^i + k\delta\lambda_j^i - H_j^i, \quad (2.8)$$

onde,

$\{C\}$  e  $k$  são constantes da equação de restrição;

$H_j^i$  é o parâmetro incremental de controle da iteração  $j$  do passo  $i$  da equação de restrição.

As equações de restrição  $\varphi$ , devido ao fato de serem usadas para restringir os deslocamentos ou rotações, são, geralmente, de acordo com a literatura, consideradas iguais a zero. No presente trabalho, todas estas equações também são consideradas como nulas.

A confiabilidade e a eficácia de um processo de solução não linear depende da seleção adequada das constantes  $\{C\}$  e  $k$ , e do parâmetro de controle  $H_j^i$  para atender a condição de restrição.

As Equações 2.2, 2.3 e 2.4, juntamente com a Equação 2.8, podem ser agrupadas em uma única equação matricial, como:

$$[K^P]_{j-1}^i \begin{Bmatrix} \delta\lambda_j^i \{\delta U^P\}_j^i \\ \delta\lambda_j^i \end{Bmatrix} + [K^Q]_{j-1}^i \begin{Bmatrix} \{\delta U^Q\}_j^i \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ H_j^i \end{Bmatrix}. \quad (2.9)$$

Na Equação 2.9, as matrizes de rigidez generalizadas  $[K^P]_{j-1}^i$  e  $[K^Q]_{j-1}^i$ , devidas às cargas de referência e residual, respectivamente, são definidas por:

$$[K^P]_{j-1}^i = \begin{bmatrix} [K]_{j-1}^i & -\{P\} \\ \{C\}^T & k \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

$$[K^Q]_{j-1}^i = \begin{bmatrix} [K]_{j-1}^i & -\{Q\}_{j-1}^i \\ \{C\}^T & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

A matriz de rigidez pode ser decomposta usando a fatoração de Cholesky modificada, na forma:

$$[K] = [L] \cdot [D] \cdot [L]^T, \quad \text{com } |K| = |D| \quad (2.12)$$

onde,

$[L]$  é a matriz triangular inferior;

$[D]$  é a matriz diagonal;

$|K|$  e  $|D|$  são os determinantes das matrizes  $[K]$  e  $[D]$ , respectivamente.

Assim, a decomposição da matriz de rigidez generalizada  $[K^P]$  é dada por:

$$[K^P] = \begin{bmatrix} [L] & \{0\} \\ \{T_2\}^T & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [D] & \{0\} \\ \{0\}^T & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [L]^T & \{T_1\} \\ \{0\}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

onde  $\{T_1\}$  e  $\{T_2\}$  são vetores de transformações referentes às cargas de referência e residual, respectivamente, de tal forma que:

$$-\{P\} = [L] \cdot [D] \cdot \{T_1\} \quad (2.14a)$$

$$\{C\}^T = [L]^T \cdot [D] \cdot \{T_2\}^T \quad (2.14b)$$

$$d = k - \{T_2\}^T \cdot [D] \cdot \{T_1\}. \quad (2.14c)$$

A partir das Equações 2.14a e 2.14b, obtém-se a seguinte relação:

$$\{T_2\}^T \cdot [D] \cdot \{T_1\} = -\{C\}^T \cdot [K]^{-1} \cdot \{P\}, \quad (2.15)$$

que pode ser usada para representar o determinante da matriz de rigidez generalizada,  $|K^P|$ , em função dos parâmetros da equação de restrição  $\{C\}$  e  $k$ , da seguinte forma:

$$|K^P| = (k + \{C\}^T \cdot [K]^{-1} \cdot \{P\})|K| = (k + \{C\}^T \cdot \{\delta U^P\})|K|. \quad (2.16)$$

Reorganizando-se a Equação 2.9, de tal forma que o incremento do fator de carga fique em evidência, obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} \delta\lambda_j^i \{\delta U^P\}_j^i \\ \delta\lambda_j^i \end{Bmatrix} = ([K^P]^{-1})_{j-1}^i \begin{Bmatrix} \{0\} \\ H_j^i \end{Bmatrix} - ([K^P]^{-1})_{j-1}^i \cdot [K^Q]_{j-1}^i \begin{Bmatrix} \{\delta U^Q\}_j^i \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (2.17)$$

A Equação 2.17 indica que, para que os parâmetros da trajetória de equilíbrio,  $\delta\lambda_j^i$  e  $\{\delta U^P\}_j^i$ , sejam vinculados, o determinante da matriz de rigidez generalizada  $[K^P]$  deve ser diferente de zero.

A inversa da matriz de rigidez generalizada devida à carga de referência pode ser representada por:

$$[K^P]^{-1} = \frac{1}{|K^P|} \begin{bmatrix} [A] & -\{C_1^f\} \\ \{C_2^f\}^T & |K| \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

onde  $[A]$ ,  $\{C_1^f\}$  e  $\{C_2^f\}$  são matriz e vetores que representam os cofatores dos elementos da matriz  $[K^P]$ .

A partir da substituição das Equações 2.11 e 2.18 na Equação 2.17, juntamente com o uso das Equações 2.4 e 2.16, obtém-se a descrição no espaço da relação entre o parâmetro de carga  $\delta\lambda_j^i$  e a equação de restrição, como:

$$\delta\lambda_j^i = \frac{1}{\{C\}^T \cdot \{\delta U^P\}_j^i + k} (H_j^i - \{C\}^T \cdot \{\delta U^Q\}_j^i). \quad (2.19)$$

A Equação 2.19 permite avaliar a coerência e a estabilidade numérica de diversos tipos de métodos incrementais-iterativos, bastando que se redefina os parâmetros de restrição. Um método de solução é dito ser estável quando ambos o fator de carga proporcional e o campo de deslocamentos permanecem vinculados durante todo o processo de obtenção da trajetória de equilíbrio. No momento em que a carga ou qualquer um dos componentes de deslocamento deixarem de ser ligados em determinados pontos, pode ocorrer instabilidade ou divergência numérica no processo de solução (Yang e Kuo, 1994).

A partir da Equação 2.16, constata-se que, no encontro de um ponto crítico, o determinante da matriz de rigidez torna-se igual a zero e, conseqüentemente, a matriz  $[K^P]$  também torna-se nula. Dessa forma, observa-se que métodos de controle que podem ser descritos pela Equação 2.8 falham nos pontos limites. Portanto, no que se refere aos métodos de solução, deve-se preocupar apenas com os critérios de convergência dos mesmos ao se aproximar e ao partir de um ponto crítico, uma vez que a solução é encontrada na proximidade deste e, não, no ponto em questão.

Vale ressaltar que o incremento do fator de carga encontrado na Equação 2.19 pode igualmente ser obtido diretamente pelas Equações 2.2 e 2.8. Todavia, pelo procedimento precedente, é possível investigar com mais precisão os papéis de ambos o parâmetro de carga e o campo de deslocamentos no processo incremental-iterativo.

## 2.3 Segunda Lei da Termodinâmica para Comportamento Dissipativo

O comportamento dissipativo de uma estrutura pode ser descrito pela segunda lei da termodinâmica. A segunda lei estabelece o critério de estabilidade para o

sistema e, a partir deste, obtém-se o conceito de dissipação de energia usado para formulação do método de controle apresentado neste capítulo.

A segunda lei da termodinâmica afirma que a entropia de qualquer sistema tende a um máximo, ou seja, transformações que impliquem em uma diminuição da entropia jamais ocorrerão. Segundo Callen (1985); Jirasek e Bažant (2001), a aplicação da segunda lei requer que o sistema esteja em, ou próximo do, equilíbrio termodinâmico. Para tal, consideram-se apenas meios cuja temperatura é uniforme ou quase regular. Dessa forma, o incremento interno de entropia de uma estrutura é dado por:

$$\dot{\mathcal{S}}_{int} = \dot{\mathcal{S}} - \frac{\dot{\mathcal{Q}}}{T} \geq 0 \quad (2.20)$$

onde,

$\dot{\mathcal{S}}$  é o incremento total da entropia;

$\dot{\mathcal{Q}}$  é o calor externo que fluiu na estrutura;

$T$  é a temperatura associada à densidade da entropia.

Um incremento interno total correspondente à  $\dot{\mathcal{S}}_{int} = 0$  representa uma alteração no estado do sistema que mantém o equilíbrio termodinâmico, sendo esta alteração reversível. Para o caso de  $\dot{\mathcal{S}}_{int} > 0$ , a alteração no sistema é irreversível e pode ocorrer a instabilidade da estrutura.

Após a estrutura se tornar instável, a energia denotada por  $-T\dot{\mathcal{S}}_{int}$  torna-se energia cinética e inicia-se o processo de deslocamentos da estrutura. Eventualmente, a energia cinética é convertida em calor devido a processos dissipativos como viscosidade, plasticidade, atrito, dano e fratura. Assim, em condições isotérmicas, pode-se aplicar a segunda lei da termodinâmica para descrever o comportamento de dissipação, na forma:

$$\dot{\mathcal{S}}_{int} = \dot{\mathcal{D}} \geq 0 \quad (2.21)$$

onde  $\dot{\mathcal{D}}$  é a dissipação de energia do sistema.

## 2.4 Controle de Comprimento de Arco baseado em Energia Dissipada

Este método, introduzido por Gutiérrez (2004), é baseado na energia que é dissipada no regime pós-crítico, sendo este específico para descrever o ramo descendente de uma trajetória de equilíbrio. A seguir, a formulação para o controle de comprimento de arco é apresentada, baseando-se nos conceitos da segunda lei da termodinâmica apresentados anteriormente.

### 2.4.1 Formulação

De acordo com a desigualdade de Clausius-Duhem, para temperatura constante, a dissipação de energia,  $\dot{\mathcal{D}}$ , pode ser escrita na seguinte forma:

$$\dot{\mathcal{D}} = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\psi} \geq 0 \quad (2.22)$$

onde,

$\psi$  é a densidade de energia ou energia livre de Helmholtz;

$\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}$  é a dissipação devida aos efeitos inelásticos e termoelásticos (Lemaitre e Desmorat, 2005).

Assume-se, em seguida, uma lei de dano para o comportamento constitutivo entre as tensões e as deformações, na forma:

$$\sigma_{ij}(\varepsilon_{ij}, d) = g(d)C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (2.23)$$

onde,

$d \in [0, 1]$  é o parâmetro de dano da função de dano  $g(d)$ ;

$C_{ijkl}$  é o tensor de elasticidade simétrico de quarta ordem;  
 $\varepsilon_{kl}$  é o tensor de deformações.

Segundo Lemaitre (1992), a segunda lei da termodinâmica é satisfeita quando a taxa de dano é positiva, o que resulta em alterações irreversíveis na estrutura, como descrito na seção anterior. Satisfazendo-se este critério, a densidade de energia pode ser escrita em função da variável de dano e das deformações globais como:

$$\psi(\varepsilon_{ij}, d) = \frac{1}{2} \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij}, d) \varepsilon_{ij} \quad (2.24)$$

de modo que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{kl}} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \sigma_{ij} = \frac{1}{2} g(d) C_{ijkl} \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} g(d) C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \delta_{ik} \delta_{jl} \\ &= g(d) C_{ijkl} \varepsilon_{ij} = g(d) C_{klij} \varepsilon_{ij} = \sigma_{kl} \end{aligned} \quad (2.25)$$

onde  $\delta_{ik}$  e  $\delta_{jl}$  são deltas de Kronecker com as seguintes propriedades:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{para } i \neq j \\ 1, & \text{para } i = j. \end{cases} \quad (2.26)$$

A taxa de densidade de energia  $\dot{\psi}$ , na Equação 2.22, pode ser obtida de duas formas. A primeira opção é utilizando a regra da cadeia na Equação 2.24 e a Equação 2.25, da seguinte forma:

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial \psi}{\partial d} \dot{d} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial \psi}{\partial d} \dot{d}. \quad (2.27)$$

A dissipação de energia para este caso é então dada por:

$$\dot{\mathcal{D}} = -\frac{\partial \psi}{\partial d} \dot{d} \geq 0. \quad (2.28)$$

A segunda opção é obtida aplicando-se a regra do produto como na expressão abaixo:

$$\dot{\psi} = \frac{1}{2}\dot{\sigma}_{ij}\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} \quad (2.29)$$

Substituindo-se o resultado na Equação 2.22, obtém-se:

$$\dot{\mathcal{D}} = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{1}{2}\dot{\sigma}_{ij}\varepsilon_{ij} \geq 0. \quad (2.30)$$

As formas gerais das Equações 2.28 e 2.30 para uma determinada região do domínio do problema, denominada por  $\Omega$ , podem ser escritas na seguinte forma:

$$\dot{\tau}^D = \int_{\Omega} \dot{\mathcal{D}} dV = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2}\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{1}{2}\dot{\sigma}_{ij}\varepsilon_{ij} \right) dV = \int_{\Omega} -\frac{\partial\psi}{\partial d}\dot{d} dV \quad (2.31)$$

onde  $\dot{\tau}^D$  é a taxa de energia dissipada do sistema.

Observa-se que a energia dissipada,  $\tau^D$ , cresce de forma monotônica, uma vez que  $\dot{\tau}^D$  é obtida a partir da evolução da variável de dano  $\dot{d} \geq 0$  e que  $\partial\psi/\partial d \leq 0$  na Equação 2.31.

A taxa de energia dissipada pode ser representada matricialmente utilizando-se a relação deformação-deslocamento nodal dada por:

$$\{\varepsilon\}^{\Omega} = [B]^{\Omega} \cdot \{U\}^{\Omega} \quad (2.32)$$

onde  $[B]^{\Omega}$  é a matriz de transformação dos deslocamentos nodais em deformações do subdomínio  $\Omega$ .

Logo, chega-se, para a taxa de energia dissipada, à seguinte expressão:

$$\dot{\tau}^D = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \{\dot{U}\}^T \cdot [B]^T \cdot \{\sigma\} dV - \int_{\Omega} \frac{1}{2} \{U\}^T \cdot [B]^T \cdot \{\dot{\sigma}\} dV, \quad (2.33)$$

que pode ser reescrita em função das forças internas e externas atuantes na estrutura, como:

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}^D &= \frac{1}{2} \{\dot{U}\}^T \cdot \{f\}^{\text{int}}(U) - \frac{1}{2} \{U\}^T \cdot \{\dot{f}\}^{\text{int}}(U) \\ &= \frac{1}{2} \{\dot{U}\}^T \cdot \lambda \{P\} - \frac{1}{2} \{U\}^T \cdot \dot{\lambda} \{P\} \end{aligned} \quad (2.34)$$

onde,

$\{P\}$  é o vetor de forças externas normalizado ou vetor de cargas de referência, como denominado na Seção 2.1;

$\lambda$  é o fator de carga.

A Equação 2.34 pode ser discretizada por meio da aplicação da regra do ponto médio generalizada apresentada no Apêndice B e usada como equação de restrição  $\varphi(U, \lambda)$  do problema, na forma:

$$\varphi^D(U, \lambda) = \frac{1}{2} (\lambda^{i-1} \{U\}^{iT} - \lambda^i \{U\}^{i-1T}) \cdot \{P\} - \delta\tau^D \quad (2.35)$$

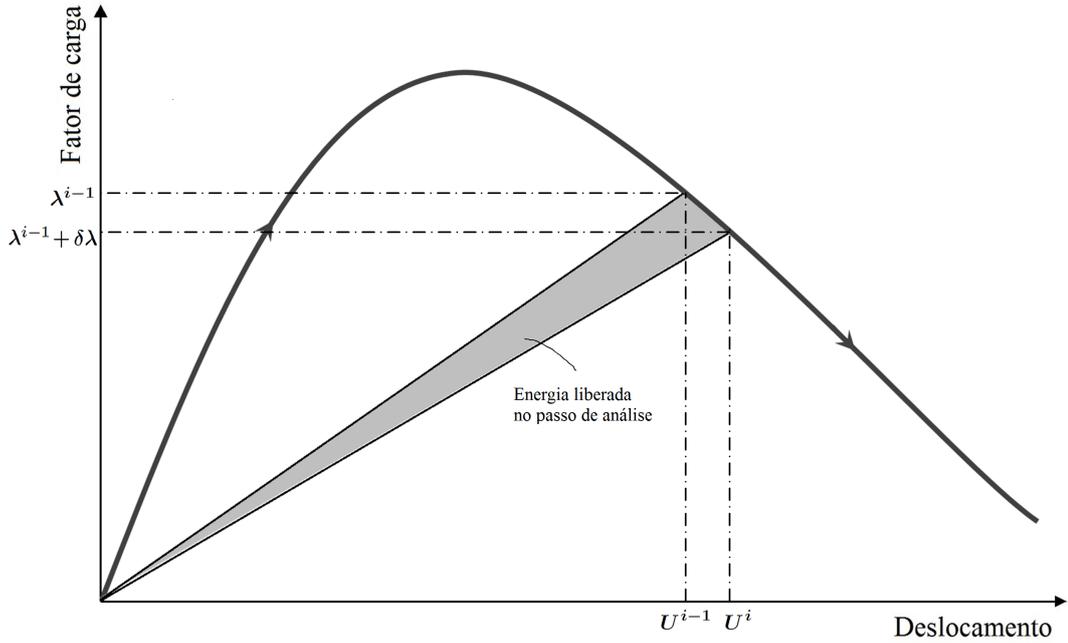
com

$$\lambda^i = \lambda^{i-1} + \delta\lambda \quad (2.36)$$

e

$$\{U\}^i = \{U\}^{i-1} + \{\delta U\}. \quad (2.37)$$

Observa-se que a Equação 2.35 representa o tamanho do passo de dissipação de energia por unidade de volume. Esquemáticamente, é possível ilustrar este incremento como na Figura 2.2.



**Figura 2.2:** Representação esquemática do incremento de dissipação de energia por unidade de volume (area sombreada).

A partir da Figura 2.2, constata-se que a variação da energia dissipada também poderia ter sido discretizada através de produto vetorial; todavia, o procedimento aqui exposto torna-se necessário para completo entendimento da formulação.

Efetuando-se as substituições das Equações 2.36 e 2.37 na Equação 2.35, obtém-se:

$$\delta\tau^D = \frac{1}{2}[\lambda^{i-1}\{\delta U\}_j^i - \delta\lambda_j^i\{U\}^{i-1T}] \cdot \{P\}, \quad (2.38)$$

onde o parâmetro  $\delta\tau^D$  é interpretado como o tamanho do passo prescrito para cada incremento; isto é, prescreve a quantidade de energia que deve ser dissipada em um incremento.

A Equação 2.38 pode ainda ser representada em função dos vetores de deslocamentos incrementais  $\{\delta U^P\}$  e  $\{\delta U^Q\}$  (Equação 2.2) associados às cargas de referência e residual, respectivamente, na seguinte forma:

$$\delta\tau^D = \frac{1}{2}[\delta\lambda_j^i \lambda^{i-1} \{\delta U^P\}_j^{iT} + \lambda^{i-1} \{\delta U^Q\}_j^{iT} - \delta\lambda_j^i \{U\}^{i-1T}] \cdot \{P\}. \quad (2.39)$$

### 2.4.2 Solução Incremental-Iterativa

O método de controle de comprimento de arco baseado em energia dissipada supõe que as iterações são processadas a uma taxa de energia constante. O incremento de energia é então dado por:

$$\delta\tau = \begin{cases} \text{Constante,} & \text{para } j = 1 \\ 0, & \text{para } j > 1. \end{cases} \quad (2.40)$$

O vetor de forças residuais  $\{Q\}_{j-1}^i$  é nulo para a primeira iteração de cada incremento, isto é,  $\{Q\}_0^i = \{0\}$ , de modo que os deslocamentos incrementais a ele associados  $\{\delta U^Q\}_j^i$  também são nulos, de acordo com a Equação 2.4. Assim, o desenvolvimento da Equação 2.39, para a primeira iteração, fornece a seguinte expressão:

$$\delta\lambda_j^i = \frac{2\delta\tau^D}{\{\delta U^P\}_j^{iT} \cdot \lambda^{i-1} \{P\} - \{U\}^{i-1T} \cdot \{P\}}, \quad \text{para } j = 1. \quad (2.41)$$

Para as iterações subsequentes, o incremento de energia é feito igual a zero, conforme a Equação 2.40, e obtém-se:

$$\delta\lambda_j^i = -\frac{\{\delta U^Q\}_j^{iT} \cdot \lambda^{i-1} \{P\}}{\{\delta U^P\}_j^{iT} \cdot \lambda^{i-1} \{P\} - \{U\}^{i-1T} \cdot \{P\}}, \quad \text{para } j > 1. \quad (2.42)$$

A condição de equação de restrição estabelecida por Yang e Shieh (1990) pode ser verificada atribuindo-se os valores a seguir nas Equações 2.8 e 2.19. Estes valores são encontrados a partir de uma comparação entre as Equações 2.8 e 2.38.

$$k = -\{U\}^{i-1T} \cdot \{P\} \quad (2.43a)$$

$$\{C\} = \lambda^{i-1} \{P\} \quad (2.43b)$$

$$H = 2\delta\tau^D. \quad (2.43c)$$

Tal parametrização mostra que as Equações 2.41 e 2.42 satisfazem plenamente a referida exigência.

Novamente, é importante ressaltar que o controle é baseado na energia que é dissipada durante a falha da estrutura. Assim, este apresenta pouca eficiência quando o processo não apresenta uma quantidade significativa de dissipação de energia. A seguir, o método de controle de comprimento de arco baseado em energia interna é exposto, como uma alternativa para solucionar tal limitação.

## 2.5 Controle de Comprimento de Arco baseado em Energia Interna

O método de controle de comprimento de arco em termos de energia interna, proposto por de Borst et al. (2016), é específico para o regime no qual a taxa de energia dissipada devida à evolução da variável de dano é muito pequena, como, por exemplo, no início do processo de carregamento. A função de controle deste método é obtida a partir da energia livre do sistema, onde a mesma pode ser entendida como sendo a energia contida no corpo e que pode ser resgatada sob descarregamento quando na ausência de processos dissipativos.

### 2.5.1 Formulação

Considerando uma dada região  $\Omega$  do domínio do problema, pode-se reescrever a Equação 2.29, em sua forma geral, de modo a se obter a taxa de energia interna,

aqui denominada por  $\dot{\tau}^U$ , como:

$$\dot{\tau}^U = \int_{\Omega} \dot{\psi} \, dV = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \{U\}^T \cdot [B]^T \cdot \{\dot{\sigma}\} \, dV + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \{\dot{U}\}^T \cdot [B]^T \cdot \{\sigma\} \, dV. \quad (2.44)$$

Em função das forças internas e externas atuantes no sistema, a taxa de energia interna pode ser escrita na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{\tau}^U &= \frac{1}{2} \{\dot{U}\}^T \cdot \{f\}^{\text{int}}(U) + \frac{1}{2} \{U\}^T \cdot \{\dot{f}\}^{\text{int}}(U) \\ &= \frac{1}{2} \{\dot{U}\}^T \cdot \lambda \{P\} + \frac{1}{2} \{U\}^T \cdot \dot{\lambda} \{P\}, \end{aligned} \quad (2.45)$$

que, mais uma vez, pode ser discretizada através da aplicação da regra do ponto médio (Apêndice B) e usada como equação de restrição, conforme a seguinte expressão:

$$\varphi^U(U, \lambda) = \frac{1}{2} (\lambda^i \{U\}^{iT} - \lambda^{i-1} \{U\}^{i-1T}) \cdot \{P\} - \delta\tau^U. \quad (2.46)$$

Analogamente ao controle de comprimento de arco baseado na taxa de energia dissipada, o parâmetro  $\delta\tau^U$  na Equação 2.46 pode ser interpretado como o tamanho do passo prescrito para um incremento; isto é, prescreve a quantidade de energia interna que deve ser introduzida no sistema em um incremento.

As substituições das Equações 2.36, 2.37 e 2.2 na Equação 2.46 resultam em:

$$\delta\tau^U = \frac{1}{2} [(\lambda^{i-1} + \delta\lambda_j^i) (\{U\}^{i-1T} + \delta\lambda_j^i \{\delta U^P\}_j^{iT} + \{\delta U^Q\}_j^{iT}) - \lambda^{i-1} \{U\}^{i-1T}] \cdot \{P\}. \quad (2.47)$$

## 2.5.2 Solução Incremental-Iterativa

No início da primeira iteração ( $j = 1$ ) do primeiro passo ( $i = 1$ ), o vetor de deslocamentos é nulo, como mostra a Equação 2.6, e tem-se:

$$\left. \frac{\partial \varphi^U(U, \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{j=1}^{i=1} = \frac{1}{2} \{U\}^T \cdot \{P\} \Big|_{j=1}^{i=1} = \frac{1}{2} \{U\}_1^{1T} \cdot \{P\} = 0. \quad (2.48)$$

Logo, a função de restrição do controle de comprimento de arco baseado em energia interna se reduz à uma expressão equivalente à função do controle de carga  $\varphi^F$ , como:

$$\varphi_1^U(U, \lambda) = \varphi_1^F(\lambda) = \delta\lambda - \delta\tau_1^F, \quad \left. \frac{\partial \varphi_1^F(\lambda)}{\partial \lambda} \right|^{i=1} = 1, \quad (2.49)$$

onde  $\delta\tau_1^F$  é o incremento de carga da primeira iteração.

A partir de  $\delta\tau_1^F = \delta\lambda$ , obtém-se a solução para o vetor de deslocamentos da primeira iteração do primeiro passo e a energia interna para o primeiro incremento pode ser escrita na forma abaixo:

$$\delta\tau^U = \frac{1}{2} (\lambda^1 \{U\}^{1T} - \lambda^0 \{U\}^{0T}) \cdot \{P\} = \frac{1}{2} \delta\lambda^1 \{\delta U\}^{1T} \cdot \{P\}. \quad (2.50)$$

A Equação 2.50 fornece as soluções para o incremento do fator de carga na primeira iteração e nas demais iterações do primeiro passo da seguinte forma:

$$\delta\lambda_1^1 = \sqrt{\frac{2\delta\tau^U}{\{\delta U^P\}_1^{1T} \cdot \{P\}}} \quad (2.51)$$

$$\delta\lambda_j^1 = -\frac{\{\delta U^Q\}_j^{1T} \cdot \{P\}}{\{\delta U^P\}_j^{1T} \cdot \{P\}}, \quad \text{para } j > 1. \quad (2.52)$$

Para os passos subsequentes, o desenvolvimento da Equação 2.47 fornece os valores para o incremento do fator de carga. No início de cada passo incremental, como visto anteriormente, não há cargas residuais e, conseqüentemente, conforme a Equação 2.4, o vetor deslocamentos incrementais  $\{\delta U^Q\}_j^i$  é nulo. Assim, desprezando-se

o termo de segunda ordem, obtém-se, para a primeira iteração:

$$\delta\lambda_j^i = \frac{2\delta\tau^U}{\{\delta U^P\}_j^{iT} \cdot \lambda^{i-1}\{P\} + \{U\}^{i-1T} \cdot \{P\}}, \quad \text{para } j = 1. \quad (2.53)$$

Para as demais iterações, o incremento de energia no sistema é considerado igual a zero, de acordo com a Equação 2.40 e, desprezando-se o termo de segunda ordem, a seguinte expressão é obtida:

$$\delta\lambda_j^i = -\frac{\{\delta U^Q\}_j^{iT} \cdot \lambda^{i-1}\{P\}}{\{\delta U^P\}_j^{iT} \cdot \lambda^{i-1}\{P\} + \{U\}^{i-1T} \cdot \{P\} + \{\delta U^Q\}_j^{iT} \cdot \{P\}}, \quad \text{para } j > 1. \quad (2.54)$$

A funcionalidade do método de controle de comprimento de arco para alterar as suas funções de controle dissipativas e não dissipativas, de acordo com a resposta do problema, será apresentada no capítulo seguinte, no qual será contemplado o procedimento adotado para a implementação computacional.

## Capítulo 3

# IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

As soluções incrementais-iterativas apresentadas no capítulo anterior foram incorporadas no núcleo numérico do sistema computacional INSANE, que é um ambiente para análise estrutural desenvolvido em linguagem de programação JAVA, conforme a metodologia de Programação Orientada a Objetos (POO). Dentre os diferenciais de se usar linguagens de POO em relação a outros paradigmas de programação que também possibilitam operações semelhantes, destacam-se os conceitos de herança e de encapsulamento.

A herança é o mecanismo através do qual uma estrutura de dados e métodos existente pode ser naturalmente estendida, facilitando assim a reutilização do código. Em programação orientada a objetos, tal estrutura é denominada de classe e deve conter, para determinado modelo numérico, dados a serem representados e as operações a serem efetuadas com estes dados. Conforme Goodrich e Tamassia (2007), este mecanismo permite projetar classes genéricas que podem ser especializadas por outras classes, onde estas reutilizam o código das mais genéricas.

O encapsulamento é a capacidade de se ocultar dados e métodos dentro de modelos, permitindo que apenas operações especializadas manipulem os mesmos. Desta forma, o conceito de encapsulamento propõe que os componentes de um sistema de *software* operem conhecendo o mínimo de dados necessários sobre os demais, possibilitando o desenvolvimento de programas com menos erros e mais clareza. Um

dos maiores benefícios do encapsulamento é oferecer ao programador liberdade na implementação dos detalhes do sistema (Goodrich e Tamassia, 2007).

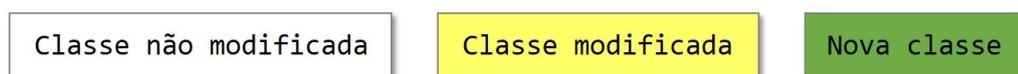
O paradigma de Programação Orientada a Objetos e a clareza do projeto original do INSANE possibilitaram que o método de controle proposto fosse implementado sem alterações nos recursos para soluções não lineares já existentes.

### 3.1 Implementações Computacionais para Problemas Não Lineares

O ambiente computacional INSANE é composto por três grandes aplicações: pré-processador, processador e pós-processador. O pré-processador e o pós-processador são interfaces gráficas que interagem com o usuário, disponibilizando ferramentas de pré e pós-processamento de diversos modelos discretos de análise estrutural. O processador é a aplicação que representa o núcleo numérico do sistema, sendo este o responsável pela obtenção dos resultados dos modelos em questão.

Esta seção apresenta as interfaces e classes do núcleo numérico que, diretamente, se relacionam com as implementações realizadas nesta dissertação. Para tanto, serão utilizados diagramas de classes que seguem o padrão UML (*Unified Modeling Language*), linguagem padronizada para a modelagem de sistemas de *software* orientados a objetos.

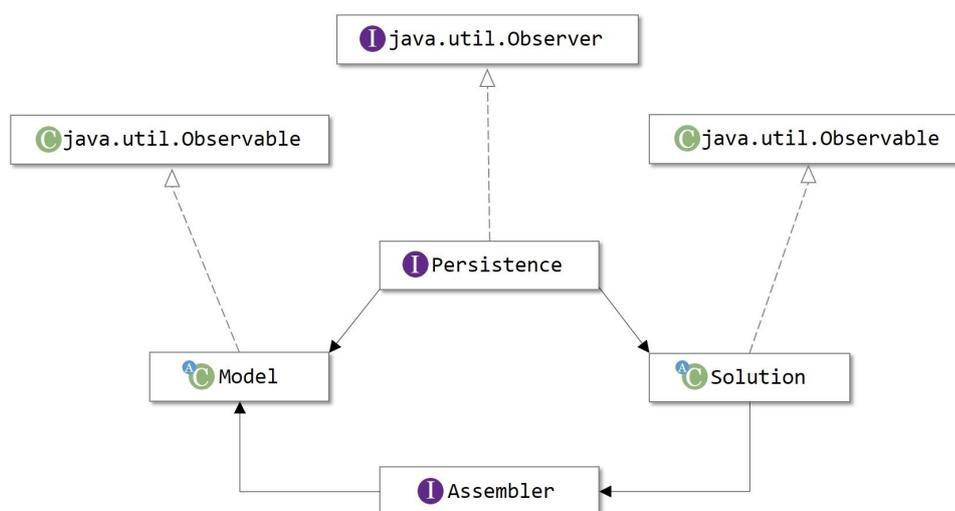
A notação usada nos diagramas para ilustrar tais classes e interfaces é mostrada na Figura 3.1. As classes desenvolvidas são representadas em verde e as classes alteradas em amarelo.



**Figura 3.1:** Notação UML usada para representar classes e interfaces.

### 3.1.1 Organização do Núcleo Numérico

A organização do núcleo numérico do INSANE foi primeiramente descrita por Fonseca (2006), sendo esta fruto dos trabalhos deste autor e de Almeida (2005), Fonseca (2008) e Fuina (2009). O núcleo numérico é composto pelas interfaces *Assembler* e *Persistence* e as classes abstratas *Model* e *Solution*. A Figura 3.2 ilustra como estas superclasses estão relacionadas entre si.



**Figura 3.2:** Organização do núcleo numérico do INSANE.

A interface *Assembler* pertence ao módulo *assembler* e é responsável por montar, conforme o problema a ser resolvido, as matrizes e vetores da equação matricial de equilíbrio, na forma:

$$A\ddot{X} + B\dot{X} + CX = R - F \quad (3.1)$$

onde,

$X$  é o vetor das variáveis de estado do problema;

$\dot{X}$  e  $\ddot{X}$  são os vetores com, respectivamente, a primeira e a segunda variação das grandezas de estado;

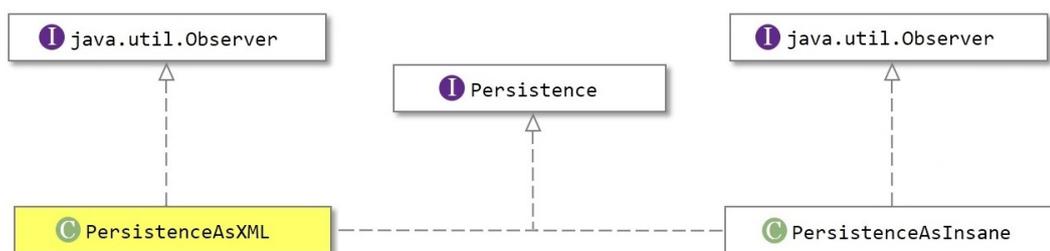
$A$ ,  $B$  e  $C$  são as matrizes dos coeficientes;

$R$  e  $F$  representam vetores independentes do sistema de equações.

A classe abstrata *Model*, que pertence ao módulo *model*, representa o modelo discreto propriamente dito (modelo de elementos finitos, elementos finitos generalizados, elementos finitos estendidos, elementos de contorno ou modelo sem malha). Esta possui os dados relativos ao modelo discreto a ser analisado e fornece para a classe *Assembler* todos os dados necessários para montar a equação de equilíbrio. Neste trabalho, utilizou-se o modelo de elementos finitos para modelagem dos problemas.

A classe *Solution*, implementada por Fuina (2009) e pertencente ao módulo *solution*, é quem inicia o processo de solução linear ou não linear, contendo todos os recursos necessários para resolver este sistema matricial.

Além das diferentes classes que compõem os módulos citados, o núcleo numérico dispõe da interface *Persistence*, pertencente ao módulo *persistence*, que é responsável pelo tratamento dos dados de entrada e por persistir os dados de saída para as demais aplicações, sempre que observa alterações no modelo discreto. A particularização desta interface é ilustrada na Figura 3.3.



**Figura 3.3:** Diagrama de implementação da interface *Persistence*.

A persistência de dados mais utilizada é baseada em arquivos XML (*eXtensible Markup Language*), que é uma abreviação em inglês de “linguagem de marcação estendida”. A XML permite criar dados estruturados, baseada em um arquivo texto. Nesse sentido, a classe *PersistenceAsXML* foi modificada, neste trabalho, para possibilitar a persistência de entrada e saída de dados relacionados à implementação realizada.

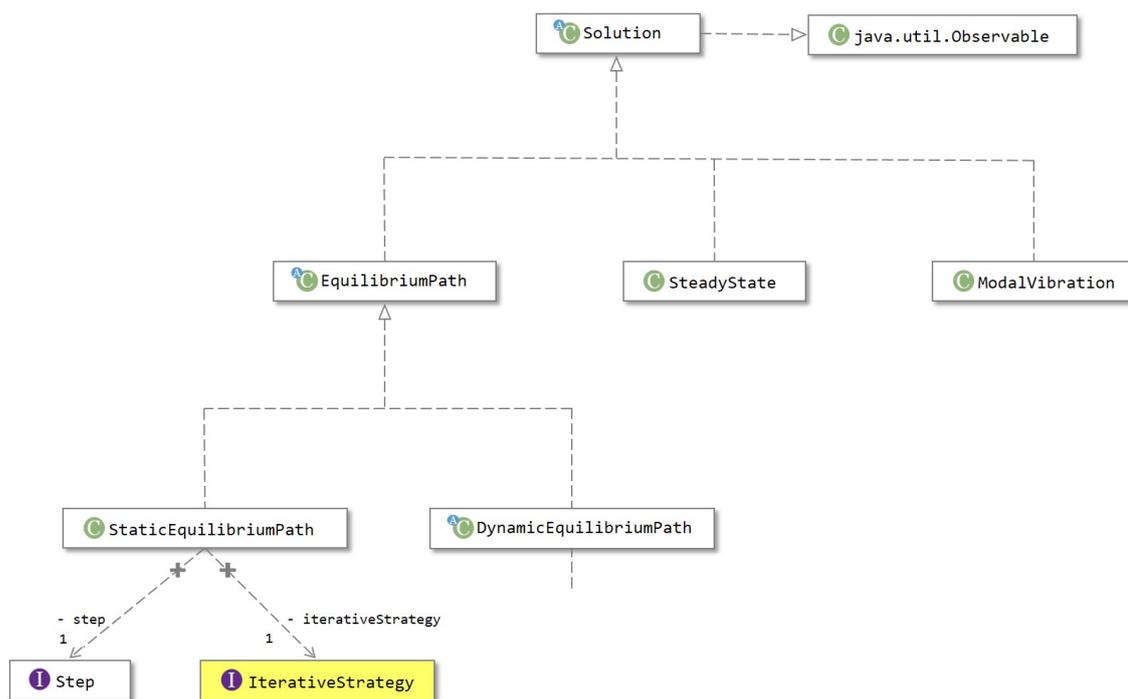
Constata-se que o processo de observação de mudanças ocorre segundo o padrão de projeto *Observer-Observable* (Figura 3.2). Conforme Fuina (2009), quando um objeto dito “observador” (que implementa a interface *java.util.Observer*) é criado, ele é anexado à lista de observadores dos objetos ditos “observados” (que implementam a interface *java.util.Observable*). Na ocorrência de alguma mudança no estado de um objeto observado, é iniciado então o artifício de propagação de mudanças, que se encarrega de notificar os objetos observadores para se atualizarem. Isto garante a consistência e a comunicação entre o componente observador (*Persistence*) e os componentes observados (*Model* e *Solution*).

A seguir, são descritas as implementações do módulo *solution*, especificando todas as classes e interfaces usadas no processo de obtenção de trajetórias de equilíbrio para análise não linear estática.

### 3.1.2 Implementação das Soluções Não Lineares

A equação matricial de equilíbrio do problema, montada através do módulo *assembler*, é resolvida pela classe abstrata *Solution*. Esta classe estende a classe *Observable*, visto que é observada pela persistência. Seu principal método denomina-se *execute()* e é responsável por desencadear todo o processo de solução (Fuina, 2009).

A classe *SteadyState* é a subclasse de *Solution* que representa a solução de um problema linear estático. A classe *ModalVibration* é a subclasse responsável pela solução do problema de autovalores de um modelo discreto, obtendo suas frequências naturais de vibração e seus respectivos modos. A classe abstrata *EquilibriumPath*, por sua vez, é a subclasse de *Solution* que generaliza uma solução na qual o objetivo é determinar uma trajetória de equilíbrio. A forma na qual estas classes estão organizadas no processo de solução é ilustrada na Figura 3.4.



**Figura 3.4:** Diagrama da classe abstrata *Solution*.

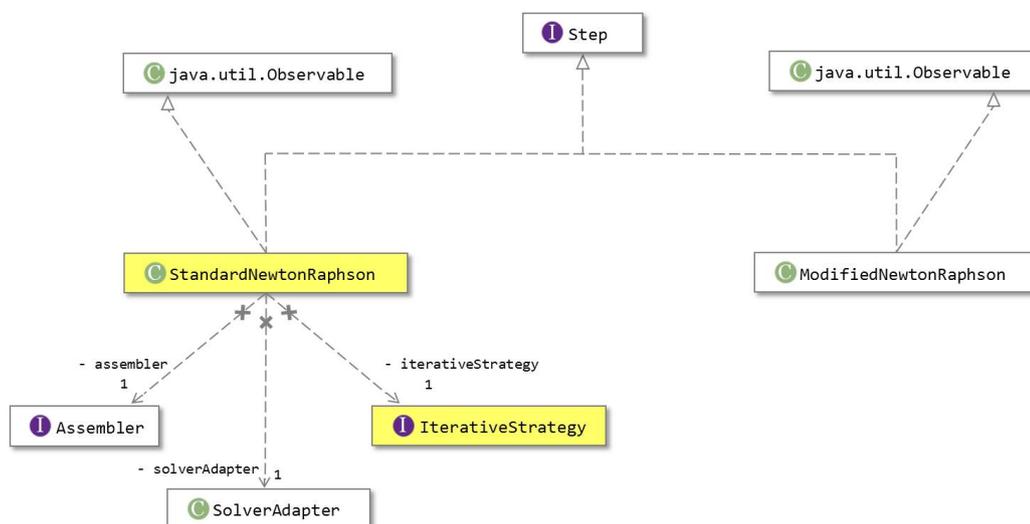
A classe *SteadyState* é a subclasse de *Solution* que representa a solução de um problema linear estático. A classe *ModalVibration* é a subclasse responsável pela solução do problema de autovalores de um modelo discreto, obtendo suas frequências naturais de vibração e seus respectivos modos. A classe abstrata *EquilibriumPath*, por sua vez, é a subclasse de *Solution* que generaliza uma solução na qual o objetivo é determinar uma trajetória de equilíbrio.

A solução de uma trajetória de equilíbrio pode ser não linear estática ou não linear dinâmica. Para o caso de uma análise não linear estática, esta trajetória é habitualmente representada por um gráfico fator de carga *versus* deslocamento. Em uma análise dinâmica, a trajetória de equilíbrio é generalizada pela classe abstrata *DynamicEquilibriumPath*, implementada por Fonseca (2008), e é representada em função do tempo por um gráfico deslocamento *versus* tempo.

A solução não linear estática, relacionada com o presente trabalho, é representada pela classe *StaticEquilibriumPath*, que implementa um processo incremental-iterativo e emprega um método de controle, como descrito na Seção 2.1, para obter

a trajetória de equilíbrio do problema. Esta classe possui um objeto do tipo *Step*, contendo os métodos necessários à generalização de um passo incremental da análise e um objeto do tipo *IterativeStrategy*, que define o método de controle que será usado durante todo o processo.

*Step* é uma interface implementada pelas classes *StandardNewtonRaphson* e *ModifiedNewtonRaphson* onde, respectivamente, os processos incrementais-iterativos de Newton-Raphson Padrão e Newton-Raphson Modificado (trajetória de iteração tangente com inclinação constante em todas as iterações) são usados para se obter a convergência do passo. Tais relações são ilustradas na Figura 3.5.

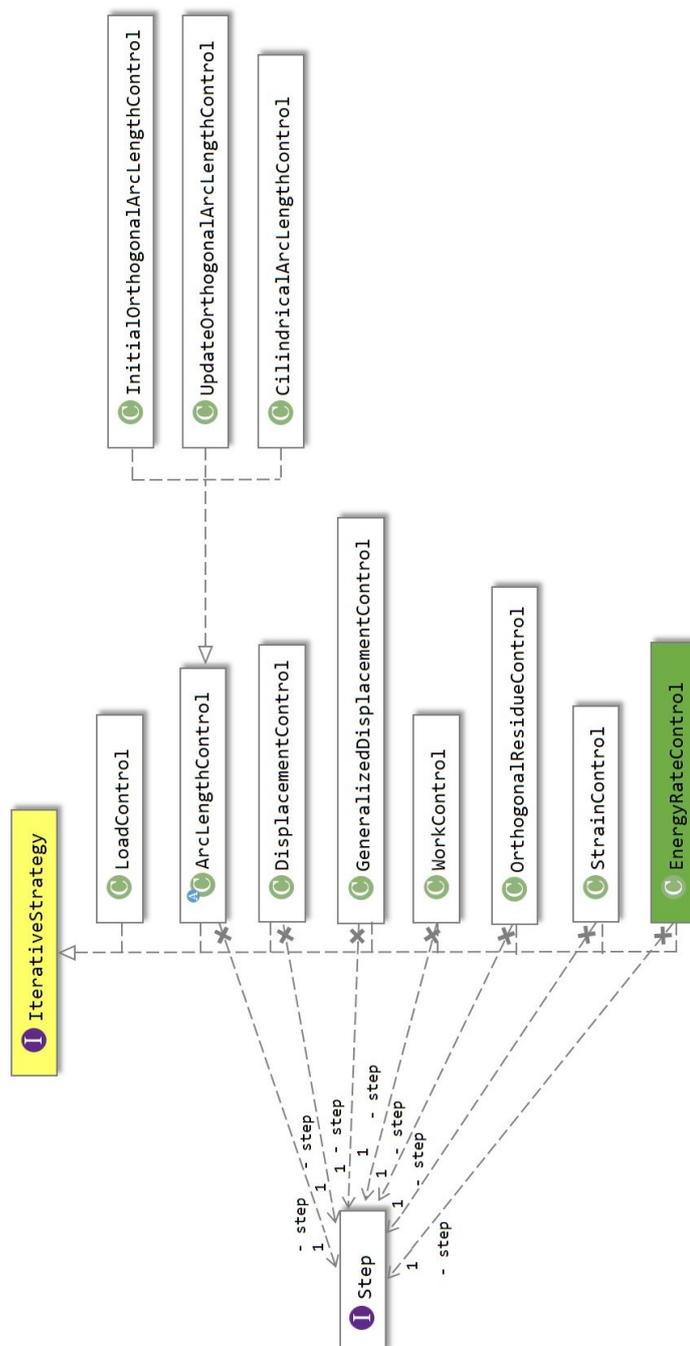


**Figura 3.5:** Diagrama de herança e objetos da classe *StandardNewtonRaphson*.

Observa-se que cada uma destas duas classes possui todos os recursos necessários para se obter a convergência do passo incremental e, através de uma instância da classe *SolverAdapter*, ambas as classes são capazes de resolver o sistema de equações algébricas de cada iteração. Além disso, destacam-se um objeto *Assembler*, que fornece as matrizes e vetores da equação a ser solucionada em cada iteração do passo; e um objeto *IterativeStrategy*, que informa a estratégia de iteração adotada.

A interface *IterativeStrategy* é implementada pelas classes que representam os

métodos de controle da análise não linear. Nesta dissertação, uma nova classe denominada *EnergyRateControl* foi criada no módulo *solution* para representar o método de controle de comprimento de arco baseado em taxas de energia. As implementações correntes de *IterativeStrategy* no sistema INSANE podem ser visualizadas na Figura 3.6.



**Figura 3.6:** Diagrama de implementações da interface *IterativeStrategy*.

As classes *LoadControl*, *DisplacementControl*, *InitialOrthogonalArcLengthControl*, *UpdateOrthogonalArcLengthControl*, *CilindricalArcLengthControl*, *GeneralizedDisplacementControl*, *WorkControl*, *OrthogonalResidueControl*, *StrainControl* e *EnergyRateControl* implementam, respectivamente, os métodos de controle de carga, de deslocamento, de comprimento de arco, com trajetória de iteração opcionalmente ortogonal à tangente inicial, ortogonal à tangente da iteração anterior ou cilíndrica, de deslocamento generalizado, por trabalho, de resíduo ortogonal, de deformações e de taxas de energia. Ainda na Figura 3.6, constata-se que, com exceção da classe *LoadControl*, todas essas classes dispõem de um objeto do tipo *Step* que contém informações sobre o passo anterior da análise, sendo estas necessárias durante o cálculo do fator de carga.

Para entender melhor como as classes acima se relacionam durante o processo de solução, será abordado, na sequência, o funcionamento dos seus principais métodos.

### 3.1.3 Processo de Solução Não Linear Estática

O processo de solução se inicia com o método *execute()* da classe *Solution*, responsável por resolver a equação discretizada. Em uma análise não linear estática, um objeto do tipo *StaticEquilibriumPath* é instanciado e usado para chamar este método, que é responsável pelo *loop* sobre o número de passos incrementais. No interior deste *loop*, é invocado o método *execute()* da classe responsável pelo *loop* sobre o número de iterações: *StandardNewtonRaphson* ou *ModifiedNewtonRaphson* (demais especificações sobre a classe *StandardNewtonRaphson* podem ser encontradas no Apêndice C). Vale ressaltar que ambos os números de incrementos e de iterações são dados informados pelo usuário. Além disso, o usuário também define um objeto do tipo *IterativeStrategy*, na classe *StaticEquilibriumPath*, que determina o método de controle que será utilizado para a obtenção da trajetória de equilíbrio. A cada novo passo da análise, o método *execute()* de *StaticEquilibriumPath* atribui ao objeto da classe responsável pelo processo iterativo o método de controle e, a partir do

*IterativeStrategy* deste objeto, calcula o fator de cargas para a iteração corrente.

A convergência é verificada pela classe *Convergence*, pertencente ao módulo *solution*, através de um objeto desta que é criado dentro do método *setConvergence()* das classes *StandardNewtonRaphson* e *ModifiedNewtonRaphson*. O critério usado para tal verificação, especificado pelo usuário, é baseado em força, deslocamento ou ambos. O resultado da verificação é obtido a partir do método *getConvergence()* de *StandardNewtonRaphson* ou *ModifiedNewtonRaphson*. Se a convergência não for alcançada, após percorrer todas as iterações de um determinado passo, o processo de solução é interrompido. Se convergir, as variáveis do modelo discreto são atualizadas e o procedimento continua até que o número máximo de incrementos seja atingido (Fuina, 2009).

Observa-se que toda a implementação está conforme o algoritmo sugerido por Yang e Shieh (1990) (Figura 2.1 do Capítulo 2). Cada classe aqui descrita possui um papel bem definido no processo de obtenção de trajetória de equilíbrio e segue os conceitos de programação orientada a objetos.

## 3.2 Implementação do Controle de Comprimento de Arco baseado em Taxas de Energia

As classes que implementam os métodos de controle da análise não linear possuem os métodos *getPredictor()* e *getCorrector()*, que calculam o incremento do fator de cargas para a primeira iteração e para as demais iterações de cada passo incremental, respectivamente, conforme a formulação de Yang e Shieh (1990) para equação de restrição. No Capítulo 2, as equações de restrição para o controle baseado em taxas de energia interna e dissipada (Equações 2.35 e 2.46) foram desenvolvidas de modo a serem compatíveis com tal formulação.

Desta forma, tem-se:

- Equações 2.41 e 2.42, respectivamente, para os métodos *getPredictor()* e *getCorrector()* do controle de comprimento de arco baseado em energia dissipada;
- Equações 2.51 e 2.52, respectivamente, para os métodos *getPredictor()* e *getCorrector()* do primeiro passo do controle de comprimento de arco baseado em energia interna;
- Equações 2.53 e 2.54, respectivamente, para os métodos *getPredictor()* e *getCorrector()* dos demais passos do controle de comprimento de arco baseado em energia interna.

### 3.2.1 Classe *EnergyRateControl* e interfaces *InternalEnergyControl* e *DissipatedEnergyControl*

Para facilitar a implementação dos itens acima, foram criadas neste trabalho as interfaces *InternalEnergyControl* e *DissipatedEnergyControl*, que possuem os métodos necessários para representar as funções de controle baseadas em energia interna e dissipada, respectivamente, e a classe *EnergyRateControl*, que implementa as interfaces acima e contém todos os métodos e variáveis usados para representar o método em questão. As relações entre as classes acima são mostradas na Figura 3.7.



**Figura 3.7:** Diagrama de implementações das interfaces *InternalEnergyControl* e *DissipatedEnergyControl*.

Além dos métodos *getPredictor()* e *getCorrector()* de cada função de controle,

uma razão  $a$  foi introduzida neste trabalho. Este parâmetro, da classe *EnergyRateControl* e definido opcionalmente pelo usuário (quando não informado, o valor considerado é 1), permite ao mesmo controlar a precisão do ramo dissipativo ou não dissipativo da trajetória de equilíbrio e é definido na sequência. Assim, por meio de uma simples especificação do usuário, é possível obter o refinamento da precisão de um trecho da análise conforme desejado.

$$a = \frac{\delta\tau^d}{\delta\tau^u}, \quad (3.2)$$

onde  $\delta\tau^d$  e  $\delta\tau^u$  são os tamanhos dos passos prescritos para os controles baseados em energia dissipada e interna, respectivamente.

Um esquema adaptativo de tamanho do passo em termos de energia pode ser encontrado em Gutiérrez (2004). Neste trabalho, entretanto, somente o incremento de energia referente ao primeiro passo é computado, ou seja,  $\delta\tau^u = \delta\tau^{u,1}$ , sendo este usado como tamanho do passo prescrito nos incrementos subsequentes.

Pela Equação 3.2, nota-se que, para valores do parâmetro  $a$  contidos no intervalo  $\in [0, 1]$ , obtém-se uma precisão superior do ramo descendente da trajetória de equilíbrio, quando comparada com a do ramo não dissipativo. Tal precisão é aumentada à medida que  $a$  se aproxima de zero. Para o caso de valores acima de um (1), observa-se uma maior descrição do trecho ascendente em relação ao trecho no qual ocorre dissipação de energia.

A escolha de um valor para a variável  $a$  é intuitiva. Para uma curva fator de carga *versus* deslocamento que apresenta um comportamento frágil, isto é, pouca deformação antes da ruptura, sugere-se atribuir um valor menor para o parâmetro  $a$ . Se o valor prescrito de  $a$  for muito alto, o algoritmo não será capaz de detectar a ocorrência de pontos limites na fase de amolecimento, provocando uma instabilidade numérica.

O refinamento de precisão se torna útil para situações específicas em que a trajetória de equilíbrio apresenta uma concentração maior de pontos críticos em um determinado trecho da análise não linear; requer, todavia, uma quantidade maior de passos para traçar completamente a mesma, uma vez que se tem uma redução nos valores do incremento do fator de carga.

### 3.2.2 Implementação do processo de mudança de função de controle

Nos métodos clássicos de controle de comprimento de arco, o desenvolvimento da equação de restrição formada pela combinação geométrica entre as variáveis deslocamentos e fator de carga fornece, para a primeira iteração de qualquer passo, a Equação A.6 do Apêndice A, de sinal indeterminado. Para obter a solução correta, faz-se necessário que outras informações sejam adicionadas ao processo. Dessa forma, é comum o uso de pivots da matriz de rigidez para definir-se sobre o sinal das cargas externas, visto que estes servem como indicadores da mudança da positividade da matriz em questão. Uma outra alternativa para a escolha do sinal foi proposta por Feng et al. (1996), que estabeleceu um critério que coincide com o sinal do produto interno entre o deslocamento incremental convergido no passo anterior e o deslocamento associado à carga de referência da primeira iteração do passo corrente. No método de controle baseado em taxas de energia, o processo de troca de função de controle se dá de forma natural com base na avaliação das taxas de energia interna e dissipada do sistema, excluindo assim a necessidade de implementação adicional ou uso de métodos de escolha do sinal.

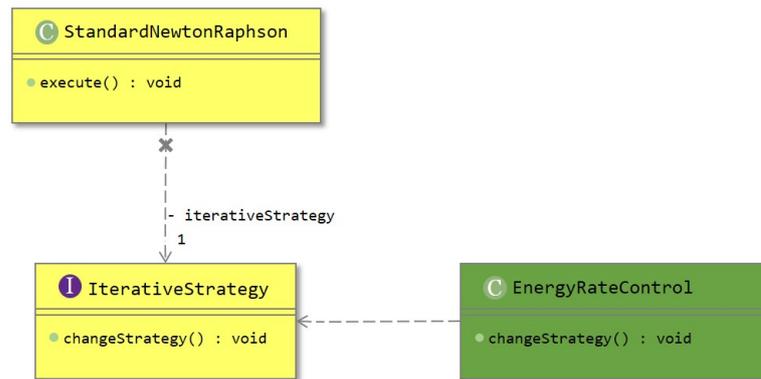
Neste trabalho, a estimativa das taxas de energia somente é realizada em um sistema equilibrado, isto é, na convergência de um passo da análise.

No sistema INSANE, ao se atingir a convergência de um passo, atualizam-se as variáveis do problema. Dentre estas variáveis, tem-se *loadFactorTotal* e  $x$  que representam, respectivamente, o fator de carga proporcional e o vetor de deslocamentos

correntes.

O método responsável por permutar as funções de controle por meio da avaliação de taxas de energia foi implementado na interface *IterativeStrategy* com o nome de *changeStrategy()* e é invocado no método *execute()* da classe *StandardNewtonRaphson*, através do objeto *IterativeStrategy* desta, uma vez que a referida verificação deve ser feita antes da atualização das variáveis.

Assim sendo, ao final de uma iteração, se a convergência for alcançada, o método *changeStrategy* é acionado e verifica as taxas de energia interna e dissipada do sistema no passo convergido. Na Figura 3.8, apresentam-se as intervenções realizadas em *IterativeStrategy* e na classe *StandardNewtonRaphson*.

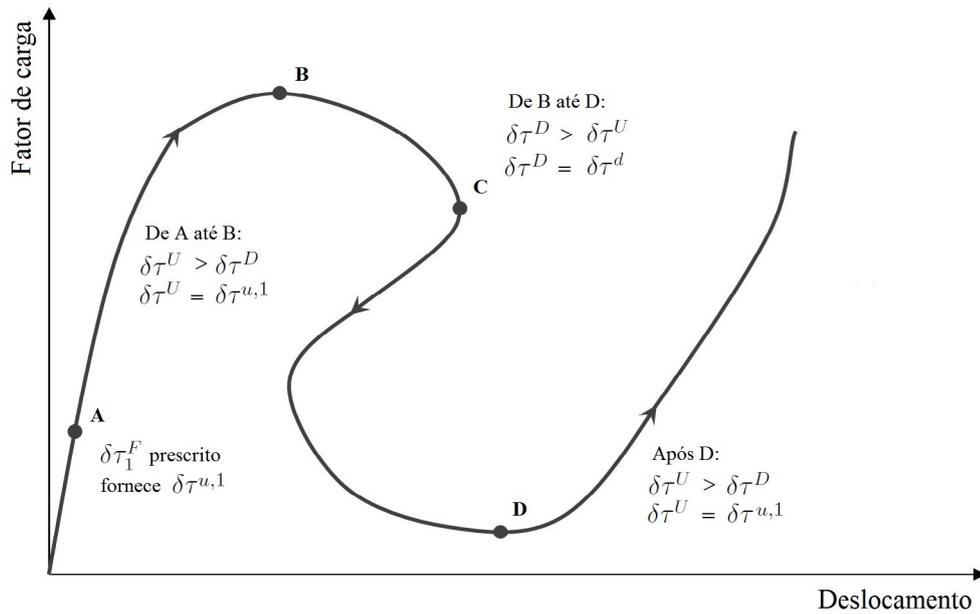


**Figura 3.8:** Diagrama de intervenções na interface *IterativeStrategy* e na classe *StandardNewtonRaphson*.

A Figura 3.9 ilustra o procedimento de obtenção de trajetória de equilíbrio utilizando o método de controle baseado em taxas de energia interna e dissipada. A simulação se inicia com o tamanho do passo de força  $\delta\tau_1^F = \delta\lambda$ , prescrito pelo usuário, que fornece o tamanho do passo  $\delta\tau^{u,1}$  referente ao incremento de energia interna no ponto *A*, como:

$$\delta\tau^{u,1} = \frac{1}{2}\delta\lambda^2\{\delta U^P\}_1^{1T} \cdot \{P\}. \quad (3.3)$$

$\delta\tau^{u,1}$  é então considerado como sendo o tamanho do passo prescrito para o controle de comprimento de arco baseado na taxa de energia interna do ponto  $A$  ao ponto  $B$ :  $\delta\tau^U = \delta\tau^{u,1}$ . Se, no final de um passo incremental, o valor da variação de energia dissipada for superior à energia interna introduzida no sistema, isto é,  $\delta\tau^D > \delta\tau^U$  (ponto  $B$  na Figura 3.9), o processo de carregamento permuta de controle baseado em energia interna para controle baseado em energia dissipada com o tamanho do passo prescrito  $\delta\tau^D = \delta\tau^d$ . O incremento de energia interna torna-se negativo entre os pontos  $B$  e  $D$ . No momento em que o valor do incremento de energia interna  $\delta\tau^U$  se tornar novamente superior ao incremento de energia dissipada  $\delta\tau^D$  (ponto  $D$  na Figura 3.9), o processo de carregamento retorna para o controle de comprimento de arco baseado na taxa de energia interna com o tamanho do passo prescrito  $\delta\tau^U = \delta\tau^{u,1}$ .



**Figura 3.9:** Método de obtenção de trajetória de equilíbrio usando controle baseado em taxas de energia interna e dissipada.

Diante do exposto, constata-se que o método requer apenas dois parâmetros a serem informados pelo usuário para obter a solução de uma trajetória de equilíbrio:  $\delta\tau_1^F$  e  $a$ . As demais variáveis do processo são calculadas iterativamente pelo

algoritmo. Além disso, a ocorrência de pontos limites de deslocamento, como o ponto  $C$  na Figura 3.9, não interfere no processo de troca de métodos, uma vez que *changeStrategy()* considera apenas os valores das taxas de energia calculadas.

## Capítulo 4

# EXEMPLOS NUMÉRICOS DE PROBLEMAS GEOMETRICAMENTE NÃO LINEARES

Neste capítulo, apresentam-se simulações de problemas nos quais os deslocamentos são de tal ordem que a hipótese de pequenos deslocamentos, necessária para a linearidade do sistema, não pode mais ser considerada. Tais problemas são denominados geometricamente não lineares e são caracterizados por apresentarem pequenas deformações acompanhadas de grandes deslocamentos, como em geral ocorre com estruturas esbeltas.

Em uma análise geometricamente não linear, é necessário definir uma formulação para a descrição do movimento dos corpos. Descrições cinemáticas Lagrangeanas têm sido propostas para o contínuo, podendo-se destacar as formulações Lagrangeanas Total, na qual os deslocamentos generalizados são medidos em relação a uma configuração indeformada do elemento, Atualizada e Corrotacional (Belytschko e Hsieh, 1973), nas quais os referidos deslocamentos são medidos em relação a uma configuração deformada do elemento. Nesta dissertação, empregou-se a descrição Lagrangeana Corrotacional, implementada por Melo (2017) para pórticos planos de Euler-Bernoulli, para se analisar os problemas aqui expostos. O equacionamento e os detalhes deste modelo não são objeto deste trabalho.

O objetivo deste capítulo é avaliar a eficiência e o desempenho do método de controle de comprimento de arco por taxas de energia interna e dissipada na solução de diferentes tipos de problemas geometricamente não lineares. Para tal propósito, são apresentados três (3) tipos de exemplos numéricos, listados a seguir, onde o referido método é posto em comparação com diferentes métodos clássicos de controle da análise não linear já disponíveis no sistema INSANE.

- Seção 4.1: Pórticos com não linearidade geométrica - objetivou-se, a partir de três exemplos de pórticos planos, estudar o desempenho do método proposto para passar por pontos de instabilidade e realizar um estudo comparativo deste método em relação aos demais métodos clássicos de controle;
- Seção 4.2: Viga em balanço - objetivou-se avaliar a eficiência do método proposto para representar o comportamento da estrutura e realizar um estudo comparativo do mesmo em relação aos demais métodos clássicos de controle;
- Seção 4.3: Arcos circulares - objetivou-se, a partir de dois exemplos de arcos circulares, avaliar a eficiência e o desempenho do método proposto para lidar com problemas envolvendo múltiplos pontos de instabilidade quando comparado com demais métodos clássicos de controle.

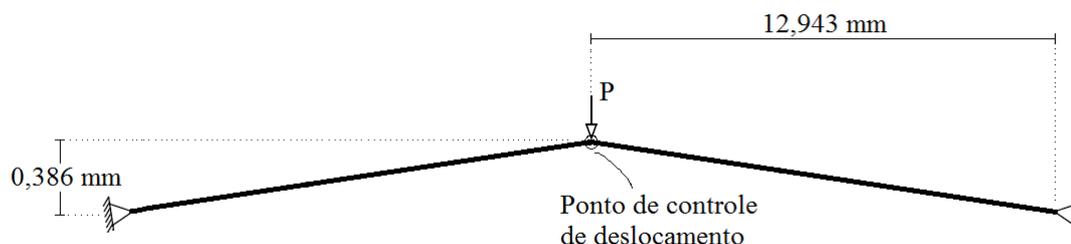
## 4.1 Pórticos com Não Linearidade Geométrica

As estruturas de pórticos planos são amplamente utilizadas por pesquisadores para validar formulações de modelos com não linearidade geométrica e verificar a eficiência de estratégias de solução não linear. Isso se deve ao fato de suas trajetórias de equilíbrio apresentarem acentuados pontos limites de carga e de deslocamento. Dentre os estudos realizados com este tipo de problema, pode-se citar os trabalhos de Williams (1964), Schweizerhof e Wriggers (1986), Yang e Kuo (1994), Galvão (2000, 2004), Fuina (2004), Fonseca (2008), dentre outros.

Nesta seção, são abordados três exemplos de pórticos planos - o Pórtico de Williams, o Pórtico de Lee e o *Diamond Frame* - objetivando-se avaliar a eficiência e o desempenho do método de controle baseado em taxas de energia para passar por pontos críticos quando comparado com os métodos de controle de deslocamento direto, de comprimento de arco com trajetória cilíndrica e de deslocamento generalizado. Os resultados obtidos por cada método também são postos em comparação com resultados analíticos e/ou experimentais encontrados na literatura.

#### 4.1.1 Pórtico de Williams

A configuração geométrica para o exemplo do Pórtico de Williams é mostrada na Figura 4.1.



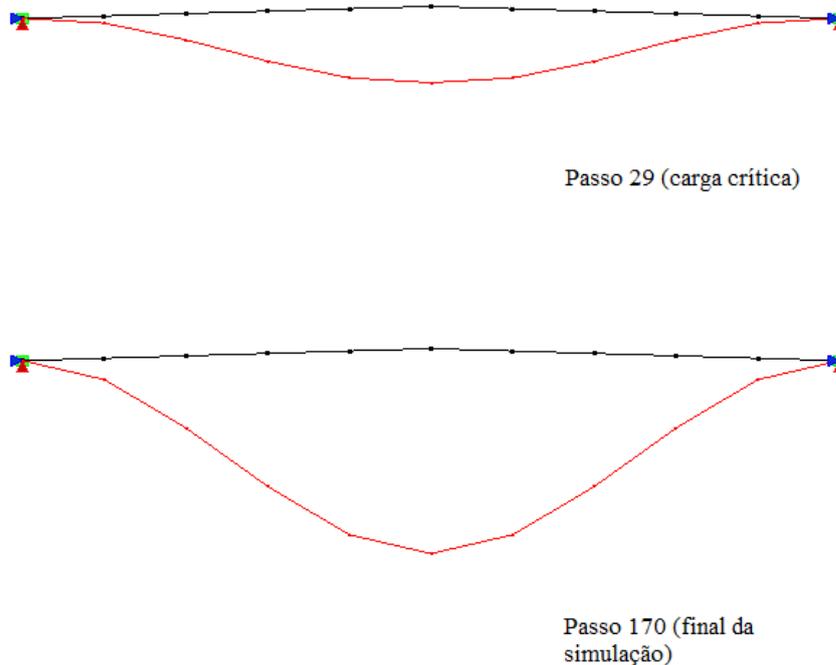
**Figura 4.1:** Pórtico de Williams: configuração geométrica.

Nesta análise, adotou-se o modelo constitutivo elástico linear e isotrópico, cujo módulo de elasticidade é  $E = 1,03 \times 10^7 \text{ N/mm}^2$  e coeficiente de Poisson nulo. A seção transversal possui área igual a  $0,183 \text{ mm}^2$  e momento de inércia  $I_z = 9 \times 10^{-4} \text{ mm}^4$ . O pórtico foi modelado por meio de 10 elementos de viga unidimensionais de dois nós de Euler-Bernoulli.

Para solução do modelo, empregou-se o método de controle baseado em taxas de energia com um incremento inicial do fator de carga de 0,5, carga de referência  $P_0 = 20,0 \text{ N}$  e tolerância para convergência em força de  $1 \times 10^{-4}$ .

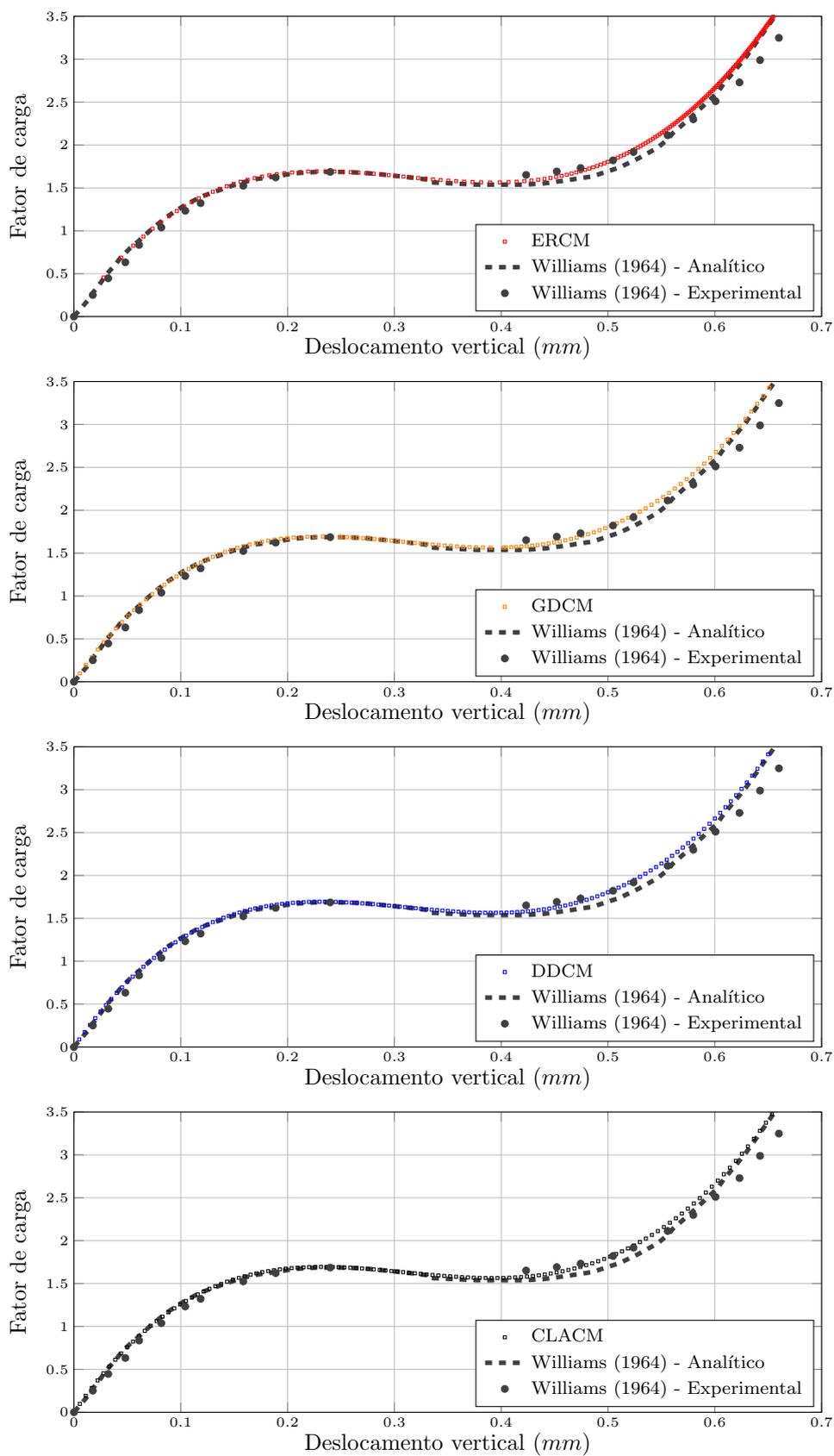
No total, foram considerados 170 passos incrementais para obter-se a completa representação da trajetória de equilíbrio.

A deformada, com fator de escala igual a 10, relativas aos passos 29 (primeiro ponto de carga crítica) e 170 (último ponto considerado da análise), é apresentada na Figura 4.2.



**Figura 4.2:** Pórtico de Williams: deformada.

As trajetórias de equilíbrio para o deslocamento vertical do ponto central empregando-se os métodos de comprimento de arco, com trajetória cilíndrica (CLACM) e baseado em taxas de energia (ERCM), de deslocamento direto (DDCM) e de deslocamento generalizado (GDCM), juntamente com os resultados analítico e experimental obtidos por Williams (1964), são apresentados na Figura 4.3. Os métodos de deslocamento generalizado e de comprimento de arco com trajetória cilíndrica foram usados com um incremento inicial do fator de carga de 0,1. Para o caso em que utilizou-se o controle direto de deslocamento, incrementou-se de 0,005 *mm* o deslocamento vertical do ponto de controle.

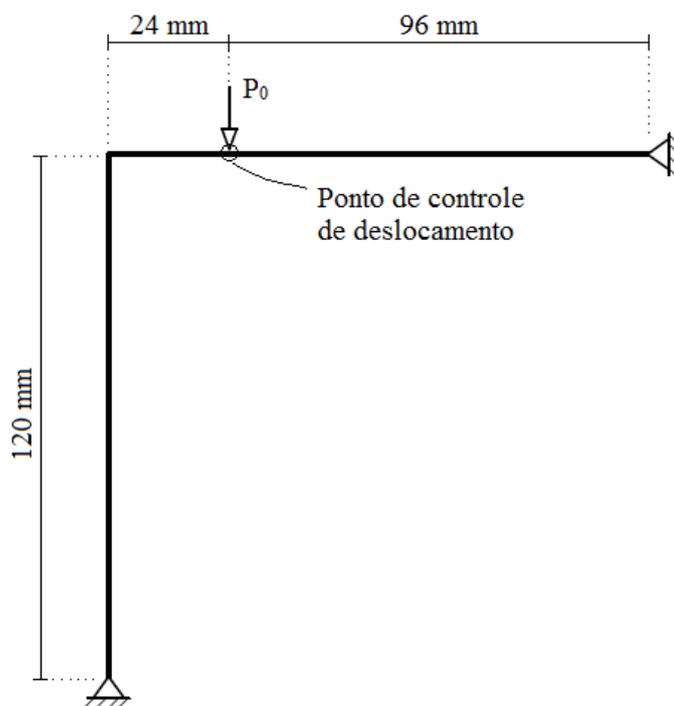


**Figura 4.3:** Pórtico de Williams: deslocamento vertical do ponto de controle.

A partir da Figura 4.3, observa-se boa concordância entre as soluções obtidas e os resultados fornecidos por Williams (1964). Constatou-se que o método de controle baseado em taxas de energia ajustou o tamanho do passo de forma gradual ao longo da simulação, o que resultou em uma maior quantidade de passos no final da curva. Entretanto, este exemplo, por ser bastante simples, não implicou em uma diferença significativa entre os tempos de processamento registrados.

### 4.1.2 Pórtico de Lee

A configuração para o exemplo do Pórtico de Lee é apresentada na Figura 4.4.



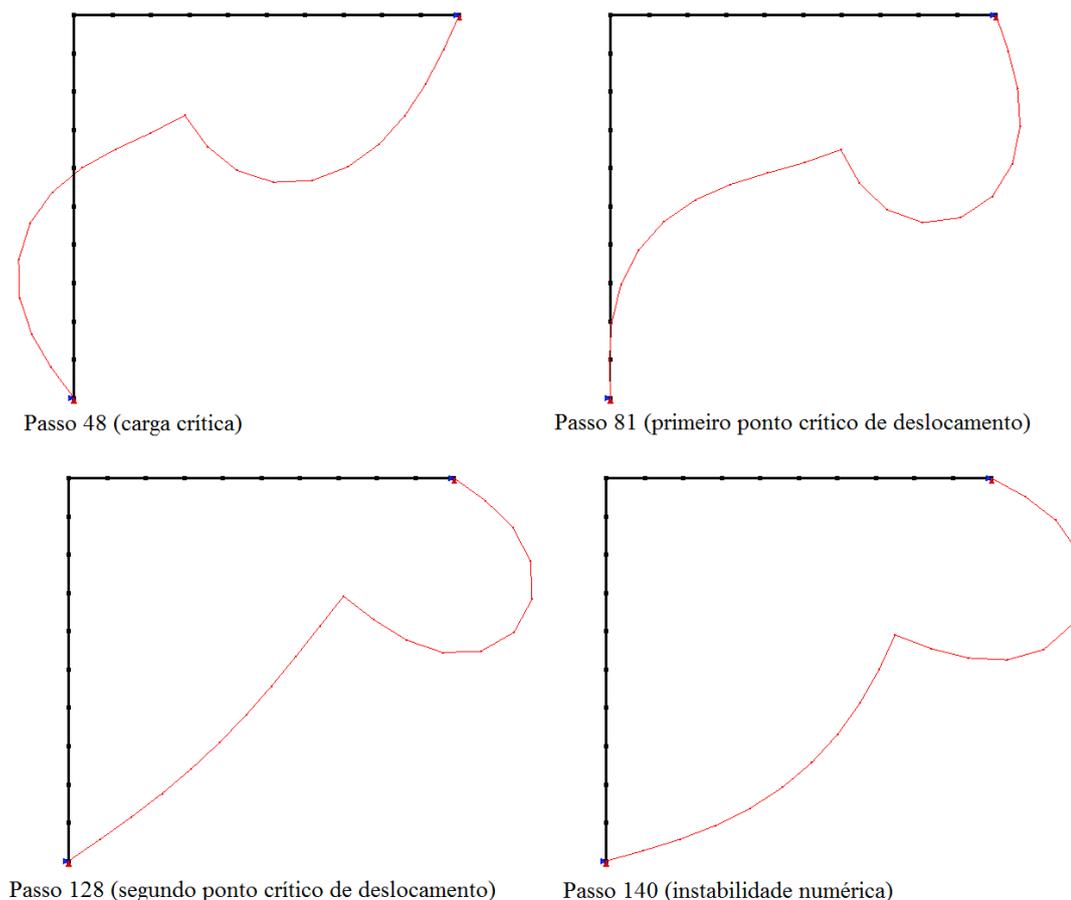
**Figura 4.4:** Pórtico de Lee: configuração geométrica.

Nesta análise, adotou-se o modelo constitutivo elástico linear e isotrópico com  $E = 720,0 \text{ N/mm}^2$  e  $\nu = 0,3$ . A seção transversal tem dimensões  $2 \text{ mm} \times 3 \text{ mm}$  e  $I_z = 2 \text{ mm}^4$ . O pórtico foi modelado por meio de 20 elementos de viga unidimensionais de dois nós de Euler-Bernoulli.

Para solução do modelo, empregou-se o método de controle por taxas de energia

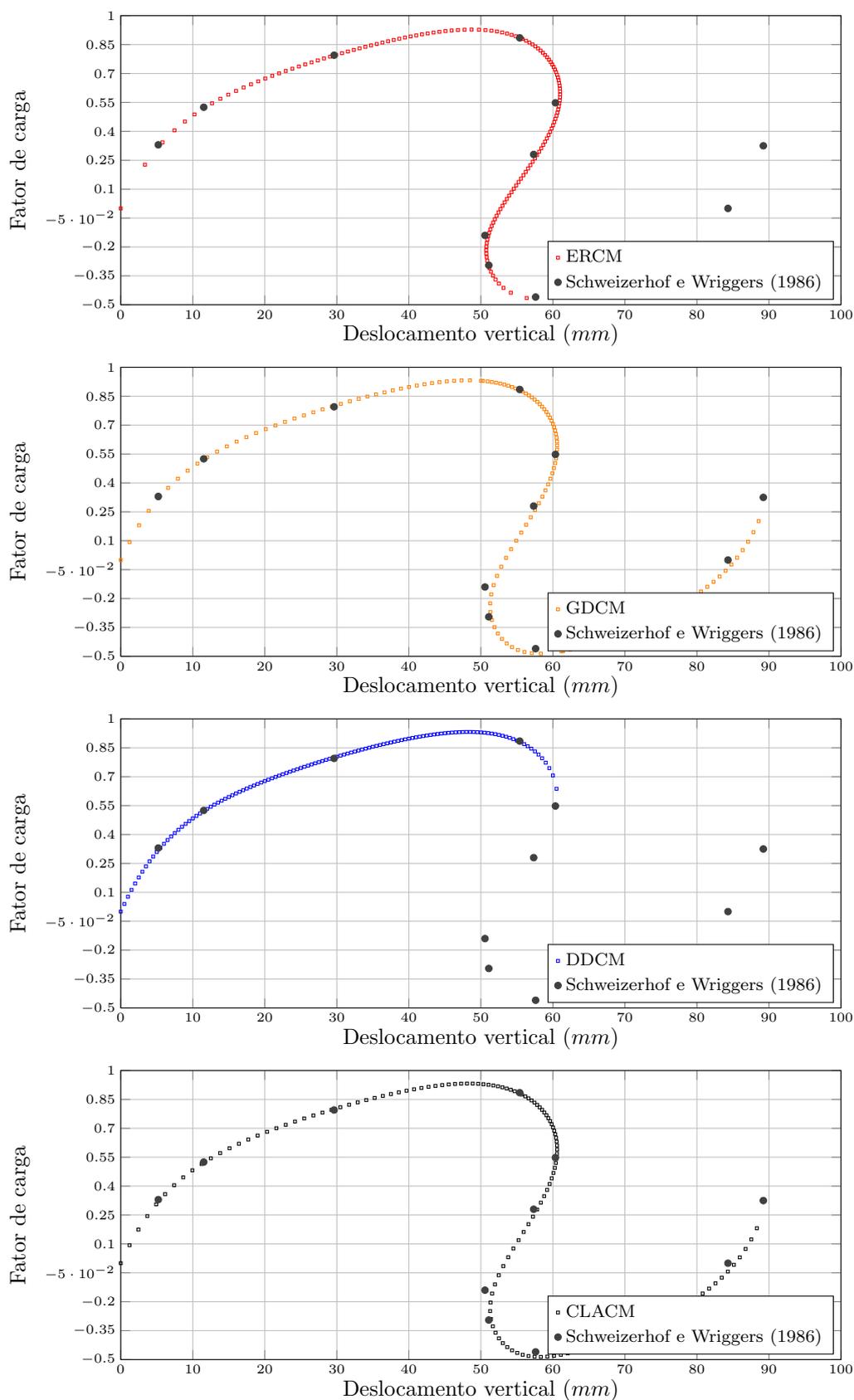
com um incremento inicial do fator de carga de 0,275, carga de referência  $P_0 = 2,0 N$  e tolerância para convergência em força de  $1 \times 10^{-4}$ .

As deformadas relativas aos passos 48 (carga crítica), 81, 128 (pontos limites de deslocamento) e 140 (ocorrência da instabilidade numérica), respectivamente, são apresentadas na Figura 4.5.



**Figura 4.5:** Pórtico de Lee: deformada.

As Figuras 4.6 e 4.7 mostram, respectivamente, as trajetórias de equilíbrio para os deslocamentos vertical e horizontal do ponto de controle empregando-se o método implementado e os métodos clássicos de controle eleitos, juntamente com os resultados analíticos obtidos por Schweizerhof e Wriggers (1986). Os métodos de deslocamento generalizado e de comprimento de arco com trajetória cilíndrica foram usados com fator de carga inicial de 0,1. Para o controle direto de deslocamento, incrementou-se de 0,5 mm o deslocamento vertical do ponto de controle.



**Figura 4.6:** Pórtico de Lee: deslocamento vertical do ponto de controle.

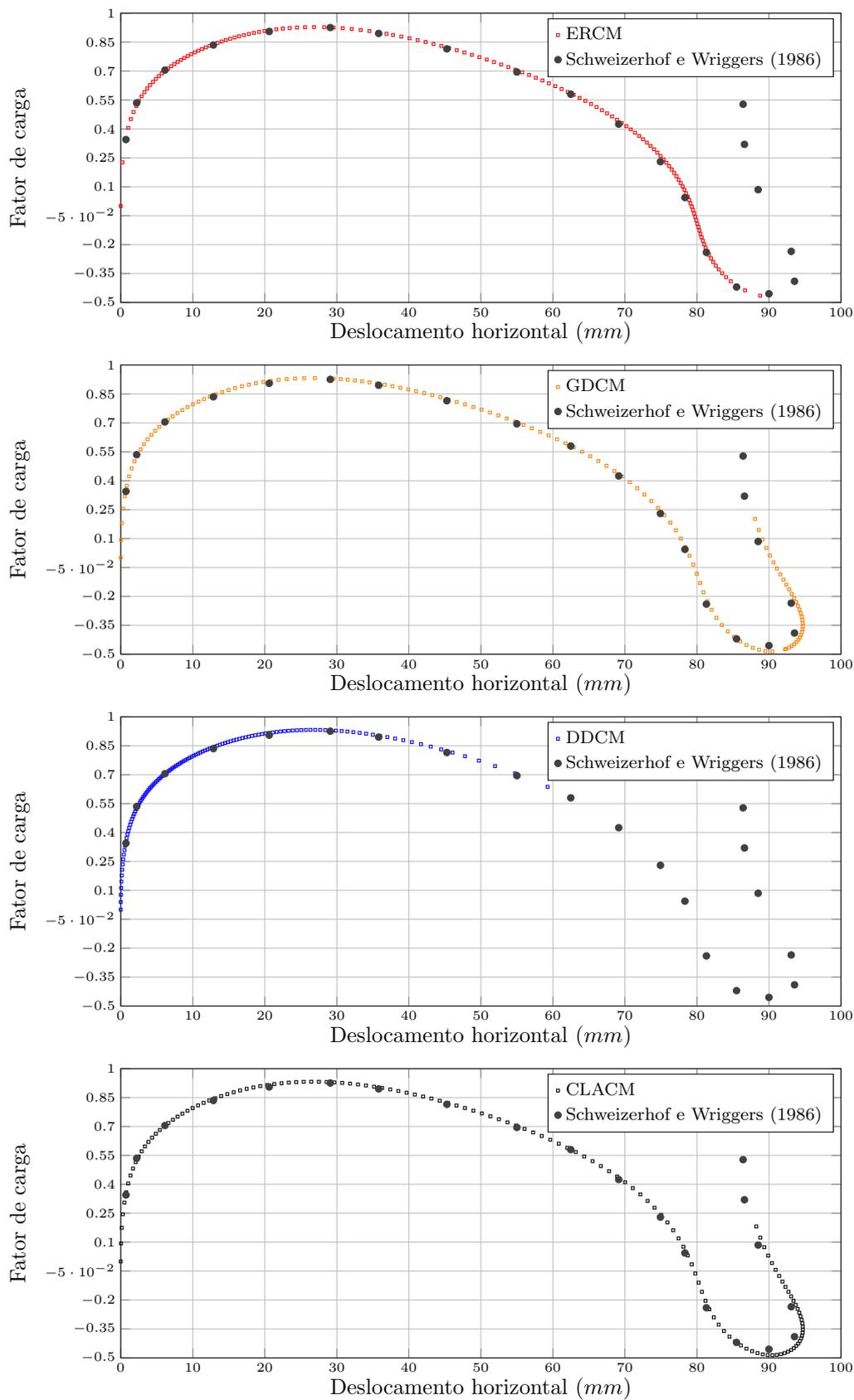


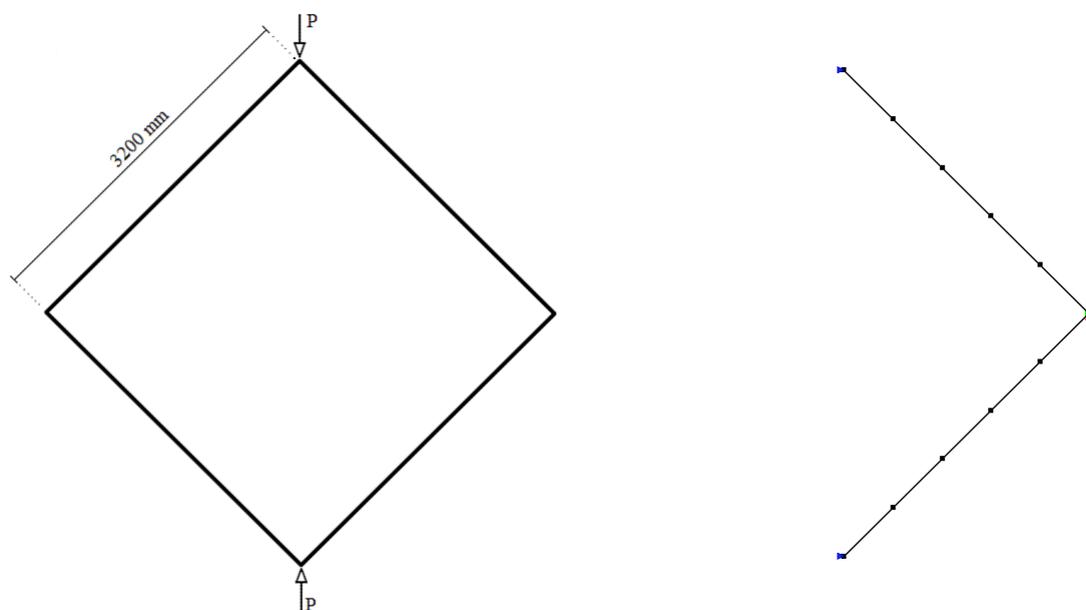
Figura 4.7: Pórtico de Lee: deslocamento horizontal do ponto de controle.

A partir das Figuras 4.6 e 4.7, observa-se que as trajetórias de equilíbrio obtidas pelos métodos de controle de comprimento de arco com trajetória de iteração cilíndrica e de deslocamento generalizado são consistentes com os resultados apresentados por Schweizerhof e Wriggers (1986). O método de controle direto de deslocamento teve a sua trajetória interrompida no primeiro ponto limite de deslocamento (momento em que se inicia o fenômeno de decréscimo de carga com decréscimo de deslocamento) para o deslocamento vertical (Figura 4.6). O método de controle por taxas de energia, por sua vez, não foi capaz de representar o ramo de recarregamento, onde, matematicamente, o tamanho do passo de carga torna-se novamente positivo. Várias tentativas de se obter a convergência por meio da alteração dos parâmetros da solução foram realizadas; todavia, o método não apresentou eficiência para descrever o referido trecho da análise.

Em problemas geometricamente não lineares, pontos de instabilidade podem ocorrer sem que qualquer quantidade de energia seja liberada do sistema, tornando as equações de restrição implementadas ineficazes (há somente acréscimo de energia). Tal peculiaridade inerente deste tipo de análise, também verificada por Verhoosel et al. (2009) ao fazer uso de um controle baseado em dissipação de energia, pode ser a principal causa da instabilidade numérica ao adotar-se o controle por taxas de energia. Dessa forma, para este tipo de situação, sugere-se o uso dos métodos tradicionais de comprimento de arco ou do método de deslocamento generalizado, uma vez que estes possuem base puramente matemática, e não física.

### 4.1.3 *Diamond Frame*

O *Diamond Frame*, que pode ser traduzido do inglês por “Pórtico Diamante”, foi genericamente denominado como tal devido à sua geometria em forma de diamante. A sua configuração geométrica e a malha de elementos finitos usada são mostradas na Figura 4.8.



**Figura 4.8:** *Diamond Frame*: configuração geométrica e malha de elementos finitos.

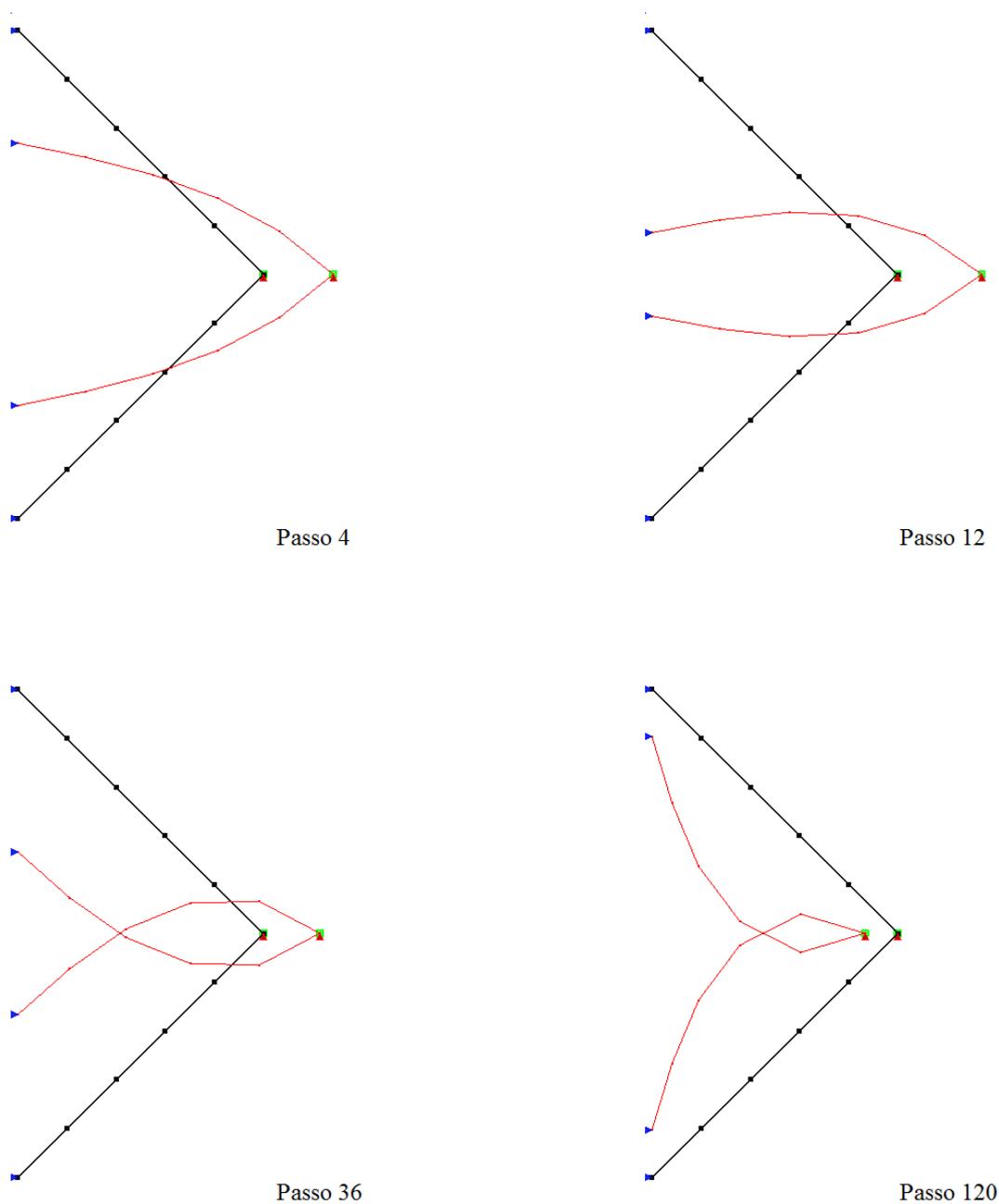
Nesta análise, adotou-se o modelo constitutivo elástico linear e isotrópico com  $E = 210000,0 \text{ N/mm}^2$  e coeficiente de Poisson nulo. A seção transversal tem dimensões  $100 \text{ mm} \times 100 \text{ mm}$  e  $I_z = 8,3333 \times 10^6 \text{ mm}^4$ . O pórtico foi modelado por meio de 10 elementos unidimensionais de dois nós de Euler-Bernoulli e considerando a simetria do problema.

Para solução do modelo, empregou-se o método de controle por taxas de energia com um incremento inicial do fator de carga de 0,075, carga de referência  $P = 1708,98 \text{ kN}$  e tolerância para convergência em força de  $1 \times 10^{-6}$ .

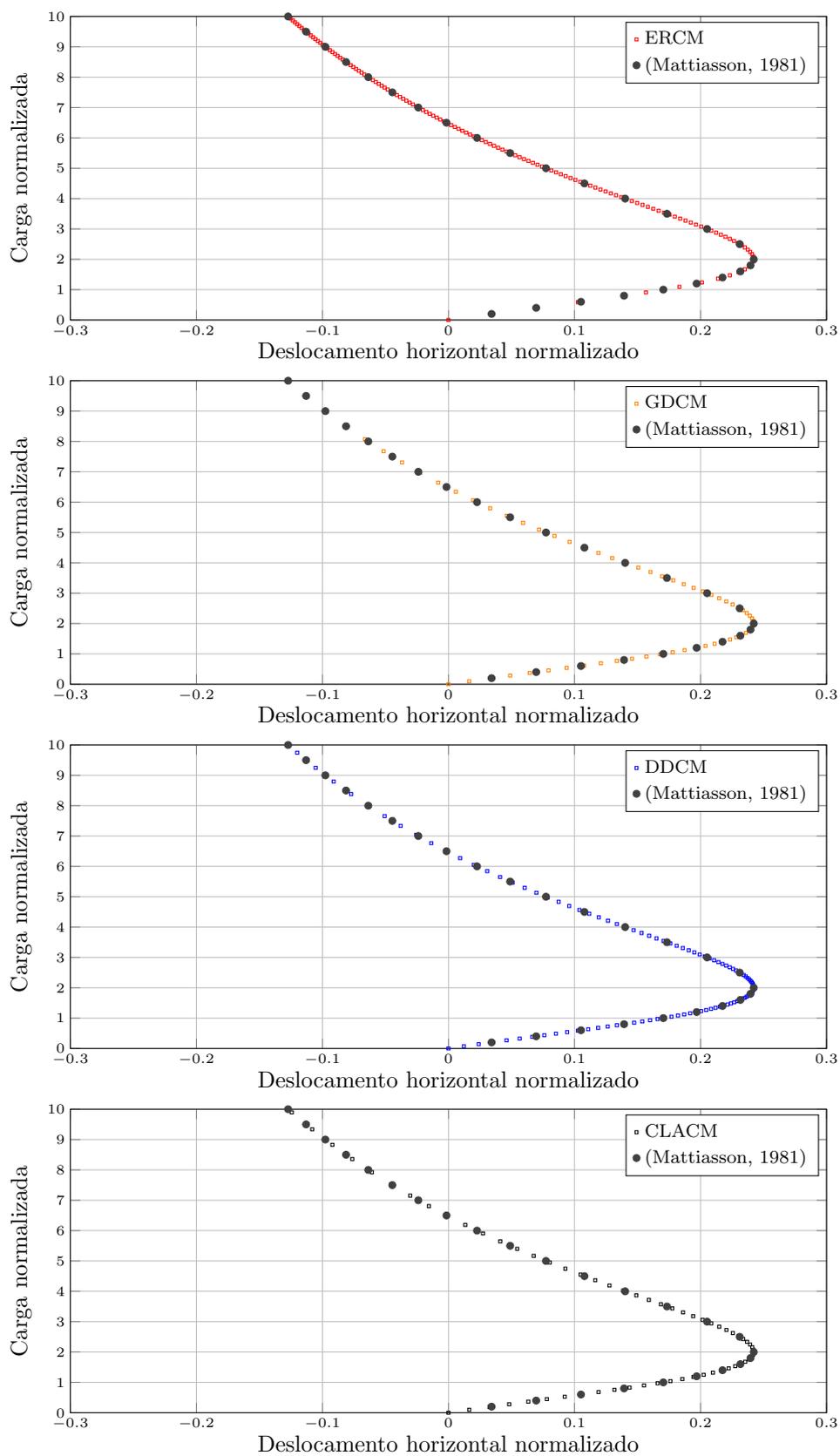
No total, foram considerados 140 passos incrementais para obter-se a completa representação da trajetória de equilíbrio.

As Figuras 4.9, 4.10 e 4.11 mostram, respectivamente, as deformadas relativas aos passos 4, 12, 36 e 120 (pontos escolhidos aleatoriamente) e as trajetórias de equilíbrio do deslocamento horizontal do ponto da extremidade direita e do deslocamento vertical do ponto da extremidade inferior. Tais trajetórias foram obtidas empregando-se os métodos de controle de comprimento de arco, com trajetória cilíndrica (CLACM) e baseado em energia (ERCM), e de deslocamentos direto (DDCM)

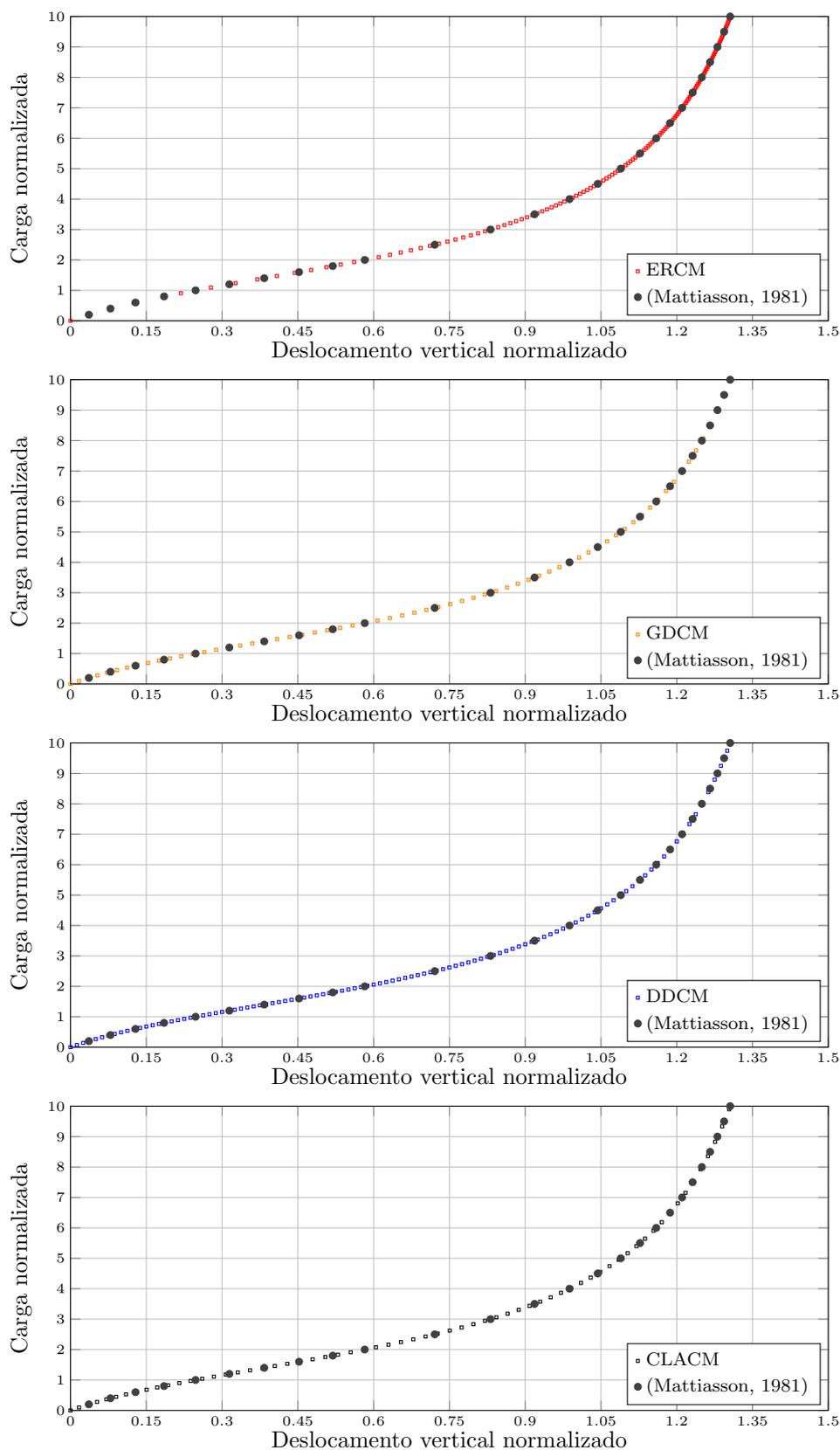
e generalizado (GDCM) e são apresentadas juntamente com os resultados analíticos obtidos por Mattiasson (1981). Os métodos GDCM e CLACM foram usados com fator de carga inicial de 0,05. Para o controle direto de deslocamento, incrementou-se de 0,05 mm o deslocamento vertical do ponto da extremidade inferior.



**Figura 4.9:** *Diamond Frame*: deformada.



**Figura 4.10:** *Diamond Frame*: deslocamento horizontal do canto direito.



**Figura 4.11:** *Diamond Frame*: deslocamento vertical do canto inferior.

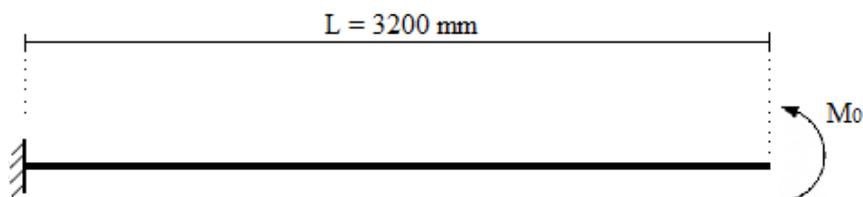
A partir das Figuras 4.10 e 4.11, observa-se, tanto para deslocamento horizontal quanto para deslocamento vertical, boa concordância entre as soluções obtidas e os resultados fornecidos por Mattiasson (1981).

Alem disso, constata-se que, similarmente ao exemplo do Pórtico de Williams (Seção 4.1.1), o método de controle por taxas de energia ajustou o tamanho do passo de forma gradual ao longo da simulação, o que resultou em uma maior quantidade de passos no final da curva.

No que se refere ao tempo de processamento, este exemplo também não resultou em uma diferença significativa entre os tempos de processamento registrados.

## 4.2 Viga em Balanço

A viga, cuja configuração é mostrada na Figura 4.12, foi modelada baseando-se nos trabalhos de Yshii (2002) e de Oliveira (2016) objetivando-se avaliar a eficiência do método implementado quando comparado aos métodos de controle de deslocamentos direto e generalizado e de comprimento de arco com trajetória cilíndrica.



**Figura 4.12:** Viga em Balanço: configuração geométrica.

Nesta análise, adotou-se o modelo constitutivo elástico linear e isotrópico com  $E = 210000,0 \text{ N/mm}^2$  e coeficiente de Poisson nulo. A seção transversal tem dimensões  $100 \text{ mm} \times 100 \text{ mm}$  e  $I_z = 8,3333 \times 10^6 \text{ mm}^4$ . A viga foi modelada por meio de 20 elementos unidimensionais de dois nós de Euler-Bernoulli.

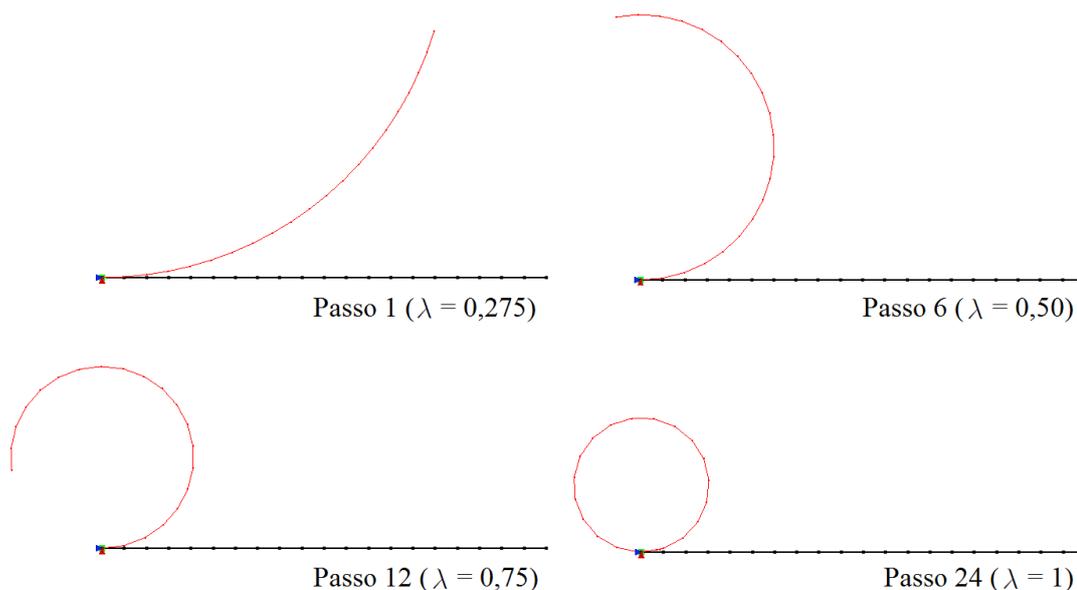
Para se obter um giro completo da estrutura em torno do engaste, a condição a seguir deve ser satisfeita para o momento fletor:

$$M = \frac{2\pi EI_z}{L} \quad (4.1)$$

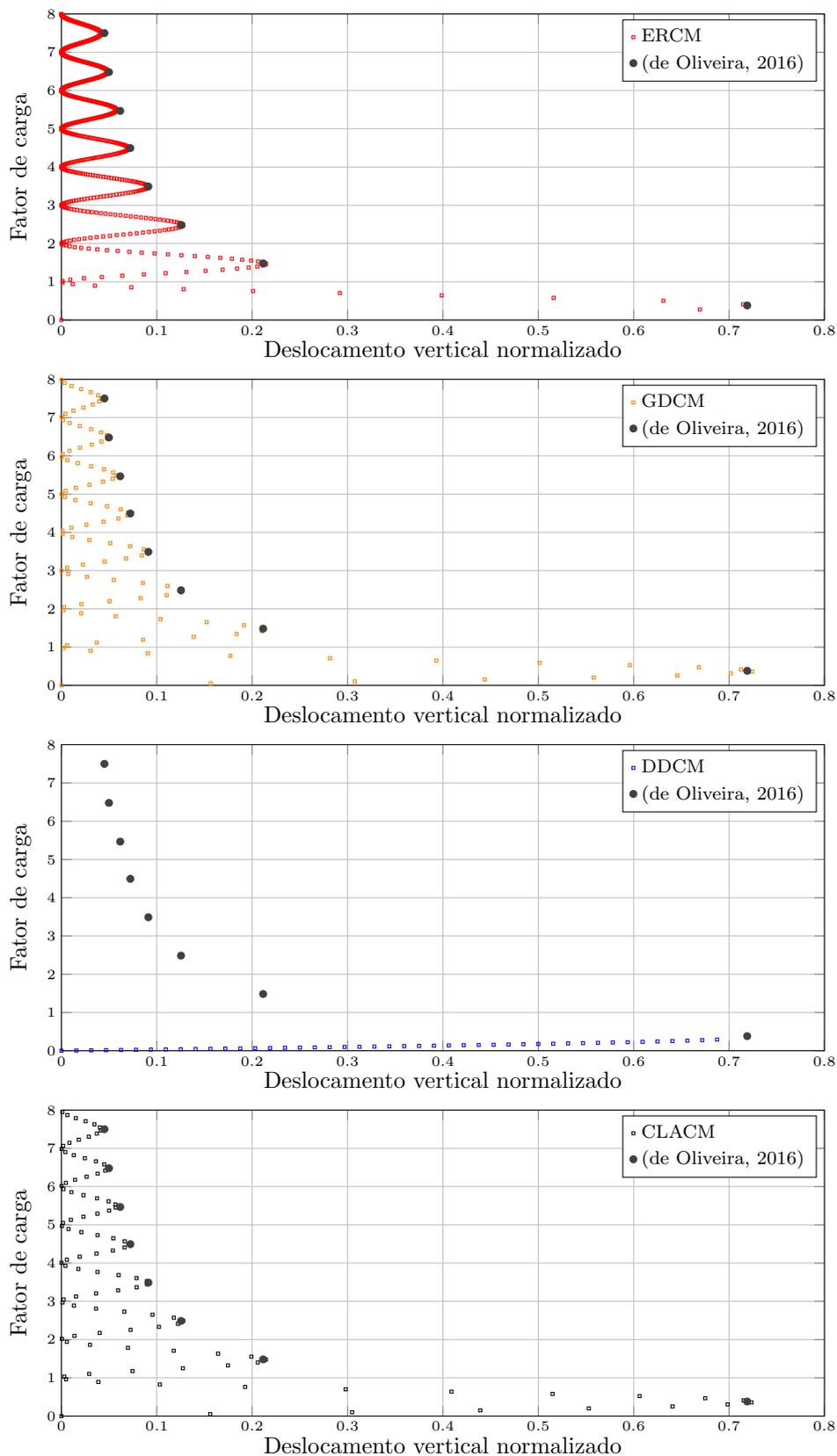
Assim, para solução do modelo, empregou-se o método de controle por taxas de energia com um incremento inicial do fator de carga de 0,275, momento de referência  $M_0 = 3436,117 \text{ MN.m}$  e tolerância para convergência em força de  $1 \times 10^{-6}$ .

No total, foram considerados 845 passos para obter-se a completa representação da trajetória de equilíbrio.

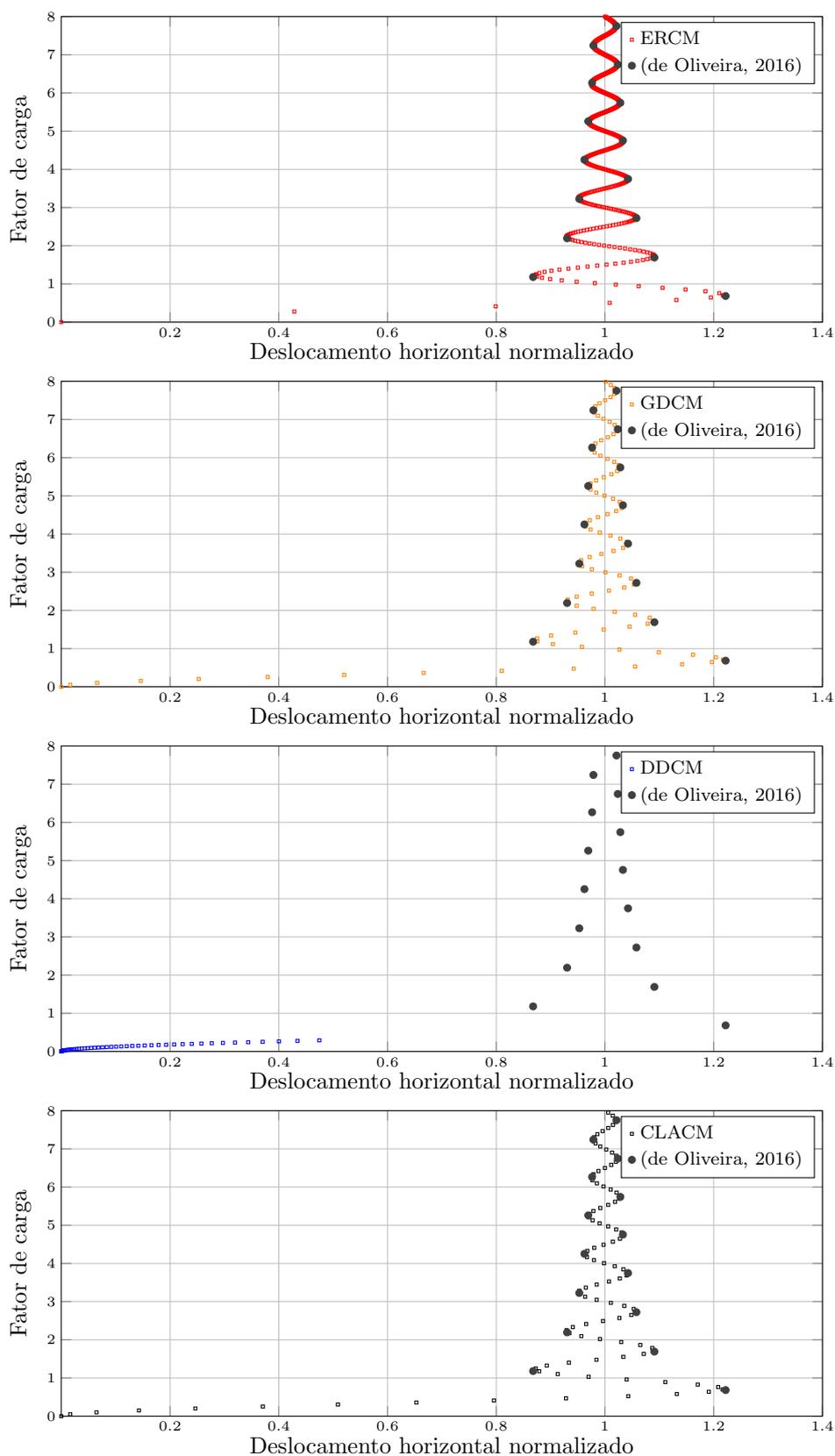
As Figuras 4.13, 4.14 e 4.15 mostram, respectivamente, as deformadas relativas aos passos 1 ( $\lambda = 0,275$ ), 6 ( $\lambda = 0,50$ ), 12 ( $\lambda = 0,75$ ) e 24 ( $\lambda = 1$ ) e as trajetórias para os deslocamentos vertical e horizontal do nó da extremidade livre empregando-se os controles de comprimento de arco, com trajetória cilíndrica (CLACM) e baseado em energia (ERCM), e de deslocamentos direto (DDCM) e generalizado (GDCM). Os métodos GDCM e CLACM foram usados com fator de carga inicial de 0,05. Para o controle direto de deslocamento, incrementou-se de 0,05 mm o deslocamento vertical do nó da extremidade livre.



**Figura 4.13:** Viga em balanço: deformada.



**Figura 4.14:** Viga em balanço: deslocamento vertical da extremidade livre.



**Figura 4.15:** Viga em balanço: deslocamento horizontal da extremidade livre.

A partir da Figura 4.13, verifica-se que o comportamento da estrutura é similar ao comportamento observado pelos autores Yshii (2002) e de Oliveira (2016), o qual a viga produz um giro completo em torno dela mesma em  $\lambda = 1$ . Além disso, observa-se boa concordância entre as soluções obtidas pelos métodos de controle de comprimento de arco, com trajetória cilíndrica e por taxas de energia, e de deslocamento generalizado e os resultados fornecidos por de Oliveira (2016) (Figuras 4.14 e 4.15). Como esperado, o método de controle direto de deslocamento teve a sua trajetória interrompida no primeiro ponto limite de deslocamento.

Quanto à viabilidade computacional, é possível notar que o método de controle por taxas de energia encurtou o tamanho do passo gradualmente durante a simulação, resultando em uma maior quantidade de passos no final da análise e, consequentemente, maior tempo de processamento do que os demais métodos testados. Tal peculiaridade parece estar novamente associada à ineficiência das funções de controle baseadas em energia para prever pontos limites nos quais não ocorre liberação de energia (Ver Seção 4.1.2).

### 4.3 Arcos Circulares

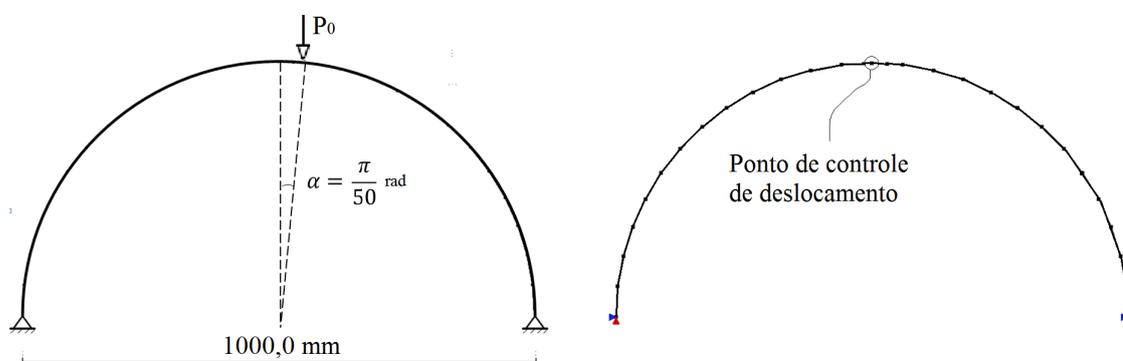
As estruturas de arcos, por apresentarem comportamento fortemente não linear, também são amplamente utilizadas em estudos para validar formulações de modelos com não linearidade geométrica e verificar a eficiência de estratégias de solução não linear. Dentre os estudos realizados com este tipo de problema, pode-se citar os trabalhos de Wood e Zienkiewicz (1977); Harrison (1978); Meek (1991); Yang e Kuo (1994); Galvão (2000); von Paraski (2012), de Oliveira (2016), dentre outros.

Nesta seção, são abordados dois exemplos de arcos circulares - o semi-círculo birrotulado e o arco rotulado-engastado de grande altura - objetivando-se avaliar o desempenho do método aqui implementado para lidar com problemas envolvendo múltiplos pontos de instabilidade quando comparado com os métodos de controle

de deslocamento direto, de comprimento de arco com trajetória cilíndrica e de deslocamento generalizado. As soluções obtidas por cada método também são postas em comparação com resultados numéricos encontrados na literatura.

### 4.3.1 Semi-círculo Birrotulado

A configuração geométrica e malha de elementos finitos para o exemplo do semi-círculo birrotulado, baseadas nos trabalhos de Harrison (1978) e Galvão (2000), são apresentadas na Figura 4.16.



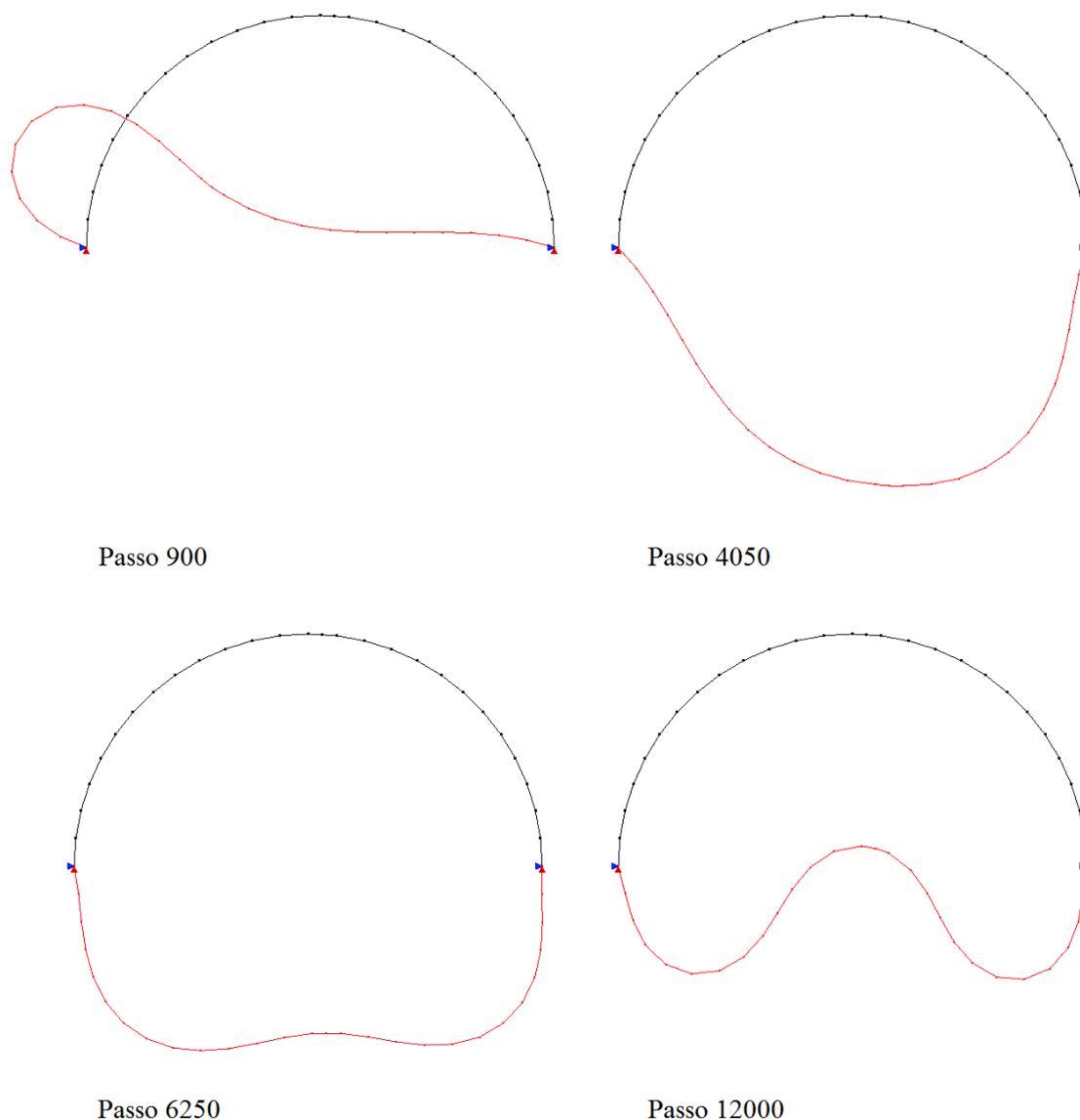
**Figura 4.16:** Semi-círculo: configuração geométrica e malha de elementos finitos.

Nesta análise, adotou-se o modelo constitutivo elástico linear e isotrópico, cujo módulo de elasticidade é  $E = 20000 \text{ N/mm}^2$  e coeficiente de Poisson nulo. A seção transversal possui área igual a  $1000 \text{ mm}^2$  e momento de inércia  $I_z = 1000 \text{ mm}^4$ . O arco foi modelado por meio de 26 elementos unidimensionais de dois nós e possui carregamento assimétrico.

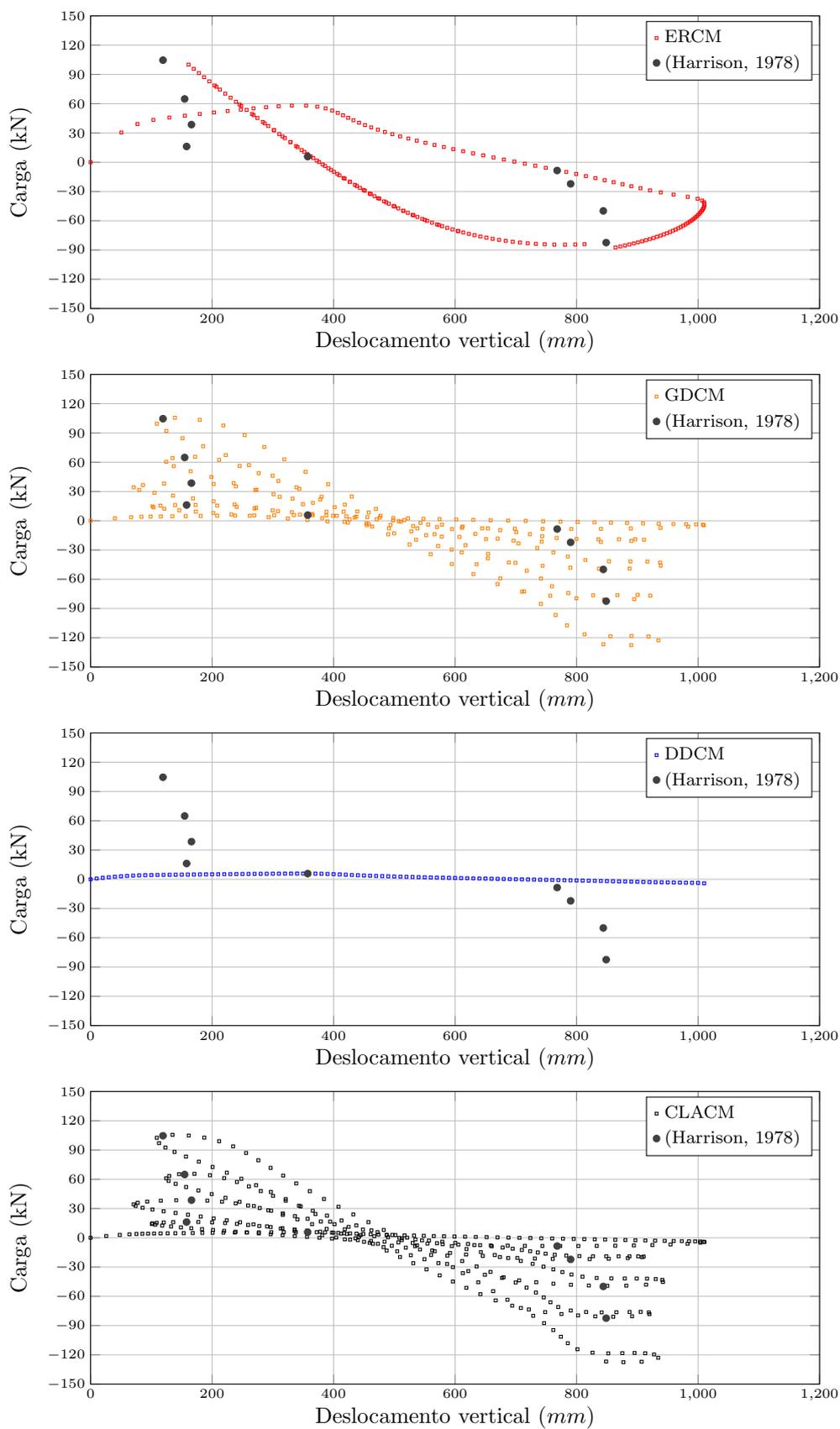
Para solução do modelo, empregou-se o método de controle baseado em taxas de energia com um incremento inicial do fator de carga de 0,5, carga de referência  $P_0 = 900 \text{ N}$  e tolerância para convergência em deslocamento de  $1 \times 10^{-4}$ .

As Figuras 4.17 e 4.18 mostram, respectivamente, as deformadas relativas aos passos 900, 4050, 6250 e 12000 (alguns pontos de instabilidade detectados pelo método implementado) e as trajetórias de equilíbrio para o deslocamento vertical do

nó central empregando-se os métodos de comprimento de arco, com trajetória cilíndrica (CLACM) e por taxas energia (ERCM), e de deslocamentos direto (DDCM) e generalizado (GDCM), juntamente com as respostas numéricas obtidas por Harrison (1978). Os métodos GDCM e CLACM foram usados com fator de carga inicial de 0,05. Para o controle direto de deslocamento, incrementou-se de 10 *mm* o deslocamento vertical do nó central. As simulações, por apresentarem uma alta quantidade de passos de análise (acima de 10000 incrementos para os controles GDCM, CLACM e ERCM), foram representadas nos gráficos por faixa de 50 passos.



**Figura 4.17:** Semi-círculo: deformada.



**Figura 4.18:** Semi-círculo: deslocamento vertical do nó central.

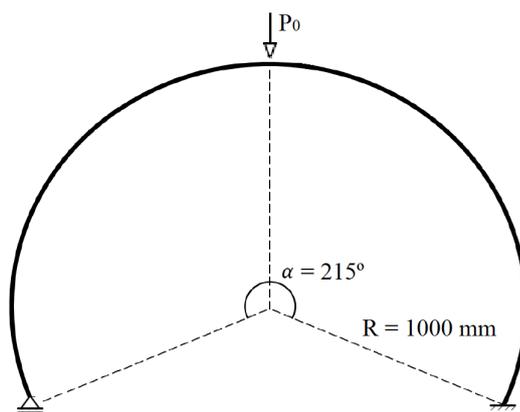
A partir da Figura 4.18, observa-se que as trajetórias de equilíbrio obtidas pelos métodos de controle de comprimento de arco com trajetória de iteração cilíndrica e de deslocamento generalizado apresentam boa concordância com as respostas encontradas por Harrison (1978). O método de controle direto de deslocamento teve a sua trajetória interrompida no primeiro ponto limite de deslocamento (momento em que se inicia o fenômeno de decréscimo de carga com decréscimo de deslocamento), ao passo que, o método de controle por taxas de energia não foi capaz de representar satisfatoriamente a trajetória. Várias tentativas de se obter a convergência por meio da alteração dos parâmetros da solução foram realizadas; entretanto, o método não apresentou eficiência para descrever o referido trecho da análise.

Vale ressaltar que, em problemas geometricamente não lineares, pontos de instabilidade podem ocorrer sem que qualquer quantidade de energia seja liberada do sistema (há apenas acréscimo de energia). Assim, para este tipo de situação, sugere-se novamente o uso dos métodos tradicionais de comprimento de arco ou do método de deslocamento generalizado.

### **4.3.2 Arco Rotulado-Engastado de Grande Altura**

O arco rotulado à esquerda e engastado à direita de grande altura foi estudado, dentre outros, por Wood e Zienkiewicz (1977), Galvão (2000) e de Oliveira (2016). O primeiro destes autores realizou um estudo analítico e numérico da trajetória de equilíbrio do ponto de aplicação da carga. Os demais autores se limitaram a estudos numéricos com variado número de elementos.

A configuração geométrica para este exemplo, baseada no trabalho de Wood e Zienkiewicz (1977), é apresentada na Figura 4.19.



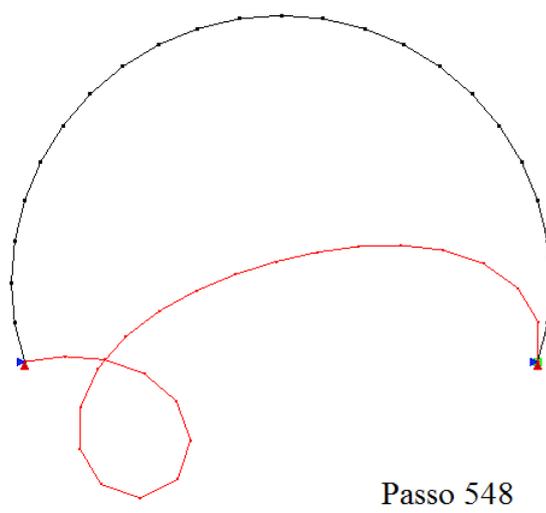
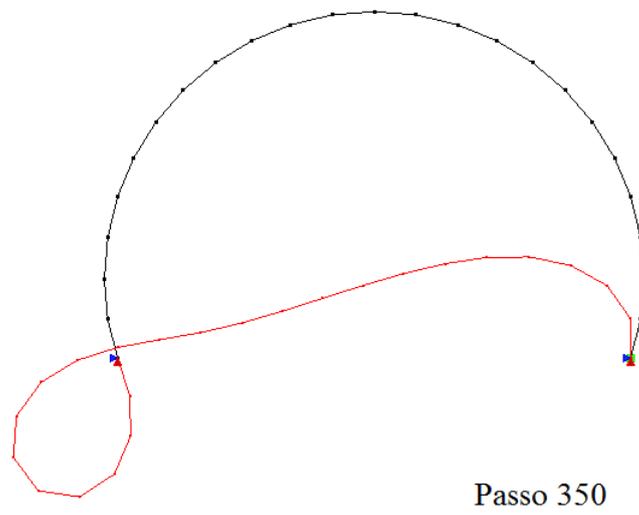
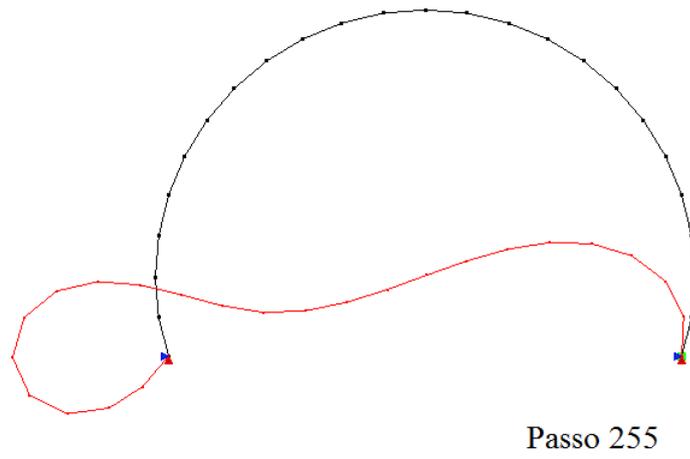
**Figura 4.19:** Arco de grande altura: configuração geométrica.

Nesta análise, adotou-se o modelo constitutivo elástico linear e isotrópico, cujo módulo de elasticidade é  $E = 120000 \text{ N/mm}^2$ . A seção transversal possui dimensões  $10 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$  e  $I_z = 830 \text{ mm}^4$ . O arco foi modelado por meio de 12 elementos unidimensionais de dois nós, para a primeira simulação, e 24, para a segunda.

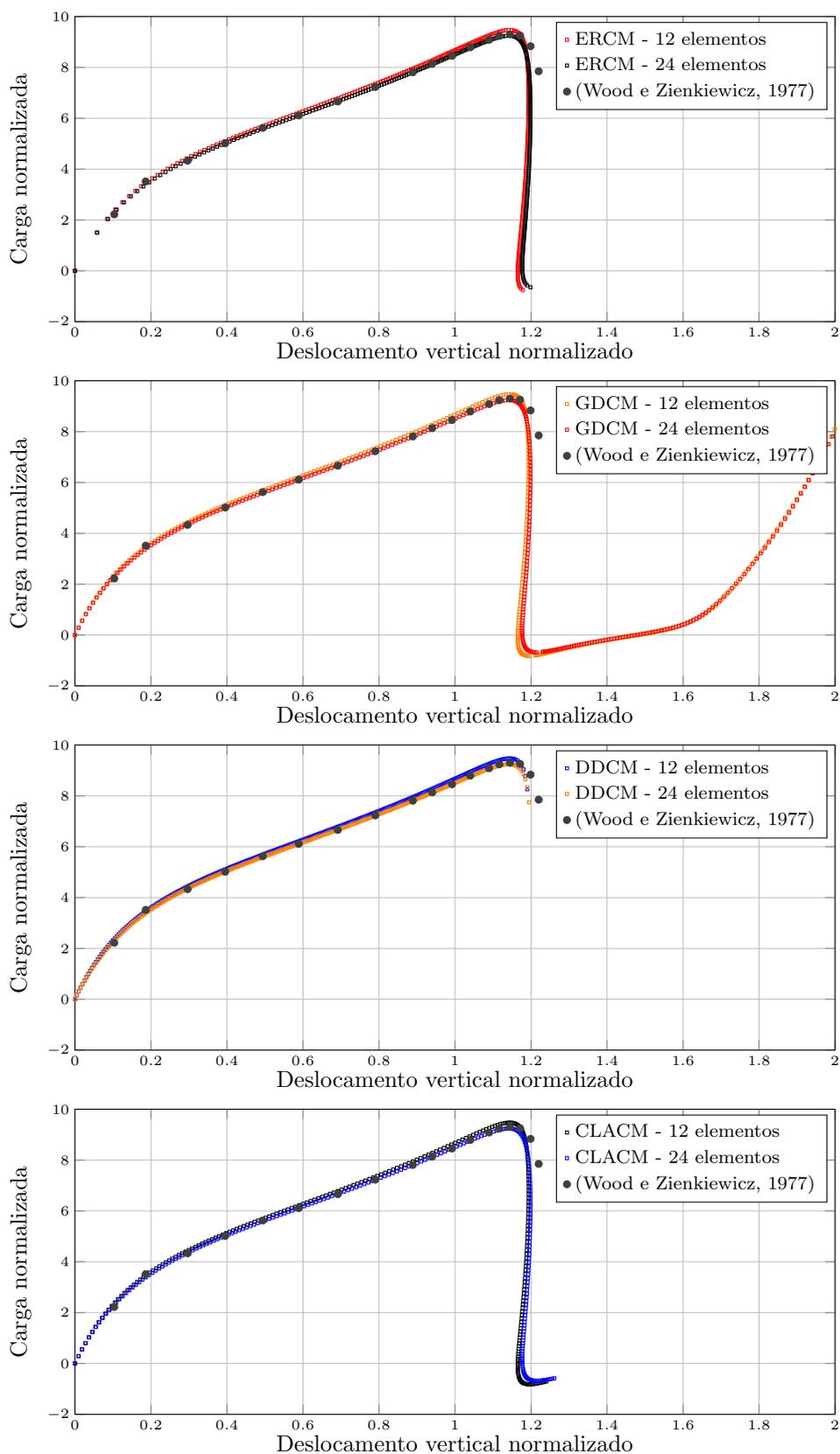
Para solução do modelo, empregou-se o método de controle baseado em taxas de energia com um incremento inicial do fator de carga de 0,75, carga de referência  $P_0 = 150 \text{ N}$  e tolerância para convergência em força e deslocamento de  $1 \times 10^{-4}$ .

As simulações alcançaram, no total, 588 e 558 passos para os modelos com 12 e 24 elementos, respectivamente.

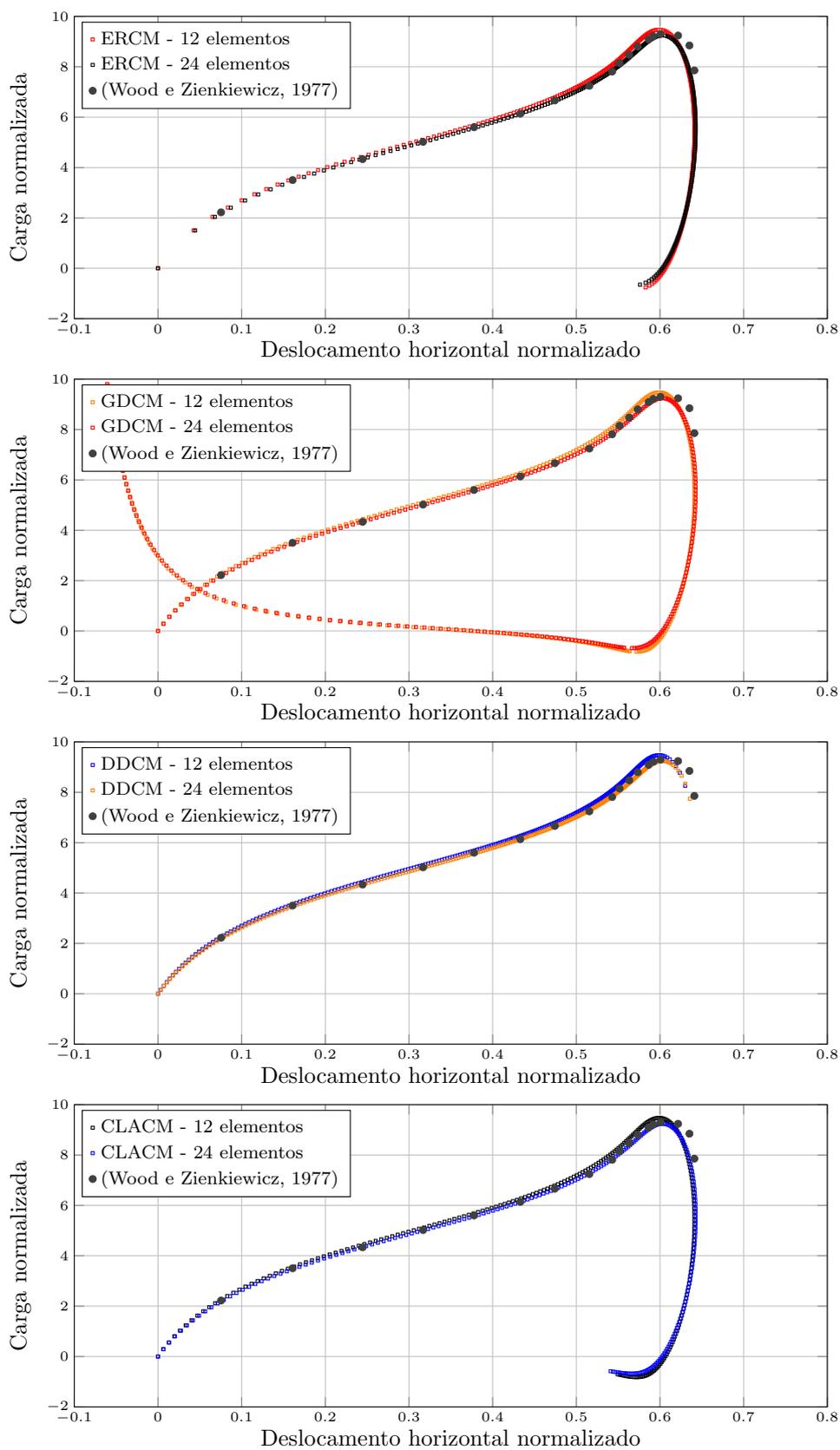
As Figuras 4.20, 4.21 e 4.22 mostram, respectivamente, as deformadas relativas aos passos 255, 350 e 548 (alguns pontos de instabilidade detectados pelo método proposto para a simulação com 24 elementos) e as trajetórias de equilíbrio para os deslocamentos vertical e horizontal normalizados do nó central empregando-se os métodos de comprimento de arco, com trajetória cilíndrica (CLACM) e por taxas energia (ERCM), e de deslocamentos direto (DDCM) e generalizado (GDCM), juntamente com as respostas analíticas obtidas por Wood e Zienkiewicz (1977). Os métodos GDCM e CLACM foram usados com fator de carga inicial de 0,2. Para o controle direto de deslocamento, incrementou-se de  $5,0 \text{ mm}$  o deslocamento vertical do nó central.



**Figura 4.20:** Arco de grande altura: deformada.



**Figura 4.21:** Arco de grande altura: deslocamento vertical normalizado.



**Figura 4.22:** Arco de grande altura: deslocamento horizontal normalizado.

A partir das Figuras 4.21 e 4.22, observa-se que as trajetórias de equilíbrio obtidas tanto pelo controle por taxas de energia quanto pelos métodos clássicos de controle ficaram um pouco diferentes a partir do pico quando comparadas com as respostas encontradas por Wood e Zienkiewicz (1977).

Similarmente, ao comportamento observado nas trajetórias do exemplo do Pórtico de Lee (Seção 4.1.2), o método de controle por taxas de energia não foi capaz de representar o trecho de recarregamento, onde tamanho do passo de carga torna-se novamente positivo. O controle de comprimento de arco com trajetória de iteração cilíndrica, por sua vez, também interrompeu a sua curva nas proximidades do referido trecho, ao passo que, o controle direto de deslocamento teve a sua trajetória interrompida no primeiro ponto limite de deslocamento. Sendo assim, o método de controle de deslocamento generalizado apresentou o melhor resultado, sendo capaz de obter uma solução completa em ambas as simulações.

Quanto ao desempenho do método implementado, o mesmo apresentou um tempo de processamento levemente superior aos demais, visto que o mesmo ajustou o tamanho do passo na medida em que os pontos limites foram se aproximando, requerendo uma quantidade de passos maior para descrever a trajetória de equilíbrio.

## Capítulo 5

# EXEMPLOS NUMÉRICOS DE PROBLEMAS FISICAMENTE NÃO LINEARES

O estudo dos fenômenos de plastificação em meios elastoplásticos ou de propagação de trincas em meios frágeis e parcialmente frágeis torna-se uma ferramenta essencial quando deseja-se descrever de forma mais detalhada o comportamento de uma estrutura. No caso de materiais frágeis ou parcialmente frágeis, mesmo quando submetidos a cargas abaixo do carregamento admissível, estes apresentam uma grande quantidade de fissuras e microfissuras que partem da própria composição do material em questão. Estas pequenas trincas e microfissuras, que estão presentes principalmente nas regiões porosas e de vazios e na zona de transição, evidenciam que o desempenho final de uma estrutura composta por tais materiais é bastante complexo e que o controle do processo de deterioração é imprescindível para uma descrição aprofundada de seu comportamento.

Neste capítulo, apresentam-se simulações numéricas de problemas nos quais a resposta do material durante a análise é dependente do estado de deformação a que este é submetido. Este tipo de análise, que considera fenômenos de deterioração e consequente alteração da resposta mecânica de parte do material de uma estrutura, é dita fisicamente não linear (Pitangueira, 1998), com a qual é possível simular o comportamento da estrutura de forma mais realista.

Os diversos modelos propostos que lidam com a não linearidade física, usando elementos finitos, podem ser divididos segundo três principais abordagens (Pitangueira, 1998):

- modelos de degradação distribuída;
- adoção de relações tensão-deformação generalizadas;
- definição de rótulas plásticas (não pertence ao escopo deste trabalho).

Nos modelos que adotam a degradação distribuída, a deterioração ocorre de forma gradual em todo o volume do corpo. Esta abordagem tem se mostrado a mais indicada para o estudo de estruturas mais complexas, possibilitando que a interação inelástica entre esforços axiais, flexão oblíqua e torção na referida seção seja modelada de modo preciso. A adoção da degradação distribuída requer a subdivisão da seção transversal dos membros ao longo do comprimento das fibras ou pontos de monitoramento e o emprego de leis constitutivas para acompanhar a evolução de cada subdomínio durante a análise. Desta forma, o comportamento total da seção transversal do elemento é obtido a partir do comportamento individual de cada sub-região (Teh e Clarke, 1999).

Uma outra forma de descrever o comportamento do material é por meio de relações constitutivas tensão-deformação, sendo o material considerado homogêneo. Tal abordagem possui limitações, como a incapacidade de se capturar as deformações localizadas do material. Por outro lado, a demanda computacional desta abordagem tende a ser muito inferior à da degradação distribuída. Dessa forma, mesmo com os avanços digitais das últimas décadas, a utilização de relações tensão-deformação ainda são do interesse de muitos pesquisadores.

O objetivo deste capítulo é avaliar a eficiência e o desempenho do método de controle de comprimento de arco baseado em taxas de energia interna e dissipada na solução de diferentes tipos de problemas fisicamente não lineares. Para tal propósito, são apresentados cinco (5) exemplos numéricos, listados a seguir, onde o referido

método é posto em comparação com diferentes métodos clássicos de controle da análise não linear já implementados no sistema INSANE.

- Seção 5.1: Solicitações axiais - objetivou-se estudar o desempenho do método proposto para passar por pontos limites adotando-se diferentes leis constitutivas de tensão-deformação para tração e compressão e realizar um estudo comparativo deste método em relação aos demais métodos clássicos de controle;
- Seção 5.2: Compressão diametral - objetivou-se estudar a eficiência do método proposto para simular efeitos de tamanho de trinca e realizar um estudo comparativo deste método em relação aos demais métodos clássicos de controle;
- Seção 5.3: Flexão em três pontos - objetivou-se estudar a eficiência do método proposto quando comparado com ensaio experimental e diferentes métodos clássicos de controle;
- Seção 5.4: Cisalhamento em quatro pontos - objetivou-se estudar a eficiência do método proposto para descrever propagação de falha preexistente quando comparado com ensaio experimental e diferentes métodos clássicos de controle;
- Seção 5.5: Painel em “L” - Objetivou-se estudar a eficiência do método proposto quando comparado com ensaio experimental e diferentes métodos clássicos de controle.

## 5.1 Solicitações Axiais

Nesta seção, apresentam-se simulações numéricas para os exemplos de tração e compressão axial de forma a avaliar a eficiência e o desempenho do método de controle baseado em taxas de energia para passar por pontos limites de carga e de deslocamento.

Estes exemplos foram simulados para uma situação na qual ocorre o fenômeno de

decréscimo de carga acompanhado de decréscimo de deslocamento, empregando-se um modelo de fissuração onde quatro relações tensão-deformação para o concreto são testadas (especificações sobre estas relações são encontradas no Apêndice D). Tais relações são listadas a seguir:

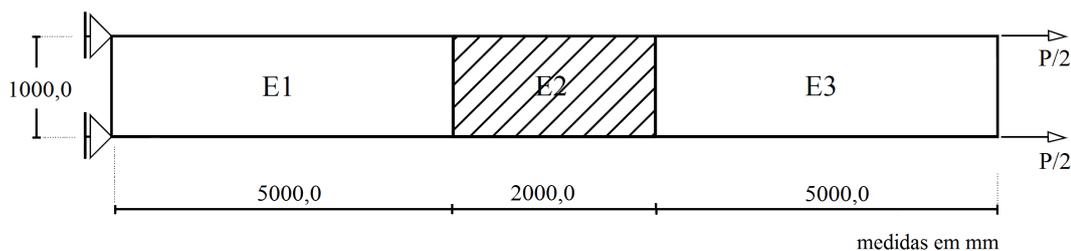
- Leis polinomiais de Carreira e Chu (1985, 1986) para compressão e tração;
- Lei exponencial de Boone et al. (1986) para tração;
- Aproximação bilinear para tração e compressão.

A reprodução do fenômeno de decréscimo de carga acompanhado de decréscimo de deslocamento foi obtida atribuindo-se a um dos elementos da malha características de resistência inferiores às dos demais. Dessa forma, somente este elemento enfraquecido será solicitado seguindo o ramo descendente da lei constitutiva, enquanto os demais sofrerão descarregamento.

Na sequência, as mesmas simulações foram realizadas com o uso dos métodos de controle de deslocamento direto, de comprimento de arco com trajetória cilíndrica e de deslocamento generalizado, os quais estão representando os métodos clássicos. A discussão e comparação dos resultados é feita no decorrer do texto.

### 5.1.1 Tração Axial

A configuração geométrica para o exemplo de uma barra sob tração axial é apresentada na Figura 5.1.



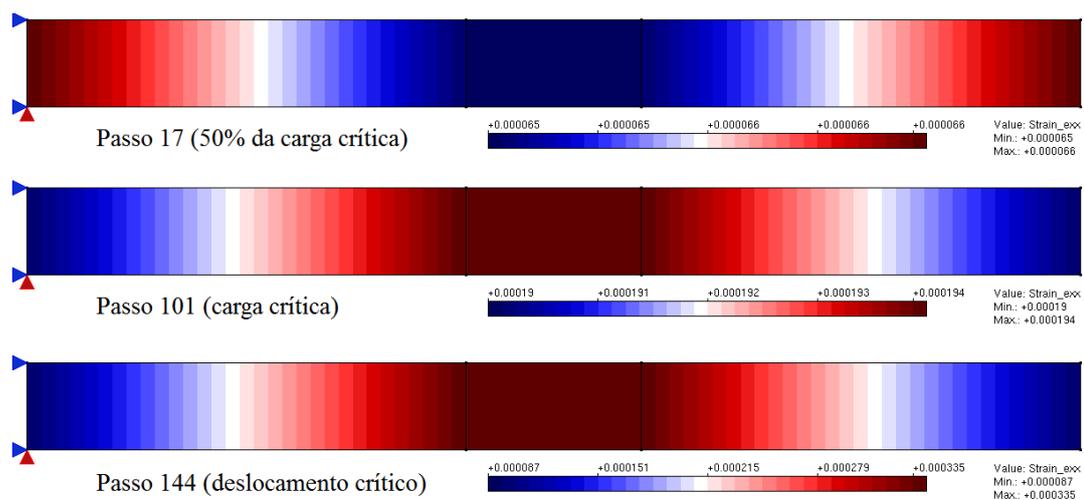
**Figura 5.1:** Tração axial: configuração geométrica.

Nesta análise, foram realizadas três simulações utilizando o modelo constitutivo de fissuras distribuídas: na primeira simulação, adotou-se a lei de Carreira e Chu (1986) para descrever o comportamento do material na tração; na segunda simulação, adotou-se a lei de Boone et al. (1986) e na terceira simulação, adotou-se a aproximação bilinear para tração. Os parâmetros do material dos elementos  $E1$  e  $E3$  são: módulo de elasticidade elástico  $E_0 = 20000,0 \text{ N/mm}^2$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0,2$ , resistência à tração  $f_t = 2,6 \text{ N/mm}^2$ , deformação relativa ao limite elástico na tração  $\varepsilon_t = 0,0003$ , energia de fratura  $G_f = 0,169 \text{ N/mm}$ , comprimento característico  $L_f = 100 \text{ mm}$  e fator de retenção ao cisalhamento  $\beta_r = 0,05$ , ao passo que, para o elemento  $E2$ :  $E_0 = 20000,0 \text{ N/mm}^2$ ,  $\nu = 0,2$ ,  $f_t = 2,4 \text{ N/mm}^2$ ,  $\varepsilon_t = 0,0002$ ,  $G_f = 0,144 \text{ N/mm}$ ,  $L_f = 100 \text{ mm}$  e  $\beta_r = 0,05$ . A barra possui uma espessura  $t = 1000 \text{ mm}$  e foi modelada com três elementos quadrilaterais de quatro nós ( $Q4$ ) em estado plano de tensão.

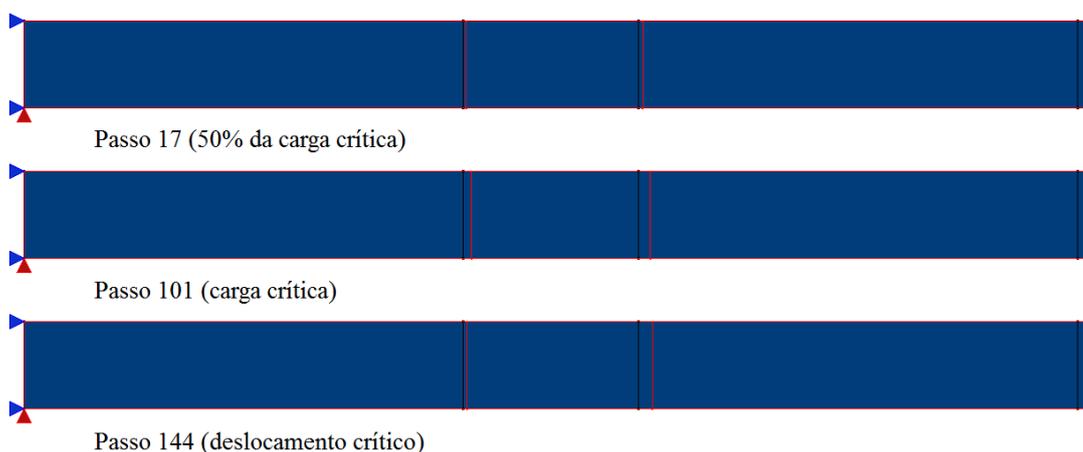
Para solução dos modelos, empregaram-se o método de controle baseado em taxas de energia com um incremento inicial do fator de carga de 12,5% da carga máxima admissível (para as três simulações), carga de referência  $P = 2,4 \text{ MN}$ , parâmetro  $a = 1,0$  e tolerância para convergência em deslocamento de  $1 \times 10^{-4}$ .

No total, para a análise em que adotou-se a lei de Carreira e Chu (1986) para tração, foram considerados 195 passos a serem representados pelo método proposto. As demais análises foram interrompidas antes de se obter a trajetória de equilíbrio completa.

Nas Figuras 5.2 e 5.3, apresentam-se, respectivamente, a deformação normal horizontal  $\varepsilon_{xx}$  e a deformada com fator de escala igual a 100, relativas aos passos 17 (ponto de 50% da carga crítica), 101 (ponto de carga crítica) e 144 (ponto de deslocamento crítico) da análise em que adotou-se a lei de Carreira e Chu (1986) para tração.



**Figura 5.2:** Lei Carreira e Chu (1986) para tração: deformação  $\epsilon_{xx}$ .



**Figura 5.3:** Lei Carreira e Chu (1986) para tração: deformada.

Nas Figuras 5.4, 5.5 e 5.6, apresentam-se, respectivamente, as trajetórias de equilíbrio para o deslocamento horizontal do ponto superior de aplicação da carga adotando-se as leis Carreira e Chu (1986), Boone et al. (1986) e bilinear, para tração, empregando-se os métodos de controle de comprimento de arco, com trajetória cilíndrica (CLACM) e por taxas de energia (ERCM), e de deslocamentos generalizado (GDCM) e direto (DDCM). Os métodos CLACM e GDCM foram usados com um incremento inicial do fator de carga de 5% e de 2% da carga máxima admissível, respectivamente. Ao adotar o controle direto de deslocamento, incrementou-se de 0,064 mm o deslocamento horizontal do ponto superior de aplicação da carga.

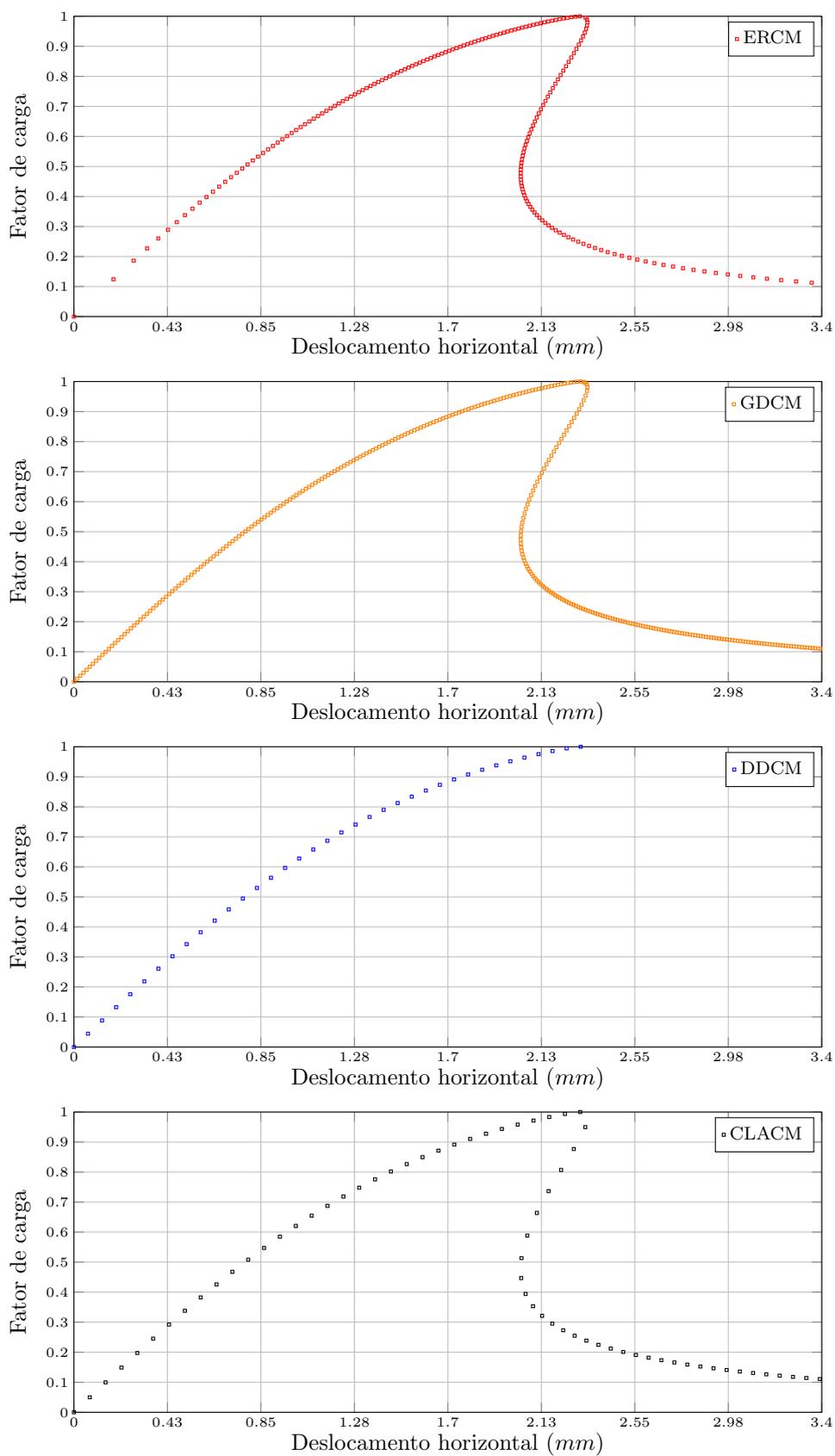
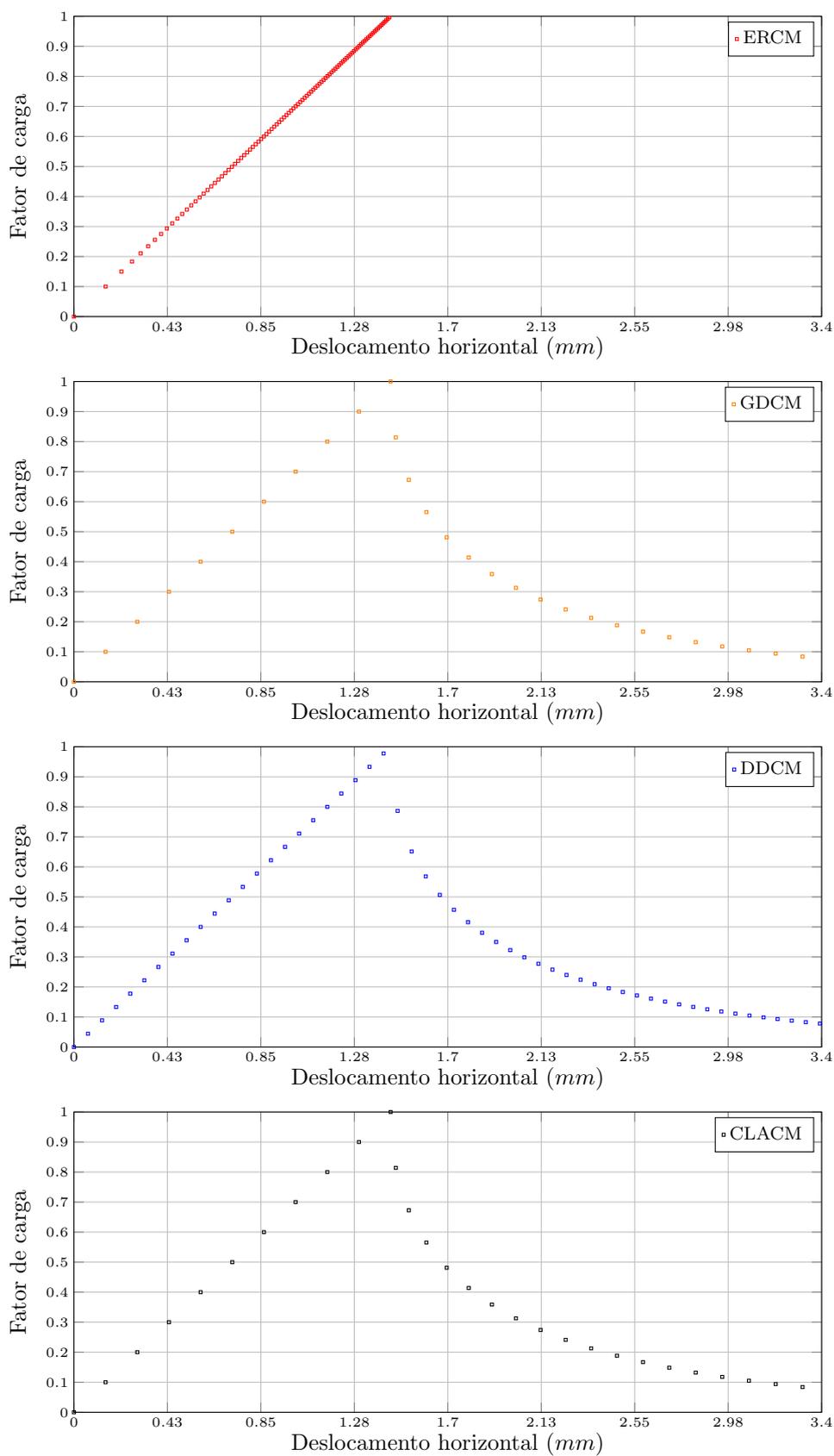
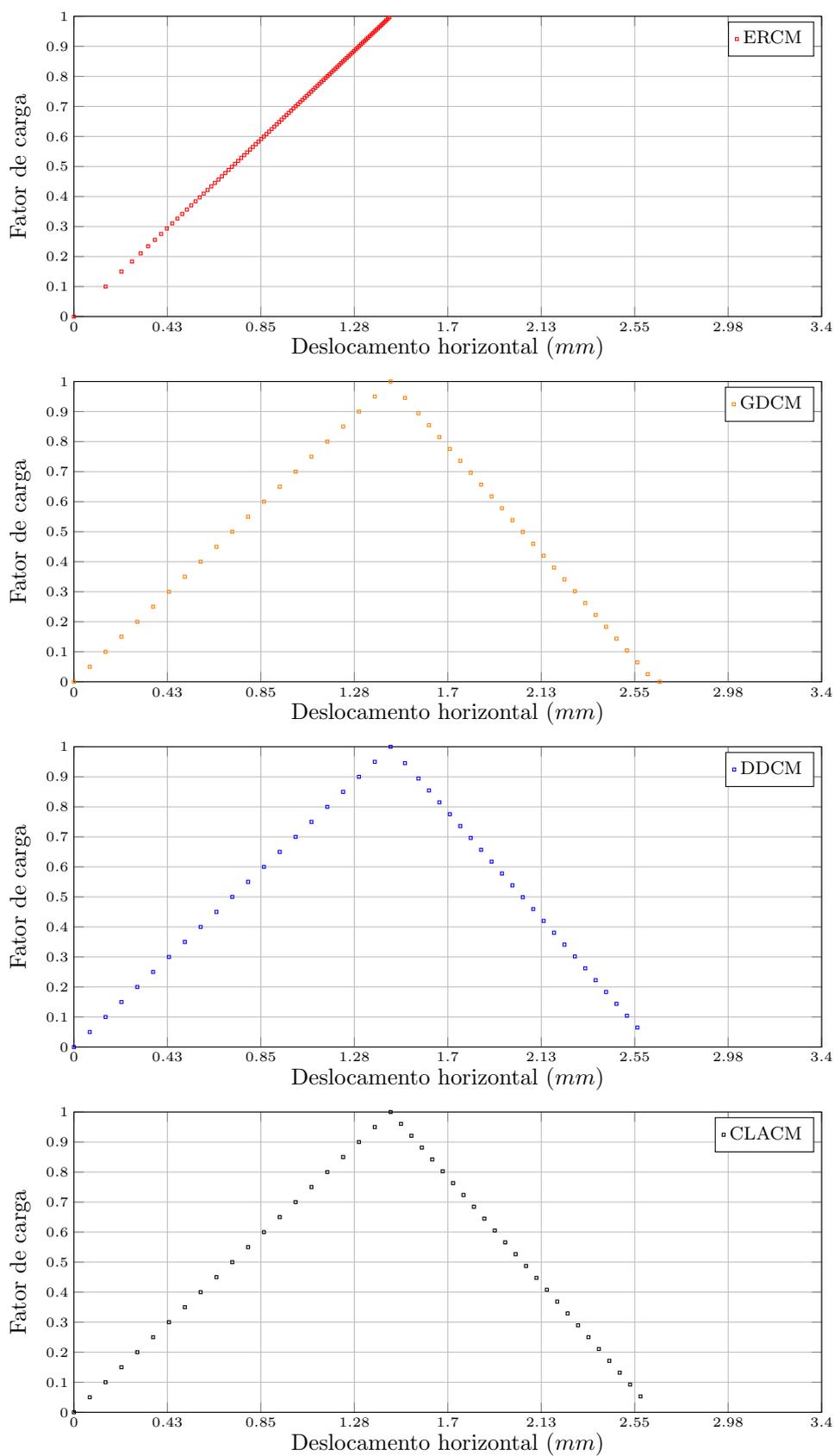


Figura 5.4: Lei Carreira e Chu (1986) para tração: trajetórias de equilíbrio.



**Figura 5.5:** Lei Boone et al. (1986) para tração: trajetórias de equilíbrio.



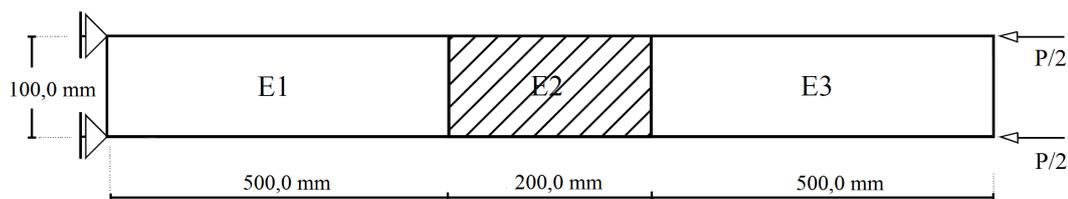
**Figura 5.6:** Aproximação bilinear para tração: trajetórias de equilíbrio.

Segundo as Figuras 5.2 e 5.3, verifica-se que, como esperado, o campo de deformações cresce de forma quase uniforme até o momento em que se inicia a falha do elemento enfraquecido. Após a ruptura deste, nota-se uma redução gradual das deformações dos elementos  $E1$  e  $E3$  devido ao descarregamento elástico.

A partir das Figuras 5.4, 5.5 e 5.6, observa-se que o método de controle de taxas de energia apresentou eficácia para passar pelos pontos limites de carga e de deslocamento com o uso da relação tensão-deformação de forma polinomial proposta por Carreira e Chu (1986). Por outro lado, a convergência no trecho pós-crítico adotando-se as leis de Boone et al. (1986) e bilinear não foi alcançada e a trajetória de equilíbrio foi interrompida no ponto de carga máxima (momento no qual a permutação entre as funções de controle deve ocorrer). Dessa forma, constata-se que o método aponta ser mais adequado para problemas que apresentam uma trajetória mais suave. Problemas envolvendo apenas linearidade com picos de carga repentinos devem ser evitados usando este método. Além disso, a Figura 5.4 mostra que todos os métodos de controle foram capazes de representar a situação de decréscimo de carga acompanhado de decréscimo de deslocamento, com exclusão do controle direto de deslocamento, o qual teve a sua trajetória interrompida. De modo geral, para o caso em que adotou-se a lei polinomial, o controle baseado em taxas de energia obteve a descrição mais satisfatória, uma vez que o mesmo ajusta o tamanho do passo à medida que os pontos limites de carga e de deslocamento vão se aproximando. Para este caso, o método de controle de deslocamento generalizado apresentou maior dificuldade em alcançar a convergência no pico de carga, necessitando, assim, uma diminuição do fator de carga inicial de 0,05 para 0,02 e, conseqüentemente, maior tempo para processamento do que os demais.

### 5.1.2 Compressão Axial

A configuração geométrica para o exemplo de uma barra comprimida é apresentada na Figura 5.7.



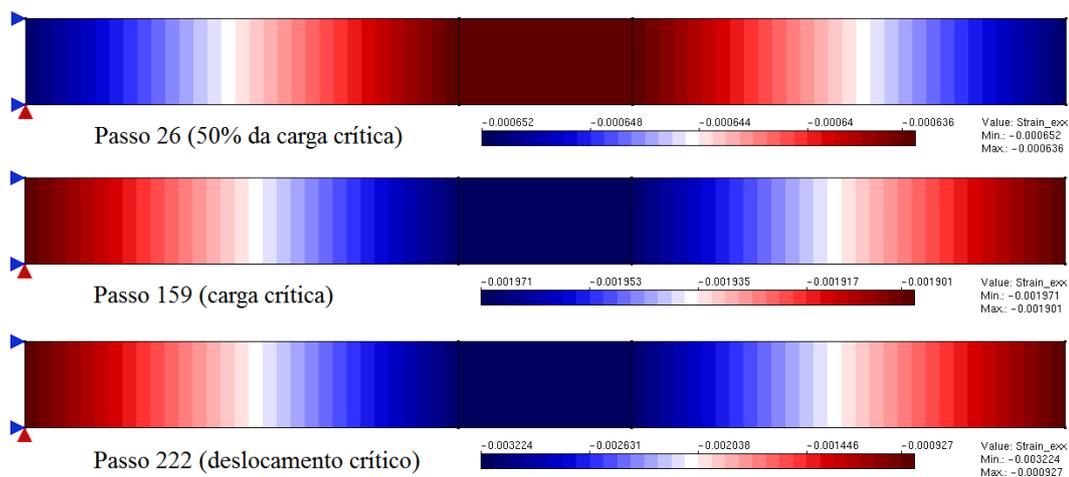
**Figura 5.7:** Compressão axial: configuração geométrica.

Nesta análise, foram realizadas duas simulações utilizando o modelo constitutivo de fissuras distribuídas: Na primeira simulação, adotou-se a lei de Carreira e Chu (1985) para descrever o comportamento do material na compressão, ao passo que, na segunda simulação, adotou-se a aproximação bilinear para compressão. Os parâmetros do material dos elementos  $E1$  e  $E3$  são: módulo tangente do ramo descendente linear  $E_2 = 2000,0 \text{ N/mm}^2$  (apenas para lei bilinear),  $E_0 = 20000,0 \text{ N/mm}^2$ ,  $\nu = 0,2$ , resistência à compressão  $f_c = 26 \text{ N/mm}^2$ , deformação relativa ao limite elástico na compressão  $\varepsilon_c = 0,003$ ,  $G_f = 0,169 \text{ N/mm}$ ,  $L_f = 100 \text{ mm}$  e  $\beta_r = 0,05$ , ao passo que, para o elemento  $E2$ :  $E_2 = 2000,0 \text{ N/mm}^2$ ,  $E_0 = 20000,0 \text{ N/mm}^2$ ,  $\nu = 0,2$ ,  $f_c = 24 \text{ N/mm}^2$ ,  $\varepsilon_c = 0,002$ ,  $G_f = 0,144 \text{ N/mm}$ ,  $L_f = 100 \text{ mm}$  e  $\beta_r = 0,05$ . A barra possui uma espessura  $t = 1000 \text{ mm}$  e foi modelada com três elementos quadrilaterais de quatro nós ( $Q4$ ) em estado plano de tensão.

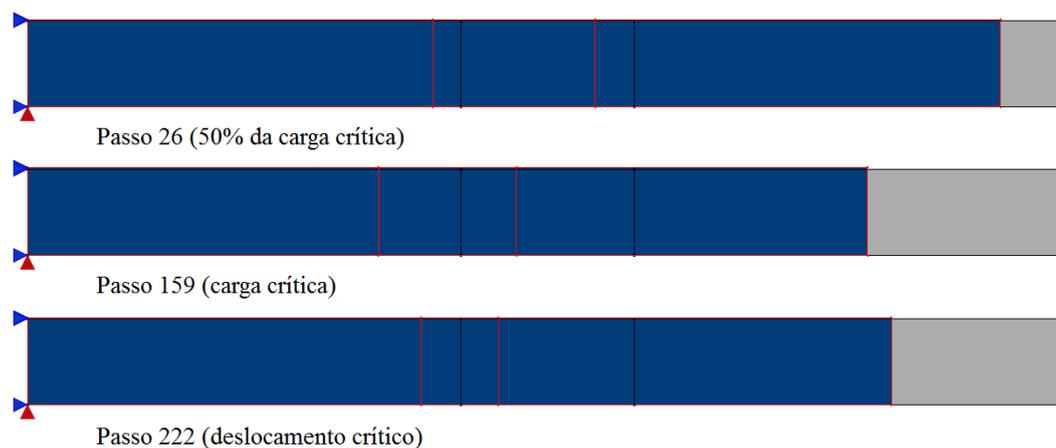
Para solução dos modelos, empregou-se o método implementado com um incremento inicial do fator de carga de 10% da carga máxima admissível, carga de referência  $P = 2,4 \text{ MN}$ , parâmetro  $a = 1,0$  e tolerância para convergência em deslocamento de  $1 \times 10^{-4}$ .

No total, para a análise em que adotou-se a lei de Carreira e Chu (1985), foram considerados 315 passos a serem representados pelo método proposto. A análise adotando-se a lei bilinear foi interrompida antes de se obter a solução desejada.

Nas Figuras 5.8 e 5.9, apresentam-se, respectivamente, a deformação normal horizontal  $\varepsilon_{xx}$  e a deformada com fator de escala igual a 100, relativas aos passos 26 (50% da carga crítica), 159 (carga crítica) e 222 (deslocamento crítico) da análise em que adotou-se a lei de Carreira e Chu (1985) para compressão.

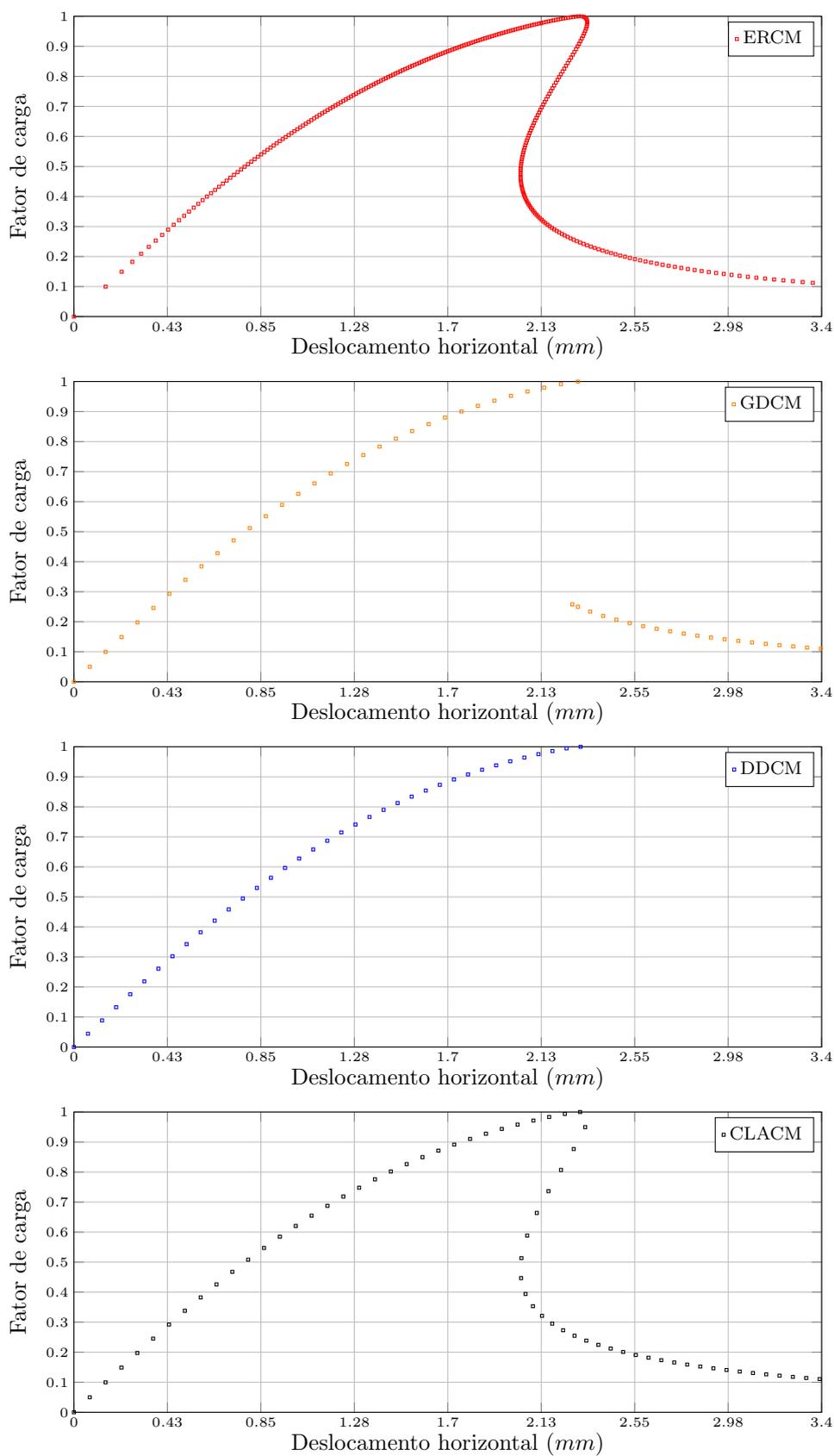


**Figura 5.8:** Lei Carreira e Chu (1985) para compressão: deformação  $\epsilon_{xx}$ .

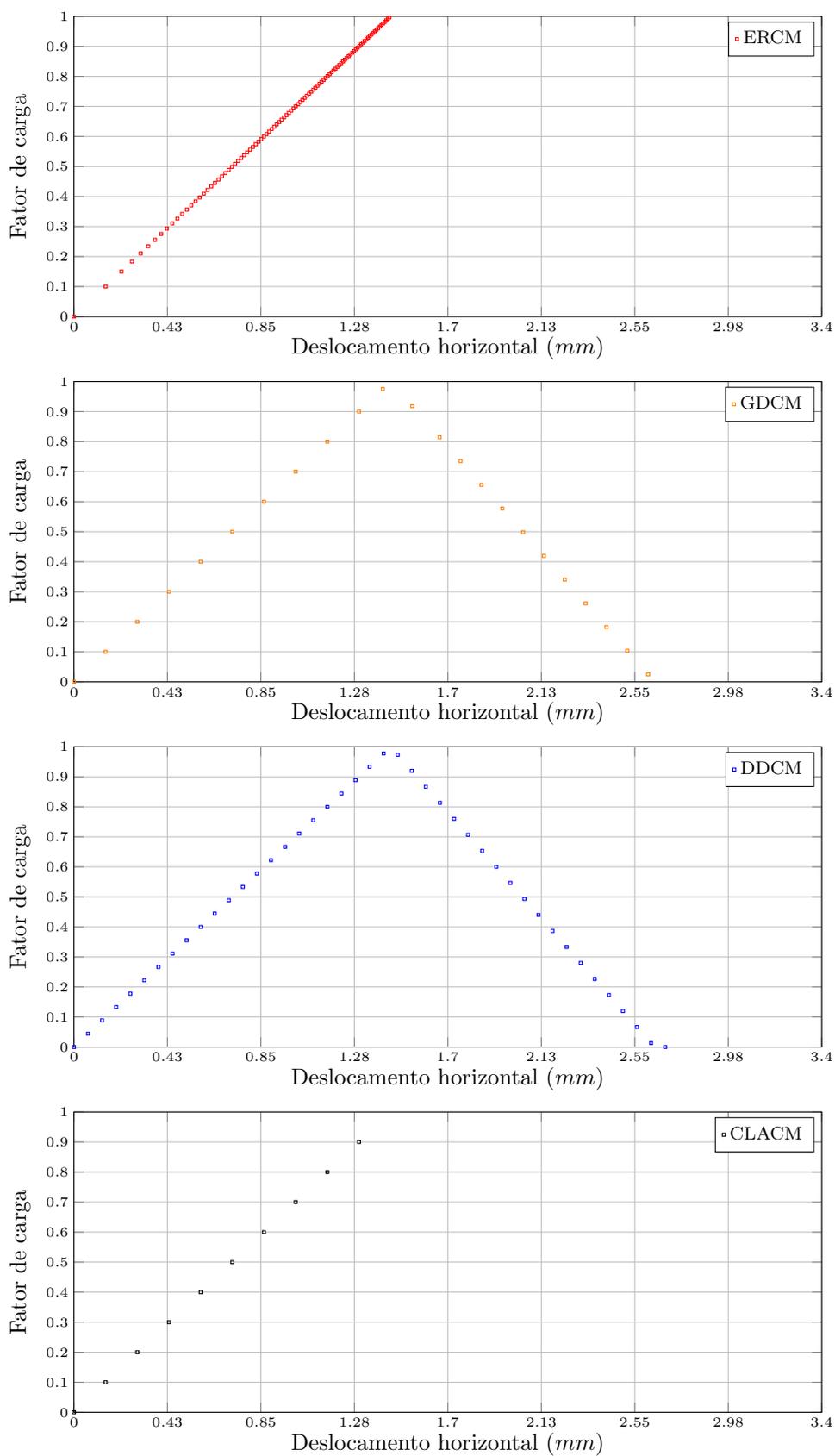


**Figura 5.9:** Lei Carreira e Chu (1985) para compressão: deformada.

As Figuras 5.10 e 5.11, apresentam, respectivamente, as trajetórias de equilíbrio para o ponto superior de aplicação da carga adotando-se as leis de Carreira e Chu (1985) e bilinear, para compressão, utilizando-se os métodos de controle de comprimento de arco, com trajetória cilíndrica e por taxas de energia, e de deslocamentos generalizado e direto. Os métodos CLACM e GDCM foram usados com um incremento inicial do fator de carga de 5% da carga máxima admissível. Ao adotar o controle direto de deslocamento, incrementou-se de 0,064 mm o deslocamento horizontal do ponto superior de aplicação da carga.



**Figura 5.10:** Lei Carreira e Chu (1985) para compressão: trajetórias de equilíbrio.



**Figura 5.11:** Aproximação bilinear para compressão: trajetórias de equilíbrio.

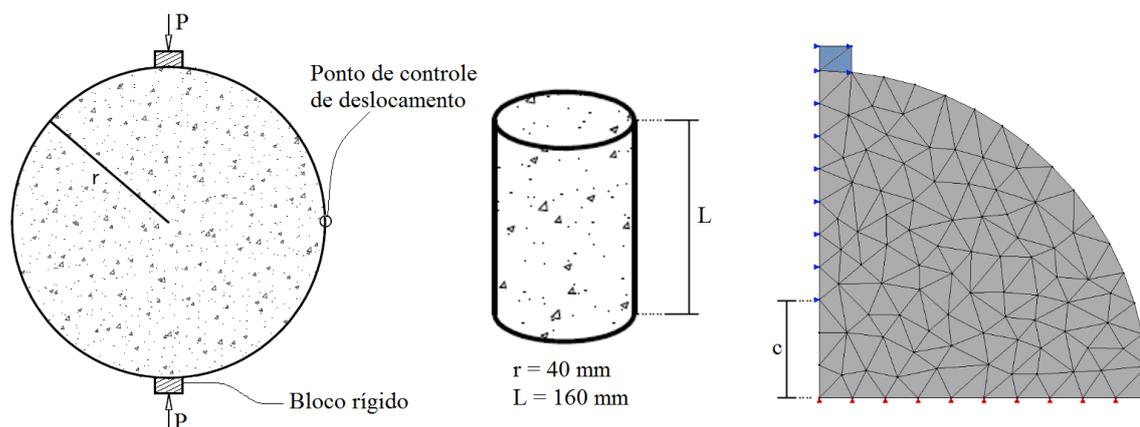
Novamente, observa-se que o método de controle de comprimento de arco baseado em taxas de energia apresentou eficiência para passar pelos pontos limites de carga e de deslocamento com o uso da lei tensão-deformação de forma polinomial proposta por Carreira e Chu (1985). No entanto, não foi possível alcançar a convergência no trecho pós-crítico (onde se inicia a dissipação de energia) adotando-se a aproximação bilinear, reforçando a teoria de que o método deve ser evitado para problemas envolvendo trajetórias de equilíbrio lineares com picos de carga súbitos.

A Figura 5.10 mostra que, para o caso em que adotou-se a lei polinomial, apenas os métodos de controle de comprimento de arco, com trajetória cilíndrica e baseado em taxas de energia, foram capazes de descrever completamente a trajetória de equilíbrio. Todavia, o método de controle de comprimento de arco com trajetória cilíndrica não foi capaz de passar pelo ponto limite de carga empregando o fator de carga inicial estabelecido de 10%, necessitando, assim, de uma redução deste para 5%. Mais uma vez, o controle de comprimento de arco baseado em taxas de energia ajustou o tamanho do passo à medida que os pontos limites se aproximaram.

## 5.2 Compressão Diametral

O ensaio de compressão diametral é usado para se obter de modo indireto a resistência à tração do material ensaiado. Neste ensaio, um corpo de prova cilíndrico em concreto é carregado em compressão, diametralmente entre duas prensas.

Na simulação deste ensaio, cuja configuração geométrica e malha de elementos finitos são mostradas na Figura 5.12, objetivou-se, primeiramente, avaliar a eficiência do método de controle baseado em taxas de energia para simular efeitos de tamanho de trinca e, em seguida, realizar um estudo comparativo do mesmo em relação aos métodos de controle de deslocamento direto, de comprimento de arco com trajetória cilíndrica e de deslocamento generalizado, considerando uma única trinca específica.



**Figura 5.12:** Compressão diametral: configuração geométrica e malha de elementos finitos (Adaptado de Penna (2011)).

O cilindro foi modelado com elementos triangulares de três nós ( $T3$ ) em estado plano de tensão e considerando a dupla simetria do problema. Para o concreto, adotou-se o modelo constitutivo de fissuras distribuídas com leis tensão-deformação de Carreira e Chu (1985), para compressão, e Boone et al. (1986), para tração, cujos parâmetros do material são:  $E_0 = 20000,0 \text{ N/mm}^2$ ,  $\nu = 0,2$ ,  $f_c = 25,0 \text{ N/mm}^2$ ,  $f_t = 2,5 \text{ N/mm}^2$ ,  $\varepsilon_c = 0,01$ ,  $G_f = 0,1 \text{ N/mm}$ ,  $L_f = 50 \text{ mm}$  e  $\beta_r = 0,05$ . O bloco rígido foi considerado como elástico linear e isotrópico com  $E_0 = 210000,0 \text{ N/mm}^2$  e  $\nu = 0,15$ .

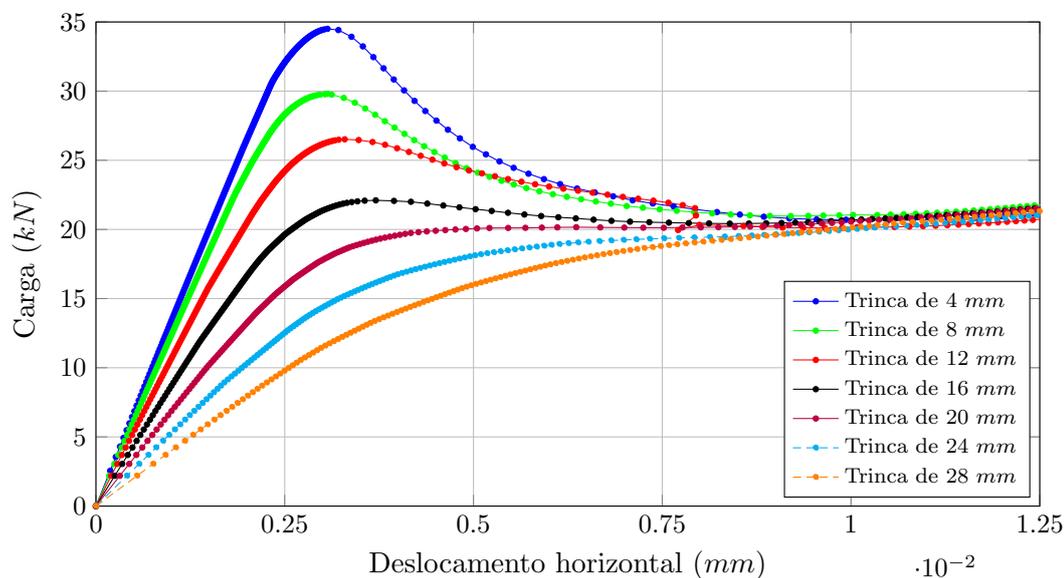
As soluções para o modelo foram obtidas variando-se o tamanho da trinca inicial  $c$ . Empregou-se o método de controle proposto com um incremento inicial do fator de carga de 1,4, para  $c = 4 \text{ mm}$ , e 1,2, para os demais tamanhos de trinca, parâmetro  $a = 1,0$ , carga de referência  $P = 500 \text{ N}$  e tolerância para convergência em força de  $1 \times 10^{-3}$ .

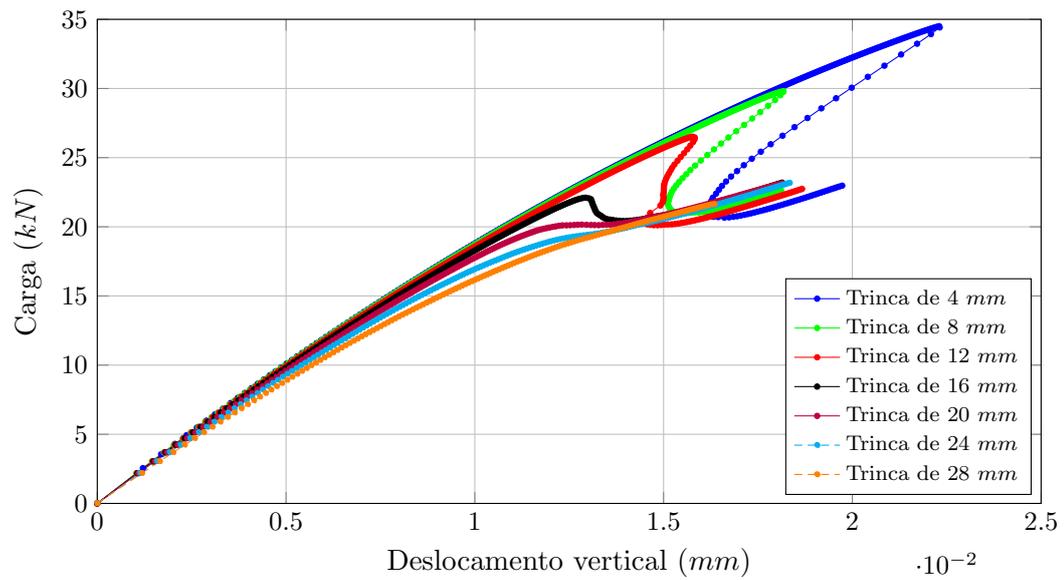
Na Tabela 5.1, apresentam-se os valores referentes à quantidade total de passos para cada simulação.

**Tabela 5.1:** Passos incrementais segundo tamanho de trinca inicial.

$c$ (mm)	Incrementos
4	995
8	980
12	825
16	630
20	505
24	465
28	440

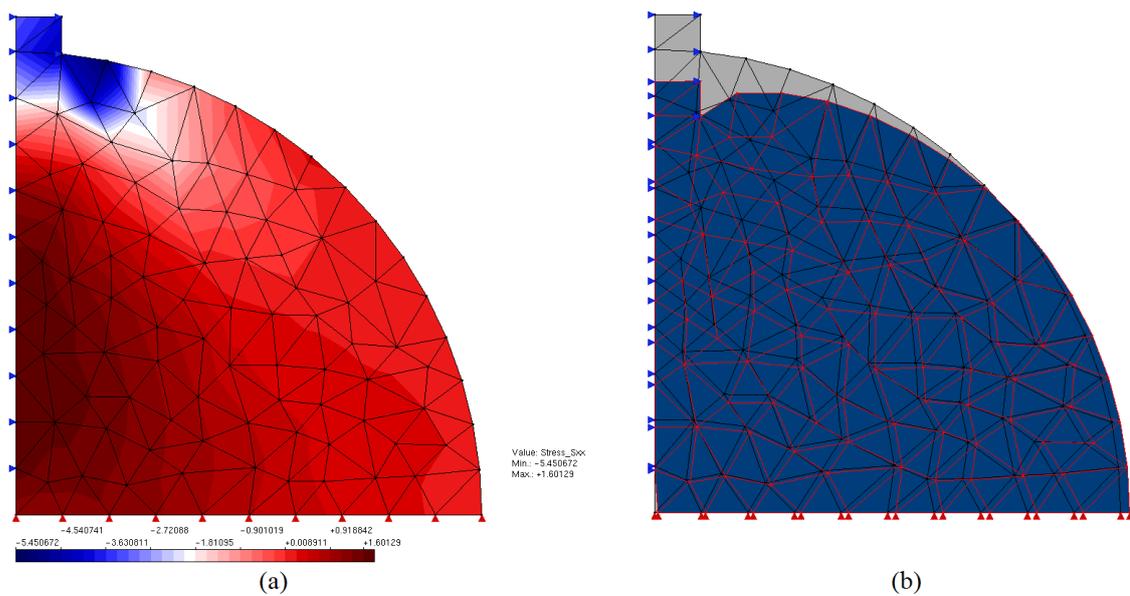
As trajetórias de equilíbrio para o deslocamento horizontal do ponto da extremidade direita (ponto de controle) e para o deslocamento vertical do ponto de contato do cilindro com o bloco rígido são apresentadas nas Figuras 5.13 e 5.14, respectivamente.

**Figura 5.13:** Trajetórias do deslocamento horizontal do ponto de controle.

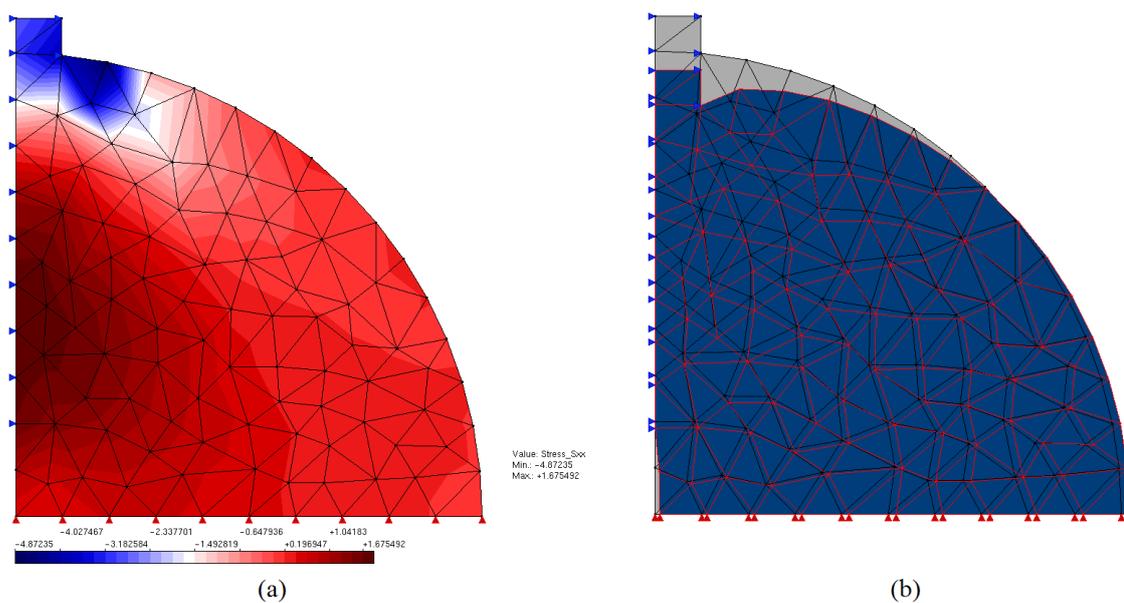


**Figura 5.14:** Trajetórias do deslocamento vertical do contato do bloco com o cilindro.

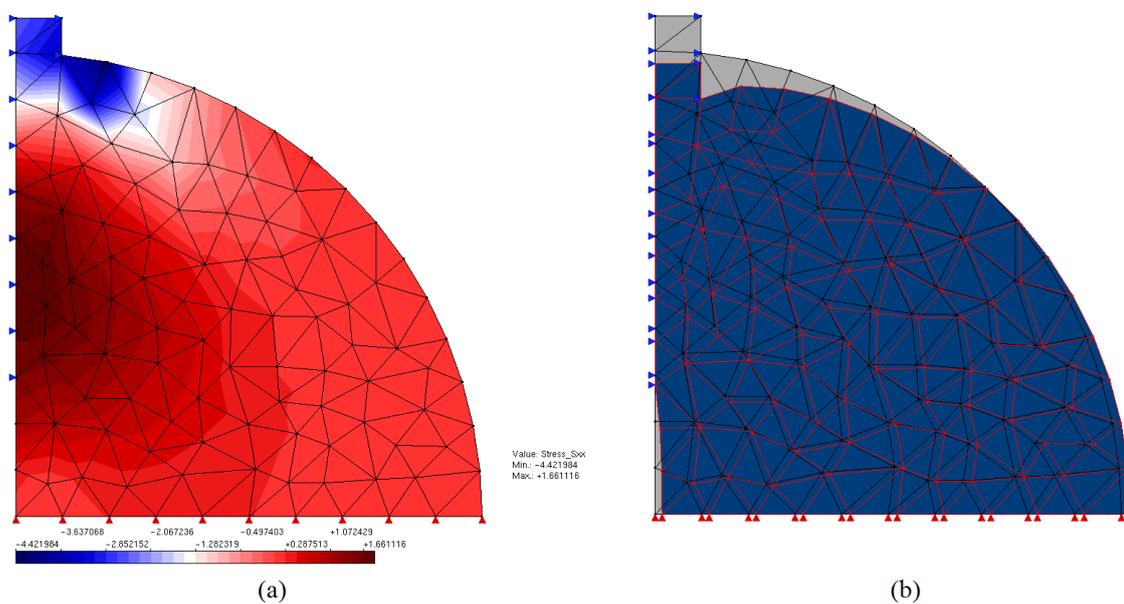
Nas Figuras 5.15, 5.16, 5.17, 5.18, 5.19, 5.20 e 5.21, apresentam-se a tensão normal horizontal  $\sigma_{xx}$  e a deformada com fator de escala igual a 250, relativas ao ponto de carga crítica, para cada tamanho de trinca inicial, respectivamente. Tal ponto é considerado o último ponto antes do modelo exibir redução de carga ou enrijecimento, conforme visto nas trajetórias de equilíbrio.



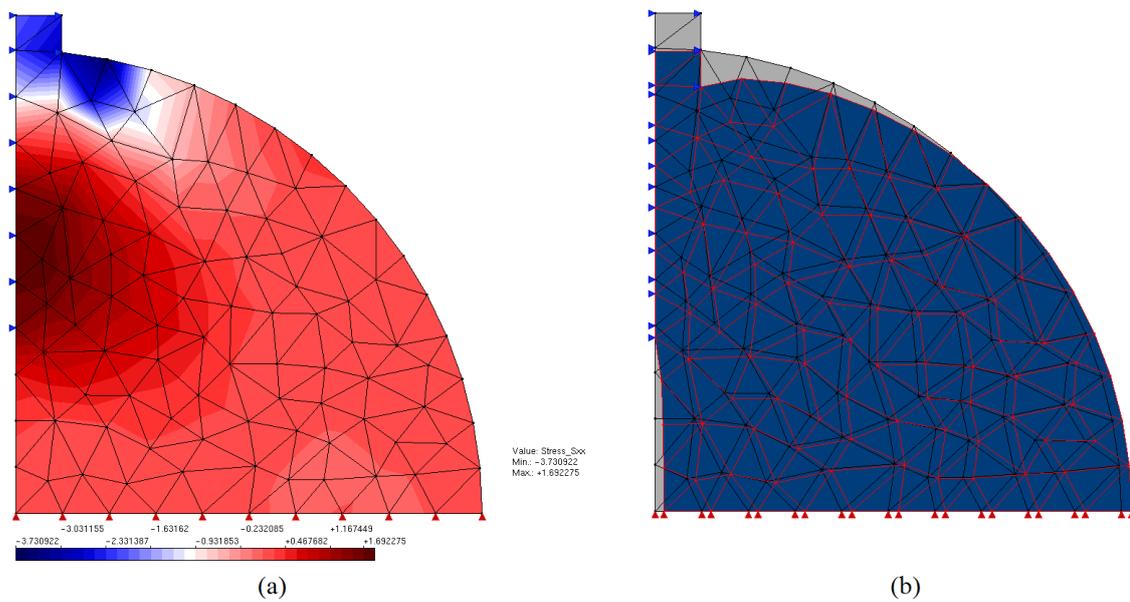
**Figura 5.15:** Compressão diametral: Trinca inicial de 4 mm: (a) Tensão  $\sigma_{xx}$ ; (b) Deformada.



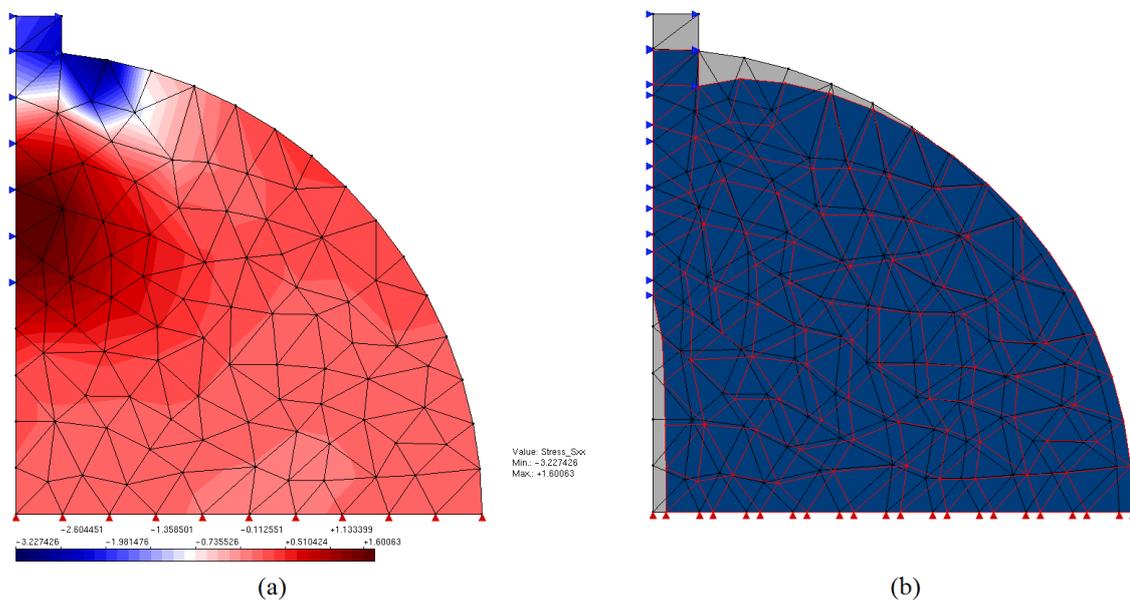
**Figura 5.16:** Compressão diametral: Trinca inicial de 8 mm: (a) Tensão  $\sigma_{xx}$ ; (b) Deformada.



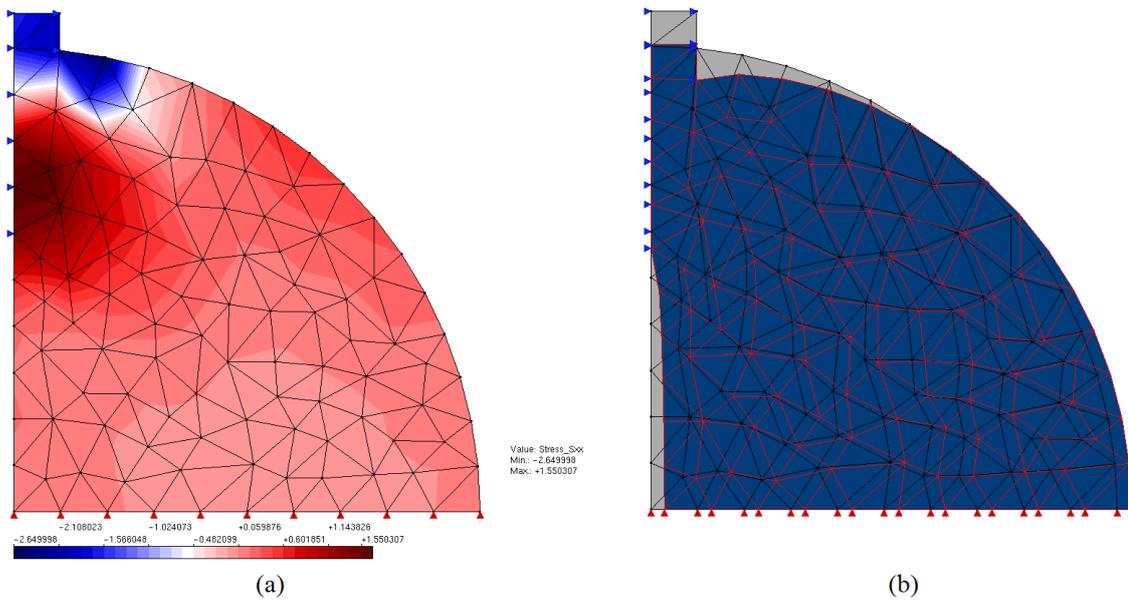
**Figura 5.17:** Compressão diametral: Trinca inicial de 12 mm: (a) Tensão  $\sigma_{xx}$ ; (b) Deformada.



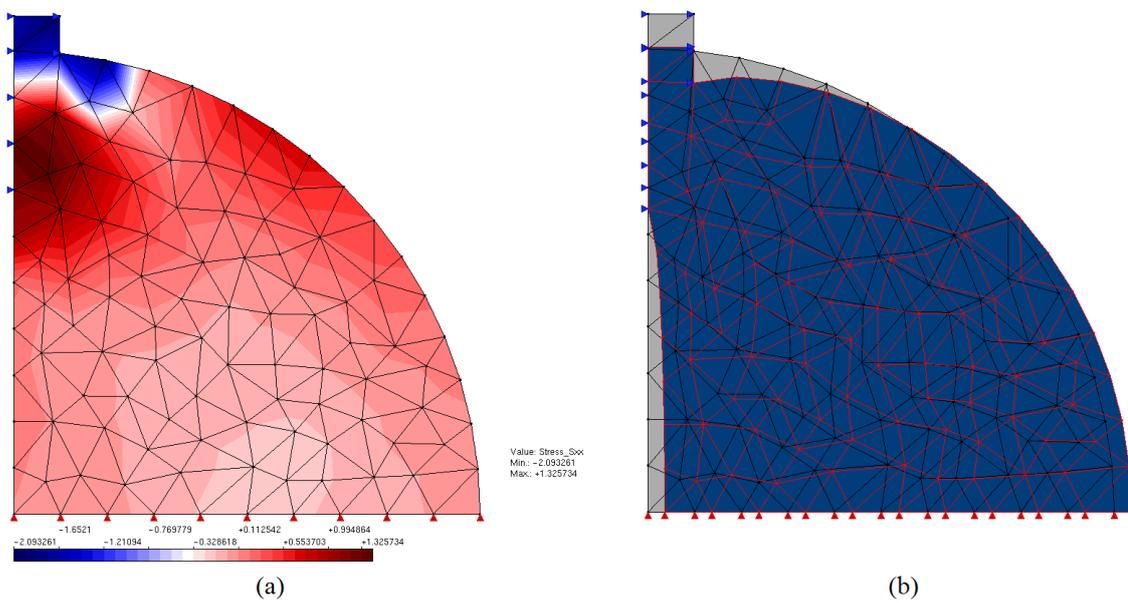
**Figura 5.18:** Compressão diametral: Trinca inicial de 16 mm: (a) Tensão  $\sigma_{xx}$ ; (b) Deformada.



**Figura 5.19:** Compressão diametral: Trinca inicial de 20 mm: (a) Tensão  $\sigma_{xx}$ ; (b) Deformada.



**Figura 5.20:** Compressão diametral: Trinca inicial de 24 mm: (a) Tensão  $\sigma_{xx}$ ; (b) Deformada.



**Figura 5.21:** Compressão diametral: Trinca inicial de 28 mm: (a) Tensão  $\sigma_{xx}$ ; (b) Deformada.

Conforme Penna (2011), as resistências dos corpos de prova podem ser calculadas, para o valor de carga máxima, pela equação da resistência nominal do ensaio de compressão diametral (Planas et al., 1999), dada por:

$$\sigma_r = \frac{2P_{max}}{\pi D_{ef}L} \quad (5.1)$$

onde,

$\sigma_r$  é a resistência à compressão diametral;

$P_{max}$  é a carga máxima;

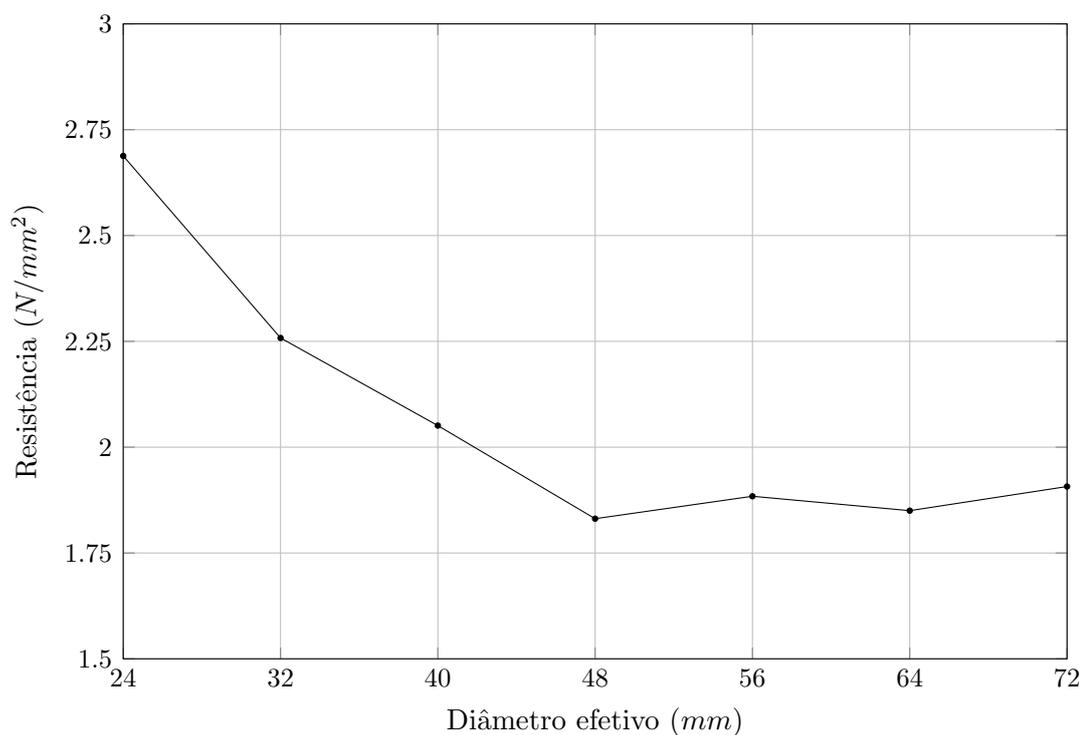
$D_{ef}$  é o diâmetro efetivo;

$L$  é o comprimento da peça.

Na Tabela 5.2, apresentam-se os valores da variação da resistência à compressão diametral, obtidos a partir desta modelagem. Esta variação da resistência nominal é ilustrada através de um gráfico resistência *versus* diâmetro efetivo na Figura 5.22.

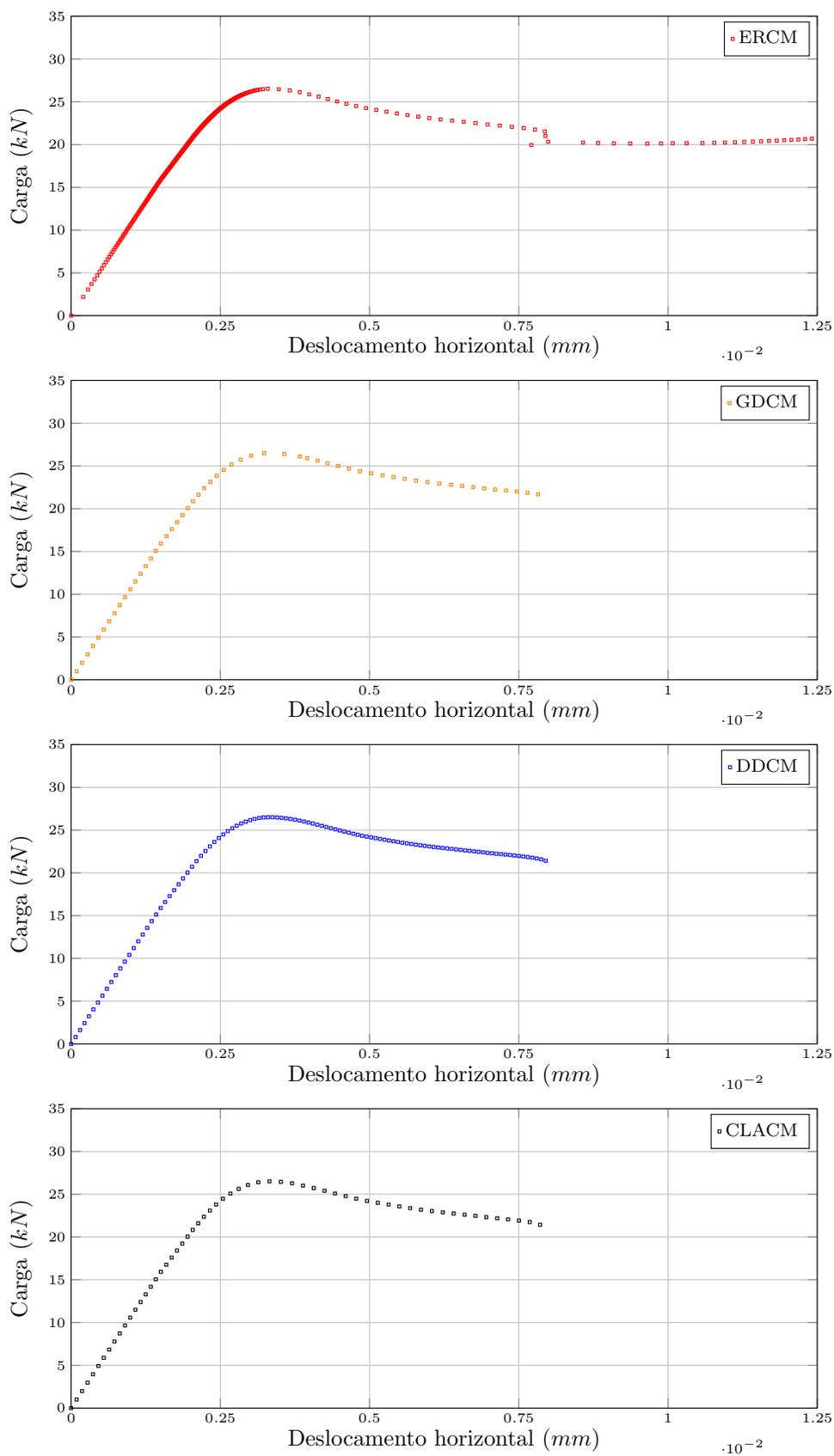
**Tabela 5.2:** Resistências à compressão diametral.

$D_{ef}$ (mm)	Carga Máxima (N)	Resistência Nominal (N/mm <sup>2</sup> )
72	34507	1,907
64	29758	1,850
56	26515	1,884
48	22088	1,831
40	20621	2,051
32	18160	2,258
24	16215	2,688

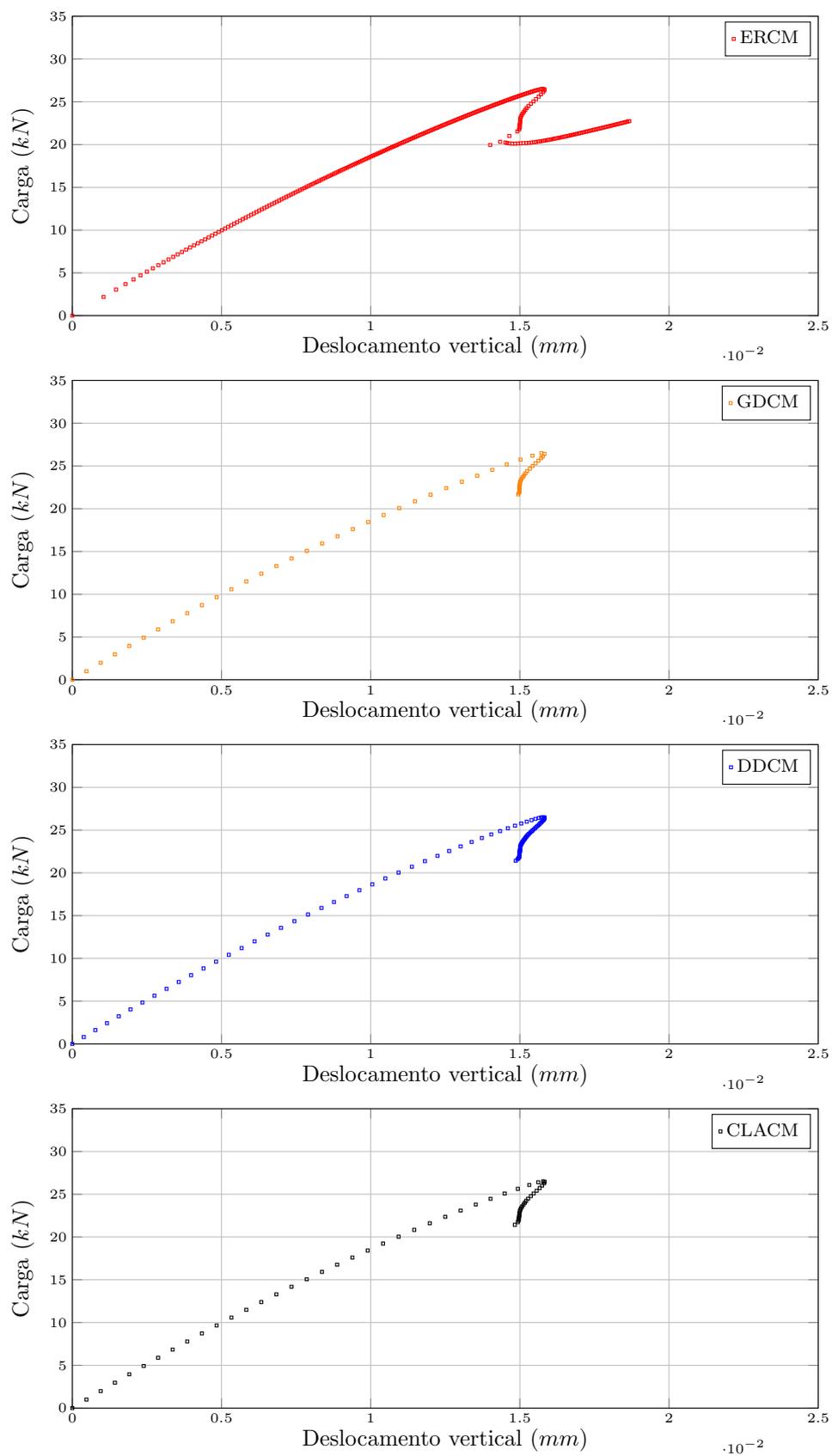


**Figura 5.22:** Compressão diametral: variação da resistência nominal.

Para efeitos de comparação, escolheu-se a trinca com tamanho inicial  $c = 12\text{mm}$ , por apresentar bifurcações no ramo descendente de ambas as trajetórias de equilíbrio (Figuras 5.13 e 5.14). As Figuras 5.23 e 5.24 mostram, respectivamente, as trajetórias para o deslocamento horizontal do ponto de controle e para o deslocamento vertical do contato do cilindro com o bloco rígido, empregando-se os métodos de controle de comprimento de arco, baseado em energia (ERCM) e com trajetória cilíndrica (CLACM), de deslocamento direto (DDCM) e de deslocamento generalizado (GDCM). Os controles CLACM e GDCM foram usados com um incremento inicial do fator de carga de 1, 0. Ao adotar o controle direto de deslocamento, incrementou-se de  $7,5 \times 10^{-5} \text{ mm}$  o deslocamento horizontal do ponto de controle.



**Figura 5.23:** Deslocamento horizontal do ponto de controle: trajetórias de equilíbrio.

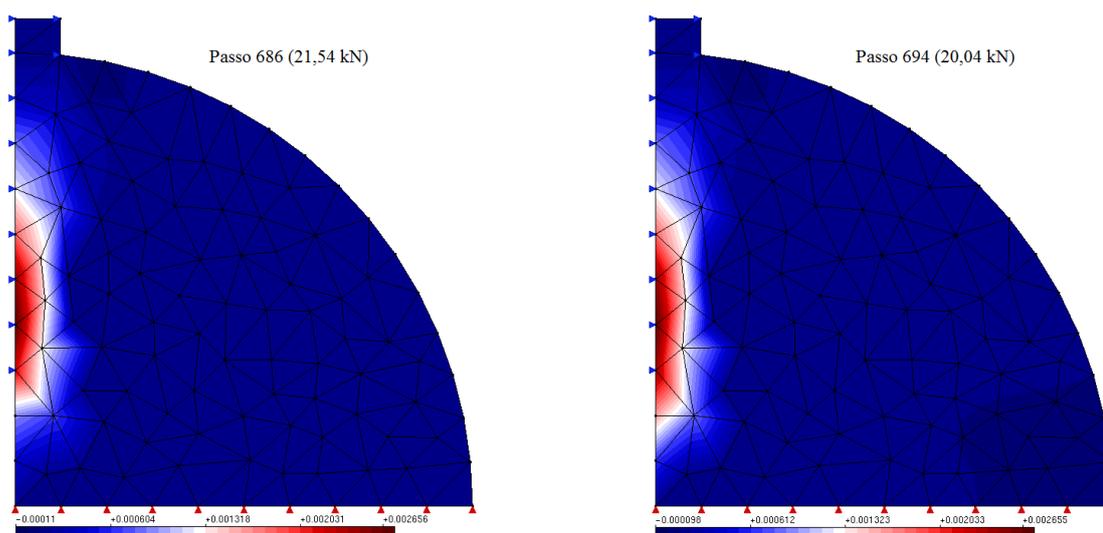


**Figura 5.24:** Deslocamento vertical do contato com o bloco: trajetórias de equilíbrio.

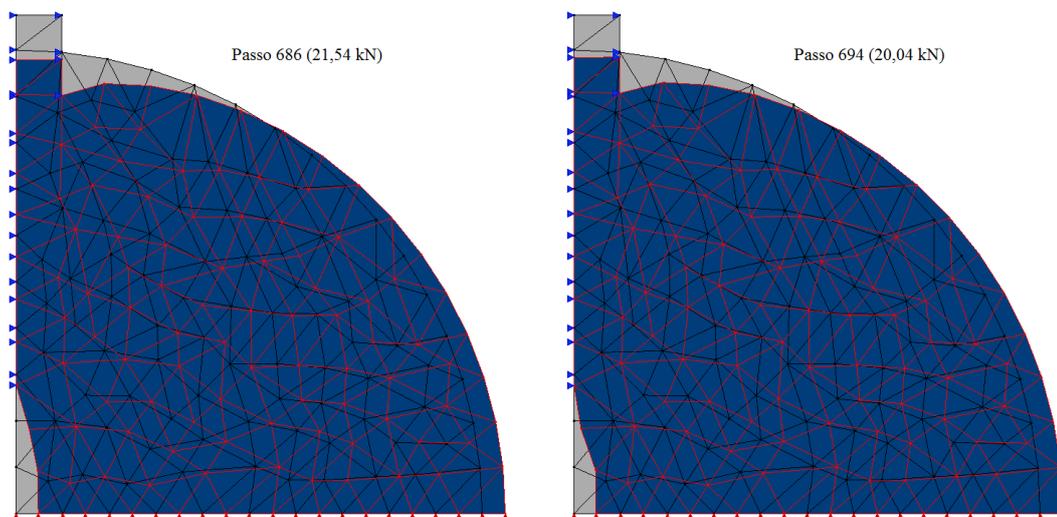
Observa-se que os valores de carga máxima e de variação da resistência nominal, os diagramas de distribuições de tensões e das deformadas, bem como as trajetórias de equilíbrio apresentadas nas Figuras 5.13 e 5.14, são consistentes com os obtidos por Penna (2011), onde se desejou estudar a ductilidade estrutural a partir do ensaio de compressão diametral.

As Figuras 5.23 e 5.24 mostram que os métodos clássicos de controle foram capazes de representar as trajetórias de equilíbrio até o ponto de bifurcação encontrado, onde as mesmas se interromperam devido à instabilidade numérica. Esta região, descrita pelo método de controle de comprimento de arco baseado em taxas de energia, parece estar associada a uma localização de deformações numericamente induzida, onde a sua ocorrência é devida a particularidades numéricas do modelo, tais como as leis constitutivas, os algoritmos de solução das equações matriciais de equilíbrio, ou até mesmo erros de aproximação inerentes à discretização.

Nas Figuras 5.25 e 5.26, apresentam-se, respectivamente, as deformações principais  $\epsilon_{xx}$  (deformações de tração) e as deformadas com fator de escala igual a 250, relativas aos pontos imediatamente antes e imediatamente após a bifurcação.



**Figura 5.25:** Trinca de 12 mm: deformação principal  $\epsilon_{xx}$  nas proximidades da região de bifurcação.



**Figura 5.26:** Trinca de 12 mm: deformada nas proximidades da região de bifurcação.

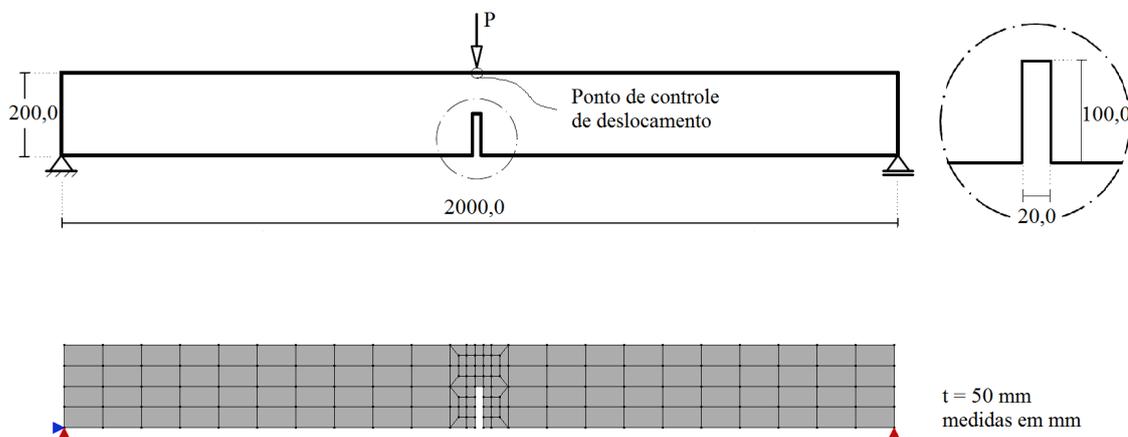
A partir das Figuras 5.25 e 5.26, é possível notar um pequeno encolhimento da trinca no momento em que a localização ocorre, provocando um decréscimo de deslocamento com decréscimo de carga. Após a região de bifurcação (passo 694), inicia-se o enrijecimento da estrutura, que é consequência do aumento da condição de confinamento do concreto devido a deformações de compressão.

Ressalta-se que, como o controle baseado em taxas de energia descreve de forma mais precisa o comportamento da trajetória nas proximidades dos pontos limites, o mesmo possui a desvantagem de requerer mais passos de análise do que os demais métodos testados. Consequentemente, este método apresentou um tempo de processamento maior do que os demais. O método de controle direto de deslocamento, por sua vez, possui a inconveniência de se ter que controlar o nó e a direção correta durante uma análise, requerendo do usuário uma experiência mínima para tal.

### 5.3 Flexão em Três Pontos

A viga de concreto sob flexão em três pontos, cuja configuração geométrica e malha de elementos finitos são apresentadas na Figura 5.27, foi simulada a partir do ensaio experimental de Petersson (1981) objetivando-se estudar a eficiência do

método de controle de comprimento de arco baseado em taxas de energia quando comparado com os métodos de controle de deslocamento direto, de comprimento de arco com trajetória cilíndrica e de deslocamento generalizado.



**Figura 5.27:** Flexão em três pontos: configuração geométrica e malha de elementos finitos (Adaptado de Penna (2011)).

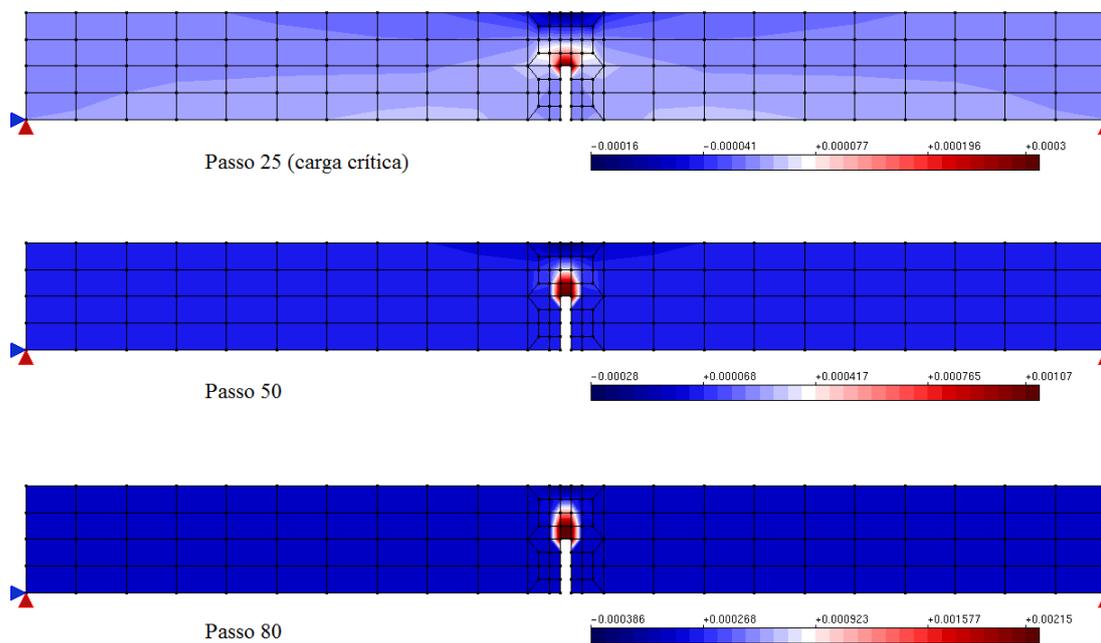
Nesta análise, a viga foi modelada com elementos quadrilaterais de quatro nós ( $Q4$ ) em estado plano de tensão, refinando-se a malha da região ao redor do entalhe. Adotou-se o modelo constitutivo de fissuras distribuídas com leis de Carreira e Chu (1985), para compressão, e Boone et al. (1986), para tração, cujos parâmetros do material são:  $E_0 = 30000,0 \text{ N/mm}^2$ ,  $\nu = 0,2$ ,  $f_c = 33,3 \text{ N/mm}^2$ ,  $f_t = 3,3 \text{ N/mm}^2$ ,  $\varepsilon_c = 0,002$ ,  $G_f = 0,124 \text{ N/mm}$ ,  $L_f = 40 \text{ mm}$  e  $\beta_r = 0,05$ .

Para solução do modelo, empregou-se o método de controle baseado em taxas de energia com um incremento inicial do fator de carga de 0,2, carga de referência  $P = 800 \text{ N}$ , parâmetro  $a = 1,0$  e tolerância para convergência em deslocamento de  $1 \times 10^{-4}$ .

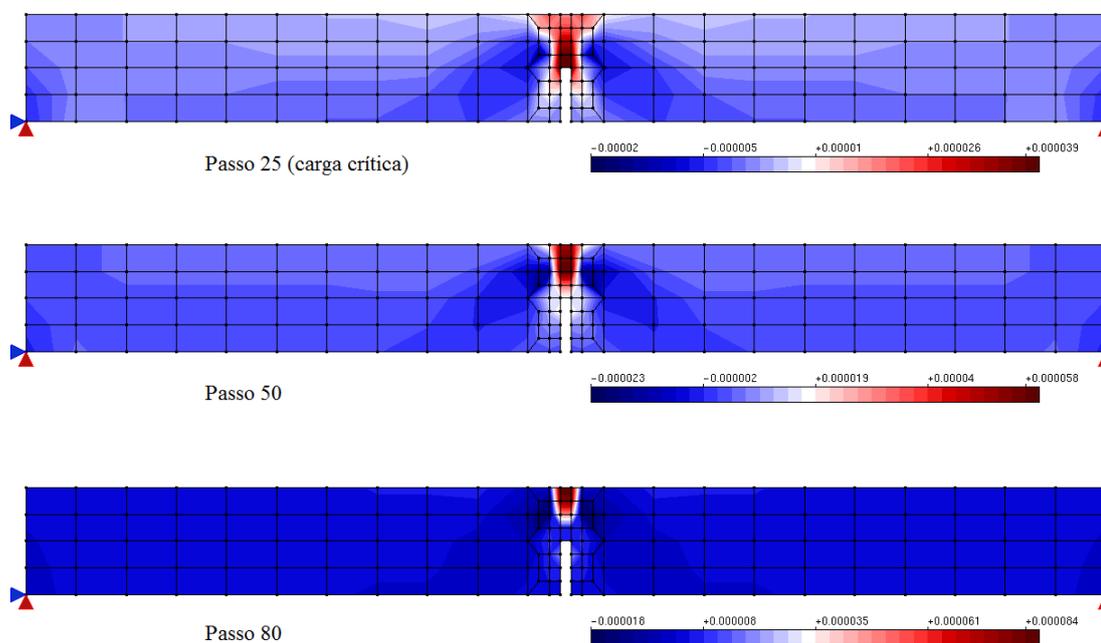
No total, foram considerados 93 passos a serem representados pelo método proposto.

As Figuras 5.28, 5.29, 5.30 e 5.31 mostram, respectivamente, as evoluções das deformações normal horizontal  $\epsilon_{xx}$ , normal vertical  $\epsilon_{yy}$  e de cisalhamento  $\gamma_{xy}$ , e a deformada com fator de escala igual a 100, relativas aos passos 25 (ponto limite de

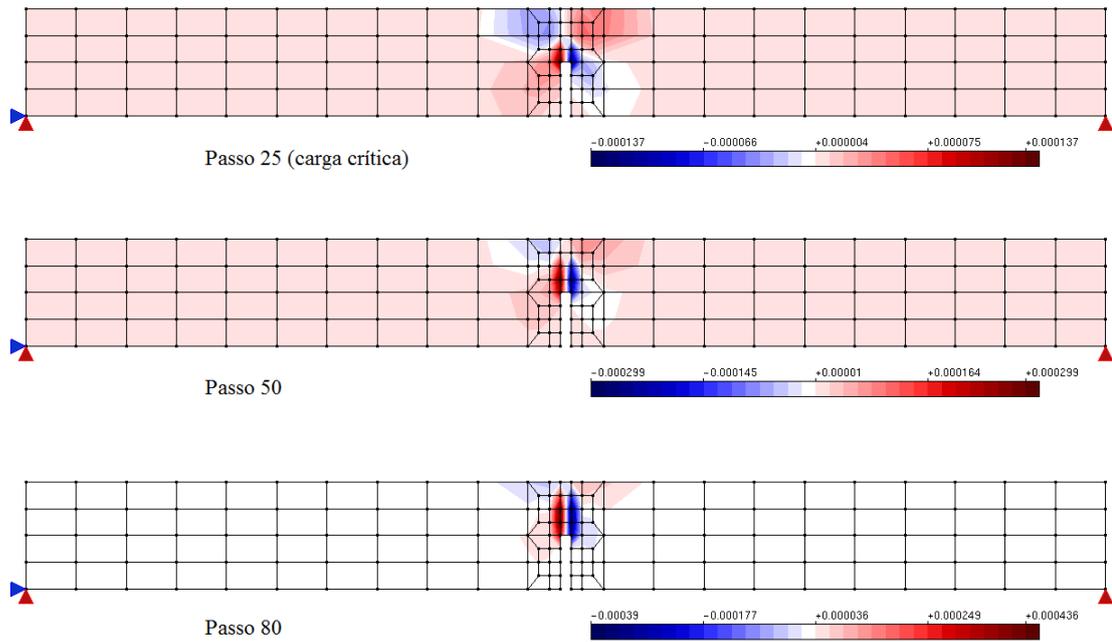
carga), 50 e 80 (pontos escolhidos aleatoriamente no trecho dissipativo).



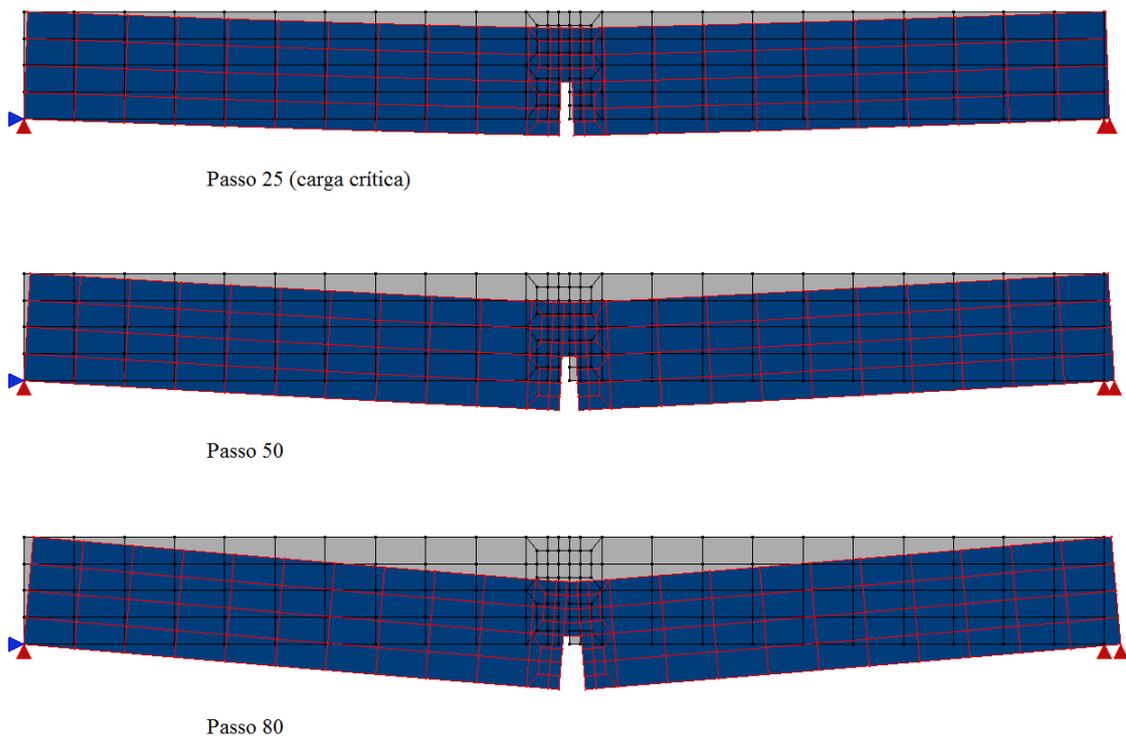
**Figura 5.28:** Flexão em três pontos: deformação  $\epsilon_{xx}$ .



**Figura 5.29:** Flexão em três pontos: deformação  $\epsilon_{yy}$ .

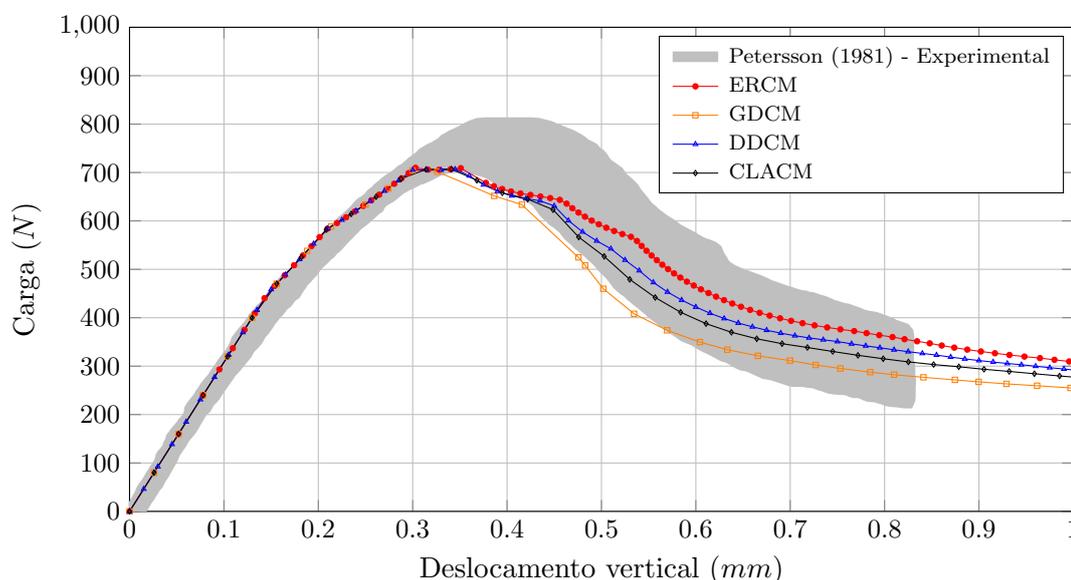


**Figura 5.30:** Flexão em três pontos: deformação  $\gamma_{xy}$ .



**Figura 5.31:** Flexão em três pontos: deformada.

Na Figura 5.32, apresentam-se as trajetórias de equilíbrio do deslocamento vertical do ponto de controle usando os métodos de controle de comprimento de arco baseado em taxas de energia (ERCM), de deslocamento generalizado (GDCM), de deslocamento direto (DDCM) e de comprimento de arco com trajetória cilíndrica (CLACM), juntamente com os resultados experimentais obtidos por Petersson (1981). Para os métodos GDCM e CLACM, adotou-se um incremento inicial do fator de carga de 0,1, ao passo que, para o método DDCM, incrementou-se de 0,015  $mm$  o deslocamento vertical do ponto de controle.



**Figura 5.32:** Flexão em três pontos: trajetórias de equilíbrio do deslocamento vertical do ponto de controle.

A partir da Figura 5.32, verifica-se que tanto o método de controle de comprimento de arco baseado em taxas de energia quanto os métodos clássicos de controle apresentaram boa concordância com os resultados experimentais no que se refere à estimativa do ponto limite de carga e na descrição do regime pós-crítico. Uma característica interessante desta análise é a divergência na descrição do ramo descendente das trajetórias de equilíbrio. Tal divergência parece estar associada ao aparecimento de localização de deformações numericamente induzida pelos métodos

de solução. Como a única diferença entre os modelos são os métodos de controle adotados, pode-se concluir que a indução da localização de deformações está relacionada com as grandezas usadas por cada função de controle para tratar o modelo constitutivo de fissuração adotado.

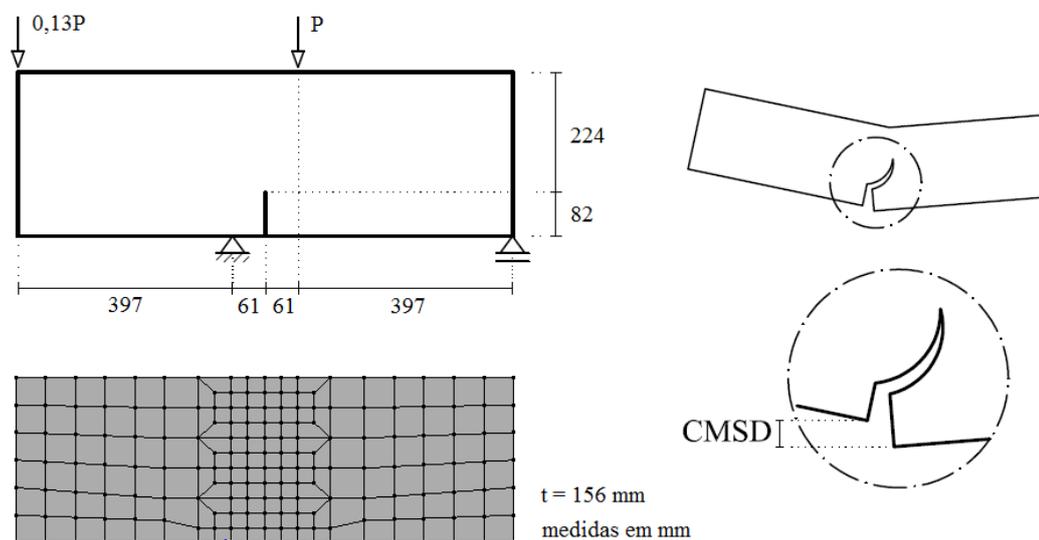
No que se refere à eficiência no processo de solução, pode-se dizer, de modo geral, que o controle baseado em taxas de energia obteve a descrição mais adequada, uma vez que o mesmo possui a habilidade de ajustar o tamanho do incremento à medida que pontos limites são aproximados. Os métodos de controle de comprimento de arco com trajetória cilíndrica e de deslocamento direto, entretanto, também apresentaram uma resposta satisfatória; todavia, o segundo possui a desvantagem de se ter que controlar o nó e a direção correta durante a análise. Em última posição, pode-se classificar o método de controle de deslocamento generalizado que, por sua vez, apresentou uma curva com leves saltos no trecho descendente.

Ressalta-se que, como o controle baseado em taxas de energia descreve de forma mais precisa o comportamento da trajetória nas proximidades dos pontos limites, o mesmo pode possuir a desvantagem de requerer mais passos de análise em comparação a outros métodos. No entanto, como os controles de comprimento de arco com trajetória cilíndrica e de deslocamento generalizado demandaram uma redução do incremento inicial do fator de carga de 0,2 para 0,1, a desvantagem dita acima, para este exemplo, resultou em uma diferença de tempo de processamento desprezível em relação às demais.

## 5.4 Cisalhamento em Quatro Pontos

A viga sob cisalhamento em quatro pontos, cuja configuração e malha de elementos finitos são apresentadas na Figura 5.33, foi modelada a partir do experimento de Arrea e Ingraffea (1982) objetivando-se estudar a eficiência do método de controle de comprimento de arco baseado em taxas de energia para descrever propagação

de falha preexistente quando comparado com os métodos de controle de deslocamento direto, de comprimento de arco com trajetória cilíndrica e de deslocamento generalizado.



**Figura 5.33:** Cisalhamento em quatro pontos: configuração geométrica e malha de elementos finitos (Adaptado de Penna (2011)).

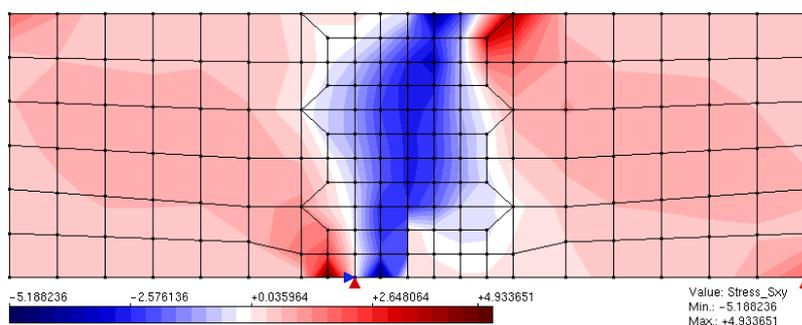
Nesta análise, foram realizadas duas simulações utilizando o modelo constitutivo de fissuras distribuídas: na primeira simulação, adotou-se uma relação tensão-deformação baseada nas leis de Carreira e Chu (1985, 1986) para descrever o comportamento do material na compressão e na tração; na segunda simulação, adotou-se as leis de Carreira e Chu (1985), para compressão, e Boone et al. (1986), para tração. Os parâmetros do material são:  $E_0 = 24800,0 \text{ N/mm}^2$ ,  $\nu = 0,18$ ,  $f_c = 34,0 \text{ N/mm}^2$ ,  $f_t = 3,4 \text{ N/mm}^2$ ,  $\varepsilon_c = 0,0024$ ,  $\varepsilon_t = 0,00024$ ,  $G_f = 0,120 \text{ N/mm}$ ,  $L_f = 40 \text{ mm}$  e  $\beta_r = 0,02$ . A falha preexistente foi modelada como um entalhe com base nas coordenadas de seus pontos inicial (458, 0) e final (458, 82). A viga possui uma espessura  $t = 156 \text{ mm}$  e foi modelada com elementos quadriláteros de quatro nós ( $Q4$ ) em estado plano de tensão, refinando-se a malha da região de contorno da falha.

Para solução do modelo, empregou-se o método de controle baseado em taxas de energia com um incremento inicial do fator de carga de 0,035 (redução de 0,065 para

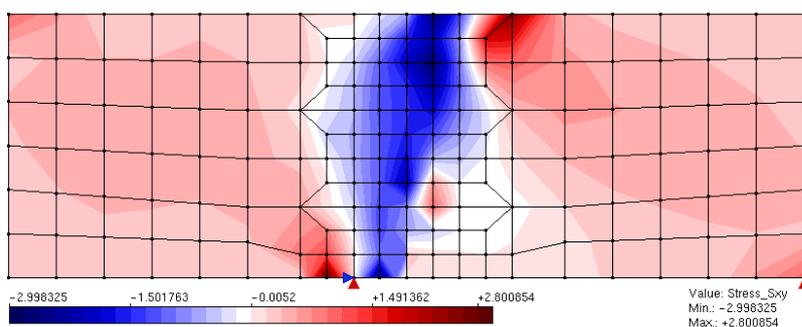
0,035 de modo a possibilitar a convergência no trecho pós-crítico), para a primeira simulação, e 0,065, para a segunda simulação, carga de referência  $P = 0,13 \text{ MN}$ , parâmetro  $a = 1,0$  e tolerância para convergência em deslocamento de  $1 \times 10^{-4}$ .

No total, para a simulação em que adotou-se as relações tensão-deformação de Carreira e Chu (1985, 1986), foram considerados 1192 passos a serem descritos pelo método proposto; para a simulação em que adotou-se as relações de Carreira e Chu (1985), para compressão, e Boone et al. (1986), para tração, considerou-se 324 passos.

A tensão de cisalhamento  $\tau_{xy}$  e a deformada, com fator de escala igual a 500, relativas aos pontos limites de carga (passos 940 e 257) e de deslocamento (passos 1055 e 294) para os dois tipos de simulação, são apresentadas nas Figuras 5.34, 5.35, 5.36 e 5.37.

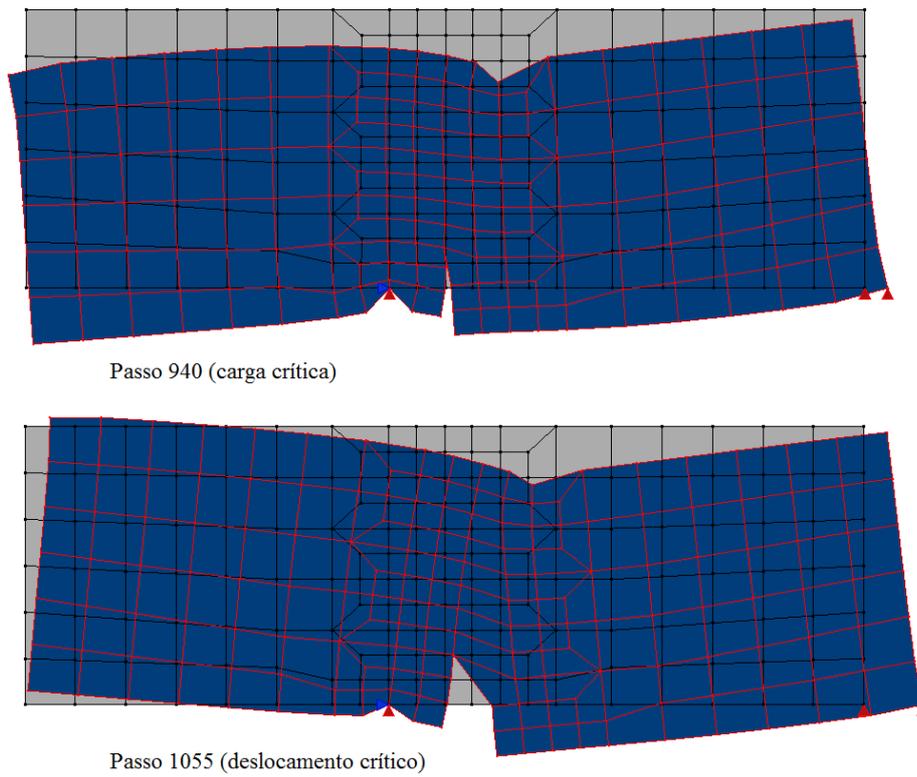


Passo 940 (carga crítica)

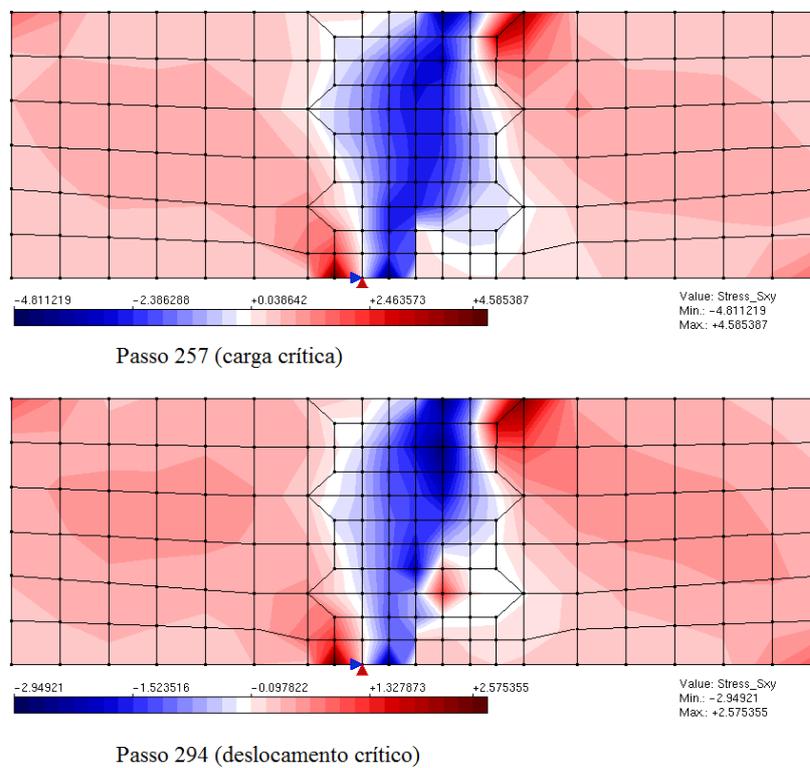


Passo 1055 (deslocamento crítico)

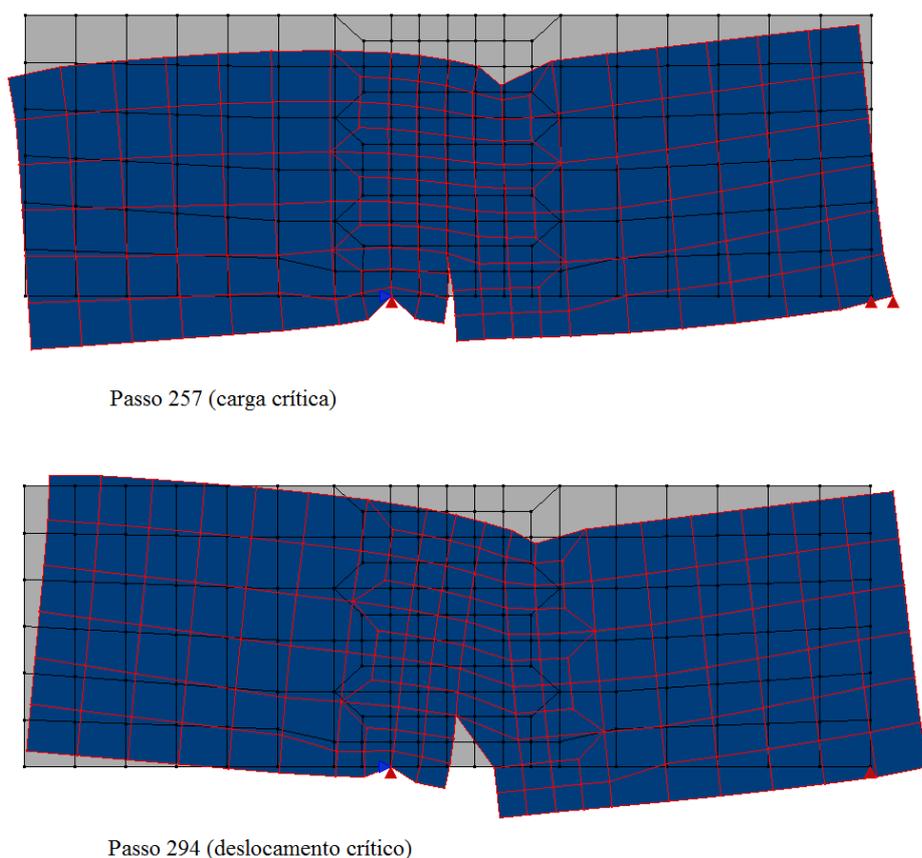
**Figura 5.34:** Leis Carreira e Chu (1985, 1986): tensão  $\tau_{xy}$ .



**Figura 5.35:** Leis Carreira e Chu (1985, 1986): deformada.

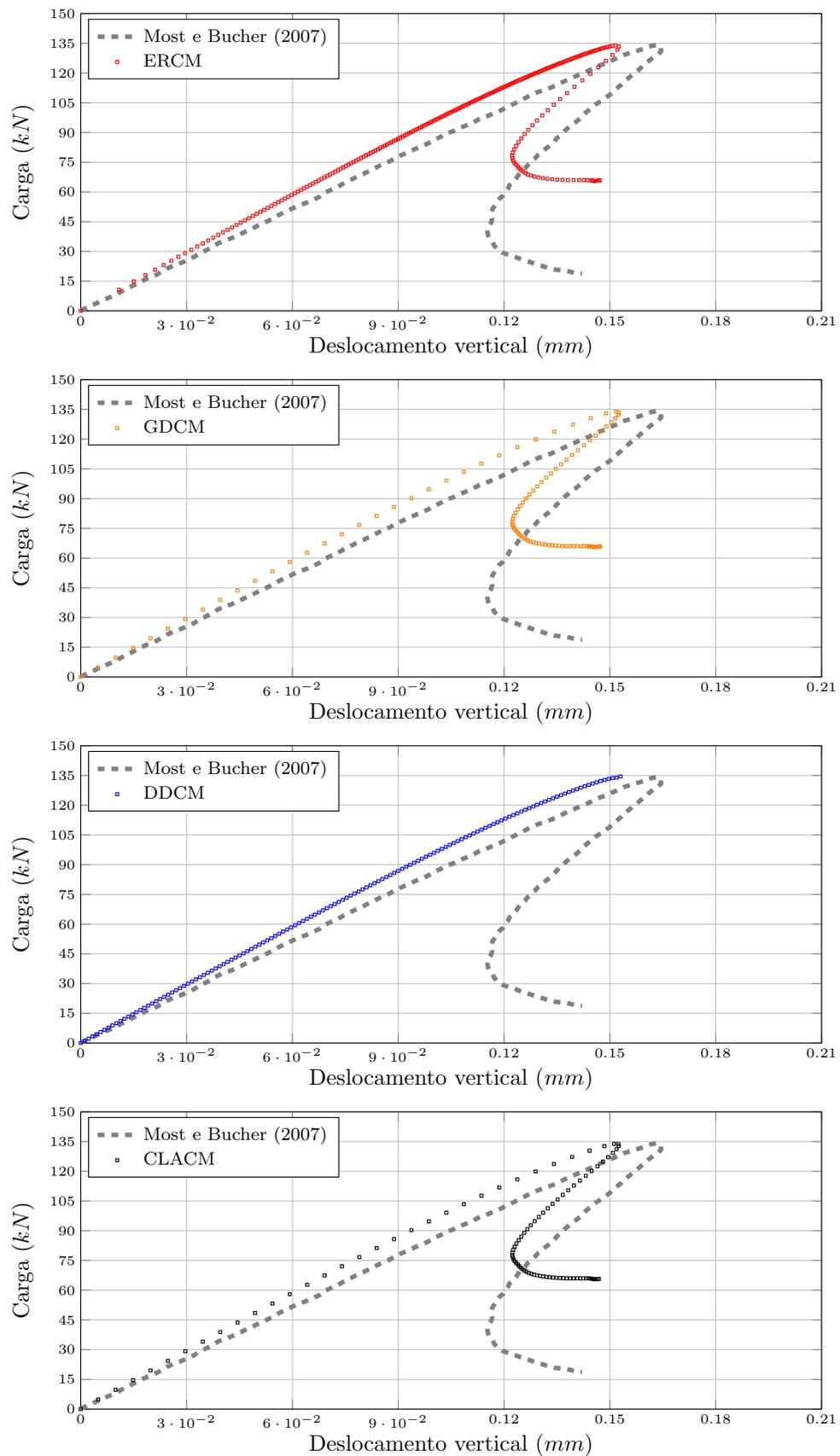


**Figura 5.36:** Leis Carreira e Chu (1985); Boone et al. (1986): tensão  $\tau_{xy}$ .

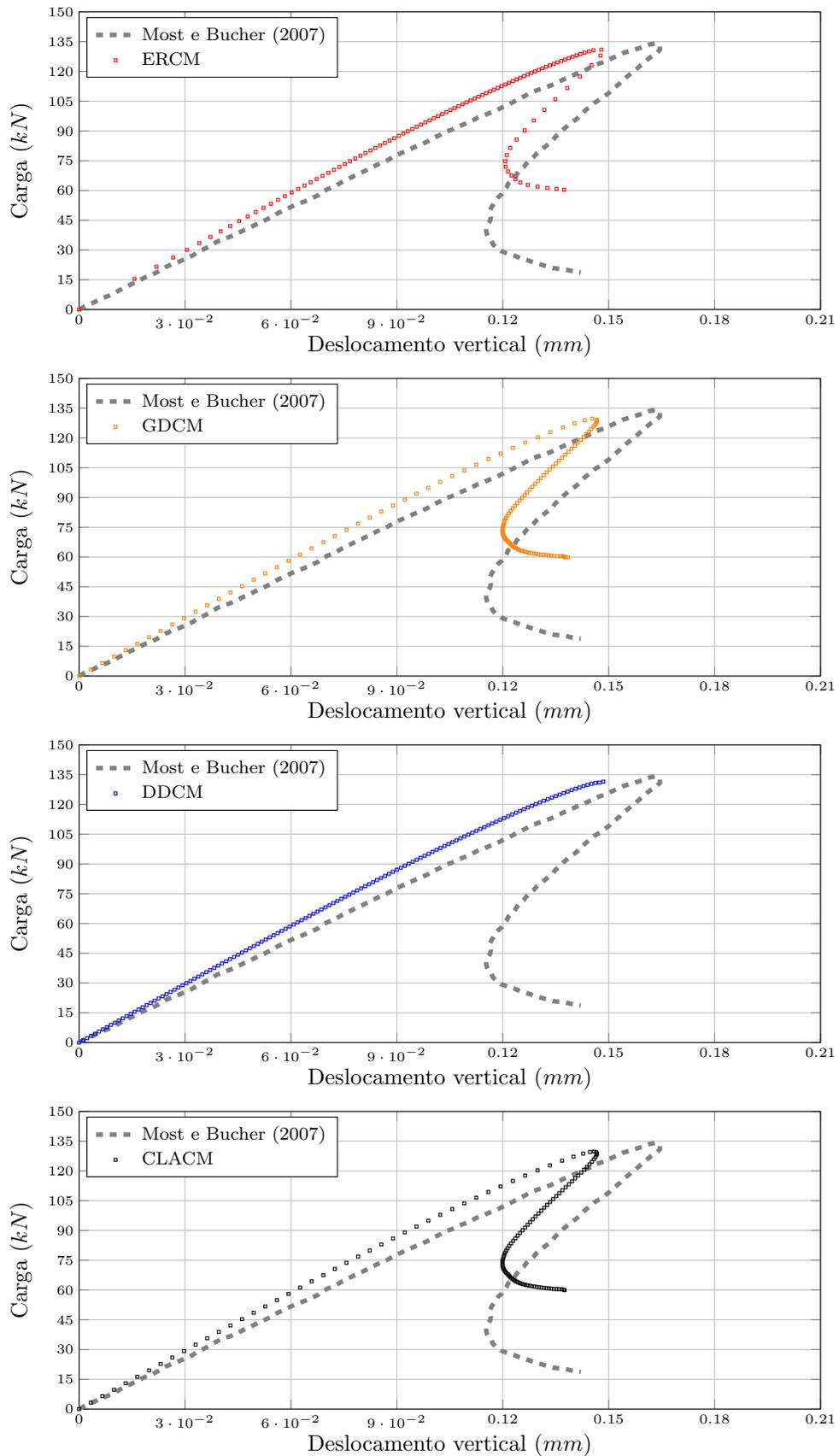


**Figura 5.37:** Leis Carreira e Chu (1985); Boone et al. (1986): deformada.

Os modelos foram primeiramente comparados com o resultado numérico obtido por Most e Bucher (2007), que fizeram uso de um modelo de trinca coesiva através do Método sem Malha (MSM) para observar deslocamentos do ponto de aplicação da carga central. Nas Figuras 5.38 e 5.39, apresentam-se as trajetórias de equilíbrio do deslocamento vertical deste ponto para cada tipo de simulação tratado, usando os métodos de controle de comprimento de arco, com trajetória cilíndrica (CLACM) e baseado em taxas de energia (ERCM), de deslocamentos generalizado (GDCM) e direto (DDCM), juntamente com o resultado numérico obtido pelos autores. Para os métodos GDCM e CLACM, adotou-se um incremento inicial do fator de carga de 0,0125. Ao adotar-se o controle de deslocamento direto, incrementou-se o deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga central de  $7,5 \times 10^{-4} \text{ mm}$ .



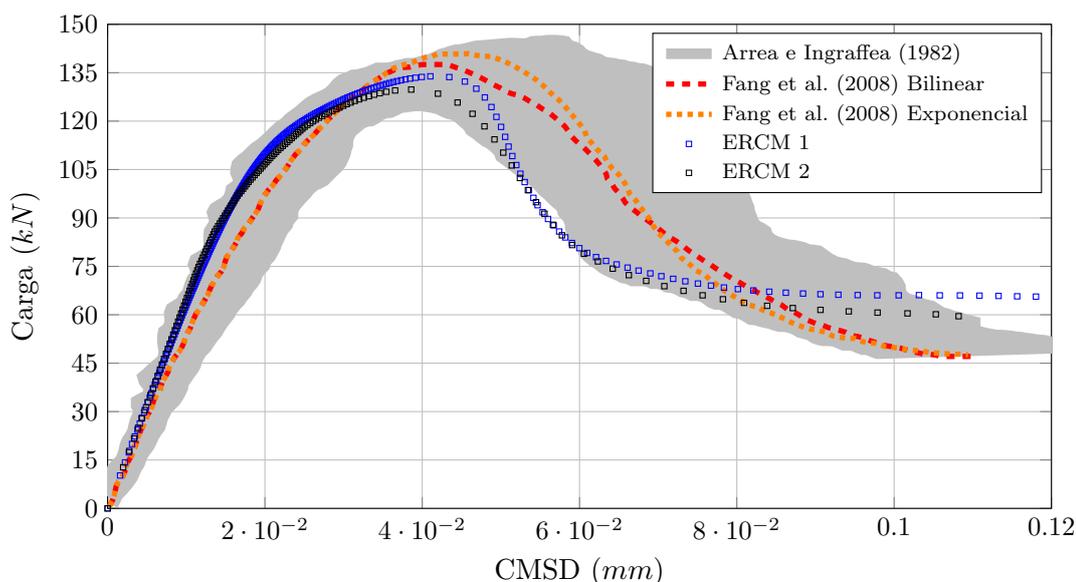
**Figura 5.38:** Leis Carreira e Chu (1985, 1986): trajetórias de equilíbrio.



**Figura 5.39:** Leis Carreira e Chu (1985); Boone et al. (1986): trajetórias de equilíbrio.

Por fim, os modelos que empregaram o método de controle baseado em taxas de energia foram postos em comparação com os resultados experimentais de Arrea e Ingraffea (1982) e numéricos de Fang et al. (2008), que por sua vez fizeram uso de um modelo constitutivo de trinca coesiva com leis bilinear e exponencial, adotando-se o Método dos Elementos Finitos Estendidos (XFEM).

Na Figura 5.40, apresentam-se as trajetórias de equilíbrio do deslizamento tangencial relativo das extremidades da trinca - CMSD (*Crack Mouth Sliding Displacement*), usando o método implementado com leis Carreira e Chu (1985, 1986) (ERCM 1) e Carreira e Chu (1985); Boone et al. (1986) (ERCM 2), juntamente com os resultados experimentais e numéricos obtidos pelos referidos autores.



**Figura 5.40:** Cisalhamento em quatro pontos: trajetória de equilíbrio do deslizamento tangencial relativo das extremidades da trinca (CMSD).

Nesta análise, optou-se por comparar com os outros métodos de controle apenas as trajetórias de equilíbrio associadas ao deslocamento vertical no nó de aplicação da carga central. Conforme Penna (2011), é relevante observar as trajetórias de equilíbrio relativas a este ponto. O ensaio experimental de Arrea e Ingraffea (1982), que apresenta resultados do deslizamento tangencial relativo das extremidades da

trinca, não mostra resultados deste fenômeno, entretanto, outras simulações desse experimento constataram um acentuado ponto limite de deslocamento para a referida trajetória (Figuras 5.38 e 5.39).

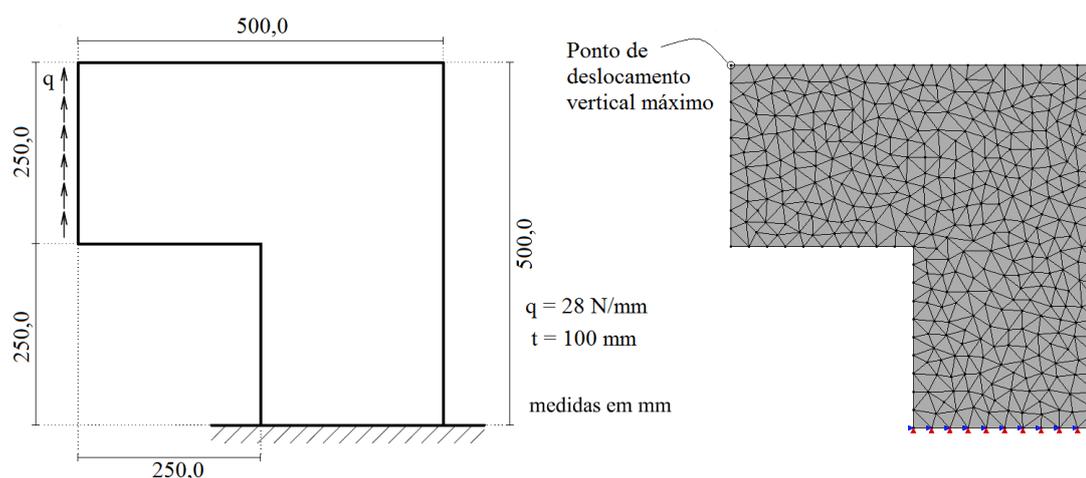
A partir das Figuras 5.38 e 5.39, verifica-se que tanto o método de controle baseado em taxas de energia quanto os métodos de controle de comprimento de arco com trajetória cilíndrica e de deslocamento generalizado foram capazes de representar o comportamento da viga quando submetida ao cisalhamento e, como esperado, o controle direto de deslocamento teve a sua trajetória interrompida nas proximidades do ponto em que se inicia o fenômeno de decréscimo de carga acompanhado de decréscimo de deslocamento. Além disso, pode-se observar que o método de controle baseado em taxas de energia ajustou o tamanho do passo à medida que os pontos limites foram se aproximando, ao passo que, os métodos de controle de comprimento de arco com trajetória cilíndrica e de deslocamento generalizado ajustaram o tamanho do passo apenas no ramo descendente.

Quanto à viabilidade computacional, na simulação em que adotou-se as leis Carreira e Chu (1985, 1986), o método implementado requereu mais passos de análise do que os demais, apresentando o maior tempo de processamento. Entretanto, na simulação em que adotou-se as leis Carreira e Chu (1985); Boone et al. (1986), o mesmo mostrou-se mais articulado, necessitando de uma quantidade consideravelmente inferior de passos de análise. Dessa forma, como a acentuação do pico mantém-se quase constante nos dois casos, pode-se dizer que a eficiência do método depende não apenas da suavidade da trajetória, mas também da forma na qual o mesmo trata as variáveis do modelo constitutivo de fissuração adotado.

## 5.5 Painel em “L”

O painel em forma de “L”, cuja configuração geométrica e malha de elementos finitos são apresentadas na Figura 5.41, foi simulado a partir do ensaio experimental

realizado por Winkler et al. (2004) objetivando-se estudar a eficiência do método de controle de comprimento de arco baseado em taxas de energia quando comparado com os métodos de controle de deslocamento direto, de comprimento de arco com trajetória cilíndrica e de deslocamento generalizado.



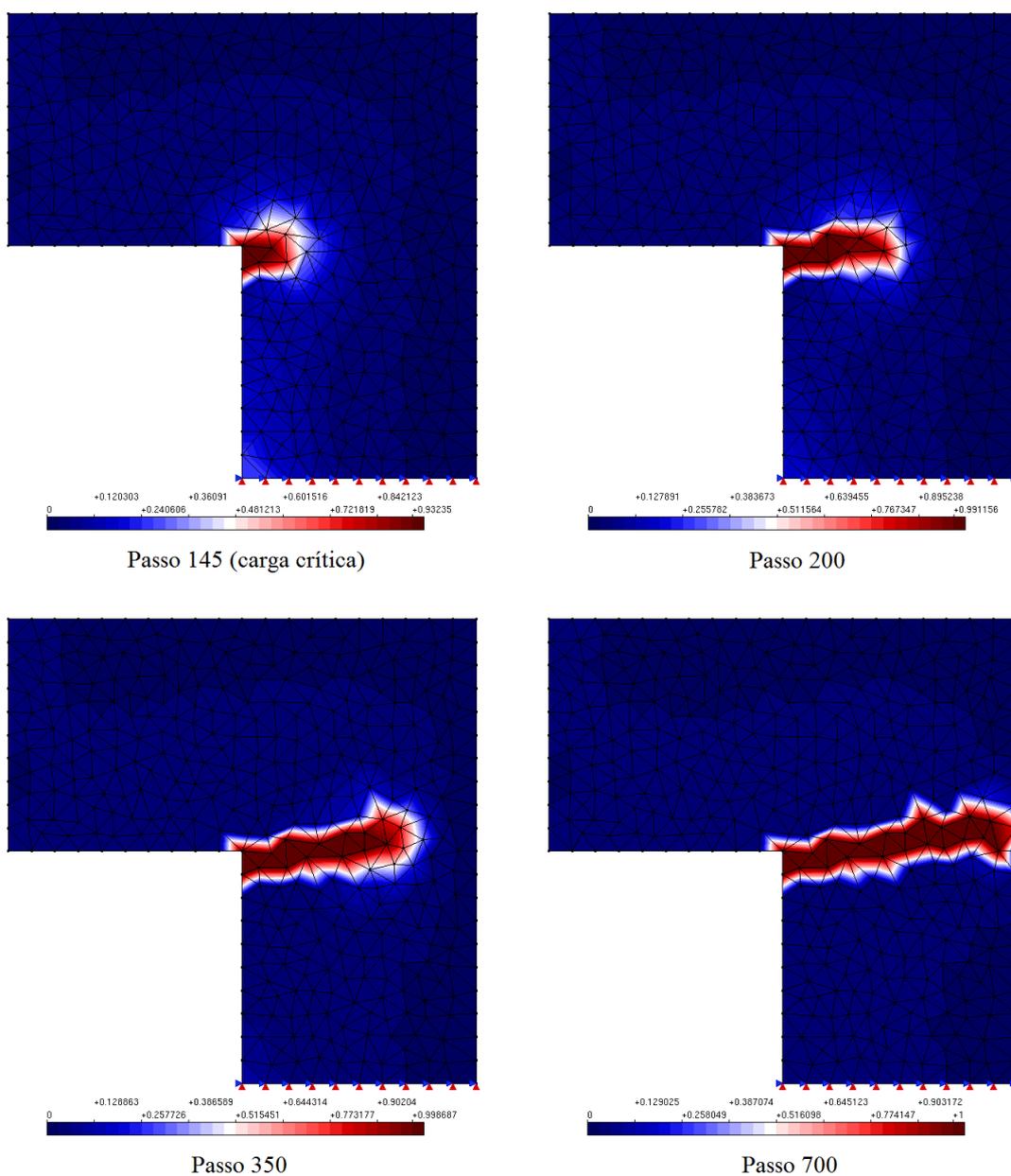
**Figura 5.41:** Painel em “L”: configuração geométrica e malha de elementos finitos (Adaptado de Penna (2011)).

Nesta análise, o painel foi modelado com elementos finitos triangulares de três nós ( $T3$ ) em estado plano de tensão. Adotou-se o modelo constitutivo de dano volumétrico (Penna, 2011), sendo a evolução do dano acompanhada pelas leis polinomiais para tração e para compressão (Apêndice D). Os parâmetros do material são:  $E_0 = 25850,0 \text{ N/mm}^2$  e  $\nu = 0,18$ . A lei de evolução de dano para tração é descrita pelos parâmetros: tensão equivalente relativa ao limite de resistência  $f_e = 1,43 \text{ N/mm}^2$ , deformação equivalente a partir da qual o processo de dano se inicia  $\kappa_0 = 0,000215$  e módulo de elasticidade equivalente  $\tilde{E} = 13463,0 \text{ N/mm}^2$ , enquanto que, para compressão:  $f_e = 16,0 \text{ N/mm}^2$ ,  $\kappa_0 = 0,0022$  e  $\tilde{E} = 13463,0 \text{ N/mm}^2$ .

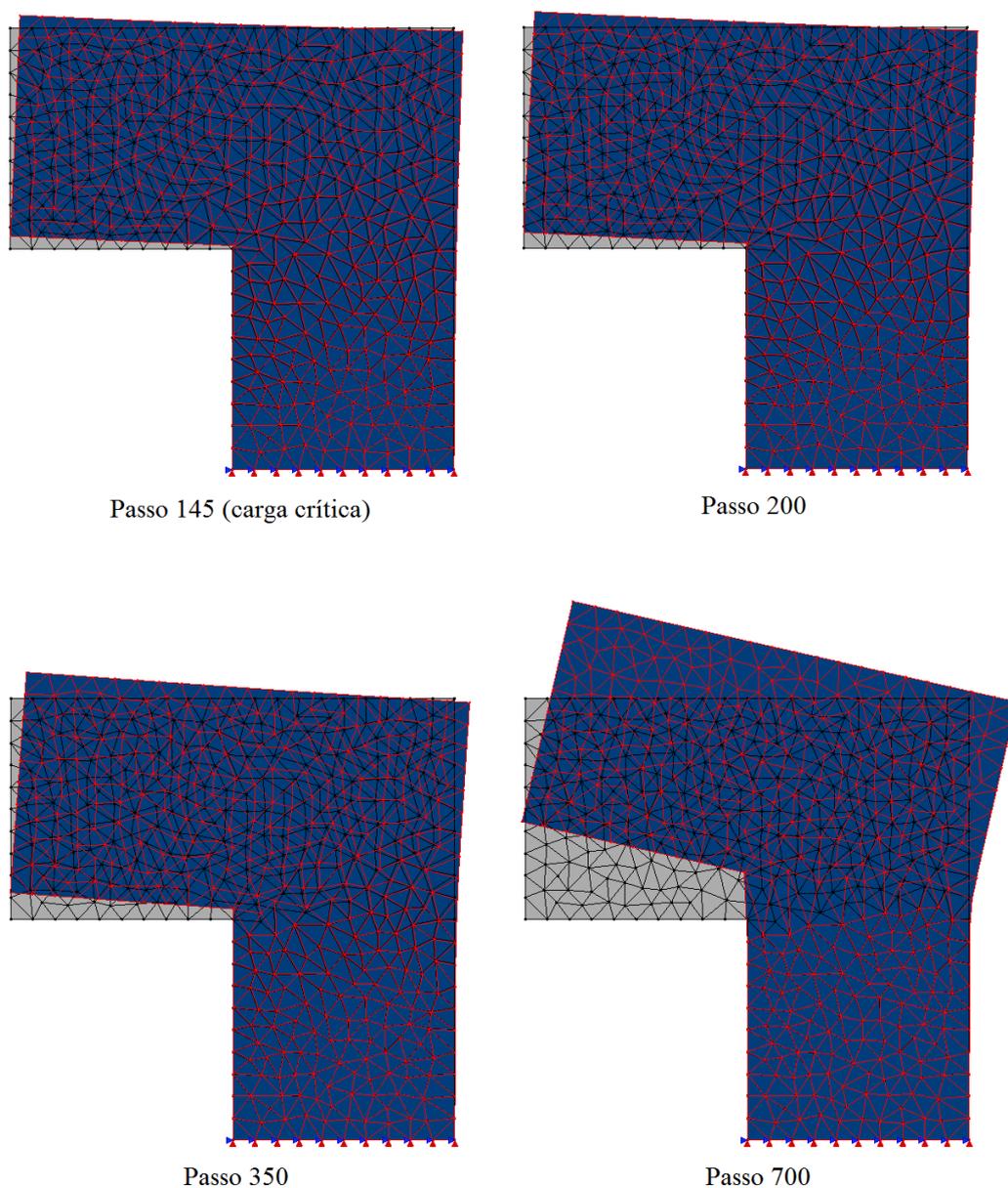
Para solução do modelo, empregou-se o método de controle baseado em taxas de energia com um incremento inicial do fator de carga de 0,1 (aproximadamente 10% da carga crítica), carga de referência  $q = 28 \text{ N/mm}$ , parâmetro  $a = 1,0$  e tolerância para convergência em deslocamento de  $1 \times 10^{-3}$ .

No total, a simulação resultou em 700 passos a serem representados pelo método proposto.

Nas Figuras 5.42 e 5.43, apresentam-se, respectivamente, as evoluções da variável de dano na direção da deformação principal ao longo do domínio e da estrutura deformada com fator de escala igual a 100, para os passos 145, 200, 350 e 700 (pontos escolhidos aleatoriamente).



**Figura 5.42:** Painel em “L”: evolução do dano na direção da deformação principal.



**Figura 5.43:** Pannel em “L”: evolução da deformada.

As trajetórias de equilíbrio do ponto de deslocamento vertical máximo utilizando-se, respectivamente, os métodos de comprimento de arco por taxas de energia (ERCM), de deslocamento generalizado (GDCM), de deslocamento direto (DDCM) e de comprimento de arco com trajetória cilíndrica (CLACM) são apresentadas na Figura 5.44. Os controles CLACM e GDCM foram usados com um incremento inicial do fator de carga de 0,1. Ao adotar o controle direto de deslocamento, incrementou-se de 0,01 *mm* o deslocamento vertical do ponto de deslocamento máximo.

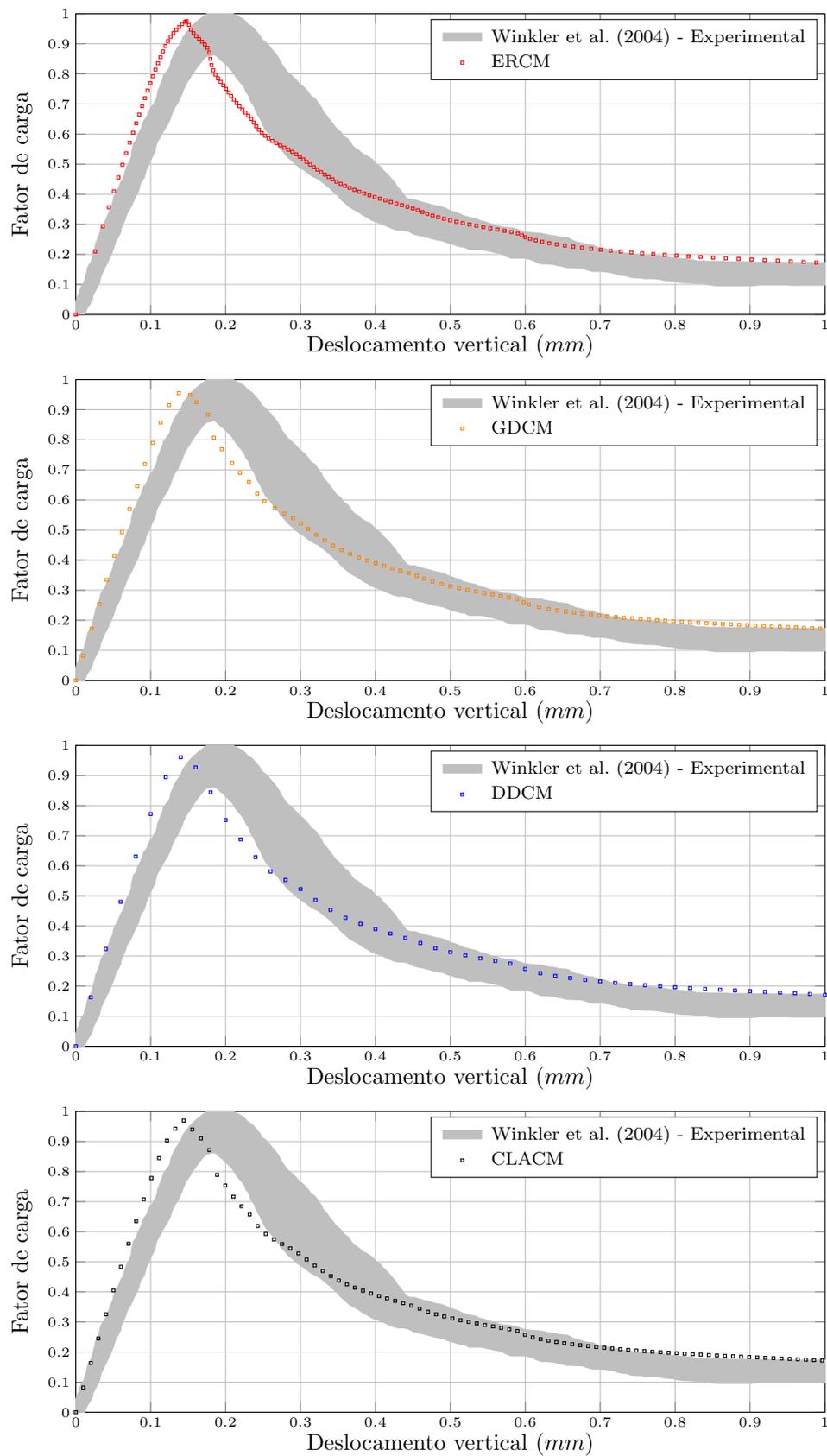


Figura 5.44: Painel em “L”: trajetórias de equilíbrio do deslocamento vertical máximo.

Observa-se que, com base no ensaio experimental de Winkler et al. (2004), o método de controle de comprimento de arco baseado em taxas de energia mostrou eficiência para descrever de forma nítida a trajetória de equilíbrio (Figura 5.44). Verificou-se, também, que a região danificada mantém-se concentrada na junção angular do painel até o momento da carga crítica, propagando-se horizontalmente, em seguida, por quase toda a peça (Figura 5.42). Tal padrão de evolução de dano, por tração, foi similar ao observado pelo autor, onde o mesmo objetivou estudar a aplicação de um modelo constitutivo de fissuração distribuída em painéis de concreto.

A Figura 5.44 mostra que, tanto o método de controle baseado em taxas de energia quanto os métodos clássicos de controle, foram capazes de representar o comportamento do painel. De modo geral, o controle baseado em taxas de energia obteve a resposta mais satisfatória, uma vez que o mesmo possui a habilidade de ajustar o tamanho do passo à medida que os pontos de carga crítica e de deslocamento crítico vão se aproximando. Os métodos de controle de deslocamento generalizado e de comprimento de arco com trajetória cilíndrica, entretanto, foram capazes de ajustar o tamanho do passo apenas no ramo descendente, após a carga ter se reduzido para quase a metade de seu valor crítico. O método de controle direto de deslocamento, por sua vez, possui a desvantagem de se ter que controlar o nó e a direção correta durante uma análise, como mencionado anteriormente.

Novamente, no que se refere à viabilidade computacional, o controle baseado em taxas de energia apresentou um tempo de processamento levemente maior do que os demais, visto que o mesmo requer mais passos para descrever a referida trajetória. Por outro lado, vale ressaltar que características inerentes de cada método podem requerer maior tempo de processamento.

## Capítulo 6

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

A utilização de um método de controle apropriado é indispensável em uma análise estrutural numérica e não linear. A classe de métodos de controle de comprimento de arco tornou-se referência em virtude de sua eficiência para superar instabilidades numéricas causadas pelos diversos fenômenos encontrados em trajetórias de equilíbrio.

Neste trabalho, utilizou-se o Método dos Elementos Finitos como ferramenta para a modelagem e análise de estruturas submetidas a comportamentos geometricamente ou fisicamente não lineares, apresentando uma visão geral sobre o processo incremental-iterativo de Newton-Raphson, bem como o importante papel dos métodos de controle da análise não linear na obtenção de uma solução (Capítulo 2 e Apêndice C).

Conforme destacado, o sistema computacional INSANE já dispunha de implementações de todos os recursos necessários para solucionar problemas não lineares. No entanto, os métodos de obtenção de trajetórias de equilíbrio ainda têm sido alvo de muitos estudos devido às suas limitações e este trabalho teve por objetivo formular e implementar um novo método de controle de comprimento de arco baseado em taxas de energia (Capítulo 2).

O paradigma de Programação Orientada a Objetos possibilitou que este método de controle fosse incorporado ao núcleo numérico do INSANE isoladamente dos demais (Capítulo 3). Desse modo, não houve alterações nas implementações já

existentes.

Assim sendo, a dissertação que aqui se apresenta expandiu o módulo *solution*, responsável pela solução dos modelos discretos de elementos finitos, com a implementação das funções de controle baseadas em energia interna e dissipada. Foi visto que o método de controle de comprimento de arco por taxas de energia apresenta como característica a troca natural destas funções de controle sem a necessidade de intervenções adicionais. Logo, o mesmo não demandou a utilização de métodos de troca de sinal, como no caso dos métodos de controle de comprimento de arco tradicionais (Seção 3.2).

As implementações foram validadas através de diversos exemplos de não linearidade geométrica e física (Capítulos 4 e 5), cujos resultados foram postos em comparação com os obtidos utilizando os principais métodos clássicos de controle e com respostas analíticas, experimentais e/ou numéricas encontradas na literatura. A análise destes resultados permite certas conclusões.

Os exemplos apresentados no Capítulo 4 indicam que o método de controle por taxas de energia mostrou menor eficiência para descrever trajetórias de equilíbrio de problemas geometricamente não lineares do que os métodos clássicos que utilizam combinações de deslocamentos e fator de carga. Seu bom desempenho está condicionado a soluções de trajetórias mais simples, como as obtidas nos exemplos do Pórtico de Williams, do *Diamond Frame* e da viga em balanço.

No caso de trajetórias de equilíbrio mais complexas, como as verificadas no exemplo do Pórtico de Lee e em problemas de arcos, o método implementado não foi apto para descrevê-las completamente. Entretanto, o mesmo apresentou melhor desempenho do que o controle direto de deslocamento, sendo capaz de descrever um grande número de pontos limites de deslocamento (decréscimo de carga acompanhado de decréscimo de deslocamento). A instabilidade numérica em determinados trechos deste tipo de análise parece ser devida ao fato de que, em problemas geometricamente não lineares, pontos de instabilidade podem ocorrer sem que qualquer quantidade de

energia seja dissipada do sistema, tornando as funções de controle baseadas em taxas de energia ineficientes. Dessa forma, sugere-se o uso dos métodos tradicionais de controle de comprimento de arco ou do controle de deslocamento generalizado, visto que os mesmos possuem base puramente matemática, e não física.

A partir dos exemplos apresentados no Capítulo 5, observou-se boa concordância entre os resultados obtidos pelo método de controle por taxas de energia e as soluções fornecidas na literatura, comprovando assim a aplicabilidade do método para problemas fisicamente não lineares.

Dentre os métodos clássicos que foram testados, os métodos de controle de comprimento de arco com trajetória cilíndrica e de deslocamento generalizado apresentaram os desempenhos mais adequados, todavia, necessitou-se reduzir consideravelmente o incremento do fator de carga inicial para obter-se a convergência de determinados trechos pós-críticos.

As simulações de solicitações axiais (Seção 5.1) mostraram que o método de controle por taxas de energia foi facilmente capaz de representar os pontos limites de carga e deslocamento nos casos em que adotou-se as leis constitutivas polinomiais de Carreira e Chu (1985, 1986). Entretanto, para trechos estritamente lineares com ocorrência repentina de pontos críticos, este método apresentou ineficiência para descrever o trecho dissipativo das trajetórias de equilíbrio (instabilidade numérica no momento em que a troca de funções de controle deveria ocorrer).

Nos exemplos de compressão diametral (Seção 5.2), o método de controle por taxas de energia mostrou-se ser superior aos demais métodos de controle ao conseguir representar pontos de bifurcação ao longo da fase de enrijecimento da estrutura.

As trajetórias de equilíbrio para as simulações de flexão em três pontos (Seção 5.3) mostraram que a presença de localização de deformações pode alterar a descrição do trecho pós-crítico, uma vez que cada função de controle trata as grandezas do modelo constitutivo de fissuração de forma diferente. Além disso, não foi possível concluir qual método obteve a resposta mais realista, uma vez que todas as soluções

se enquadraram dentro do espectro de resposta do ensaio experimental.

Nas simulações de cisalhamento em quatro pontos (Seção 5.4), comprovou-se novamente a eficiência do método de controle por taxas de energia para descrever os acentuados picos críticos de deslocamento nas trajetórias de equilíbrio considerando a propagação de uma falha preexistente. Por outro lado, na simulação em que as leis de Carreira e Chu (1985, 1986) foram adotadas, verificou-se uma quantidade excessiva de passos usando o método proposto.

O exemplo do Painel em forma de “L” (Seção 5.5) também foi satisfatoriamente processado pelo método de controle por taxas de energia. Este foi capaz de representar as trajetórias de equilíbrio e a evolução da variável de dano com a adoção de um modelo constitutivo de degradação de dano volumétrico.

O desempenho dos métodos de controle para ajustar o tamanho do passo ao longo da simulação é outro aspecto importante. Neste sentido, o método de controle por taxas de energia mostrou-se novamente ser superior aos demais, conseguindo reduzir o tamanho do incremento de forma gradual sempre que pontos limites foram se aproximando. Tal característica não foi verificada utilizando-se os métodos clássicos de controle, onde, na maioria dos casos, os mesmos somente ajustaram o tamanho do passo uma única vez no trecho descendente.

Dessa forma, observa-se que para muitas situações, o método proposto é uma escolha adequada, podendo este detectar a ocorrência de regiões de bifurcações através de sua eficiência diferenciada para ajustar o tamanho do passo em função da variação da matriz de rigidez. Como consequência desta característica, foi visto que este possui a desvantagem de requerer mais passos de análise para descrever completamente a trajetória e, logo, demandar maior tempo de processamento do que os demais métodos de controle.

## 6.1 Sugestões para Trabalhos Futuros

Atualmente, vale ressaltar a constante preocupação por processos de solução automatizados para o traçado de trajetórias de equilíbrio. Para simulações numéricas que possuem malhas de elementos finitos muito refinadas, até mesmo o uso de um método de controle eficaz e robusto pode se tornar computacionalmente inviável. Assim, com base neste trabalho e no intuito de possibilitar a abordagem de modelos discretos mais complexos, sugerem-se as seguintes expansões para o sistema INSANE:

1. Aperfeiçoar o módulo *solution* inserindo um algoritmo para adaptar automaticamente o tamanho do passo após um número predeterminado de iterações. Tal algoritmo deve ser invocado no método *execute()* da classe *StandardNewtonRaphson*;
2. Avaliar a viabilidade e o desempenho do uso do método de controle por taxas de energia para análise tridimensional e tridimensional combinada (uni, bi e tridimensional);
3. Estudar a possibilidade de se automatizar os processos de obtenção de trajetórias de equilíbrio através do método *changeStrategy()*, aqui implementado, para consideração de cargas monotônicas e cíclicas;
4. Realizar um estudo sobre a influência do parâmetro  $a$  na descrição de trechos dissipativos em trajetórias de equilíbrio.

# Apêndice A

## Metodologia de Obtenção dos Parâmetros da Equação de Restrição

A formulação apresentada na Seção 2.2 para avaliar a coerência e a estabilidade numérica de métodos incrementais-iterativos é bastante genérica e se aplica a vários métodos de controle, bastando que se redefina a equação de restrição. Para demonstrar o processo de equacionamento para obtenção do incremento do fator de carga,  $\delta\lambda_j^i$ , a partir da referida equação, as formulações para os métodos de controle de carga, controle direto de deslocamento, controle de comprimento de arco e controle de deslocamento generalizado são apresentadas a seguir.

### A.1 Controle de Carga

Neste método, a carga externa é incrementada de um valor constante somente na primeira iteração de cada passo ( $j = 1$ ), sendo o incremento de carga feito igual a zero para as demais iterações ( $j > 1$ ), implicando em um carregamento externo sempre constante. Tal critério equivale a adotar-se as seguintes constantes para os parâmetros de restrição:  $\{C\} = \{0\}$ ,  $k = 1$  e  $H$  igual ao incremento de carga, sendo este igual a zero para ( $j > 1$ ).

A substituição destes valores na Equação 2.19 do Capítulo 2 fornece o incremento do fator de carga, como:

$$\delta\lambda_j = \begin{cases} \text{Constante,} & \text{para } j = 1 \\ 0, & \text{para } j > 1. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

É importante notar que à medida em que o pico de carga é aproximado, o determinante da matriz de rigidez,  $|K|$ , tende à zero, conforme Equação 2.1. A partir da Equação 2.16, observa-se que o determinante da matriz de rigidez generalizada devida à carga de referência também tende à zero, uma vez que  $\{C\} = \{0\}$  e  $k = 1$ . Além disso, pela Equação 2.17, fica evidente que as componentes de deslocamento encontradas por este método não são vinculadas com o fator de carga. Logo, verifica-se com clareza que o método de controle de carga não mostra eficácia na passagem por pontos limites.

## A.2 Controle Direto de Deslocamento

Este método, proposto por Batoz e Dhat (1979), supõe que as iterações são processadas a um deslocamento constante de tal forma que o incremento de deslocamento para uma componente  $c$  seja dado por:

$$\{\delta U\}_j^c = \begin{cases} \text{Constante,} & \text{para } j = 1 \\ 0, & \text{para } j > 1. \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Assim, os seguintes parâmetros são adotados:  $\{C\}^T = \{0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0\}^T$ , onde todos as componentes do vetor  $\{C\}^T$  são nulas, exceto àquela referente à posição da componente  $c$ ,  $k = 0$  e  $H = \{\delta U\}_j^c$ .

Substituindo-se estes parâmetros na Equação 2.19, obtém-se, para a primeira iteração e para as demais iterações, as seguintes expressões:

$$\delta\lambda_j = \frac{\{\delta U\}_j^c}{\{\delta U^P\}_j^c}, \quad \text{para } j = 1 \quad (\text{A.3})$$

$$\delta\lambda_j = -\frac{\{\delta U^Q\}_j^c}{\{\delta U^P\}_j^c}, \quad \text{para } j > 1. \quad (\text{A.4})$$

Este método requer um conhecimento prévio da estrutura a ser analisada para que se possa escolher o grau de liberdade adequado a ser usado para o controle. Dessa forma, a experiência do usuário contribui para solucionar o problema. A partir da Equação 2.17, verifica-se que ambos o parâmetro de carga e os deslocamentos são de magnitude finita na proximidade do pico de carga. Para o caso no qual ocorra ponto limite de deslocamento, o deslocamento de controle  $\{\delta U^P\}^c$  tende à zero na medida em que o descarregamento acompanhado com decréscimo de deslocamento se aproxima. Consequentemente, o incremento do fator de carga tende para o infinito, provocando instabilidade numérica.

### A.3 Controle de Comprimento de Arco

Nos métodos de comprimento de arco, o processo iterativo é controlado por uma combinação geométrica entre os deslocamentos e o fator de carga proporcional. A combinação apresentada a seguir precisa ser controlada na primeira iteração, definindo o ponto inicial da trajetória de iteração.

$$\{\Delta U\}_1^T \cdot \{\Delta U\}_1 + \delta\lambda_1 \cdot \delta\lambda_1 = \Delta S^2 \quad (\text{A.5})$$

onde,

$\{\Delta U\}$  é o vetor de deslocamentos acumulados num determinado passo incremental;  $\Delta S$  é uma constante a ser controlada.

Para a primeira iteração, tem-se que  $\{\Delta U\} = \{\delta U\}$ , pois o vetor de deslocamentos acumulado é nulo no início do passo. Logo, comparando a Equação A.5 com a

Equação 2.8, verifica-se facilmente que os parâmetros da equação de restrição são:  $\{C\} = \{\delta U\}_1$ ,  $k = \delta\lambda_1$  e  $H = \Delta S^2$ .

O incremento do fator de carga para a primeira iteração de cada passo incremental pode ser obtido a partir das Equações 2.2 e 2.19, e, como o vetor de cargas residuais é nulo, obtém-se:

$$\delta\lambda_1 = \pm \frac{\Delta S}{\sqrt{\{\delta U\}_1^{PT} \cdot \{\delta U\}_1^P + 1.0}}, \quad \text{para } j = 1. \quad (\text{A.6})$$

Através da equação acima é possível definir o ponto inicial da trajetória de iteração, que deve ser percorrida ( $j > 1$ ) impondo-se restrições à sua forma. Assim, algumas variações do método de controle de comprimento de arco podem ser elaboradas para se obter as demais iterações. A utilização dos valores de  $\{C\}$  e  $k$  obtidos anteriormente para a primeira iteração, por exemplo, forneceria:

$$\delta\lambda_j = -\frac{\{\delta U\}_1^T \cdot \{\delta U\}_j^Q}{\{\delta U\}_1^T \cdot \{\delta U\}_j^P + \delta\lambda_1} \quad \text{para } j > 1. \quad (\text{A.7})$$

A Equação A.7 representa a solução para as demais iterações empregando-se o controle de comprimento de arco original com trajetória de iteração ortogonal à tangente inicial.

Evidentemente, através da Equação 2.16, o determinante das matrizes de rigidez e rigidez generalizada devida à carga de referência permanece diferente de zero na proximidade de pontos limites, confirmando a eficácia do método para descrever fenômenos de decréscimo de carga acompanhado de decréscimo de deslocamento. Uma desvantagem deste método é a falta de informação sobre o sinal do parâmetro de carga da primeira iteração, tornando necessário o uso de um método adicional de troca de sinal.

Para o caso do método de comprimento de arco com trajetória de iteração cilíndrica, usado neste trabalho, assume-se que o incremento do comprimento de arco

é controlado apenas pela norma dos deslocamentos incrementais. Dessa forma, a equação de restrição se reduz a (Crisfield, 1981):

$$\{\Delta U\}_j^T \cdot \{\Delta U\}_j = \Delta S^2, \quad (\text{A.8})$$

onde

$$\{\Delta U\}_j = \{\Delta U\}_{j-1} + \{\delta U\}_j. \quad (\text{A.9})$$

A substituição de  $\{\delta U\}$  pela Equação 2.2 na Equação A.9 e do resultado na Equação A.8, leva a uma equação de restrição de segundo grau que permite obter a incógnita  $\delta\lambda_j$  ( $j > 1$ ). Devido à complexidade desta equação, sugere-se, para este controle, que a parametrização seja feita através de um método convencional de obtenção de raízes em equações.

## A.4 Controle de Deslocamento Generalizado

Este método, proposto por Yang e Shieh (1990), tem como propósito automatizar o ajuste do tamanho do passo incremental, pela monitoração da variação da rigidez, e a troca do sinal do parâmetro de carga na ocorrência de pontos críticos. Assim, os autores propuseram relacionar deslocamentos incrementais em dois passos sucessivos, utilizando-se a equação de restrição dada por:

$$H_j^i = \delta\lambda_1^i \{\delta U^P\}_1^{i-1T} \cdot \{\delta U\}_j^i \quad (\text{A.10})$$

onde,

$\{\delta U^P\}_1^{i-1}$  é o incremento de deslocamento resultante da primeira iteração do passo incremental anterior;

$H_j^i$  é um deslocamento generalizado.

No primeiro passo incremental, toma-se  $\{\delta U^P\}_1^0 = \{\delta U^P\}_1^1$  e substituindo na Equação A.10, obtém-se:

$$H_1 = (\delta\lambda_1^1)^2 \{\delta U^P\}_1^{1T} \cdot \{\delta U^P\}_1^1. \quad (\text{A.11})$$

Na primeira iteração de um passo qualquer, considerando que  $\{\delta U^Q\}_j$  é nulo, o incremento do fator de carga pode ser obtido das Equações 2.19 e A.11 com  $\{C\} = \delta\lambda_1^i \{\delta U^P\}_1^{i-1T}$  e escrito na seguinte forma:

$$\delta\lambda_1 = \delta\lambda_1^1 \left( \frac{\{\delta U^P\}_1^{1T} \cdot \{\delta U^P\}_1^1}{\{\delta U^P\}_1^{i-1T} \cdot \{\delta U^P\}_1^i} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{para } j = 1. \quad (\text{A.12})$$

Nas demais iterações, o parâmetro  $H_j$  deve se anular para garantir o controle estabelecido na primeira iteração. Logo, da Equação 2.19 chega-se a:

$$\delta\lambda_j = - \frac{\{\delta U^P\}_1^{i-1T} \cdot \{\delta U^Q\}_j^i}{\{\delta U^P\}_1^{i-1T} \cdot \{\delta U^P\}_j^i}, \quad \text{para } j > 1. \quad (\text{A.13})$$

Analogamente ao controle de comprimento de arco, verifica-se que ambas as variáveis fator de carga e deslocamentos permanecem vinculadas durante todo o procedimento de solução. Além disso, o termo entre parênteses na Equação A.12, denominado de parâmetro de rigidez generalizado (GSP), fornece, por si só, a indicação da mudança no sinal do incremento de carga, uma vez que seu sinal depende do produto escalar  $\{\delta U^P\}_1^{i-1T} \cdot \{\delta U^P\}_1^i$ . Assim, este método não requer informação adicional ao processo.

## Apêndice B

# Discretização Temporal para Controle de Comprimento de Arco

Este apêndice refere-se à obtenção da discretização temporal das funções de controle baseadas em taxas de energia dissipada e interna vistas no Capítulo 2. Tal discretização pode ser obtida através da aplicação de métodos de aproximação da análise numérica.

Para uma determinada função  $f(x(t))$ , cujo domínio é o conjunto dos números reais, delimitada em um intervalo de tempo  $\in [0, T]$  e assumindo-se a condição inicial dada por:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_i \end{array} \right\} \in [0, T], \quad (\text{B.1})$$

a discretização temporal pode ser generalizada na seguinte forma (Simo e Hughes, 1998):

$$\left. \begin{array}{l} x_{i+1} = x_i + \Delta t f(x_{i+\alpha}) \\ x_{i+\alpha} = \alpha x_{i+1} + (1 - \alpha)x_i \end{array} \right\} \alpha \in [0, 1] \quad (\text{B.2})$$

onde,

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 0, \quad \text{para método de Euler explícito} \\ \alpha = \frac{1}{2}, \quad \text{para regra do ponto médio} \\ \alpha = 1, \quad \text{para método de Euler implícito.} \end{array} \right. \quad (\text{B.3})$$

Na Equação B.2,  $x_i$  e  $x_{i+1}$  representam, respectivamente, a solução para a variável  $x$  nos passos incrementais  $i$  e  $i+1$  da análise. O parâmetro  $\alpha$  depende do método de aproximação escolhido, podendo este corresponder a três valores distintos, conforme a Equação B.3. O método de Euler explícito calcula o estado do sistema em um tempo posterior ao estado atual deste, enquanto que o método de Euler implícito, encontra a solução resolvendo uma equação que envolve ambos estados atual e posterior do sistema.

As funções de controle baseadas em energia são aqui discretizadas considerando-se a aplicação da regra do ponto médio, também conhecida como método de Euler modificado, com  $\alpha = \frac{1}{2}$ , como apresentado nas seções a seguir.

## B.1 Discretização Temporal para Taxa de Energia Dissipada

No Capítulo 2, foi visto que a taxa de energia dissipada, em função das forças atuantes na estrutura, pode ser representada por:

$$\dot{\tau}^D = \frac{1}{2}\{\dot{U}\}^T \cdot \lambda\{P\} - \frac{1}{2}\{U\}^T \cdot \dot{\lambda}\{P\}. \quad (\text{B.4})$$

Efetuando-se as substituições da Equação B.2 na Equação B.4, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\tau}^{D,i} - \dot{\tau}^{D,i-1}}{\Delta t} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\{U\}^{iT} - \{U\}^{i-1T}}{\Delta t} \cdot (\alpha\lambda^i + (1-\alpha)\lambda^{i-1})\{P\} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[ (\alpha\{U\}^{iT} + (1-\alpha)\{U\}^{i-1T}) \cdot \frac{\lambda^i - \lambda^{i-1}}{\Delta t} \{P\} \right] \\ &= \frac{\{U\}^{iT} \lambda^{i-1} \{P\}}{2\Delta t} - \frac{\{U\}^{i-1T} \lambda^i \{P\}}{2\Delta t}. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Assim, a função de controle, para qualquer variação de tempo, pode ser escrita na forma abaixo:

$$\Delta\tau^D = \frac{1}{2}(\lambda^{i-1}\{U\}^{iT} - \lambda^i\{U\}^{i-1T}) \cdot \{P\}. \quad (\text{B.6})$$

onde  $\Delta\tau^D$  é a variação da energia dissipada para um passo da análise.

## B.2 Discretização Temporal para Taxa de Energia Interna

A representação da taxa de energia interna em função das forças atuantes na estrutura é dada por:

$$\dot{\tau}^U = \frac{1}{2}\{\dot{U}\}^T \cdot \lambda\{P\} + \frac{1}{2}\{U\}^T \cdot \dot{\lambda}\{P\}. \quad (\text{B.7})$$

A partir das Equações B.2 e B.7, chega-se a:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\tau}^{U,i} - \dot{\tau}^{U,i-1}}{\Delta t} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\{U\}^{iT} - \{U\}^{i-1T}}{\Delta t} \cdot (\alpha\lambda^i + (1-\alpha)\lambda^{i-1})\{P\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} [(\alpha\{U\}^{iT} + (1-\alpha)\{U\}^{i-1T}) \cdot \frac{\lambda^i - \lambda^{i-1}}{\Delta t} \{P\}] \right] \\ &= \frac{1}{2\Delta t} \{P\} \cdot [2\alpha\lambda^i\{U\}^{iT} + (1-2\alpha)\lambda^{i-1}\{U\}^{iT} \\ &\quad + (1-2\alpha)\lambda^i\{U\}^{i-1T} + (2+2\alpha)\lambda^{i-1}\{U\}^{i-1T}]. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Aplicando-se a regra do ponto médio, com  $\alpha = \frac{1}{2}$ , obtém-se a função de controle discretizada para qualquer variação temporal, na forma:

$$\Delta\tau^U = \frac{1}{2}(\lambda^i\{U\}^{iT} - \lambda^{i-1}\{U\}^{i-1T}) \cdot \{P\}. \quad (\text{B.9})$$

onde  $\Delta\tau^U$  é a variação da energia interna para um passo da análise.

# Apêndice C

## Classe *StandardNewtonRaphson*

Na Seção 3.1, apresentam-se as implementações computacionais do sistema IN-SANE para processamento de problemas envolvendo não linearidade, com enfoque na classe *StandardNewtonRaphson*, responsável por proporcionar a solução de um passo incremental-iterativo, conforme apresentado anteriormente. De forma a consolidar a explicação apresentada, as principais variáveis da classe *StandardNewtonRaphson* são apresentadas a seguir:

- assembler: montador de matrizes e vetores da equação de equilíbrio;
- constantLoad: vetor de carga constante;
- convResult: resultado do teste de convergência (verdadeiro ou falso);
- convType: critério de convergência adotado, sendo 1 para o critério baseado em força, 2 para o critério baseado em deslocamento, ou 3, para ambos;
- currentError: erro corrente;
- currentIteration: iteração corrente;
- cuu: parcela referente às incógnitas da matriz de coeficientes  $C$  da equação de equilíbrio (ver Seção 3.1);
- dxp: vetor de deslocamentos incrementais associado à carga de referência;
- dxq: vetor de deslocamentos incrementais associado à carga residual;

- `equilibriumType`: tipo de equilíbrio para equação matricial;
- `f`: vetor de forças internas;
- `finalLoadFactor`: fator de carga acumulado no final do passo corrente;
- `initialLoadFactor`: fator de carga inicial do passo corrente. Esta variável é atualizada no final de cada passo, após a convergência ter sido alcançada;
- `initialX`: vetor de deslocamentos inicial do passo corrente. Este vetor é atualizado no final de cada passo, após a convergência ter sido obtida;
- `is`: estratégia de iteração;
- `numMaxIterations`: número máximo de iterações;
- `p`: vetor de carga de referência;
- `q`: vetor de carga residual;
- `r`: vetor de forças externas;
- `solverAdapter`: adaptador cuja função é definir uma forma de solução para o procedimento de Newton-Raphson;
- `stepCount`: contador de passos;
- `tolerance`: tolerância para convergência;
- `toleranceControl`: critério de controle para convergência. Este objeto permite alterar a tolerância durante uma análise após um determinado número de iterações;
- `x`: vetor de deslocamentos acumulado da iteração corrente;

Os principais métodos da classe *StandardNewtonRaphson* são apresentados na sequência. Cada um desses métodos possui um papel específico no processo de obtenção da solução e atualização da trajetória de equilíbrio.

- + `execute()`: Este é o principal método da classe *StandardNewtonRaphson* e é responsável pelo *loop* sobre o número de iterações (Fuina, 2009). O procedimento realizado por este método corresponde ao apresentado na Figura 2.1 do Capítulo 2: Primeiramente, a partir da matriz de rigidez e dos vetores de carga de referência e carga residual, obtém-se os vetores de deslocamentos incrementais associados às referidas cargas. Em seguida, calcula-se o incremento do fator de carga. Para a primeira iteração, o método *getPredictor()* da estratégia de iteração escolhida (*IterativeStrategy*) é invocado, ao passo que, para as demais iterações, invoca-se o método *getCorrector()* da mesma. Por fim, verifica-se a convergência e troca-se a estratégia de iteração se necessário. Atualmente, este recurso de troca de estratégia de iteração é aplicável apenas para o método de controle por taxas de energia, não interferindo nos outros métodos de controle já implementados no sistema;
- + `getXPXQ()`: Método responsável por obter os vetores de deslocamentos incrementais associados à carga de referência e à carga residual a partir de *solverAdapter*, o qual contém um objeto *LinearEquationSystems* capaz de solucionar uma equação de equilíbrio através de decomposição de matrizes;
- + `getXPandXQ()`: Método responsável por obter os vetores de deslocamentos incrementais associados à carga de referência e à carga residual a partir de diferentes métodos de solução por decomposição de matrizes. Este método é invocado no método *execute()* e é uma expansão do método *getXPXQ()*;
- + `assignStepState()`: Método responsável por enviar para o solucionador *solverAdapter* o valor encontrado para o incremento do fator de carga. Em seguida, a partir deste incremento, ele realiza a atualização das variáveis deslocamentos incrementais, deslocamentos totais acumulados, forças externas, fator de carga total acumulado e *assembler*. A atualização do objeto *assembler* permite que a nova equação de equilíbrio seja montada;

- + `getInitialX()`: Retorna o último vetor de deslocamentos acumulado no qual a convergência foi obtida. Este método foi adicionado na interface *Step* para auxiliar no cálculo das taxas de energia interna e dissipada.
- + `getX()`: Retorna o vetor de deslocamentos acumulado da iteração corrente;
- + `setConvergence()`: Método que define o resultado da convergência a partir do método *checkConvergence()* da classe *Convergence*. As variáveis usadas neste processo são: *tolerance*, *convResult*, *convType*, *currentError* e os vetores de forças ou de deslocamento;
- + `getConvergence()`: Método que retorna o resultado da convergência (verdadeiro ou falso);
- + `update()`: Método responsável por informar às classes observadoras (que implementam a interface *java.util.Observer*) que as variáveis do modelo foram modificadas. Tal atualização é feita através do padrão de projeto *Observer-Observable*, como visto no Capítulo 3.

# Apêndice D

## Relações Tensão-Deformação e Equação de Evolução Polinomial do Dano

Os modelos apresentados no Capítulo 5 para descrever problemas fisicamente não lineares dependem diretamente de leis constitutivas (relações tensão-deformação ou funções de dano) capazes de calcular a degradação das propriedades físicas do material. Conforme Penna (2011), além da descrição do processo de deterioração, estas leis são também responsáveis pela intensidade de crescimento ou decréscimo do regime pós-crítico do material. A seguir, são apresentadas as relações tensão-deformação e a equação de evolução do dano com variação polinomial usadas neste trabalho, de forma a consolidar as especificações sobre os modelos adotados.

### D.1 Relações Tensão-Deformação

Os diversos modelos de fissuração captam a integridade do módulo secante a partir de relações tensão-deformação para o concreto. Estas relações, apresentadas nesta seção, são propostas pela aproximação de equações matemáticas baseadas em testes laboratoriais e correlacionando as características do material com os parâmetros das equações.

### D.1.1 Proposta de Boone et al. (1986)

A proposta de Boone et al. (1986) aproxima o comportamento à tração do concreto por uma lei exponencial baseada na energia de fratura e nos limites de tensão e de deformação considerados, na forma:

$$\sigma = f_t e^{-k(\varepsilon - \varepsilon_t)}, \quad \text{com } k = \frac{L_f f_t}{G_f} \quad (\text{D.1})$$

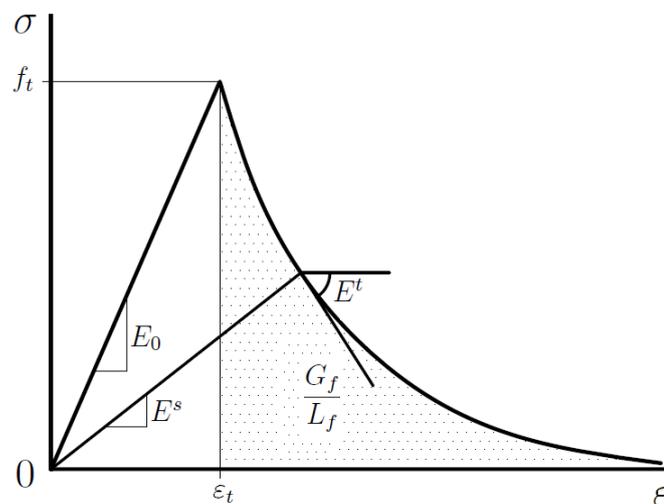
onde,

$\sigma$  é a tensão corrente;

$\varepsilon$  é a deformação corrente;

$f_t$ ,  $\varepsilon_t$ ,  $L_f$  e  $G_f$  são parâmetros do material definidos no Capítulo 5.

A Figura D.1 ilustra de forma esquemática os parâmetros da equação.



**Figura D.1:** Lei de Boone et al. (1986).

Na Figura D.1,  $E_0$ ,  $E^s$  e  $E^t$  representam, respectivamente, os módulos de elasticidade inicial, secante e tangente.

### D.1.2 Proposta de Carreira e Chu (1985, 1986)

As leis constitutivas de Carreira e Chu (1985, 1986) apresentam formas polinomiais com base nos limites de tensão e deformação para compressão e para tração. As relações tensão-deformação para os dois casos são dadas por:

$$\sigma_c = f_c \frac{k \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} \right)}{k - 1 + \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} \right)^k}, \quad \text{com } k = \frac{1}{1 - \left( \frac{f_c}{E_0 \varepsilon_c} \right)} \quad \text{e } \varepsilon_c > \frac{f_c}{E_0} \quad (\text{D.2})$$

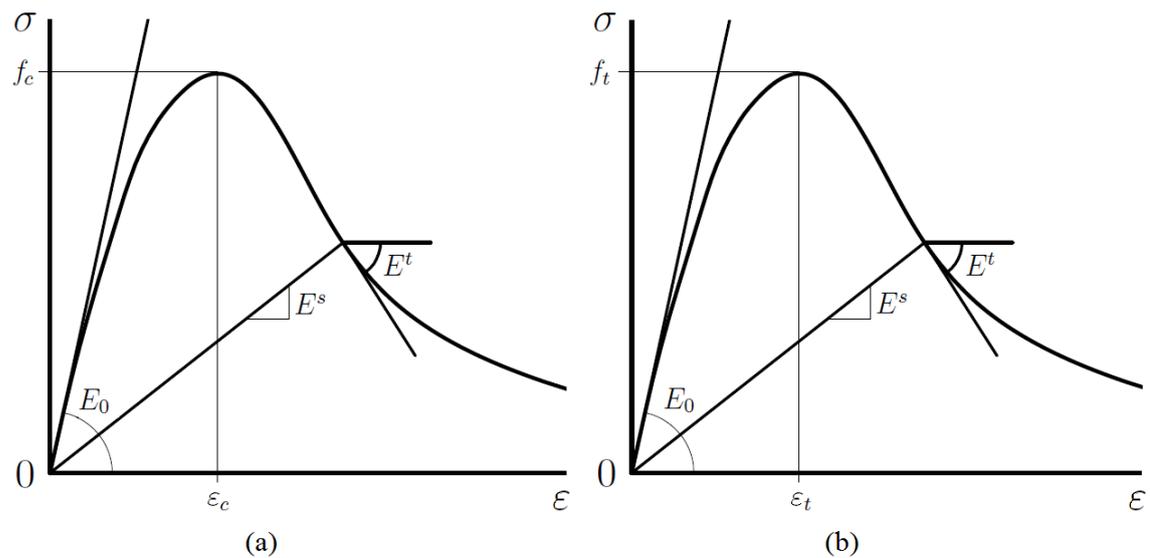
$$\sigma_t = f_t \frac{k \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_t} \right)}{k - 1 + \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_t} \right)^k}, \quad \text{com } k = \frac{1}{1 - \left( \frac{f_t}{E_0 \varepsilon_t} \right)} \quad \text{e } \varepsilon_t > \frac{f_t}{E_0} \quad (\text{D.3})$$

onde,

$\sigma_c$  e  $\sigma_t$  são as tensões equivalentes de compressão e tração, respectivamente;

$f_c$ ,  $\varepsilon_c$ ,  $f_t$  e  $\varepsilon_t$  são parâmetros do material definidos no Capítulo 5.

Os parâmetros das Equações D.2 e D.3 são ilustrados de forma esquemática na Figura D.2.



**Figura D.2:** Leis de Carreira e Chu (1985, 1986): (a) Compressão; (b) Tração.

### D.1.3 Aproximação Bilinear

Nas aproximações bilineares, uma composição linear é usada para descrever o comportamento do material tanto para o regime elástico quanto para o regime inelástico. O trecho elástico é dado pela lei de Hooke e o trecho inelástico é descrito pelas características do material e seus limites de resistência. As relações tensão-deformação para compressão e tração, respectivamente, podem ser escritas na seguinte forma:

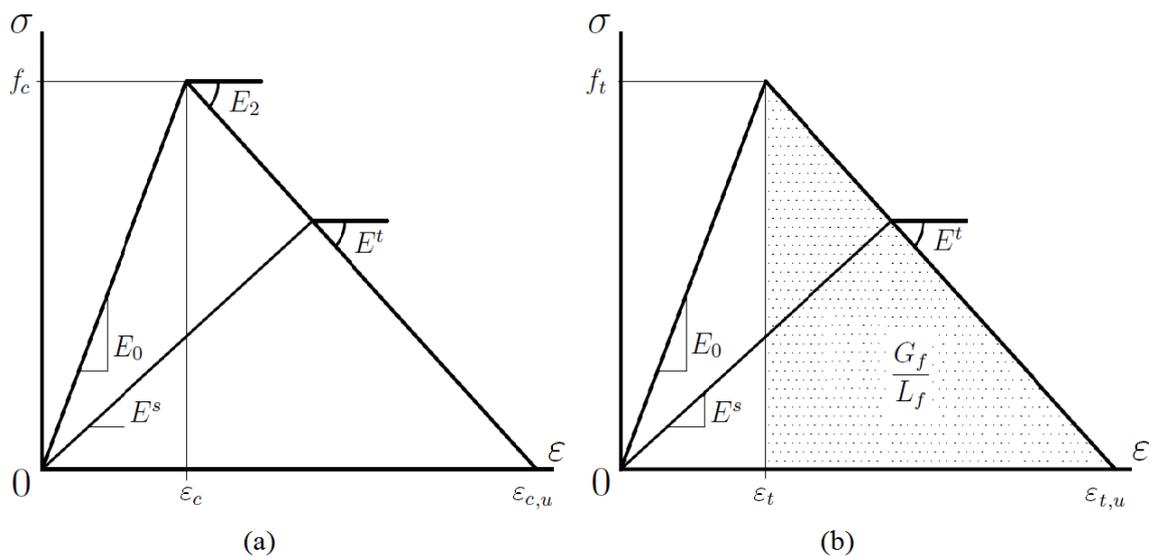
$$\sigma = \frac{\varepsilon_{c,u} - \varepsilon}{\varepsilon_{c,u} - \varepsilon_c} f_c, \quad \text{com } \varepsilon_{c,u} = \varepsilon_c + \frac{f_c}{E_2} \quad (\text{D.4})$$

$$\sigma = \frac{\varepsilon_{t,u} - \varepsilon}{\varepsilon_{t,u} - \varepsilon_t} f_t, \quad \text{com } \varepsilon_{t,u} = \varepsilon_t + \frac{2G_f}{L_f f_t} \quad (\text{D.5})$$

onde,

$\varepsilon_{c,u}$  e  $\varepsilon_{t,u}$  são as deformações últimas admissíveis na compressão e tração, respectivamente.

A Figura D.3 ilustra as relações tensão-deformação da lei bilinear.



**Figura D.3:** Aproximação bilinear: (a) Compressão; (b) Tração.

## D.2 Equação de Evolução do Dano com Variação Polinomial

As equações de evolução do dano apresentam diversas formas de variação, sendo que as formas mais tradicionais apresentam variações exponenciais. Entretanto, é possível representar o processo de degradação por equações polinomiais e lineares. Nesta seção, será apresentada apenas a equação de evolução do dano com variação polinomial usada na modelagem do exemplo do Painel em “L” (Seção 5.5).

A referida equação, obtida por Penna (2011), descreve o dano usando a mesma equação polinomial vista nas leis constitutivas de Carreira e Chu (1985, 1986). O dano é então dado por:

$$D(\tilde{\varepsilon}) = 1 - \frac{1}{\tilde{E}\tilde{\varepsilon}} \frac{\frac{f_e k \tilde{\varepsilon}}{\kappa_0}}{k - 1 + \left(\frac{\tilde{\varepsilon}}{\kappa_0}\right)^k} \quad (\text{D.6})$$

$$\frac{\partial D}{\partial \tilde{\varepsilon}} = \frac{f_e k^2 \left(\frac{\tilde{\varepsilon}}{\kappa_0}\right)^{k-1}}{\tilde{E}\kappa_0^2 \left[ k - 1 + \left(\frac{\tilde{\varepsilon}}{\kappa_0}\right)^k \right]} \quad (\text{D.7})$$

onde,

$\tilde{\varepsilon}$  é a medida de deformação equivalente;

$\tilde{E}$ ,  $f_e$  e  $\kappa_0$  são parâmetros do material definidos no Capítulo 5.

Segundo Penna (2011), a Equação D.6 apresenta uma evolução contínua e  $\kappa_0$  marca o limite elástico, podendo esta ser linear ou não, sendo que

$$\kappa_0 > \frac{f_e}{\tilde{E}}, \quad \text{pois } k = \frac{1}{1 - \left(\frac{f_e}{\kappa_0 \tilde{E}}\right)}. \quad (\text{D.8})$$

# Referências Bibliográficas

- Almeida, M. L., 2005. Elementos finitos paramétricos implementados em java. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Arrea, M. e Ingraffea, A., (1982), Mixed mode crack propagation in mortar and concrete, Relatório técnico 81-13, Departement Of Structural Engineering, Cornell University, Ithaca, EUA.
- Batoz, J. L. e Dhat, G., 1979. ‘Incremental displacement algorithms for nonlinear problems’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 14, pp. 1262–1267.
- Belytschko, T. e Hsieh, B. J., 1973. ‘Non-linear transient finite element analysis with convected co-ordinates’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 7(3), pp. 255–271.
- Boone, T., Wawrzynek, P. A. e Ingraffea, A. R., 1986. ‘Simulation of the fracture process in rock with application to hydrofracturing’. *International Journal of Rock Mechanics and Minig Science*, vol. 23 (3), pp. 255–265.
- Callen, H. B., 1985. *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatitics*. John Wiley & Sons, Canada.
- Carreira, D. J. e Chu, K., 1985. ‘Stress-strain relationship for plain concrete in compression’. *ACI Journal*, vol. 82, pp. 797–804.
- Carreira, D. J. e Chu, K., 1986. ‘Stress-strain relationship for reinforced concrete in tension’. *ACI Journal*, vol. 83, pp. 21–28.

- Chen, Z. e Schreyer, H. L., 1990. ‘A numerical solution scheme for softening problems involving total strain control’. *Computer & Structures*, vol. 37, pp. 1043–1050.
- Crisfield, M. A., 1981. ‘A fast incremental-interactive solution procedure that handles snap-through’. *Computers & Structures*, vol. 13, pp. 55–62.
- Crisfield, M. A., 1983. ‘An arc length method including line searches and accelerations’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 19, pp. 1269–1289.
- de Borst, R., 1986. Non-linear analysis of frictional materials. Tese de Doutorado, Delft University of Technology, The Netherlands.
- de Borst, R., 1987. ‘Computation of post-bifurcation and post-failure behavior of strain-softening solids’. *Computers & Structures*, vol. 25(2), pp. 211–224.
- de Borst, R., May, S. e Vignollet, J., 2016. ‘A new arc-length control method based on the rates of the internal and the dissipated energy’. *Engineering Computations*, vol. 33, pp. 100–115.
- de Oliveira, G. C., 2016. Aplicação do elemento de viga unificado bernoullitimoshenko e da formulação co-rotacional na análise não linear de pórticos e arcos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Brasília, Brasília, DF, Brasil.
- Fang, X.-J., Jin, F. e Yang, Q.-D., 2008. ‘Extended finite-element analysis of fractures in concrete’. *Engineering and Computational Mechanics*, vol. 161, pp. 187–197.
- Feng, Y. T., Peric, D. e Owen, D. R. J., 1996. ‘A new criterion for determination of initial loading parameter in arc-length methods’. *Computer & Structures*, vol. 58(3), pp. 479–485.
- Fonseca, F. T., 2008. Sistema computacional para análise dinâmica geometricamente não-linear através do método dos elementos finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Fonseca, M. T., 2006. Aplicação orientada a objetos para análise fisicamente não-linear com modelos reticulados de seções transversais compostas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.

- Fuina, J. S., 2004. Métodos de controle de deformações para análise não-linear de estruturas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Fuina, J. S., 2009. Formulações de modelos constitutivos de microplanos para contínuos generalizados. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Galvão, A. S., 2000. Formulações geometricamente não lineares de elementos finitos para análise de sistemas estruturais metálicos reticulados planos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Galvão, A. S., 2004. Estabilidade estática e dinâmica de pórticos planos com ligações semi-rígidas. Tese de Doutorado, PUC - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.
- Goodrich, M. e Tamassia, R., 2007. *Estruturas de dados e algoritmos em Java - 4.ed.:*. BOOKMAN COMPANHIA ED.
- Gutiérrez, M. A., 2004. 'Energy release control for numerical simulations of failure in quasi-brittle solids'. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, vol. 20(1), pp. 19–29.
- Harrison, H., (1978), Post-buckling behaviour of elastic circular arches, *in* 'Institution of Civil Engineers', Vol. 65 (2).
- Jirasek, M. e Bažant, Z. P., 2001. *Inelastic Analysis of Structures*. Wiley, Chichester.
- Krenk, S., 1995. 'An orthogonal residual procedure for nonlinear finite element equations'. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 38, pp. 823–839.
- Krenk, S. e Hededal, O., 1993. 'A dual orthogonality procedure for nonlinear finite element equations'. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 123, pp. 95–107.
- Lemaitre, J., 1992. *A Course on Damage Mechanics*. A Course on Damage Mechanics, Springer-Verlag.

- Lemaitre, J. e Desmorat, R., 2005. *Engineering Damage Mechanics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin.
- Mattiasson, K., 1981. ‘Numerical results from large deflection beam and frame problems analysed by means of elliptic integrals’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 17(1), pp. 145–153.
- Meek, J. L., 1991. *Computer methods in structural analysis*. Spon Pr.
- Melo, J. F., 2017. Análise física e geometricamente não linear de pórticos planos pela descrição corrotacional. Dissertação de Mestrado, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Most, T. e Bucher, C., 2007. ‘Energy-based simulation of concrete cracking using an improved mixed-mode cohesive crack model within a meshless discretization’. *International Journal For Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 31 (2), pp. 285–305.
- Penna, S. S., 2011. Formulação multipotencial para modelos de degradação elástica: Unificação teórica, proposta de novo modelo, implementação computacional e modelagem de estruturas de concreto. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Petersson, P.-E., (1981), Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials, Relatório técnico, TVBM-1006, Division of Building Materials, Lund Institute of Technology, Lund, Suécia.
- Pitangueira, R. L. S., 1998. Mecânica de estruturas de concreto com inclusão de efeitos de tamanho e heterogeneidade. Tese de Doutorado, PUC - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.
- Planas, J., Guinea, G. V. e Elices, M., 1999. ‘Size effect and inverse analysis in concrete fracture’. *International Journal of Fracture*, vol. 95, pp. 367–378.
- Ramm, E., 1980. ‘Strategies for tracing the nonlinear response near limit points, in nonlinear finite element analysis in structural mechanics’. , pp. 63–83.
- Ricks, E., 1972. ‘The application of newton method to the problem of elastic stability’. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 94, pp. 1060–1065.

- Ricks, E., 1979. ‘An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems’. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 15, pp. 529–551.
- Schweizerhof, K. H. e Wriggers, P., 1986. ‘Consistent linearization for path following methods in nonlinear finite element analysis’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 59, pp. 269–279.
- Simo, J. e Hughes, T., 1998. *Computational Inelasticity*. Interdisciplinary Applied Mathematics, Springer.
- Teh, L. H. e Clarke, M. J., 1999. ‘Plastic-zone analysis of 3d steel frames using beam elements’. *Journal of structural engineering*, vol. 125(11), pp. 1328–1337.
- Verhoosel, C. V., Remmers, J. J. C. e Gutierrez, M. A., 2009. ‘A dissipation-based arc-length method for robust simulation of brittle and ductile failure’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 77(9), pp. 1290–1321.
- von Paraski, N., 2012. Análise estática não linear de pórticos planos via matlab. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda, RJ, Brasil.
- Wempner, G. A., 1971. ‘Discrete approximations related to nonlinear theories of solids’. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 7(11), pp. 1581–1599.
- Williams, F. W., 1964. ‘An approach to the non-linear behaviour of the members of a rigid jointed plane framework with finite deflections’. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, vol. 17(4), pp. 451–469.
- Winkler, B., Hofstetter, G. e Lehar, H., 2004. ‘Application of a constitutive model for concrete to the analysis of a precast segmental tunnel lining’. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 28, pp. 797–819.
- Wood, R. D. e Zienkiewicz, O., 1977. ‘Geometrically nonlinear finite element analysis of beams, frames, arches and axisymmetric shells’. *Computer & Structures*, vol. 7(6), pp. 725–735.

- Yang, Y. B. e Kuo, S. R., 1994. *Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures*. Prentice Hall, Singapore.
- Yang, Y. B. e McGuire, W., 1985. 'A work control method for geometrically nonlinear analysis'. *Proceedings of the International Conference on Numerical Methods in Engineering: Theory and Application*, pp. 913–921.
- Yang, Y. B. e Shieh, M. S., 1990. 'Solution method for nonlinear problems with multiple critical points'. *AIAA Journal*, vol. 28(12), pp. 2110–2116.
- Yshii, Y., 2002. Formulação co-rotacional para pórticos planos. Dissertação de Mestrado, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, Brasil.