

**IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DE
MODELOS ELASTOPLÁSTICOS PARA
ANÁLISE FÍSICAMENTE NÃO LINEAR**

Danilo Bento Oliveira

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

**IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DE MODELOS
ELASTOPLÁSTICOS PARA ANÁLISE FÍSICAMENTE
NÃO LINEAR**

Danilo Bento Oliveira

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de “Mestre em Engenharia de Estruturas”.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Samuel Silva Penna
DEES - UFMG (Orientador)

Prof. Dr. Roque Luiz da Silva Pitangueira
DEES - UFMG

Profa. Dra. Jamile Salim Fuina
FUMEC

Belo Horizonte, 26 de Fevereiro de 2016

O48i Oliveira, Danilo Bento.
Implementação computacional de modelos elastoplásticos para análise fisicamente não linear [manuscrito] / Danilo Bento Oliveira. – 2016. xix, 132 f., enc.: il.

Orientador: Samuel Silva Penna.

Dissertação (mestrado) Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Anexos: f.129-132.

Bibliografia: f. 123-128.

1. Engenharia de estruturas - Teses. 2. Análise plástica (Teoria das estruturas) - Teses. I. Penna, Samuel Silva. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. III. Título.

CDU: 624(043)

Tenho a impressão de ter sido uma criança brincando à beira-mar, divertindo-me em descobrir uma pedrinha mais lisa ou uma concha mais bonita que as outras, enquanto o imenso oceano da verdade continua misterioso diante de meus olhos.

Isaac Newton

Dedico à minha sobrinha Letícia.

Índice

Índice	iii
Lista de Figuras	xi
Lista de Abreviaturas e Siglas	xii
Lista de Símbolos	xiii
Resumo	xviii
Abstract	xix
Agradecimentos	xx
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Objetivos	3
1.1.1 Objetivo Geral	3
1.1.2 Objetivos Específicos	3
1.2 Organização do Texto	3
2 A TEORIA MATEMÁTICA DA PLASTICIDADE	5
2.1 Introdução à Teoria da Plasticidade	5
2.2 Modelo Constitutivo Elastoplástico Geral	6
2.2.1 Decomposição Aditiva do Tensor de Deformações	7
2.2.2 Energia Potencial Livre e a Lei Elástica	7
2.2.3 Critério e Superfície de Escoamento	9
2.2.4 Regra de Fluxo Plástico e Lei de Endurecimento	11
2.2.5 Multiplicador Plástico	12
2.2.6 Operador Tangente Elastoplástico	13
2.3 Critérios de Escoamento	14
2.3.1 Tresca	14
2.3.2 Von Mises	16
2.3.3 Rankine	18
2.3.4 Mohr-Coulomb	20
2.3.5 Drucker-Prager	22

2.4	Modelos Constitutivos Elastoplásticos para o Concreto	25
2.4.1	Ottosen	27
2.4.2	Willam-Warnke	30
2.5	Leis de Encruamento	31
2.5.1	Plasticidade Perfeita	33
2.5.2	Encruamento Isotrópico	33
2.5.3	Encruamento Cinemático	35
2.5.4	Encruamento Misto	36
2.6	Algoritmo para Integração das Tensões	37
2.6.1	Método da Projeção do Ponto Mais Próximo (“ <i>Closest-Point Projection</i> ”)	38
2.6.2	Método do Plano de Corte (“ <i>Cutting-Plane</i> ”)	40
2.6.3	Operador Tangente Consistente	41
3	FORMULAÇÃO DOS MODELOS CONSTITUTIVOS	43
3.1	Formulação Geral para Modelos Constitutivos Elastoplásticos	43
3.1.1	Crítério de Von Mises	46
3.1.2	Crítério de Tresca	47
3.1.3	Crítério de Rankine	48
3.1.4	Crítério de Drucker-Prager	48
3.1.5	Crítério de Mohr-Coulomb	50
3.1.6	Crítério de Ottosen	51
4	IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL	53
4.1	Núcleo Numérico	54
4.2	Implementação dos Modelos Elastoplásticos	57
4.3	Classe Material	62
4.4	Implementação do algoritmo para integração das tensões	64
5	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	66
5.1	Tração, Compressão e Cisalhamento Puros	67
5.1.1	Varição da Lei Inelástica e dos Parâmetros de Encruamento	71
5.2	Compressão Diametral	77
5.3	Flexão Pura de uma Barra	81
5.3.1	Algoritmo de Retorno e Módulo Tangente Consistente	84
5.4	Viga em Balanço	85
5.5	Fundação em Bloco Rígido	91
5.6	Viga em Balanço com Seção Variável	94
5.7	Estabilidade de um Talude	99
5.8	Cilindro com Pressão Interna	101
5.9	Placa Circular com Carregamento Uniforme	104
5.10	Chapa Submetida à Tração	109
5.10.1	Chapa com Furo	109
5.10.2	Chapa com Trinca	112
5.10.3	Chapa de Concreto com Fibras	115

5.11	Viga de concreto armado	118
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	120
6.1	Sobre as Simulações Numéricas	120
6.2	Sugestões para Trabalhos Futuros	121
	Referências Bibliográficas	123
A	Modelos Numéricos: Equações Auxiliares	129
A.1	Derivadas de Primeira e Segunda Ordem	129
A.1.1	Derivadas de primeira ordem dos invariantes de tensão	129
A.1.2	Derivadas de segunda ordem dos invariantes de tensão	131

Lista de Figuras

2.1	Superfície de escoamento no espaço das tensões	10
2.2	Superfície descrita pelo critério de Tresca	15
2.3	Superfícies de escoamento para os critérios de Tresca e von Mises coincidindo no cisalhamento puro (Souza Neto et al., 2008).	16
2.4	Superfície descrita pelo critério de Von Mises	17
2.5	a) Superfícies de escoamento de Tresca e von Mises no plano b) Superfícies de escoamento de Tresca e von Mises no espaço de tensões de Haigh-Westergaard (Pockszevnicki, 2004).	18
2.6	Critério de Rankine: a) Seção Transversal; b) Seção Meridiana ($\theta = 0$); c) Plano π (Chen e Han, 2007).	19
2.7	Critérios de Tresca e von Mises associados à Rankine: a) Seção meridiana. b) Seção transversal (Chen e Han, 2007).	20
2.8	Critério de Mohr-Coulomb (Souza Neto et al., 2008).	21
2.9	Superfície de escoamento de Mohr-Coulomb no espaço de tensões principais (Souza Neto et al., 2008).	22
2.10	Superfície de escoamento de Drucker-Prager no espaço de tensões principais (Kossa, 2011).	23
2.11	a) Superfícies de escoamento de Mohr-Coulomb e aproximações de Drucker-Prager; b) Superfícies de escoamento de Mohr-Coulomb e Drucker-Prager no espaço de Haigh-Westergaard (Pockszevnicki, 2004).	24
2.12	Diagrama uniaxial de tensão x deformação, regime de pré e pós-falha (Chen e Han, 1982).	25
2.13	a) Meridianos da superfície de falha b) Seções no plano anti-esférico (Chen e Han, 2007).	27
2.14	Representação do critério de escoamento de Ottosen no plano desviador. a) baixa e b) alta tensão hidrostática (Pereira et al., 2012-a)	28

2.15	Meridianos de tração e compressão para o modelo de Willam-Warnke. Adaptado de Chen e Han (2007)	30
2.16	a)Plasticidade perfeita b)Modelo Bilinear c)Modelo Não-linear (Mavolva, 2008).	32
2.17	Plasticidade Perfeita. Teste uniaxial e representação do plano- π (Souza Neto et al., 2008).	33
2.18	Encruamento Isotrópico (Souza Neto et al., 2008).	34
2.19	Encruamento Cinemático (Souza Neto et al., 2008).	35
2.20	Encruamento Misto. Teste uniaxial com carregamento reverso (Souza Neto et al., 2008).	37
2.21	Interpretação geométrica do algoritmo da projeção do ponto mais próximo. Em cada iteração $(\bullet)^k$ as restrições são linearizadas de forma a interceptar $f = 0$. A próxima iteração $(\bullet)^{k+1}$, situada no nível $f_{n+1}^{k+1} > 0$, é um ponto mais próximo do que o nível definido para a iteração anterior $(\bullet)^k$ (Simo e Hughes, 1998).	40
2.22	Interpretação geométrica do algoritmo do plano de corte. Em cada iteração $(\bullet)^k$ a restrição sobre $(\bullet)^k$ é linear. A interseção do plano normal $f^{(k)} = 0$ com o próximo nível $f^{(k+1)}$ determina a próxima iteração $(\bullet)^{k+1}$ (Simo e Hughes, 1998).	41
3.1	Vetor de fluxo. Adaptado de Souza Neto et al. (2008).	45
4.1	Notação UML utilizada.	54
4.2	Organização do Núcleo Numérico.	54
4.3	Hierarquia da classe Model (Penna, 2011).	55
4.4	Diagrama de classes para ConstitutiveModel.	57
4.5	Obtenção dos tensores de rigidez elástico e secante e atualização das variáveis (Penna, 2011).	58
4.6	Diagrama de classes para UnifiedConstitutiveModelFilter	59
4.7	Cálculo do Operador Tangente. Adaptado de Penna (2011).	60
4.8	Cálculo das Tensões. Adaptado de Penna (2011).	60
4.9	Diagrama de classes para ElastoPlasticConstitutiveModelFilter.	61
4.10	Diagrama de classes para Material.	62
4.11	Diagrama de classes para ReturnMappingAlgorithm.	64
4.12	Diagrama de atividades para o algoritmo de retorno.	65

5.1	Condições de contorno, geometria e carga: (a) tração pura, (b) compressão pura. (c) Malha de elementos finitos.	67
5.2	Tração direta: diagramas Fator de carga × Deslocamento horizontal.	68
5.3	Compressão: diagramas Fator de carga × Deslocamento horizontal.	69
5.4	(a) Condições de contorno, geometria e carga para o cisalhamento puro. (b) Malha de elementos finitos.	70
5.5	Cisalhamento puro: Diagramas Fator de carga × Deslocamento horizontal.	70
5.6	Rankine: Curvas Fator de Carga x Deslocamento Horizontal para variação do módulo inelástico.	72
5.7	Drucker-Prager: Curvas Fator de Carga x Deslocamento Horizontal para variações dos parâmetros da lei inelástica exponencial.	73
5.8	Von Mises: Curvas Fator de Carga x Deslocamento Horizontal para encruamento isotrópico, cinemático e misto	74
5.9	Superfície de escoamento de von Mises.	75
5.10	Ottosen: Curvas Fator de Carga x Deslocamento Horizontal para variação da lei inelástica em ensaio de compressão uniaxial.	76
5.11	Configuração geométrica e malha de elementos finitos do modelo de compressão diametral.	77
5.12	Início das deformações plásticas acumuladas.	78
5.13	Distribuição de tensões σ_x	79
5.14	Distribuição de tensões σ_x ao longo do eixo y.	80
5.15	Distribuição de tensões σ_y ao longo do eixo y.	80
5.16	Flexão de uma barra com entalhe em V: definição do problema, condições de geometria e discretização da malha de elementos finitos. Adaptado de Souza Neto et al. (2008).	81
5.17	Comparação entre o resultado de Green (1953) e os resultados obtidos pelo modelos de von Mises e Tresca.	83
5.18	Mecanismo de colapso da viga obtido pelo modelo de elementos finitos de Souza Neto et al. (2008), à esquerda, e pelo modelo de von Mises implementado, à direita.	83
5.19	Console de processamento. Tração direta com uso do “Closest-Point Projection” e operador tangente consistente.	84

5.20	Geometria da viga em balanço submetida a carregamento na extremidade livre.	86
5.21	Malhas de elementos finitos para a viga em balanço submetida a carregamento na extremidade livre (a) Malha de elementos Q8. (b) Malha de elementos Q4.	86
5.22	Carga Aplicada x Deslocamento Vertical para a viga em balanço. . .	87
5.23	Viga engastada em balanço (a) Malha deformada e (b) Fluxo plástico. . .	88
5.24	Distribuição de tensões.	89
5.25	Evolução dos deslocamentos na direção vertical ao longo do carregamento.	89
5.26	Carga Aplicada x Deslocamento Vertical para a viga em balanço utilizando o modelo de Drucker-Prager.	90
5.27	Sapata corrida: definição do problema. Adaptado de Souza Neto et al. (2008).	91
5.28	Sapata corrida: Malha de elementos finitos.	92
5.29	Bloco rígido. Curva Carga Aplicada x Deslocamento Vertical Normalizado para o modelo de Mohr-Coulomb.	92
5.30	Bloco rígido. Curva Carga Aplicada x Deslocamento Vertical Normalizado para o modelo de Drucker-Prager.	93
5.31	Viga em Balanço com Seção Variável. Geometria e malha de elementos finitos (Souza Neto et al., 2008).	94
5.32	Viga em Balanço com Seção Variável. Curva Carga normalizada \times Deslocamento vertical normalizado.	95
5.33	Viga em Balanço com Seção Variável. Comparação entre os modelos de Tresca e Mohr-Coulomb.	96
5.34	Viga em Balanço com Seção Variável. Comparação entre os modelos de von Mises e Drucker-Prager.	96
5.35	Viga em Balanço com Seção Variável. Campo de deslocamentos proposto por Green (1954) (Souza Neto et al., 2008).	97
5.36	Viga em Balanço com Seção Variável. Deformações ε_{xy} obtidas com os modelos numéricos (a) de Tresca e Mohr-Coulomb e (b) de von Mises e Drucker-Prager.	98
5.37	Estabilidade de talude. Geometria e malha de elementos finitos. Adaptado de Souza Neto et al. (2008).	99

5.38	Estabilidade de um Talude.	100
5.39	Cilindro com Pressão Interna - (a) Geometria e (b) seção transversal parcialmente plastificada. Adaptado de Souza Neto et al. (2008).	101
5.40	Cilindro com Pressão Interna - Malha de elementos finitos.	102
5.41	Cilindro com Pressão Interna - Trajetória de equilíbrio.	103
5.42	Cilindro com Pressão Interna - Evolução da fronteira plástica para o modelo de von Mises.	104
5.43	Placa Circular - Geometria e malha de elementos finitos. Adaptado de Souza Neto et al. (2008).	104
5.44	Placa Circular - Diagrama Carga \times Deslocamento.	105
5.45	Placa Circular - Evolução do fluxo plástico obtido por Souza Neto et al. (2008).	106
5.46	Placa Circular - Evolução do fluxo plástico para o modelo de Tresca.	107
5.47	Placa Circular - Evolução do fluxo plástico para o modelo de von Mises.	107
5.48	Placa Circular - Distribuições de tensões circunferenciais e radiais para o modelo de Tresca.	108
5.49	Placa Circular - Distribuições de tensões circunferenciais e radiais para o modelo de von Mises.	108
5.50	Chapa com Furo - Geometria e malha de elementos finitos.	109
5.51	Chapa com Furo - Curva Reação na borda \times Deslocamento da borda.	110
5.52	Evolução do fluxo plástico para os modelos de von Mises (à esquerda), Rankine (centro) e solução numérica obtida por Souza Neto et al. (2008) (à direita).	111
5.53	Chapa Tracionada com Trinca - Geometria e malha de elementos finitos. Adaptado de Souza Neto et al. (2008).	112
5.54	Chapa Tracionada com Trinca - Deslocamento vertical da borda nor- malizado \times Tensão normalizada com os modelos de von Mises e Rankine.	113
5.55	Chapa Tracionada com Trinca - Distribuição de tensões para o modelo de von Mises (acima) e para o modelo de Rankine (abaixo).	114
5.56	Chapa de Concreto com Fibras - Malha de elementos finitos, geo- metria e imagem das condições de apoio usadas no experimento de Pereira et al. (2012-b). Adaptado de Pereira et al. (2012-a).	115

5.57	Chapa de Concreto com Fibras - Os resultados numéricos obtidos com o modelo de Ottosen comparados com os resultados experimentais e numéricos obtidos por Pereira et al. (2012-a).	116
5.58	Chapa de Concreto com Fibras - (a) Malha deformada e Campos de deslocamentos obtidos (b) com o modelo de Ottosen e (c) solução numérica apresentada por Pereira et al. (2012-a).	117
5.59	Viga de concreto armado estudada por Mazars e Pijaudier-Cabot (1989).	118
5.60	Malha de Elementos Finitos: viga de concreto armado submetida à flexão de três pontos.	119
5.61	Trajetórias de equilíbrio do deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga.	119

Lista de Abreviaturas e Siglas

DEES	Departamento de Engenharia de Estruturas
EPD	Estado Plano de Deformações
EPT	Estado Plano de Tensões
FAPEMIG	Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais
INSANE	<i>INteractive Structural ANalysis Environment</i>
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MEF	Método dos Elementos Finitos
MEFG	Método dos Elementos Finitos Generalizados
MSN	Método Sem Malha
POO	<i>Programação Orientada a Objetos</i>
uc	Unidade de comprimento
uf	Unidade de força
UFMG	Universidade Federal de Minas Gerais
UML	<i>Unified Modelling Language</i>
XML	<i>eXtensible Markup Language</i>

Lista de Símbolos

Capítulo 2

α	Constante associada ao critério de Ottosen.
$\boldsymbol{\alpha}$	Conjunto de variáveis internas associadas ao regime inelástico.
β	Constante associada ao critério de Ottosen.
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Tensor de deformações.
$\boldsymbol{\varepsilon}^e$	Parcela elástica do tensor de deformações.
$\boldsymbol{\varepsilon}^p$	Parcela plástica do tensor de deformações.
Φ	Função de superfície de escoamento.
ϕ	Ângulo de atrito interno.
η	Constante do critério Drucker-Prager associada ao ângulo de atrito interno.
$\dot{\lambda}$	Multiplicador plástico.
λ	Parâmetro do critério de Ottosen calculado a partir do ângulo de carregamento e dos parâmetros c_1 e c_2 .
θ	ângulo de carregamento, função dos invariantes J_2 e J_3 .
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor de tensões.

σ_n	Tensão normal.
σ_y	Tensão de escoamento.
$\sigma_{\text{máx}}$	Tensão máxima.
$\sigma_{\text{mín}}$	Tensão mínima.
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Tensões principais.
τ	Tensão de cisalhamento.
τ_y	Tensão limite de cisalhamento.
ψ	Energia livre.
ψ^e	Parcela da energia elástica.
ψ^p	Parcela da energia plástica.
ϕ	ângulo de atrito interno.
$\bar{\rho}$	Densidade de massa de referência.
ρ_c, ρ_t	Componentes de tensão perpendiculares ao eixo hidrostático.
\mathcal{E}	Definição do domínio elástico.
$\bar{\mathcal{E}}$	Definição do domínio plástico admissível.
Υ^p	Função de dissipação plástica.
\mathcal{Y}	Definição do domínio da superfície de escoamento.
A	Forças termodinâmicas associadas.
a_0, a_1, a_2	Constantes associadas ao critério de Willan-Warnke.
b_0, b_1, b_2	Constantes associadas ao critério de Willan-Warnke.

C	Matriz de rigidez.
c	Coesão.
c_1	Constante associada ao critério de Ottosen.
c_2	Constante associada ao critério de Ottosen.
D^e	Tensor isotrópico elástico.
D	Matriz de flexibilidade.
f_c	Resistência à compressão uniaxial.
f_{bc}	Resistência à compressão biaxial.
f_t	Resistência à tração uniaxial.
G	Módulo de cisalhamento.
H	Módulo plástico generalizado.
K	Módulo volumétrico.
I	Tensor identidade.
I_1	Primeiro invariante do tensor de tensões.
I_2	Segundo invariante do tensor de tensões.
I_3	Terceiro invariante do tensor de tensões.
J_2	Segundo invariante do tensor anti-esférico.
J_3	Terceiro invariante do tensor anti-esférico.
N	Tensor de fluxo plástico.
R_{n+1}	Fluxo plástico residual.

\mathbf{s} Tensor de tensões anti-esférico.

W Energia elástica acumulada.

Capítulo 3

β *Back-stress*.

δ_{ij} Delta de Kronecher.

ε_{kl} Componentes do tensor de deformação.

$\dot{\varepsilon}$ Incremento das deformações.

$\dot{\varepsilon}^p$ Incremento das deformações plásticas.

$\bar{\eta}$ Constante do critério Drucker-Prager associada ao ângulo de dilatância.

$\dot{\lambda}$ Multiplicador Plástico.

$\boldsymbol{\sigma}$ Tensor de tensões.

$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ Incremento das tensões.

σ_{ij} Componentes do tensor de tensões.

ψ Ângulo de dilatância.

m_{kl} Componentes do tensor das direções do fluxo plástico.

n_{ij} Componentes do tensor das direções da função de carregamento.

\mathbf{p} Vetor de variáveis internas.

C_{ijkl} Componentes do tensor de flexibilidade secante.

E_{ijkl} Componentes do tensor de rigidez secante.

E_{ijkl}^0 Componentes do tensor de rigidez elástico.

E_{ijkl}^t	Componentes do tensor de rigidez elastoplástico tangente.
F	Função de escoamento.
\mathcal{H}	Módulo inelástico isotrópico.
\mathcal{K}	Módulo inelástico cinemático.
Q	Função de potencial plástico.
s_{ij}	Componentes do tensor anti-esférico.
t_{ij}	Desvio quadrático do tensor de tensões desviadoras.

Capítulo 4

K_t	Matriz de rigidez tangente.
δU	Vetor de deslocamentos incrementais.
$\delta \lambda$	Incremento do fator de carga.
P	Vetor de cargas de referência.
Q	Vetor de cargas desbalanceadas.

Resumo

O objetivo desta dissertação de mestrado é a inclusão de modelos constitutivos clássicos da plasticidade no ambiente computacional INSANE (*INteractive Structural ANalysis Environment*), desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais. O trabalho tem início com uma abordagem sobre o arcabouço teórico necessário para a implementação da teoria matemática da plasticidade. São descritos de forma detalhada os principais modelos de plasticidade utilizados nas análises de engenharia: Tresca, von Mises, Mohr-Coulomb e Drucker-Prager. São também descritos os modelos de Ottosen e Willam-Warnke utilizados para o estudo do comportamento do concreto. É apresentada a formulação dos modelos constitutivos baseada em tensão e as leis de encruamento as quais um material pode ser submetido. Também são abordados os algoritmos para mapeamento de retorno, necessários para a integração das relações constitutivas que regem o comportamento do material no contexto de plasticidade computacional. A seguir, é discutida a metodologia necessária para que os objetivos deste trabalho fossem alcançados, explicitando os principais recursos do sistema INSANE e os módulos onde foram realizadas as implementações. Vários exemplos são apresentados, visando ilustrar as possibilidades de modelagem proporcionada pelos modelos de plasticidade presentes no INSANE. Os resultados obtidos nessas análises são comparados com os já existentes na literatura para a verificação da estabilidade e acurácia dos modelos.

Palavras-Chave: Plasticidade Computacional, Modelos Constitutivos, Leis de Encruamento, Mapeamento de Retorno, INSANE.

Abstract

This master's thesis is concerned about the addition of classic constitutive models of plasticity into the computing environment INSANE (*INteractive Structural ANalysis Environment*), developed at the Department of Structural Engineering of the Federal University of Minas Gerais. The work starts with a discussion of the theoretical framework necessary for the implementation of the mathematical theory of plasticity. The main plasticity models used in engineering analysis are described in detail: Tresca, von Mises, Mohr-Coulomb and Drucker-Prager. The models of Ottosen and Willam-Warnke used to study the behavior of the concrete are also described. The formulation of the constitutive models based on stress and hardening laws which a material may be subjected are showed. The return mapping algorithms, required for the integration of constitutive relations governing the behavior of the material in the context of computational plasticity, are discussed. Then, the necessary methodology to achieved objectives of this work, explaining the main features of INSANE system and the modules where the implementations were held. Several examples are presented, in order to illustrate the modeling possibilities provided by the plasticity models present in INSANE. The results of these analyzes are compared with those from the literature to verified the stability and accuracy of the models.

Keywords: Computational Plasticity, Constitutive Models, Hardening Laws, Return Mapping, INSANE.

Agradecimentos

A Deus, razão maior.

À minha família, meu infinito agradecimento, por sempre acreditar no meu potencial e me incentivar a buscar algo mais. Obrigado pelo amor incondicional!

À Paulinha, por acreditar nos meus sonhos e por fazer parte deles. Seu amor, companheirismo, compreensão e apoio em todos os momentos foram fundamentais para que eu pudesse concluir mais esta etapa.

Ao professor Samuel Silva Penna, pela confiança e pela oportunidade de trabalhar ao seu lado. Obrigado pelo apoio, incentivo, ensinamentos, dedicação e pela atenção sempre especial nas revisões e sugestões para a realização deste trabalho.

Aos demais professores do Departamento de Engenharia de Estruturas da UFMG, pelo convívio e por todo conhecimento compartilhado.

Aos meus amigos que sempre torceram por mim e me incentivaram durante este período, em especial: Altamiro, Rodrigo, Vinícius, Thiago e Rafael.

Aos funcionários do Departamento de Engenharia de Estruturas da UFMG, pela disponibilidade, atenção e pelo excelente trabalho desenvolvido.

Aos amigos do mestrado pela convivência harmoniosa, por todas as experiências compartilhadas e por fazer dos momentos mais difíceis uma boa piada. Em especial: Eddy, Juliano, Leandro, Lucas e Pedrão.

À equipe INSANE, por sempre estarem dispostos a ajudar e a crescer juntos.

À FAPEMIG, pelo apoio financeiro.

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

O trabalho do engenheiro de estruturas sempre esteve relacionado à compreensão das simplificações físicas representadas por modelos matemáticos, cabendo a ele determinar o campo de forças internas que está atuando sobre o material e verificar a resposta do mesmo a essas forças. Durante muito tempo, estruturas foram idealizadas tendo como base a teoria matemática da elasticidade, utilizando a análise estática linear, onde os deslocamentos são assumidos infinitesimais e a lei de Hooke é válida. Em geral, concepção do projeto, admite-se que a estrutura deva ser submetida a uma tensão admissível menor que o seu limite de elasticidade, muitas vezes negligenciando uma análise estrutural mais adequada e um conhecimento mais profundo acerca das propriedades do material.

Entender o comportamento real de uma estrutura é algo muito complexo, devido à variação das tensões atuantes no corpo, que por vezes extrapolam os limites do domínio elástico. É nesse âmbito que surge a teoria da plasticidade, uma extensão necessária da teoria da elasticidade, que fornece uma abordagem mais realista acerca do comportamento do material e conseqüentemente da estrutura. O desenvolvimento da teoria matemática da plasticidade está intimamente ligado ao avanço das técnicas computacionais baseadas no Método dos Elementos Finitos e alimentado pelo aumento constante da capacidade de processamento dos computadores, fazendo uso de alguns conceitos fundamentais: o critério de escoamento, que define

o limite em que o material se torna plástico; a regra de fluxo, que descreve a relação entre as tensões e deformações, uma vez que o material tornou-se plástico; e a condição de consistência, que impede as tensões de exceder o limite de escoamento.

Diversos autores trabalham na tentativa de conceber modelos constitutivos que possam apresentar um comportamento mais realista. Um dos principais complicadores que envolvem as simulações relacionadas à plasticidade é a implementação do algoritmo de mapeamento de retorno, responsável pela integração das equações relacionadas ao modelo constitutivo. Dessa forma, a construção de um sistema computacional eficiente requer a utilização de algoritmos precisos e estáveis.

O constante crescimento de pesquisas na área da mecânica computacional contribui para o surgimento de diversos softwares utilizados por engenheiros e pesquisadores, capazes de realizar análises sofisticadas, tendo como pano de fundo modelos constitutivos bastante complexos, como os que utilizam a teoria da plasticidade. Uma enorme gama de problemas práticos de engenharia, como a análise de tensões em estruturas metálicas, de concreto, de solos e rochas, pode ser resolvida a partir da aplicação destas técnicas, obtendo resultados precisos. É neste contexto que o ambiente computacional INSANE (INteractive Structural ANalysis Environment) vem sendo desenvolvido no Departamento de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais.

O sistema computacional INSANE é um projeto de software livre, implementado em linguagem Java segundo o paradigma de Programação Orientada a Objetos, e está disponível em <http://www.insane.dees.ufmg.br>. Este sistema dispõe de um Ambiente Teórico-Computacional para Modelos Constitutivos proposto em Penna (2011), segundo o qual, os modelos constitutivos podem ser facilmente incluídos.

Este trabalho foi organizado de maneira que possa revisar os principais conceitos que cercam a teoria da plasticidade e busca apresentar a metodologia necessária para a implementação da mesma no INSANE.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo Geral

O objetivo da teoria matemática de plasticidade é proporcionar uma modelagem constitutiva capaz de descrever (qualitativa e quantitativamente) de forma suficientemente rigorosa, o comportamento fenomenológico de materiais que possuem as características discutidas anteriormente.

Esta dissertação tem como objetivo principal estudar os modelos constitutivos para plasticidade e incluí-los no ambiente unificado para modelos constitutivos, desenvolvido por Penna (2011), pertencente ao sistema INSANE.

1.1.2 Objetivos Específicos

Visando atingir o objetivo geral, os seguintes objetivos específicos foram perseguidos:

- (1) implementar no sistema INSANE modelos constitutivos elastoplásticos com os principais critérios descritos na literatura;
- (2) revisar e generalizar a implementação dos algoritmos de retorno para a integração das equações constitutivas;
- (3) realizar simulações numéricas considerando as diferentes leis inelásticas implementadas;
- (4) e comparar os resultados obtidos a partir dos modelos implementados com resultados experimentais, analíticos e numéricos disponíveis na literatura.

1.2 Organização do Texto

Esta dissertação está organizada em 6 capítulos.

O capítulo 1 apresenta a motivação, delimitação e os objetivos do trabalho a partir da visão geral e contextual do problema tratado, como orientação à organização do trabalho como um todo.

O capítulo 2 abrange uma revisão geral sobre a Teoria Matemática da Plasticidade. São apresentados os conceitos básicos relativos à descrição matemática de um modelo constitutivo elastoplástico, destacando-se a formulação computacional das relações incrementais entre tensão e deformação da teoria da plasticidade, os conceitos de superfícies de falha, escoamento plástico e leis de encruamento, com ênfase para o algoritmo de integração das tensões.

No capítulo 3, os modelos constitutivos elastoplásticos são formulados segundo o Ambiente Teórico-Computacional Unificado para Modelos Constitutivos apresentado em Penna (2011). Destacam-se as equações que permitem calcular as tensões, os tensores constitutivos e as funções que descrevem o endurecimento ou amolecimento dos materiais.

O capítulo 4 apresenta o projeto orientado a objetos da implementação. São detalhadas as interfaces e classes criadas e alteradas no núcleo numérico do sistema computacional INSANE.

No capítulo 5, são apresentadas e discutidas diversas simulações numéricas realizadas com os modelos implementados, onde os resultados obtidos são confrontados com resultados experimentais e numéricos obtidos por outros autores.

O capítulo 6 traz as considerações finais acerca do desenvolvimento do trabalho e dos resultados obtidos. Finalmente, a partir das discussões realizadas, são apresentadas algumas sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

A TEORIA MATEMÁTICA DA PLASTICIDADE

Neste capítulo, são tratados alguns conceitos gerais referentes à formulação e implementação computacional das relações incrementais entre tensão-deformação no regime das pequenas deformações no âmbito da teoria da plasticidade, segundo o equacionamento proposto por Souza Neto et al. (2008).

Segundo Souza Neto et al. (2008), para formular um modelo constitutivo elástotoplástico, deve ser descrito: a decomposição de deformações elásticas e plásticas, uma lei elástica, um critério de escoamento, uma regra para o fluxo plástico e uma lei de endurecimento ou amolecimento do material.

2.1 Introdução à Teoria da Plasticidade

A teoria matemática da plasticidade compreende uma grande parte da modelagem constitutiva de materiais em geral. A teoria da plasticidade procura descrever matematicamente deformações imediatas e não reversíveis que ocorrem em um corpo sólido, ou seja, as deformações que não desaparecem totalmente ao serem removidas as forças que lhe deram origem (Owen e Hinton, 1980; Proença, 1988; Lubliner, 1990; Chen e Han, 2007; Souza Neto et al., 2008).

O desenvolvimento de modelos para materiais e a sua utilização em plasticidade computacional é de muita importância e interesse (Bathe e Montáns, 2004).

A análise desse tipo de comportamento do material torna-se complexa devido ao fato de que diferentes materiais requerem diferentes modelos constitutivos para sua adequada caracterização.

A descrição do comportamento elastoplástico do ponto de vista macroscópico (designada por comportamento fenomenológico) para estados multiaxiais de tensões é feita segundo as seguintes hipóteses:

- (1) a existência de um domínio elástico, isto é, uma região de tensões dentro da qual o material se comporta como sendo puramente elástico, sem o surgimento de deformações permanentes. O domínio elástico é delimitado por uma função de escoamento escrita em termos da tensão limite de escoamento.
- (2) a ocorrência de deformações inelásticas, ou seja, deformações associadas a tensões acima da tensão de escoamento, cuja evolução pode ser descrita por uma regra de escoamento.
- (3) a ocorrência do fenômeno de encruamento/amolecimento do material, ou seja, a possibilidade de haver aumento/diminuição da tensão de escoamento acompanhando a evolução das deformações inelásticas.

É importante ressaltar que apesar da teoria clássica da plasticidade ter sido originalmente desenvolvida para o estudo dos metais (Proença, 1988), as hipóteses citadas podem ser observadas em diversos tipos de materiais como o concreto, em rochas e solos, entre outros. Deve-se, no entanto, observar que, de acordo com o tipo de material, diferentes procedimentos experimentais podem ser necessários para a verificação de tais propriedades (Souza Neto et al., 2008).

2.2 Modelo Constitutivo Elastoplástico Geral

Conforme Souza Neto et al. (2008), a formulação matemática de um modelo constitutivo elastoplástico para aplicação em situações bi e tridimensionais é feita a

partir da descrição de forma geral dos seguintes aspectos:

- (1) decomposição aditiva do tensor de deformações;
- (2) uma lei elástica;
- (3) um critério de escoamento;
- (4) fluxo plástico, definindo a evolução das deformações plásticas, e;
- (5) uma lei de encruamento/amolecimento, caracterizando a evolução do limite de escoamento.

2.2.1 Decomposição Aditiva do Tensor de Deformações

Uma das principais características da teoria da plasticidade, em regime de pequenos deslocamentos e pequenas deformações, é o desacoplamento entre os efeitos elástico e plástico, obtido através da decomposição do tensor de deformações totais, $\boldsymbol{\varepsilon}$, em uma soma composta por uma parcela elástica (ou reversível), $\boldsymbol{\varepsilon}^e$, e uma parcela plástica (ou permanente), $\boldsymbol{\varepsilon}^p$, dada por

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (2.1)$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ é o tensor de deformações elásticas e $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ o tensor de deformações plásticas. As taxas correspondentes aos tensores de deformação, na forma da decomposição aditiva, são dadas por

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \quad (2.2)$$

2.2.2 Energia Potencial Livre e a Lei Elástica

Uma formulação consistente de modelos constitutivos deriva da aplicação do Método do Estado Local (Neto, 1998). O axioma do método do estado local segundo Murakami (2012), considera que um processo não equilibrado pode ser descrito a

partir de seu estado de equilíbrio e conseqüentemente pelo processo de variação de suas variáveis de estado.

Lemaitre (1992) classifica as variáveis de estado em variáveis observáveis e variáveis internas. As variáveis observáveis são aquelas passíveis de medição, como por exemplo a temperatura, T , e a deformação total, $\boldsymbol{\varepsilon}$, e que sempre estão presentes em fenômenos de comportamento elástico e plástico. As variáveis internas estão presentes em fenômenos dissipativos e representam os processos irreversíveis, como por exemplo, o aparecimento de deformações plásticas $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ ou o encruamento.

Para a obtenção da lei constitutiva é preciso admitir a existência de um potencial termodinâmico, função das variáveis de estado. A teoria da plasticidade adota a energia potencial livre, $\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\alpha})$, função das deformações totais, $\boldsymbol{\varepsilon}$, das deformações plásticas, $\boldsymbol{\varepsilon}^p$, e do conjunto de variáveis internas, $\boldsymbol{\alpha}$, associadas ao comportamento plástico do material.

A energia livre é composta por uma parcela de contribuição da energia elástica e por uma contribuição relativa ao comportamento plástico. Sua decomposição é usualmente representada por

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\alpha}) = \psi^e(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) + \psi^p(\boldsymbol{\alpha}) \quad (2.3)$$

Da equação da energia livre pode-se expressar a segunda lei da termodinâmica, que estabelece a irreversibilidade de processos dissipativos, pela inequação de Clausius-Duhem que é dada por

$$\left(\boldsymbol{\sigma} - \bar{\rho} \frac{\partial \psi^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \mathbf{A} * \dot{\boldsymbol{\alpha}} \geq 0 \quad (2.4)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ é a força termodinâmica associada às deformações plásticas, $\bar{\rho}$ é a densidade de massa de referência e

$$\mathbf{A} \equiv \bar{\rho} \frac{\partial \psi^p}{\partial \boldsymbol{\alpha}^e} \quad (2.5)$$

são as forças termodinâmicas associadas ao endurecimento do material. O símbolo $*$ denota um produto adequado entre \mathbf{A} e $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$, definido em função das ordens dos

tensores envolvidos. A inequação 2.4 implica na lei elástica geral sob a forma

$$\boldsymbol{\sigma} = \bar{\rho} \frac{\partial \psi^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \quad (2.6)$$

de tal forma que requer uma dissipação não negativa

$$\Upsilon^p(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\alpha}}) \geq 0 \quad (2.7)$$

onde Υ^p é a chamada função de dissipação plástica e é definida por

$$\Upsilon^p(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\alpha}}) \equiv \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \mathbf{A} * \dot{\boldsymbol{\alpha}} \quad (2.8)$$

A contribuição da energia para um material que apresenta comportamento linear elástico isotrópico é dada por

$$\bar{\rho} \psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbf{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (2.9a)$$

$$= G \boldsymbol{\varepsilon}_d^e : \boldsymbol{\varepsilon}_d^e + \frac{1}{2} K (\boldsymbol{\varepsilon}_v^e)^2 \quad (2.9b)$$

em que \mathbf{D}^e é o tensor elástico isotrópico padrão, G é o módulo de cisalhamento e K o módulo volumétrico. O tensor $\boldsymbol{\varepsilon}_d^e$ é a parcela desviadora do tensor de deformação elástico e $\boldsymbol{\varepsilon}_v^e$ a parcela volumétrica. Portanto,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (2.10a)$$

$$= 2G \boldsymbol{\varepsilon}_d^e + K \boldsymbol{\varepsilon}_v^e \mathbf{I} \quad (2.10b)$$

2.2.3 Critério e Superfície de Escoamento

A definição da superfície de plastificação segundo modelos fenomenológicos é realizada através do uso de um critério de escoamento. Ao longo dos anos muitos critérios foram sendo propostos à medida que se estudavam as diversas classes de materiais. Um critério de plasticidade isotrópico pode, de modo geral, ser formulado segundo um potencial plástico expresso na forma

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) = 0 \quad (2.11)$$

em que o campo escalar Φ é função do tensor das tensões $\boldsymbol{\sigma}$ e das forças termodinâmicas \mathbf{A} .

Um estado de tensão é dito plasticamente admissível quando se apresenta no domínio elástico ou na região limite estabelecida pelo critério de escoamento adotado, $\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) = 0$. Para um estado de tensões no domínio elástico só há a incidência de deformações elásticas, com o escoamento podendo ocorrer no contorno da superfície. O conjunto de equações que representa o domínio plasticamente admissível é

$$\bar{\mathcal{E}} = \{\boldsymbol{\sigma} | \Phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) \leq 0\} \quad (2.12)$$

A região em que o escoamento inicia-se é limitada por uma hipersuperfície no espaço de tensões denominada superfície de escoamento e é definida por

$$\mathcal{Y} = \{\boldsymbol{\sigma} | \Phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) = 0\} \quad (2.13)$$

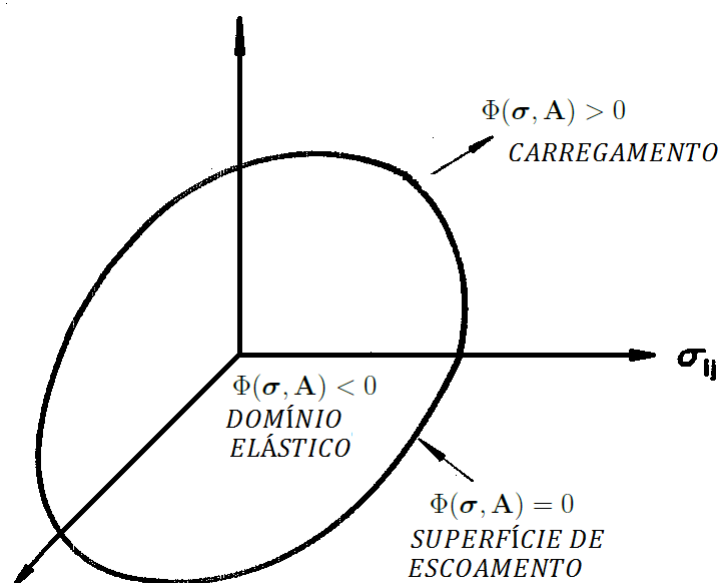


Figura 2.1: Superfície de escoamento no espaço das tensões

A figura 2.1 ilustra esta definição, mostrando o domínio elástico, a superfície

limite de escoamento e o domínio plástico e pode ser resumida da seguinte forma

$$\begin{aligned} \text{se } \Phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) < 0 &\Rightarrow \varepsilon^p = 0, \text{ domínio elástico,} \\ \text{se } \Phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) = 0 &\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon^p = 0, \text{ descarregamento elástico,} \\ \varepsilon^p \neq 0, \text{ carregamento plástico.} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.14)$$

2.2.4 Regra de Fluxo Plástico e Lei de Endurecimento

Os modelos de plasticidade, para que possam estar completamente caracterizados, requerem a definição de uma lei de evolução para as variáveis internas, ou seja, as variáveis que se associam aos fenômenos dissipativos. Aqui, as variáveis internas são representadas pelo tensor de deformações plásticas e pelo conjunto de variáveis inelásticas (associadas ao encruamento), denotado por $\boldsymbol{\alpha}$. A regra de fluxo e a lei de endurecimento podem ser postuladas por

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \mathbf{N} \quad (2.15)$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\lambda} \mathbf{H} \quad (2.16)$$

em que $\dot{\lambda}$ é um escalar denominado multiplicador plástico,

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) \quad (2.17)$$

é o tensor de fluxo e

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) \quad (2.18)$$

é a função que define a evolução das variáveis ligadas ao encruamento. As equações 2.15 e 2.16 são complementadas pelas condições de Kuhn-Tucker para o carregamento e descarregamento e pela condição de consistência,

$$\Phi \leq 0 \quad , \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad \text{e} \quad \Phi \dot{\lambda} = 0, \quad (2.19)$$

responsáveis por definir quando a evolução das deformações plásticas e das variáveis internas podem ocorrer.

A definição da regra de fluxo (e possivelmente a lei de endurecimento) na formulação multidimensional de modelos de plasticidade é feita a partir de um potencial

plástico (ou potencial de fluxo), partindo-se da ideia da existência de um potencial de fluxo com forma geral

$$\psi = \psi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) \quad (2.20)$$

a partir do qual pode-se obter o vetor de fluxo

$$\mathbf{N} \equiv \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.21)$$

e a lei de endurecimento

$$\mathbf{H} \equiv \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{A}} \quad (2.22)$$

2.2.5 Multiplicador Plástico

O multiplicador plástico, $\dot{\lambda}$, apresentado nas equações 2.15, 2.16 e 2.19 é um escalar cujo valor é nulo durante as deformações elásticas e positivo em caso de deformações plásticas, e tem como papel ajustar o tamanho dos incrementos plásticos. Para a determinação da forma explícita de $\dot{\lambda}$ é necessária a consideração de uma condição de complementaridade dada por

$$\dot{\Phi} \dot{\lambda} = 0 \quad (2.23)$$

o que implica na condição de consistência $\Phi = 0$ durante o escoamento plástico. Diferenciando a função de escoamento, obtém-se

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{A}} : \dot{\mathbf{A}} \quad (2.24)$$

Tomando a decomposição aditiva do tensor de deformações, a lei elástica e a lei de evolução (dada pela equação 2.15), pode-se escrever a equação constitutiva para as variações das tensões da seguinte forma

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}^e : (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p) = \mathbf{D}^e : (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\lambda} \mathbf{N}) \quad (2.25)$$

Levando em conta a equação 2.25 em conjunto com a definição de \mathbf{A} em termos da energia potencial livre e a lei de endurecimento (dada pela equação 2.16), a equação

2.24 pode ser reescrita como

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{D}^e : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{A}} * \bar{\rho} \frac{\partial^2 \psi^p}{\partial \boldsymbol{\alpha}^2} * \dot{\boldsymbol{\alpha}} \quad (2.26a)$$

$$= \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{D}^e : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda} \mathbf{N}) + \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{A}} * \bar{\rho} \frac{\partial^2 \psi^p}{\partial \boldsymbol{\alpha}^2} * \mathbf{H} \quad (2.26b)$$

A equação 2.26 juntamente com a condição de consistência permite escrever uma forma explícita do multiplicador plástico, dada por

$$\dot{\lambda} = \frac{\partial \Phi / \partial \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\partial \Phi / \partial \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^e : \mathbf{N} - \partial \Phi / \partial \mathbf{A} * \bar{\rho} \partial^2 \psi^p / \partial \boldsymbol{\alpha}^2 * \mathbf{H}} \quad (2.27)$$

2.2.6 Operador Tangente Elastoplástico

No regime elástico, os incrementos de tensão são descritos por

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}^e : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda} \mathbf{N}) \quad (2.28)$$

A relação de variação correspondente à existência de fluxo plástico pode ser obtida substituindo o incremento infinitesimal do multiplicador plástico (equação 2.27) na equação 2.25. Assim, obtém-se

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}^{ep} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.29)$$

onde \mathbf{D}^{ep} é o operador elastoplástico tangente, definido por

$$\mathbf{D}^{ep} = \mathbf{D}^e - \frac{(\mathbf{D}^e : \mathbf{N}) \otimes (\mathbf{D}^e : \partial \Phi / \partial \boldsymbol{\sigma})}{\partial \Phi / \partial \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^e : \mathbf{N} - \partial \Phi / \partial \mathbf{A} * \bar{\rho} \partial^2 \psi^p / \partial \boldsymbol{\alpha}^2 * \mathbf{H}} \quad (2.30)$$

A expressão acima é obtida fazendo-se uso da simetria do tensor elástico, \mathbf{D}^e . Isto implica que

$$\partial \Phi / \partial \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{D}^e : \partial \Phi / \partial \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.31)$$

Em plasticidade computacional, \mathbf{D}^{ep} é denominado operador tangente elastoplástico contínuo ou operador tangente numericamente consistente, e é responsável por relacionar os incrementos de tensão e deformação, no entanto, para o caso de grandes deformações, o seu uso não garante convergência quadrática na resolução dos métodos incrementais iterativos. Uma maneira de se obter taxas de convergência quadrática é substituindo o operador tangente elastoplástico pelo operador tangente consistente.

2.3 Critérios de Escoamento

Na seção 2.2.3 o critério de escoamento foi apresentado na sua forma geral como uma função, escrita em termos das tensões, que delimita uma região dentro da qual o material tem comportamento puramente elástico, além de prever como o material se comporta na ocorrência de deformação plástica, associada ao fenômeno de encruamento do material, ou seja, à possibilidade de haver aumento da tensão de escoamento acompanhando a evolução das deformações inelásticas.

Uma variedade de modelos constitutivos foi então proposta com o objetivo de reproduzir matematicamente as relações tensão-deformação do material para diferentes condições de carga. Alguns dos critérios de escoamento mais relevantes utilizados na prática da engenharia serão descritos detalhadamente a seguir.

2.3.1 Tresca

Este critério, também conhecido por critério da máxima tensão de cisalhamento, foi proposto por Tresca para descrever o escoamento plástico em metais e define que o escoamento tenha início quando a máxima tensão de cisalhamento atinge um valor crítico. A função de escoamento associada a Tresca pode ser representada por:

$$\Phi = [\sigma_{\text{máx}} - \sigma_{\text{min}}] - \sigma_y \quad (2.32)$$

Onde:

$$\sigma_{\text{máx}} = \text{máx}[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]$$

$$\sigma_{\text{min}} = \text{min}[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]$$

em que $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ são os valores das tensões principais e σ_y é a tensão de escoamento uniaxial, sendo igual a duas vezes a tensão limite de cisalhamento, τ_y :

$$\sigma_y = 2\tau_y = \frac{1}{2}(\sigma_{\text{máx}} - \sigma_{\text{min}}) \quad (2.33)$$

A superfície de escoamento descrita pelo critério de Tresca representa a superfície lateral de um prisma de seção hexagonal e está ilustrada na figura 2.2.

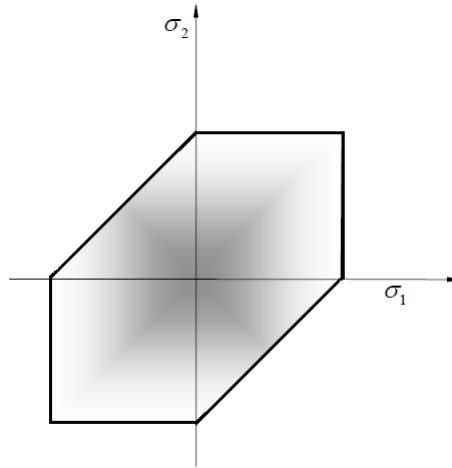


Figura 2.2: Superfície descrita pelo critério de Tresca

O critério de Tresca é um critério isotrópico (assim como os critérios de von Mises, Drucker-Prager e Mohr-Coulomb que serão descritos mais adiante) e por isso pode ser descrito em termos dos invariantes do tensor de tensões.

O critério de Tresca pode ser escrito em função do segundo invariante do tensor desviador ou tensor anti-esférico, $J_2 = J_2(\mathbf{s})$, e do ângulo de carregamento, θ . Conforme proposto por Nayak e Zienkiewicz (1972) e visto em Owen e Hinton (1980), Sloan e Booker (1986) e Souza Neto et al. (2008) a função de escoamento assume o formato

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = 2\sqrt{J_2} \cos \theta - \sigma_y \quad (2.34)$$

em que

$$J_2 = -I_2(\mathbf{s}) = \frac{1}{2} \text{tr}[\mathbf{s}^2] = \frac{1}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s} = \|\mathbf{s}\|^2 \quad (2.35)$$

e o tensor anti-esférico é

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}(\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}))I \quad (2.36)$$

onde $\|\mathbf{s}\| = \sqrt{\mathbf{s} : \mathbf{s}}$ e I é o tensor identidade.

O ângulo de carregamento é definido como uma função do segundo e terceiro

invariantes do tensor anti-esférico

$$\theta = \frac{1}{3} \operatorname{sen} \left(\frac{-3\sqrt{3}J_3}{2J_2^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (2.37a)$$

$$-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6} \quad (2.37b)$$

onde

$$J_3 = I_3(\mathbf{s}) = \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\mathbf{s}) \quad (2.38)$$

No espaço de tensões desviadoras, o ângulo de carregamento pode ser descrito graficamente como o ângulo entre s e a linha de cisalhamento puro mais próximo (como pode-se observar na figura 2.3).

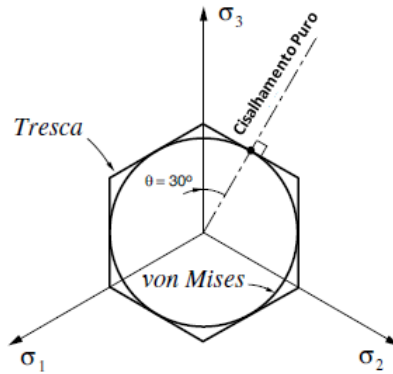


Figura 2.3: Superfícies de escoamento para os critérios de Tresca e von Mises coincidindo no cisalhamento puro (Souza Neto et al., 2008).

Outro aspecto importante do critério de Tresca é o fato dele ser insensível à pressão hidrostática. Esta propriedade é particularmente relevante na modelagem de metais, pois para estes materiais a influência da pressão hidrostática sobre o escoamento é geralmente insignificante na prática.

2.3.2 Von Mises

O critério proposto por von Mises em 1913 também é apropriado para a descrição do escoamento plástico em metais e materiais que não dependam da pressão

hidrostática. Esse critério estabelece que a plastificação tem início quando é atingido o valor crítico da energia de distorção por unidade de volume. Este pressuposto equivale a considerar que o segundo invariante do tensor desviador, J_2 , atinge um valor crítico. A representação matemática do critério é dada por

$$J_2(\mathbf{s}(\boldsymbol{\sigma})) = R(\boldsymbol{\alpha}) \quad (2.39)$$

em que o valor crítico assumido como R é uma função das variáveis internas de encruamento $\boldsymbol{\alpha}$. O critério de von Mises também pode ser definido por:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{3J_2(\mathbf{s}(\boldsymbol{\sigma}))} - \sigma_y \quad (2.40)$$

A representação gráfica do critério de von Mises é apresentada na figura 2.4.

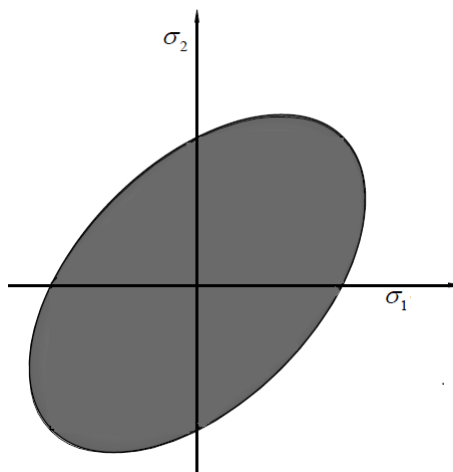


Figura 2.4: Superfície descrita pelo critério de Von Mises

Na figura 2.5-a está ilustrada uma representação plana da superposição dos critérios de Tresca e von Mises. A figura 2.5-b ilustra as superfícies de escoamento no espaço de tensões de Haigh-Westergaard e mostra que o prisma está inscrito no cilindro, caracterizando o critério de Tresca como sendo mais conservador que o de von Mises.

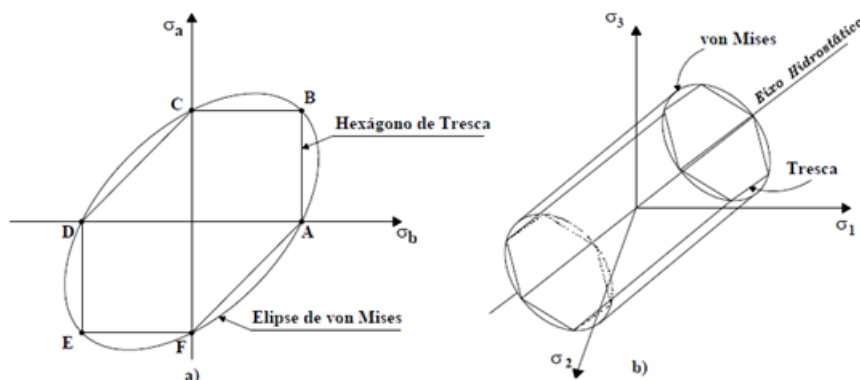


Figura 2.5: a) Superfícies de escoamento de Tresca e von Mises no plano b) Superfícies de escoamento de Tresca e von Mises no espaço de tensões de Haigh-Westergaard (Pockszevnicki, 2004).

2.3.3 Rankine

Os critérios até então apresentados são bastante adequados para a descrição de metais, no entanto, não são apropriados para descrever materiais parcialmente frágeis, tais como, solos, rochas, concreto, entre outros. Para tanto, é necessária a utilização de outros critérios cujo comportamento seja sensível à pressão hidrostática, sendo capazes de diferenciar tração de compressão.

O critério da máxima tensão de tração de Rankine, datado em 1876, é geralmente utilizado para determinar se um material frágil falha por tração. De acordo com este critério, a falha ocorre quando a tensão principal máxima em um ponto no interior do material atinge um valor igual ao da resistência à tração encontrada num teste de tração simples, independentemente das tensões normais ou de cisalhamento que atuam em outros planos através deste ponto. A equação para a superfície de ruptura definida por este critério é:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = 2\sqrt{3J_2} \cos \theta + I_1 - 3\sigma_y = 0 \quad (2.41)$$

onde I_1 é o primeiro invariante do tensor de tensões, J_2 é o segundo invariante do tensor desviador e θ é o ângulo de carregamento. O critério de Rankine está

gráficamente ilustrado na figura 2.6.

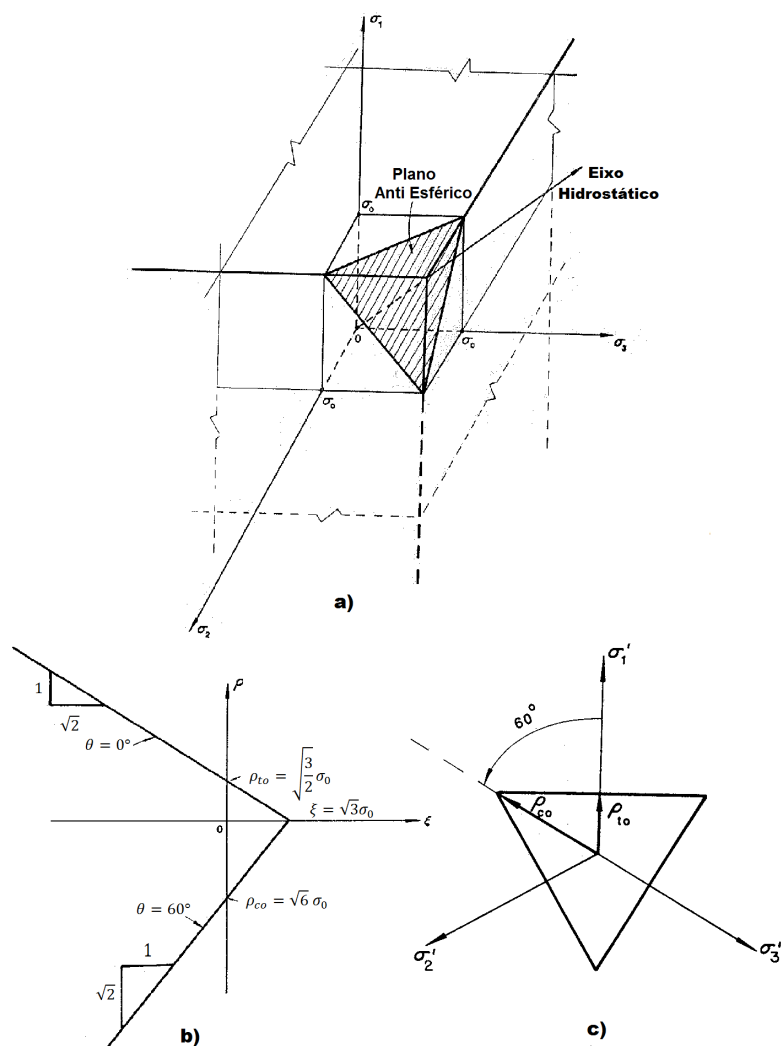


Figura 2.6: Critério de Rankine: a) Seção Transversal; b) Seção Meridiana ($\theta = 0$); c) Plano π (Chen e Han, 2007).

Sabe-se que alguns materiais não metálicos, tais como concreto, rochas e solos, têm uma boa resistência à compressão. Quando confinados e submetidos à compressão, este tipo de material pode apresentar um comportamento dúctil com uma resistência à tração muito baixa. Assim, de acordo com Chen e Han (2007), para obtenção de um comportamento de falha mais próximo do real, o critério de Rankine pode ser combinado com o de Tresca ou o de von Mises. A literatura refere-se aos

critérios combinados como critério de Tresca e critério de von Mises com limitador de tração, e as suas representações gráficas consistem em duas superfícies, o que corresponde a um comportamento combinado de tração e compressão nas superfícies de falha, como mostrado na figura 2.7.

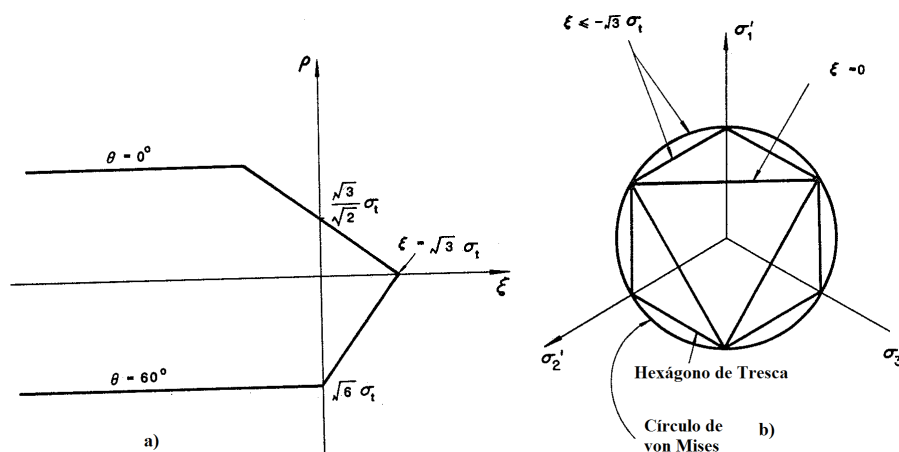


Figura 2.7: Critérios de Tresca e von Mises associados à Rankine: a) Seção meridiana. b) Seção transversal (Chen e Han, 2007).

2.3.4 Mohr-Coulomb

O critério de Mohr-Coulomb é baseado na hipótese de que as deformações plásticas resultam do escorregamento entre as partículas materiais. Generalizando a lei de atrito de Coulomb, estabelece-se que o escoamento plástico inicia quando, num plano do corpo, a tensão limite de cisalhamento, τ , e a tensão normal, σ_n , atingem uma combinação crítica:

$$\tau = c - \sigma_n \operatorname{tg} \phi \quad (2.42)$$

onde c é a coesão e ϕ é o ângulo de atrito interno.

O critério de escoamento pode ser facilmente visualizado na representação plana do círculo de Mohr como mostrado na figura 2.8. A falha do material ocorre quando o círculo de raio maior é tangente à linha crítica definida por $\tau = c - \sigma_n \operatorname{tg} \phi$.

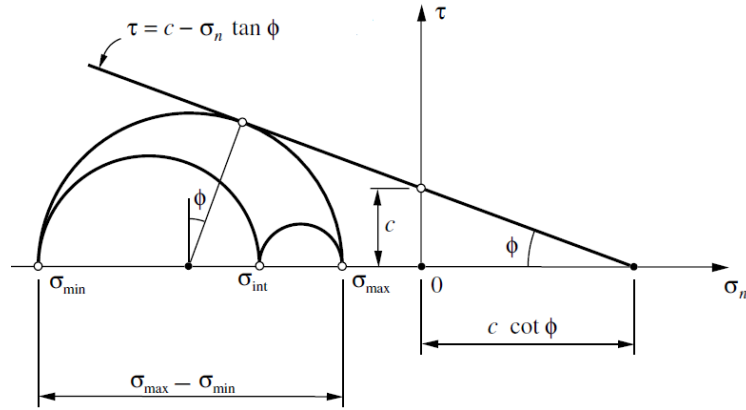


Figura 2.8: Critério de Mohr-Coulomb (Souza Neto et al., 2008).

Relacionando a equação 2.42 com as tensões principais máximas e mínimas, $\sigma_{\text{máx}}$ e σ_{min} , respectivamente, o critério de Mohr-Coulomb pode ser reescrito da seguinte forma

$$\sigma_{\text{máx}} \frac{1 + \text{sen}\phi}{2c \cos\phi} - \sigma_{\text{min}} \frac{1 - \text{sen}\phi}{2c \cos\phi} = 0 \quad (2.43)$$

A forma tridimensional da superfície de ruptura do critério de Mohr-Coulomb é dada pela equação:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, c) = \left(\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{sen}\theta \text{sen}\phi \right) \sqrt{J_2} + p(\boldsymbol{\sigma}) \text{sen}\phi - c \cos\phi \quad (2.44)$$

sendo $p(\boldsymbol{\sigma}) = I_1/3$ a componente da tensão hidrostática. O critério de Tresca pode ser considerado como um caso particular do critério de Mohr-Coulomb, sendo este sensível à pressão hidrostática. Ambos são baseados na hipótese da máxima tensão cisalhante para início do escoamento. Porém, no critério de Tresca a tensão máxima de cisalhamento é dada por uma constante, diferentemente do critério de Mohr-Coulomb, o qual considera a tensão limite de cisalhamento τ_y num plano, função da tensão normal σ_n neste mesmo plano.

A superfície de plasticidade descrita pelo critério de Mohr-Coulomb no espaço de Haigh-Westergaard corresponde a uma pirâmide de base hexagonal, conforme figura 2.9.

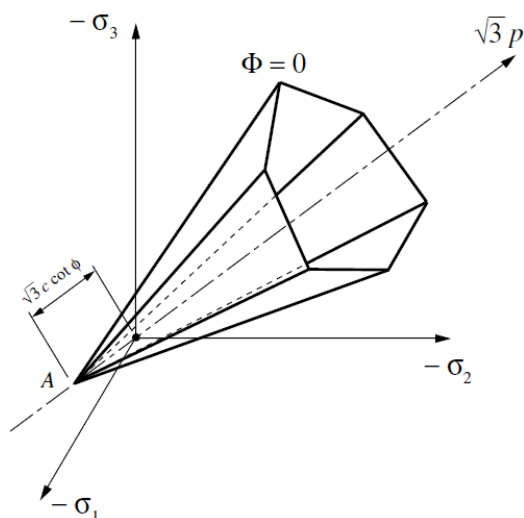


Figura 2.9: Superfície de escoamento de Mohr-Coulomb no espaço de tensões principais (Souza Neto et al., 2008).

Uma vez que não se admite um estado de tensão fora da superfície de escoamento, o topo da pirâmide (ponto A na figura 2.9) define o limite de resistência do material quando solicitado à tração. A superfície de falha de Mohr-Coulomb é conveniente em problemas nos quais fica evidente qual dos seis lados do hexágono será utilizado, pois os vértices podem causar complicações na obtenção de uma solução numérica.

2.3.5 Drucker-Prager

O critério proposto por Drucker-Prager em 1952 é uma generalização do critério de von Mises, consistindo numa modificação do critério, no qual um termo extra é incluído para que o modelo se torne sensível ao efeito da pressão hidrostática. Enquanto o critério de von Mises é interpretado em termos do tensor de tensões octaédrico, o critério de Drucker-Prager impõe que o escoamento plástico ocorre quando o invariante da tensão desviadora J_2 e a tensão hidrostática atingem uma combinação crítica. A função que modela o critério de Drucker-Prager é dada por:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, c) = \sqrt{J_2} + \eta p(\boldsymbol{\sigma}) - k \quad (2.45)$$

sendo η uma constante relacionada ao material e à função k . Para o caso do material sofrer encruamento isotrópico, a função k relaciona-se com a curva tensão-deformação uniaxial (Chen e Han, 2007) e pode ser definida por:

$$k = \left(\eta + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \sigma(\alpha) \quad (2.46)$$

em que σ é uma função das variáveis internas de encruamento α .

A superfície de escoamento no espaço de tensões principais é representada por um cone circular cujo eixo de simetria é o eixo da pressão hidrostática. A superfície de escoamento de Drucker-Prager está ilustrada na figura 2.10.

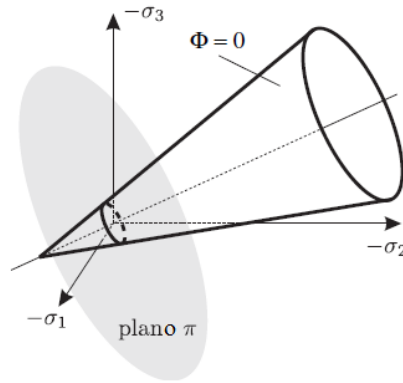


Figura 2.10: Superfície de escoamento de Drucker-Prager no espaço de tensões principais (Kossa, 2011).

O critério de Drucker-Prager pode ser entendido como uma aproximação suave do critério de Mohr-Coulomb, podendo coincidir com o último, através de um ajuste do tamanho do cone obtido a partir do parâmetro η . As superfícies podem coincidir pelo cone de tração (com o cone circunscrevendo a pirâmide hexagonal) com

$$\eta = \frac{6 \text{sen} \phi}{\sqrt{3}(3 - \text{sen} \phi)} \quad (2.47)$$

ou coincidir pelo cone de compressão (caso o cone fique interno à pirâmide) com

$$\eta = \frac{6 \text{sen} \phi}{\sqrt{3}(3 + \text{sen} \phi)} \quad (2.48)$$

O cone interno corresponde ao critério de Mohr-Coulomb em estado de tração uniaxial e compressão biaxial. A aproximação externa coincide com a superfície de

Mohr-Coulomb em compressão uniaxial e tração biaxial. Outra aproximação entre estes critérios bastante utilizada é obtida calibrando os critérios para que possam prever cargas de colapso idênticas em condições de estado plano de deformação, neste caso, tem-se

$$\eta = \frac{3\text{tg}\phi}{\sqrt{9 + 12\text{tg}^2\phi}} \quad (2.49)$$

É importante ressaltar que qualquer uma das aproximações para o critério de Mohr-Coulomb pode fornecer uma descrição pobre do comportamento do material para certos estados de tensão. Assim, de acordo com o estado de tensão dominante em um problema particular a ser analisado, outras aproximações podem ser mais apropriadas.

Na figura 2.11-a está ilustrada uma representação plana da aproximação dos critérios de Mohr-Coulomb e Drucker-Prager. A figura 2.11-b mostra a representação geométrica das superfícies de escoamento de Mohr-Coulomb e Drucker-Prager no espaço de tensões principais.

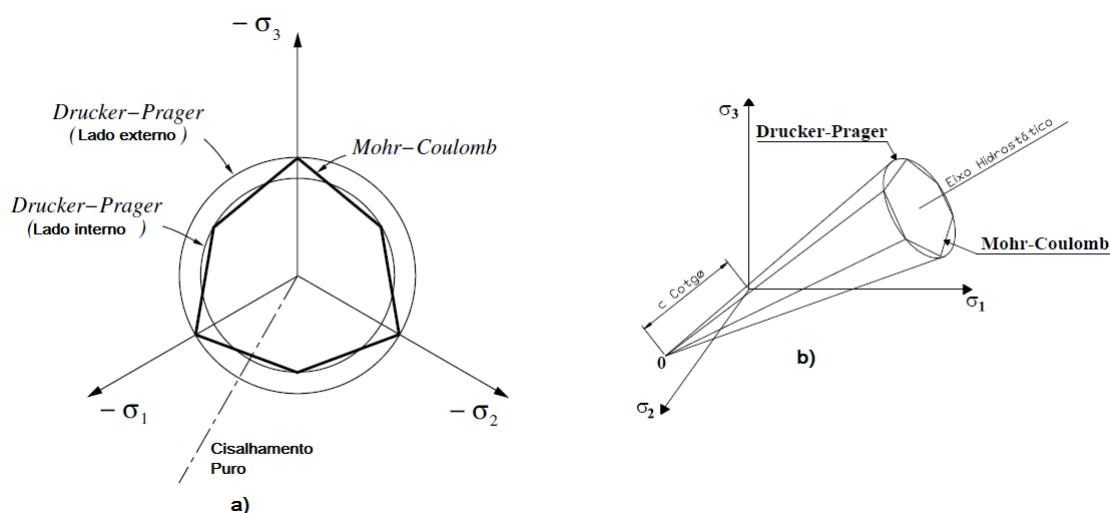


Figura 2.11: a) Superfícies de escoamento de Mohr-Coulomb e aproximações de Drucker-Prager; b) Superfícies de escoamento de Mohr-Coulomb e Drucker-Prager no espaço de Haigh-Westergaard (Pockszevnicki, 2004).

2.4 Modelos Constitutivos Elastoplásticos para o Concreto

A teoria clássica da plasticidade foi originalmente desenvolvida para o estudo dos metais e alguns dos seus fundamentos propostos não são adequados para outros materiais de engenharia, tais como o concreto. No entanto, estes materiais ainda têm algumas semelhanças, particularmente no regime pré-falha. Por exemplo, o concreto exibe um comportamento tensão-deformação não linear durante o carregamento e tem uma deformação irreversível significativa sob descarga. Especialmente quando submetido a cargas compressivas com pressão confinante, o concreto poderá apresentar algum comportamento dúctil. Desta forma, as deformações irreversíveis do concreto são induzidas por microfissuras e podem ser tratadas pela teoria de plasticidade (Chen e Han, 2007).

Um modelo constitutivo adequado para análise de estruturas de concreto requer uma descrição completa do comportamento do material. Conforme pode ser observado na figura 2.12, onde são apresentados os comportamentos de pré-falha (Trecho AC - endurecimento) e de pós-falha (A partir do ponto D - amolecimento).

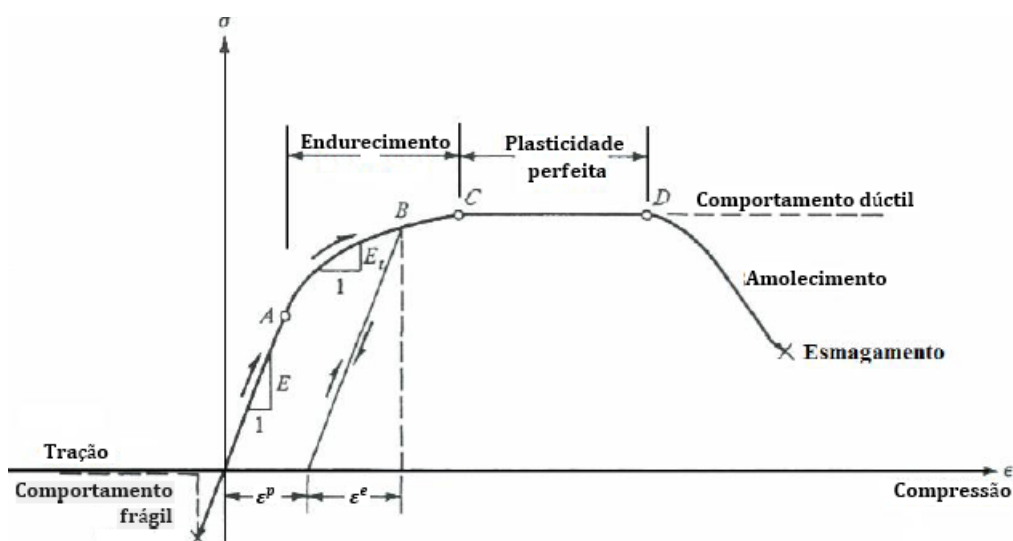


Figura 2.12: Diagrama uniaxial de tensão x deformação, regime de pré e pós-falha (Chen e Han, 1982).

Do ponto de vista macroscópico, a plasticidade clássica pode simular o comportamento do concreto particularmente no regime pré-pico, tais como a não linearidade da curva tensão-deformação e a deformação irreversível após o carregamento. Portanto, a teoria da plasticidade pode ser utilizada na modelagem do comportamento do concreto. Muitos trabalhos foram apresentados por pesquisadores que buscavam adequar a teoria clássica da plasticidade, a fim de obter uma melhor representação para o concreto (Park e Kim, 2005; Grassl e Jirásek, 2006).

Na modelagem de plasticidade do concreto algumas características, como sensibilidade à pressão hidrostática, regra de fluxo não associativa, lei inelástica compatível e limite de resistência à tração, devem ser observadas. Alguns destes modelos possuem alta complexidade matemática tornando-os indesejáveis para muitas aplicações de engenharia, especialmente para a análise e projeto de elementos estruturais simples. A superfície de ruptura do concreto pode ser expressa de maneira geral por:

$$f(I_1, J_2, J_3) = 0 \quad (2.50)$$

onde I_1 , J_2 e J_3 são os invariantes já descritos anteriormente.

A forma explícita da função de falha para o concreto é definida através de dados experimentais, uma vez que os testes de resistência para concreto estão bem documentados na literatura (Chen e Han, 2007). A superfície de ruptura para o concreto deve apresentar as seguintes características :

- (1) é uma superfície suave e convexa, com exceção do seu vértice;
- (2) os meridianos são parabólicos e abrem no sentido do eixo hidrostático negativo;
- (3) a curva de ruptura é aproximadamente triangular para tensões de tração e baixas tensões de compressão, ficando mais circular à medida que as tensões de compressão aumentam.

A figura 2.13 ilustra as características básicas que a superfície de escoamento para o concreto deve apresentar.

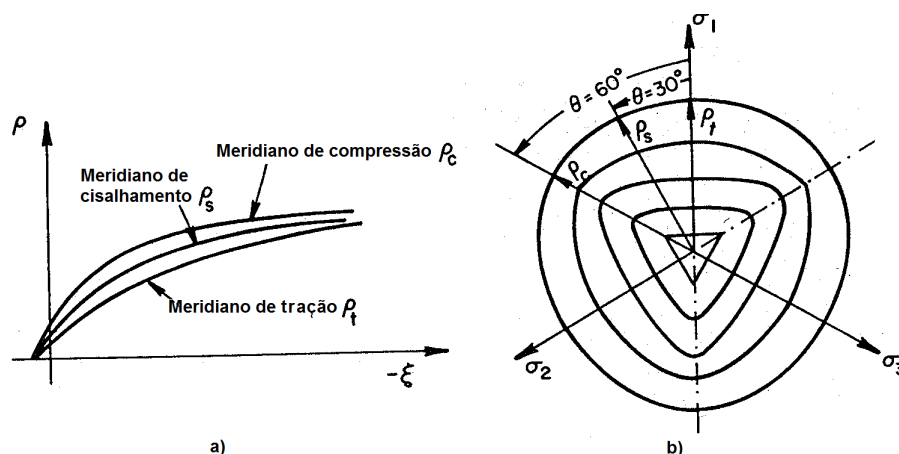


Figura 2.13: a) Meridianos da superfície de falha b) Seções no plano anti-esférico (Chen e Han, 2007).

Os critérios de ruptura para o concreto são classificados de acordo com a quantidade de parâmetros que aparecem nas expressões. Segundo Bono (2008), entre as superfícies de ruptura mais utilizadas para descrição da resistência triaxial do concreto estão as superfícies de cinco parâmetros de Willam-Warnke e de quatro parâmetros de Ottosen (propostas em 1975 e 1977, respectivamente). Além de serem atrativas pela simplicidade e facilidade de aplicação das equações empregadas, os pontos de ruptura determinados por essas superfícies estão muito próximos de resultados experimentais apresentados por Chen e Han (2007).

2.4.1 Ottosen

A superfície de ruptura de quatro parâmetros (α , β , c_1 e c_2) para o concreto, proposta por Ottosen (1980) envolve os invariantes de tensão I_1 , J_2 e o ângulo de carregamento, θ . Sua suavidade, convexidade e seus meridianos curvos que apresentam uma transição gradual entre uma forma quase triangular para quase circular no plano desviador, à medida que a tensão hidrostática aumenta, fazem com que este critério seja apropriado para a simulação de falha em estruturas de concreto (figura 2.14).

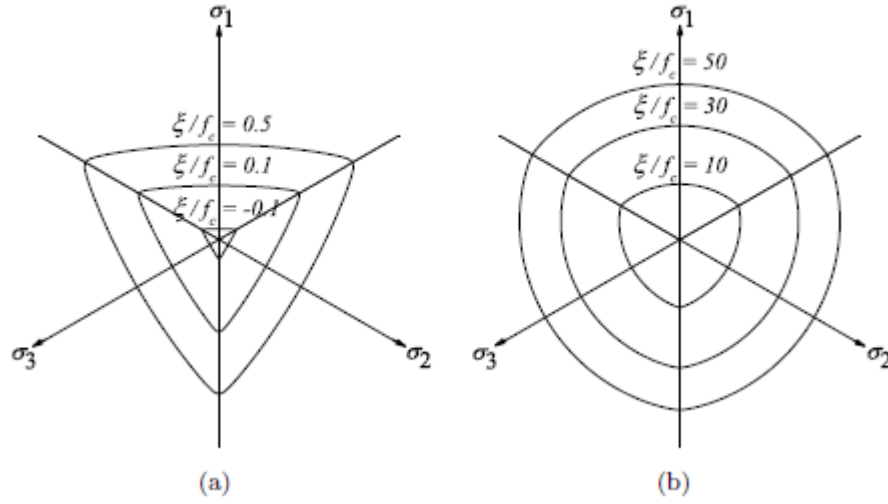


Figura 2.14: Representação do critério de escoamento de Ottosen no plano desviador. a) baixa e b) alta tensão hidrostática (Pereira et al., 2012-a)

A representação matemática do critério de escoamento é dada por

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = \left[\alpha J_2 + \sigma_c \left(\lambda \sqrt{J_2} + \beta I_1 \right) \right]^{\frac{1}{2}} - \sigma_c \quad (2.51)$$

sendo α e β parâmetros do modelo. O parâmetro λ é calculado a partir do invariante θ (definido na equação 2.37a) e de outros dois parâmetros (c_1 e c_2) e é dado por

$$\lambda = \begin{cases} c_1 \cos [\cos^{-1} (c_2 \cos(3\theta)) / 3], & \text{se } \cos(3\theta) \geq 0 \\ c_1 \cos [(\pi - \cos^{-1} (c_2 \cos(3\theta))) / 3], & \text{se } \cos(3\theta) < 0 \end{cases} \quad (2.52)$$

Existem diversas proposições para a determinação dos quatro parâmetros (α , β , c_1 e c_2) do modelo de Ottosen. Três propostas de calibração foram utilizadas neste trabalho, as propostas de Ottosen (1977), do CEB (2010) e de Dahl (1992).

Segundo Ottosen (1977), os quatro parâmetros podem ser determinados com base nos seguintes ensaios:

- (1) f_c - resistência à compressão uniaxial ($\theta = 60^\circ$);
- (2) f_t - resistência à tração uniaxial ($\theta = 0^\circ$);
- (3) $f_{bc} \cong 1,16f_c$ - resistência à compressão biaxial ($\theta = 0^\circ$);

- (4) $(\frac{\varepsilon}{f_c}, \frac{\rho}{f_c}) = (-5, 4)$ - Estado triaxial de tensão no meridiano de compressão
 $(\theta = 60^\circ)$;

Os valores obtidos para os parâmetros a partir destes ensaios dependem da relação das resistências médias à tração e compressão, $k = f_{tm}/f_{cm}$. A Tabela 2.1 apresenta alguns dos valores mais comumente usados a partir desta calibração:

Tabela 2.1: Parâmetros do Material

k	α	β	c_1	c_2
0,08	1,8076	4,0962	14,4863	0,9914
0,10	1,2759	3,1962	11,7365	0,9801
0,12	0,9218	2,5969	9,9110	0,9647

Os parâmetros para valores intermediários de k , podem ser obtidos através de interpolação.

Outra forma de se obter os parâmetros do modelo é através das expressões recomendadas pelo CEB (2010), que também fazem uso da relação $k = f_{tm}/f_{cm}$.

$$\alpha = \frac{1}{9k^{1,4}} \quad (2.53a)$$

$$\beta = \frac{1}{3,7k^{1,1}} \quad (2.53b)$$

$$c_1 = \frac{1}{0,7k^{0,9}} \quad (2.53c)$$

$$c_2 = 1 - 6,8(k - 0,07)^2 \quad (2.53d)$$

Esta calibração permite a obtenção dos parâmetros para quaisquer valores de k de forma automática, desde que os valores de resistência à compressão não ultrapassem os valores estipulados em norma.

A proposta de Dahl (1992) se baseia em sua observação de que as recomendações do CEB (2010) estavam de acordo com os resultados experimentais apenas para concretos de baixa resistência, propondo assim uma forma de se obter os parâmetros

utilizando apenas a resistência à compressão média do concreto f_{cm} .

$$k = \frac{f_{cm}}{100[MPa]} \quad (2.54a)$$

$$\alpha = -1,6k^2 + 3,49k + 0,73 \quad (2.54b)$$

$$\beta = -0,19k^2 + 0,41k + 3,13 \quad (2.54c)$$

$$c_1 = 0,46k^2 - 0,97k + 11,89 \quad (2.54d)$$

$$c_2 = -0,02k^2 + 0,04k + 0,974 \quad (2.54e)$$

2.4.2 Willam-Warnke

O modelo de cinco parâmetros de Willam-Warnke, ilustrado na figura 2.15, apresenta curvas parabólicas para os meridianos de tração e compressão.

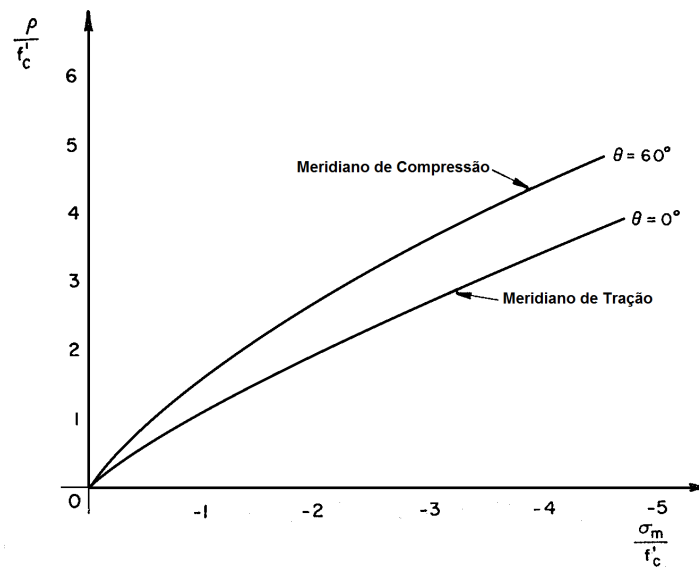


Figura 2.15: Meridianos de tração e compressão para o modelo de Willam-Warnke. Adaptado de Chen e Han (2007)

As equações do critério são definidas por

$$\sigma_m = a_0 + a_1\rho_t + a_2\rho_t^2 \quad (2.55)$$

$$\sigma_m = b_0 + b_1\rho_c + b_2\rho_c^2 \quad (2.56)$$

em que, $\sigma_m = \frac{I_1}{3}$ é a tensão média, ρ_t e ρ_c são as componentes de tensão perpendiculares ao eixo hidrostático para $\theta = 0^\circ$ e $\theta = 60^\circ$, respectivamente, e a_0, a_1, a_2, b_0, b_1 e b_2 são constantes do material. As tensões σ_m, ρ_t e ρ_c apresentadas nas equações 2.55 e 2.56 estão normalizadas por f_c , representando de forma respectiva $\frac{\sigma_m}{f_c}, \frac{\rho_t}{f_c}$ e $\frac{\rho_c}{f_c}$.

Os cinco parâmetros da superfície de William-Warnke podem ser determinados a partir dos seguintes valores na superfície de ruptura:

- (1) f_c - resistência à compressão uniaxial ($\theta = 60^\circ$);
- (2) $f_t = 0,1f_c$ - resistência à tração uniaxial ($\theta = 0^\circ$);
- (3) $f_{bc} \cong 1,15f_c$ - resistência à compressão biaxial ($\theta = 0^\circ$);
- (4) $(\sigma_{mt}, \rho_t) = (-1,95f_c, 2,77f_c)$ - resistência à compressão biaxial confinada com $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$;
- (5) $(\sigma_{mc}, \rho_c) = (-3,9f_c, 3,461f_c)$ - resistência à compressão biaxial confinada com $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$;

Esses parâmetros foram obtidos a partir de ensaios biaxiais e ensaios triaxiais (Chen e Han, 2007). O critério de Willam-Warnke não faz parte dos modelos implementados durante a realização deste trabalho.

2.5 Leis de Encruamento

Em sua tese, Neto (1998) descreve o encruamento como um processo que está fisicamente ligado ao aumento da densidade de discordâncias (defeito geométrico no arranjo atômico). Para muitos materiais reais a tensão limite de escoamento do material é dependente de uma medida de tensão plástica acumulada. No modelo uniaxial, após atingido o escoamento, a curva tensão-deformação continua crescente (em caso de endurecimento) ou decrescente (em caso de amolecimento), provocando

uma variação na tensão de escoamento ao longo do fluxo plástico. Nos modelos de duas e três dimensões, o encruamento é caracterizado por mudanças no conjunto de variáveis internas, α , durante o fluxo plástico. Essas alterações podem, em geral, afetar o tamanho, forma e orientação da superfície de escoamento, definida por $\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}) = 0$.

Dependendo do tipo de material, as curvas tensão deformação podem apresentar formas distintas, sendo conveniente idealizar alguns destes comportamentos. A figura 2.16 ilustra três modelos comumente utilizados na descrição de materiais que apresentam comportamento elastoplástico (Malavolta, 2008).

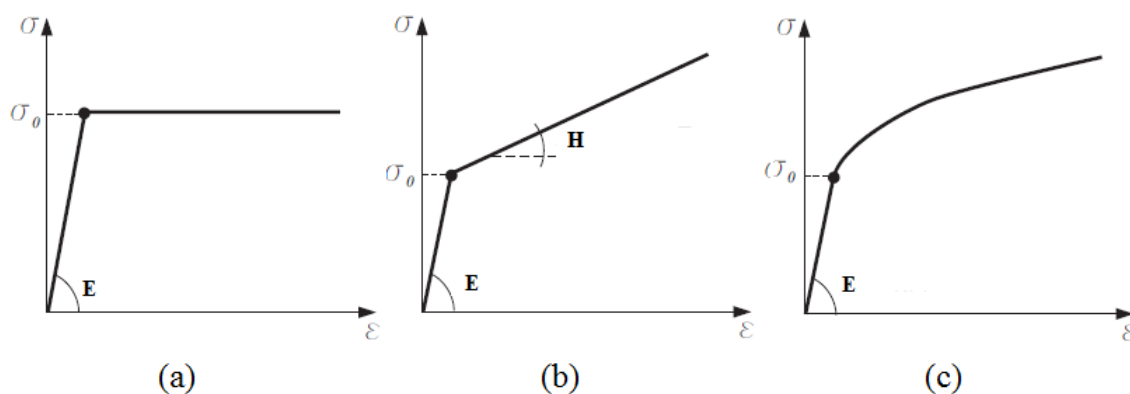


Figura 2.16: a) Plasticidade perfeita b) Modelo Bilinear c) Modelo Não-linear (Malavolta, 2008).

O caso (a) corresponde ao modelo de plasticidade perfeita, com o material apresentando um trecho elástico com módulo de elasticidade E e, após o escoamento, o material permanece com nível de tensão constante enquanto a deformação aumenta. O modelo (b) é denominado elastoplástico bilinear, onde a primeira inclinação corresponde ao ramo elástico e, após atingido o escoamento, inicia-se uma nova reta com inclinação H associada ao encruamento do material, correspondendo ao trecho plástico. O caso (c) representa o modelo elastoplástico não linear, em que uma vez atingido o escoamento, o encruamento passa a ser descrito por uma lei não linear.

2.5.1 Plasticidade Perfeita

Um material é dito ser perfeitamente plástico quando não ocorre endurecimento (ou amolecimento), ou seja, a tensão de escoamento não depende do grau de plasticificação. Neste caso, a superfície de escoamento permanece fixa, independentemente de qualquer processo de deformação que o material possa experimentar. Nos critérios de escoamento descritos anteriormente, a plasticidade perfeita corresponde a um limite de tensão uniaxial constante.

A figura 2.17 apresenta a curva de tensão-deformação para um ciclo de carregamento uniaxial (tração-compressão) com critério de von Mises e plasticidade perfeita. Modelos de plasticidade perfeita são particularmente adequados para a análise de estabilidade das estruturas e dos solos e são amplamente utilizados na prática da engenharia para a determinação de cargas limite e fatores de segurança.

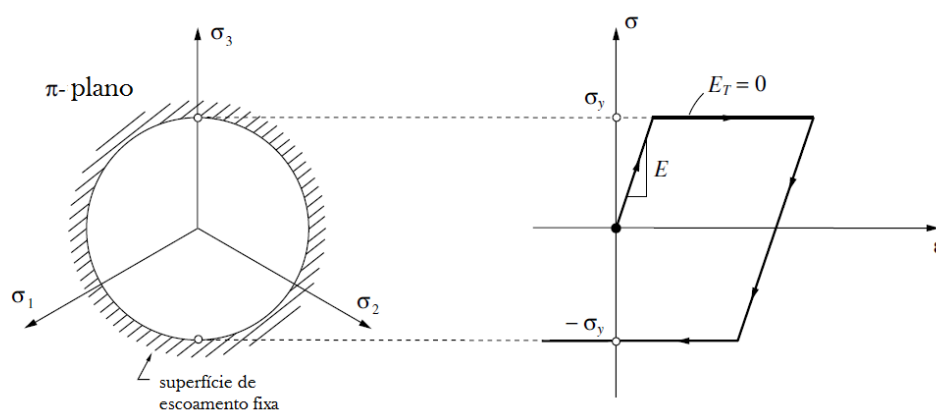


Figura 2.17: Plasticidade Perfeita. Teste uniaxial e representação do plano- π (Souza Neto et al., 2008).

2.5.2 Encruamento Isotrópico

O encruamento isotrópico implica numa expansão uniforme da superfície de plasticidade mantendo-se inalterada a posição do seu centro. Em linhas gerais, a superfície de plasticidade obtida através do incremento de deformação plástica é exclusivamente uma expansão uniforme da superfície inicial, nesse caso, o domínio elástico

expande igualmente em tração ou compressão durante o fluxo plástico. A figura 2.18 ilustra essa expansão da superfície em conjunto com uma curva tensão-deformação típica para um carregamento cíclico uniaxial utilizando um modelo de von Mises com encruamento isotrópico.

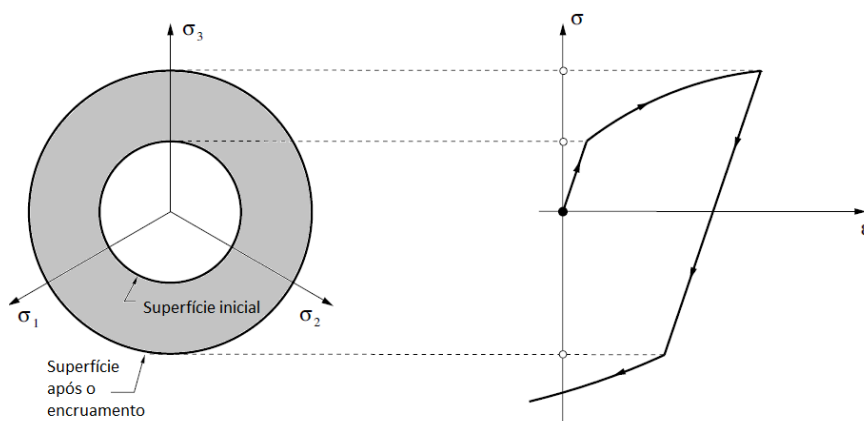


Figura 2.18: Encruamento Isotrópico (Souza Neto et al., 2008).

A escolha de um conjunto adequado de variáveis internas associadas ao encruamento (α) depende das características específicas do material a ser considerado. Em plasticidade de metais, por exemplo, essa variável interna está intrinsecamente relacionada com a densidade de deslocamentos na microestrutura cristalográfica, provocando um aumento na resistência isotrópica para o fluxo plástico. Na modelagem constitutiva do encruamento isotrópico, o conjunto α , normalmente contém uma única variável escalar, que determina o tamanho da superfície de escoamento. Segundo Simo e Hughes (1998), a formulação de uma superfície de escoamento com uma lei de encruamento isotrópico é dada então por

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) = |\boldsymbol{\sigma}| - (\sigma_y + H\alpha) \leq 0, \alpha \geq 0 \quad (2.57)$$

H é o módulo plástico e α é função do fluxo plástico acumulado. $\sigma_y > 0$ e $H > 0$ são constantes conhecidas.

2.5.3 Encruamento Cinemático

A regra de encruamento cinemático assume que a superfície de escoamento mantém sua forma e tamanho inalterados, enquanto é transladada no espaço de tensões como um corpo rígido durante o processo de deformação plástica. Este comportamento pode ser verificado em experimentos onde o material, após ter sido carregado (e atingido o limite de escoamento) em uma direção (por exemplo, tração), sofre na direção oposta (ou seja, compressão) uma diminuição da resistência ao escoamento (Lemaitre e Chaboche, 1990). Segundo Yan (2004), o fenômeno em que ocorre a diminuição da tensão de escoamento durante o carregamento no sentido inverso é conhecido como efeito Bauschinger.

A figura 2.19 ilustra o conceito do encruamento cinemático com o modelo de von Mises. O material é submetido a um carregamento cíclico uniaxial e a ocorrência do efeito Bauschinger fica evidente no gráfico de tensão-deformação.

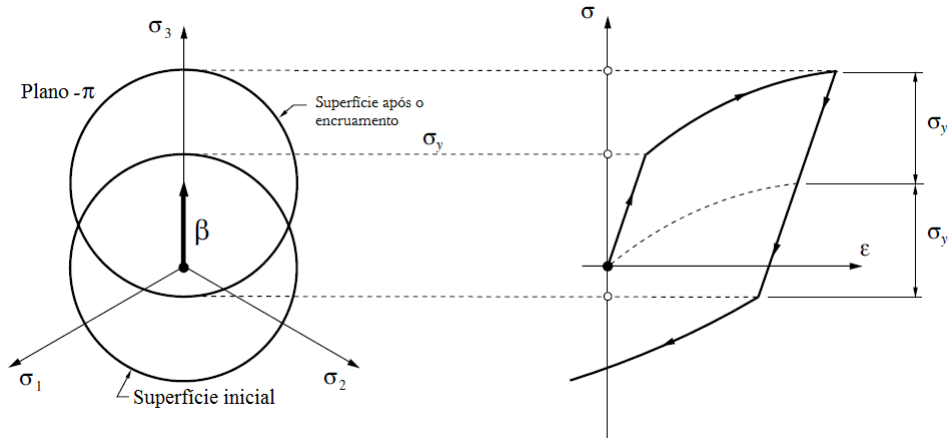


Figura 2.19: Encruamento Cinemático (Souza Neto et al., 2008).

A superfície de plasticidade, com lei de encruamento cinemático para um material de von Mises pode ser modelada pela função

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta}) = \sqrt{3J_2(\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta}))} - \sigma_y, \quad (2.58)$$

onde o tensor de tensões $\boldsymbol{\eta}$, dado por

$$\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta}) = s(\boldsymbol{\sigma}) - \boldsymbol{\beta} \quad (2.59)$$

é definido como sendo a diferença entre o tensor desviador e o tensor de tensões $\boldsymbol{\beta}$, conhecido como “*back-stress*” e cuja lei de evolução é dada por

$$\boldsymbol{\beta} = K \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \quad (2.60)$$

onde K é o módulo de encruamento cinemático e $\boldsymbol{\beta}$ é o tensor relativo às variáveis termodinâmicas associadas ao encruamento cinemático e representa a evolução da posição do centro (Figura 2.19) da superfície de plasticidade no espaço de tensões. Quando $\boldsymbol{\beta} = 0$ tem-se $\boldsymbol{\eta} = s$, e a superfície de escoamento definida por $\Phi = 0$ é a de von Mises com encruamento isotrópico e tensão de escoamento σ_y .

Conforme Souza Neto et al. (2008), é importante observar que a função de escoamento dada pela equação 2.58 é uma função isotrópica do tensor de tensões relativas, $\boldsymbol{\eta}$. Analogamente a este processo, é possível introduzir o encruamento cinemático em outros modelos de plasticidade, substituindo $\boldsymbol{\sigma}$ por uma medida de tensão relativa, obtida pela diferença $\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\beta}$, na definição da função de escoamento correspondente.

2.5.4 Encruamento Misto

A maioria dos materiais não apresentam encruamento puramente isotrópico ou puramente cinemático, mas sim uma combinação de ambos, o que resulta numa lei de encruamento misto, permitindo uma maior generalização do seu comportamento (Grilo, 2011), ou seja, sob deformação plástica, a superfície do escoamento expande/encolhe e translada simultaneamente. A expressão da condição de escoamento para encruamento misto pode ser dada por

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) = |\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\beta}| - (\sigma_y + H\boldsymbol{\alpha}), \quad (2.61)$$

A lei de evolução se mantém inalterada em relação à dada por (2.61). A adição das condições de carregamento/descarregamento e de consistência completam a definição do problema.

A figura 2.20 mostra uma representação esquemática onde fica visível a diferença entre o encruamento misto e os demais tipos de encruamento.

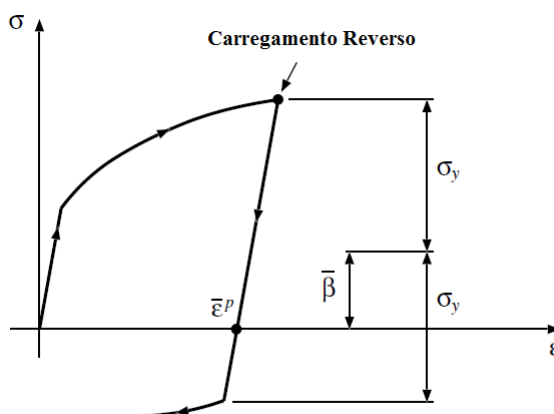


Figura 2.20: Encruamento Misto. Teste uniaxial com carregamento reverso (Souza Neto et al., 2008).

2.6 Algoritmo para Integração das Tensões

O principal problema de uma análise elastoplástica reside na determinação isolada das parcelas elástica e plástica do incremento de deformação total, resultando na necessidade de se realizar a integração da lei constitutiva, devido ao fato do módulo elastoplástico ser função da deformação plástica, decorrendo assim um processo iterativo.

Pelo caráter incremental dos modelos numéricos de plasticidade, deve-se utilizar um algoritmo da classe de mapeamento de retorno capaz de obter a atualização das tensões necessária ao equilíbrio das forças internas na análise não linear.

Em seu trabalho, Ortiz e Popov (1985) apontam três requisitos básicos que algoritmos eficientes devem preencher:

- (1) garantir a consistência das equações constitutivas a serem integradas;
- (2) possuir estabilidade numérica;
- (3) e garantir a consistência do modelo incremental .

A escolha de um algoritmo impróprio pode levar não só a uma solução imprecisa para as tensões, como também pode atrasar a convergência das iterações de equilíbrio ou até mesmo levar à divergência da iteração.

Existe uma grande variedade de métodos de integração, com diferentes níveis de complexidade (Taqieddin, 2008). Entretanto, algumas das principais estratégias de integração se agrupam em duas abordagens denominadas métodos de integração explícitos (“*forward Euler*”) e métodos de integração implícitos (“*backward Euler*”).

A integração numérica explícita recebe este nome, porque utiliza um estado de tensão conhecido (obtido na iteração anterior) para a determinação dos parâmetros de deformação, diferente do método de integração implícita, que trabalha com um estado de tensão referente ao final do processo incremental (portanto ainda desconhecido).

O objetivo aqui é apresentar algoritmos precisos e eficientes para a integração das relações constitutivas que regem o comportamento do material, no contexto de plasticidade computacional. O método da projeção do ponto mais próximo (“*closest-point projection*”) e o método do plano de corte (“*cutting-plane*”) serão descritos mais detalhadamente conforme apresentado em Simo e Hughes (1998).

2.6.1 Método da Projeção do Ponto Mais Próximo (“*Closest-Point Projection*”)

Do ponto de vista físico, o algoritmo “*Closest-Point Projection*” é um processo implícito sistemático, que considera um resíduo de fluxo plástico para garantir que a função de escoamento no passo atual “ $n+1$ ” seja igual a zero. Conceitualmente, a ideia do algoritmo é bastante simples e consiste numa aplicação sistemática do método de Newton para o sistema dado pelas equações (2.62), que resulta no cálculo da projeção a partir do ponto mais próximo de um estado de tensão de tentativa sobre a superfície de escoamento. O algoritmo é explicado abaixo em um contexto generalizado utilizando as notações propostas por Simo e Hughes (1998).

(1) Supor a existência de um carregamento plástico, isto é, $f_{n+1}^{trial} > 0$, de modo que o multiplicador plástico, λ , seja maior que zero. Definir o fluxo plástico residual \mathbf{R}_{n+1} e a condição de escoamento.

$$\mathbf{R}_{n+1}^{(k)} := \begin{Bmatrix} -\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p(k)} + \boldsymbol{\varepsilon}_n^p \\ -\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(k)} + \boldsymbol{\alpha}_n \end{Bmatrix} + \Delta\lambda_{n+1}^{(k)} \begin{Bmatrix} \partial_{\boldsymbol{\sigma}} f_{n+1} \\ \partial_{\mathbf{q}} f_{n+1} \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad f_{n+1}^{(k)} := f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)}, \mathbf{q}_{n+1}^{(k)}) \quad (2.62)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)} := \nabla W(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p(k)})$, $\mathbf{q}_{n+1}^{(k)} := -\nabla H(\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(k)})$ e W representa a energia elástica acumulada.

(2) Calcular o módulo elástico e o módulo tangente consistente:

$$\mathbf{C}_{n+1}^{(k)} = \nabla^2 W(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p(k)}) \quad \text{e} \quad \mathbf{D}_{n+1}^{(k)} := -\nabla^2 H(\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(k)}) \quad (2.63)$$

$$[\mathbf{A}_{n+1}^{(k)}]^{-1} = \begin{bmatrix} [\mathbf{C}_{n+1}^{(-1)} + \Delta\lambda_n + 1\partial_{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}}^2 f_{n+1}] & \Delta\lambda_n + 1\partial_{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{q}}^2 f_{n+1} \\ \Delta\lambda_{n+1}\partial_{\mathbf{q}\boldsymbol{\sigma}}^2 f_{n+1} & [\mathbf{D}_{n+1}^{(-1)} + \Delta\lambda_{n+1}\partial_{\mathbf{q}\mathbf{q}}^2 f_{n+1}] \end{bmatrix}^k \quad (2.64)$$

onde $[\mathbf{A}_{n+1}^{(k)}]^{-1}$ é uma matriz cujos argumentos referem-se aos módulos elástico e tangente, \mathbf{C} é a matriz de rigidez e \mathbf{D} a matriz de flexibilidade.

(3) Obter incrementos dos parâmetros consistentes

$$\Delta^2\lambda_{n+1}^{(k)} = \frac{f_{n+1}^{(k)} - [\partial_{\boldsymbol{\sigma}} f_{n+1} \partial_{\mathbf{q}} f_{n+1}]^T \mathbf{A}_{n+1}^{(k)} \mathbf{R}_{n+1}^{(k)}}{[\partial_{\boldsymbol{\sigma}} f_{n+1} \partial_{\mathbf{q}} f_{n+1}]^T \mathbf{A}_{n+1}^{(k)} \begin{Bmatrix} \partial_{\boldsymbol{\sigma}} f_{n+1} \\ \partial_{\mathbf{q}} f_{n+1} \end{Bmatrix}^k} \quad (2.65)$$

(4) Obter incrementos da deformação plástica e das variáveis internas

$$\begin{Bmatrix} \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p(k)} \\ \Delta\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{C}_{n+1}^{(-1)} + \Delta\lambda_{n+1}\partial_{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}}^2 f_{n+1}] & 0 \\ 0 & [\mathbf{D}_{n+1}^{(-1)} + \Delta\lambda_{n+1}\partial_{\mathbf{q}\mathbf{q}}^2 f_{n+1}] \end{bmatrix}^k \cdot \mathbf{A}_{n+1}^k \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{n+1}^{(k)} + \Delta^2\lambda_{n+1}^{(k)} \begin{Bmatrix} \partial_{\boldsymbol{\sigma}} f_{n+1} \\ \partial_{\mathbf{q}} f_{n+1} \end{Bmatrix}^k \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

(5) Atualizar as variáveis de estado e os parâmetros consistentes

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p(k+1)} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^{p(k)} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p(k)} \quad (2.67a)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{p(k+1)} = \boldsymbol{\alpha}_n^{p(k)} + \Delta\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{p(k)} \quad (2.67b)$$

$$\Delta\lambda_{n+1}^{p(k+1)} = \Delta\lambda_n^{p(k)} + \Delta^2\lambda_{n+1}^{p(k)} \quad (2.67c)$$

A principal desvantagem associada ao processo iterativo descrito é a necessidade de se computar os gradientes da regra de fluxo e da lei de encruamento, dados pela equação 2.68, pois esta tarefa pode ser extremamente trabalhosa para modelos de plasticidade mais complexos.

$$\begin{bmatrix} \partial_{\sigma\sigma}^2 f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) & \partial_{\sigma\mathbf{q}}^2 f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \\ \partial_{\mathbf{q}\sigma}^2 f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) & \partial_{\mathbf{q}\mathbf{q}}^2 f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

A interpretação geométrica do regime de iteração está representado na figura 2.21.

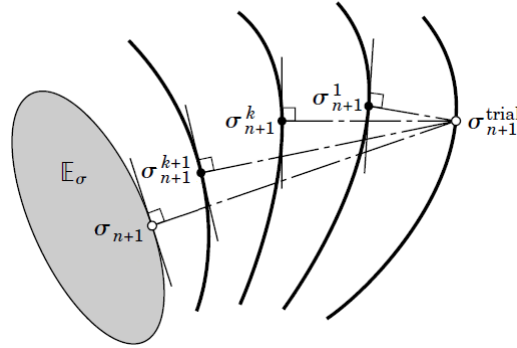


Figura 2.21: Interpretação geométrica do algoritmo da projeção do ponto mais próximo. Em cada iteração $(\bullet)^k$ as restrições são linearizadas de forma a interceptar $f = 0$. A próxima iteração $(\bullet)^{k+1}$, situada no nível $f_{n+1}^{k+1} > 0$, é um ponto mais próximo do que o nível definido para a iteração anterior $(\bullet)^k$ (Simo e Hughes, 1998).

2.6.2 Método do Plano de Corte (“*Cutting-Plane*”)

O método “*Cutting-Plane*”, analisado em Ortiz e Simo (1986), é um processo explícito, que integra primeiro as equações elásticas, a partir da tensão no passo anterior, para obter a tensão de tentativa para o passo atual. O principal objetivo deste algoritmo é ignorar a necessidade de computar os gradientes contidos na equação (2.68). O caso geral deste esquema envolve as seguintes etapas:

(1) supor a existência de um carregamento plástico, isto é, $f_{n+1}^{trial} > 0$, de modo que $\lambda > 0$. Definir o fluxo plástico residual R_{n+1} e a condição de escoamento.

$$f_{n+1}^{(k)} := f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)}, \mathbf{q}_{n+1}^{(k)}) \quad (2.69)$$

(2) obter incrementos dos parâmetros consistentes

$$\Delta^2 \lambda_{n+1}^{(k)} = \frac{f_{n+1}^{(k)}}{[\partial \boldsymbol{\sigma} f_{n+1} : \mathbf{C}_{n+1}^k : \partial \boldsymbol{\sigma} f_{n+1}^k + \partial \boldsymbol{\sigma} f_{n+1}^k \cdot \mathbf{h}_{n+1}^k]} \quad (2.70)$$

(3) atualizar as variáveis de estado e os parâmetros consistentes.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p(k+1)} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^{p(k)} + \Delta^2 \lambda_{n+1}^{(k)} \partial \boldsymbol{\sigma} f_{n+1}^k \quad (2.71a)$$

$$\mathbf{q}_{n+1}^{(k+1)} = \mathbf{q}_{n+1}^{(k)} + \Delta^2 \lambda_{n+1}^{(k)} \mathbf{h}_{n+1}^k \quad (2.71b)$$

$$\Delta \lambda_{n+1}^{(k+1)} = \Delta \lambda_{n+1}^{(k)} + \Delta^2 \lambda_{n+1}^{(k)} \quad (2.71c)$$

A convergência do algoritmo para o valor final das variáveis de estado é obtida a uma taxa quadrática. Essas taxas quadráticas de convergência são alcançadas aqui apesar da simplicidade apresentada pelo método, o que acabam tornando o algoritmo de plano de corte muito atraente para os cálculos de grande escala em modelos mais elaborados, principalmente nos códigos explícitos, que não requerem a solução de um sistema global de equações de equilíbrio. A interpretação geométrica do algoritmo é ilustrada na figura 2.22.

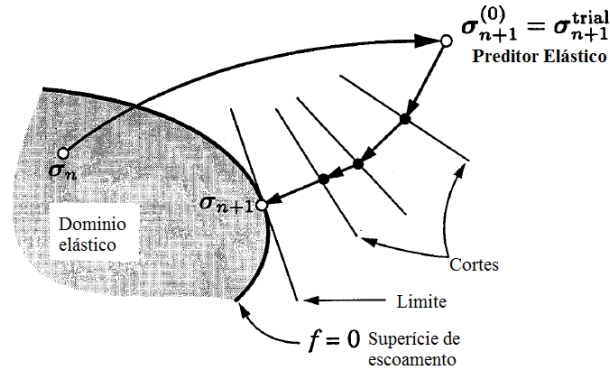


Figura 2.22: Interpretação geométrica do algoritmo do plano de corte. Em cada iteração $(\bullet)^k$ a restrição sobre $(\bullet)^k$ é linear. A interseção do plano normal $f^{(k)} = 0$ com o próximo nível $f^{(k+1)}$ determina a próxima iteração $(\bullet)^{k+1}$ (Simo e Hughes, 1998).

2.6.3 Operador Tangente Consistente

Para se obter a taxa de convergência quadrática durante a aplicação do método de Newton-Raphson na solução de algoritmos como o “*Closest-Point-Projection*”,

um passo crucial é utilizar o tensor tangente consistente (Simo e Hughes, 1998). O conceito de módulo tangente consistente foi formalizado por Simo e Taylor (1985) e, posteriormente, rerepresentado por diversos autores.

O procedimento para se obter o tensor constitutivo tangente envolve o cálculo da derivada da tensão $\boldsymbol{\sigma}_n$ relacionada à deformação final, ε_{n+1} . Por esta razão, as derivadas de todas as variáveis internas que aparecem no procedimento de atualização de tensão correspondente têm que ser avaliadas (Szabó e Kossa, 2012). O módulo tangente consistente é definido como

$$E_{ep_{n+1}}^{(k)} = \frac{\partial \sigma_{n+1}^{(k)}}{\partial \varepsilon_{n+1}^{(k)}} \quad (2.72)$$

Como já discutido anteriormente, cada modelo tem suas particularidades e pode conter tantas variáveis quanto necessário para a descrição adequada do comportamento do material e, dependendo do modelo, tais variáveis podem ser escalares, vetoriais ou tensoriais (Souza Neto et al., 2008).

Capítulo 3

FORMULAÇÃO DOS MODELOS CONSTITUTIVOS

Os modelos constitutivos em geral apresentam uma notação própria e, embora em muitos casos guardem semelhanças, a falta de uma unidade das formulações impede uma implementação computacional genérica e objetiva. O Ambiente Unificado proposto por Penna (2011) apresenta uma expansão da estrutura teórica proposta por Carol et al. (1994), sendo capaz de contemplar vários modelos constitutivos - elastoplásticos ou de degradação elástica; isotrópico, ortotrópico ou anisotrópico - formulados com uma ou várias funções de carregamento.

A seguir, será apresentada a formulação para os modelos constitutivos elastoplásticos seguindo a estrutura teórica proposta. As parcelas necessárias à descrição de cada modelo são explicitadas indicando a correlação entre a forma original e a proposta por este trabalho.

3.1 Formulação Geral para Modelos Constitutivos Elastoplásticos

Segundo Carol et al. (1994), as equações das variações de tensão podem ser escritas como

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}^0(\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\epsilon}_{kl}^p) \quad (3.1)$$

com

$$\dot{\varepsilon}_{kl}^p = \dot{\lambda} m_{kl} \quad (3.2)$$

onde E_{ijkl}^0 são as componentes do tensor de rigidez elástico, $\dot{\lambda}_m$ é o multiplicador plástico, m_{kl} é o gradiente das funções de potenciais plásticos Q (com $m_{kl} = \partial Q / \partial \sigma_{kl}$), que geometricamente, representa a direção da regra de fluxo e $\dot{\varepsilon}_{kl}^p$ é a variação das deformações plásticas.

Ao longo dos anos, muitos critérios de escoamento foram sendo propostos para a definição de superfícies de plastificação, à medida que se estudavam as diversas classes de materiais. A equação 3.3 representa a forma linearizada da condição de consistência a partir da superfície de escoamento $F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p})$ onde os argumentos da função são o tensor de tensões $\boldsymbol{\sigma}$ e o vetor das variáveis internas \mathbf{p} .

$$\dot{F} = \left. \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \right|_p \dot{\sigma}_{ij} + \left. \frac{\partial F}{\partial p_k} \right|_\sigma \dot{p}_k = 0 \quad (3.3)$$

Podendo ser escrita como

$$n_{ij} \dot{\sigma}_{ij} - H \dot{\lambda} = 0 \quad (3.4)$$

com

$$n_{ij} = \left. \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \right|_p \quad (3.5)$$

e

$$H = - \left. \frac{\partial F}{\partial \lambda} \right|_\sigma = - \left. \frac{\partial F}{\partial p_i} \right|_\sigma \frac{\partial p_i}{\partial \varepsilon_{kl}^p} m_{kl} \quad (3.6)$$

onde n_{ij} representa as derivadas de F para valores constantes do multiplicador plástico λ e H é o módulo de endurecimento/amolecimento, obtido a partir de derivadas de F para valores constantes de $\boldsymbol{\sigma}$, sendo positivo para o caso de endurecimento (expansão da superfície de escoamento), zero para o caso de plasticidade perfeita (sem alteração da superfície de escoamento) e negativo para o amolecimento (contração da superfície de escoamento).

Em um modelo associativo, a função de carregamento F e a regra de fluxo são definidas de tal modo que n e m são totalmente proporcionais (ou seja $Q = F$).

A associatividade implica que a taxa de deformação plástica é um vetor normal à superfície de escoamento no espaço de tensões, como apresentado na figura 3.1. Em modelos não associados o vetor taxa de deformações plásticas geralmente não é normal à superfície de escoamento.

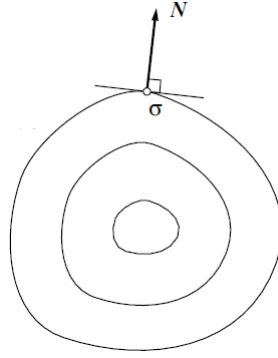


Figura 3.1: Vetor de fluxo. Adaptado de Souza Neto et al. (2008).

O multiplicador plástico ($\dot{\lambda}$) apresentado na equação 3.2 é um escalar, cujo valor é positivo em caso de deformações plásticas, e tem como papel ajustar o tamanho dos incrementos plásticos. Substituindo as equações 3.1 e 3.2 na equação 3.3 tem-se o clássico formato para o multiplicador plástico, dado por

$$\dot{\lambda} = \frac{n_{cd}E_{cdkl}^0\dot{\epsilon}_{kl}}{H + n_{pq}E_{pqrs}^0m_{rs}} \quad (3.7)$$

As derivadas apresentadas fornecem as fórmulas básicas para o operador tangente, que relaciona as variações de deformação com variações de tensão e é necessário para a montagem do tensor de rigidez tangente. Assim, a equação constitutiva pode ser dada por

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}^t \dot{\epsilon}_{kl} \quad (3.8)$$

Substituindo as equações 3.1 e 3.7 na equação 3.8, tem-se tensor E_{ijkl}^t que é denominado módulo tangente elastoplástico e é dado por

$$E_{ijkl}^t = E_{ijkl}^0 - \frac{E_{ijab}^0 m_{ab} n_{cd} E_{cdkl}^0}{H + n_{pq} E_{pqrs}^0 m_{rs}} \quad (3.9)$$

As seções a seguir descrevem de forma detalhada a formulação para os modelos constitutivos elastoplásticos de von Mises, Tresca, Rankine, Drucker-Prager,

Mohr-Coulomb e Ottosen os quais foram estudados e implementados a partir deste trabalho.

3.1.1 Critério de Von Mises

A representação matemática do critério de escoamento de von Mises com encruamento linear misto é dada por

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \alpha, \boldsymbol{\beta}) = \sqrt{3J_2(\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta}))} - (\sigma_y + \mathcal{H}\alpha) \quad (3.10)$$

onde \mathcal{H} é o módulo inelástico isotrópico generalizado, α é a função das deformações plásticas acumuladas e $\boldsymbol{\eta}$ é o tensor de tensões dado por

$$\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta}) = s(\boldsymbol{\sigma}) - \boldsymbol{\beta} \quad (3.11)$$

e definido como sendo a diferença entre o tensor desviador e o tensor de tensões $\boldsymbol{\beta}$, conhecido como “*back-stress*” e cuja lei de evolução é dada por

$$\boldsymbol{\beta} = \mathcal{K} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \quad (3.12)$$

onde \mathcal{K} é o módulo de encruamento cinemático e $\boldsymbol{\beta}$ é o tensor relativo às variáveis termodinâmicas associadas ao encruamento cinemático.

O tensor $\boldsymbol{\beta}$ representa a evolução da posição do centro da superfície de plasticidade no espaço de tensões. Quando $\boldsymbol{\beta} = 0$ tem-se $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{s}$, e a superfície de escoamento é a de von Mises com encruamento isotrópico e tensão de escoamento σ_y .

Assim, tem-se

$$n_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\eta}{\|\boldsymbol{\eta}\|} \quad (3.13)$$

Onde $\|\boldsymbol{\eta}\| = \sqrt{\boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\eta}}$.

O modelo de von Mises é associativo, assim:

$$n_{ij} = m_{ij} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\eta}}} \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\sigma \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

O módulo inelástico, associado aos fenômenos de endurecimento ou amolecimento, é dado por

$$H = -\frac{\partial F}{\partial \sigma_y} \frac{\partial \sigma_y}{\partial \varepsilon_{kl}^p} \quad (3.15)$$

com

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_y} = -1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial \varepsilon_{kl}^p} = \mathcal{H} + \mathcal{H} \quad (3.16)$$

3.1.2 Critério de Tresca

Para o critério de escoamento de Tresca, com encruamento linear isotrópico, tem-se:

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) = 2\sqrt{J_2} \cos \theta - (\sigma_y + \mathcal{H} \alpha) \quad (3.17)$$

Assim como o critério de von Mises, o critério de Tresca é associativo e os gradientes da função de escoamento e da função de potencial plástico, para um material isotrópico, podem ser obtidos utilizando-se a regra da cadeia

$$n_{ij} = m_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial F}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial F}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial F}{\partial J_3} \frac{\partial J_3}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.18)$$

em que as derivadas dos invariantes em relação à tensão são

$$\frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \delta_{ij} \quad (3.19a)$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = s_{ij} \quad (3.19b)$$

$$\frac{\partial J_3}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = t_{ij} = s_{ik}s_{kj} - \frac{1}{3}J_2\delta_{ij} \quad (3.19c)$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecher, s_{ij} são as componentes do tensor de tensões desviadoras e t_{ij} é o desvio quadrático do tensor de tensões desviadoras. As derivadas da função de escoamento em relação aos invariantes são

$$\frac{\partial F}{\partial I_1} = 0 \quad (3.20a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial J_2} = \frac{\cos \theta}{\sqrt{J_2}} - \frac{3\sqrt{3}J_3}{2J_2^2(4\cos^2 \theta - 1)} \quad (3.20b)$$

$$\frac{\partial F}{\partial J_3} = \frac{\sqrt{3}}{J_2(4\cos^2 \theta - 1)} \quad (3.20c)$$

O módulo inelástico, associado aos fenômenos de endurecimento ou amolecimento, é dado por

$$H = -(-1)(\mathcal{H}) \quad (3.21)$$

3.1.3 Critério de Rankine

O critério proposto por Rankine tem a seguinte representação

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) = 2\sqrt{3J_2} \cos \theta + I_1 - 3(\sigma_y + \mathcal{H}\alpha) \quad (3.22)$$

As derivadas das funções de escoamento e de potencial plástico podem ser obtidas a partir da equação 3.18, em que as derivadas dos invariantes em relação à tensão são as mesmas apresentadas na equação 3.19 e as derivadas da função de escoamento em relação aos invariantes são

$$\frac{\partial F}{\partial I_1} = 1 \quad (3.23a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial J_2} = \frac{\sqrt{3} \cos \theta}{\sqrt{J_2}} - \frac{9J_3}{2J_2^2(4 \cos^2 \theta - 1)} \quad (3.23b)$$

$$\frac{\partial F}{\partial J_3} = \frac{3}{J_2(4 \cos^2 \theta - 1)} \quad (3.23c)$$

O módulo inelástico associado ao critério de Rankine será

$$H = -(-3)(\mathcal{H}) \quad (3.24)$$

3.1.4 Critério de Drucker-Prager

O critério de Drucker-Prager é dado pela função:

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) = \sqrt{J_2(s(\boldsymbol{\sigma}))} + \eta p(\boldsymbol{\sigma}) - k \quad (3.25)$$

Para o caso de encruamento linear isotrópico, a função $\sigma(\alpha)$, presente no parâmetro k (dado pela equação 2.46), é dada por

$$\sigma(\alpha) = \sigma_y + \mathcal{H}\alpha \quad (3.26)$$

onde σ_y é a tensão de escoamento inicial, α é o fluxo plástico acumulado e \mathcal{H} é o módulo de encruamento.

O modelo de Drucker-Prager é não associado ($F \neq Q$). A lei não associativa Drucker-Prager é obtida através da adoção, para a função de potencial plástico, de função uma similar à função de escoamento, em que o ângulo de atrito, ϕ , é substituído pelo ângulo de dilatância (ψ)

$$Q(\sigma, \sigma_y) = \sqrt{J_2(s(\sigma))} + \bar{\eta}p(\sigma) \quad (3.27)$$

em que $\psi < \phi$ e $\bar{\eta}$ é uma constante adicional do material, obtida através da substituição de ϕ por ψ nas equações 2.47, 2.48 e 2.49.

Portanto, os gradientes de F e Q , para valores constantes do multiplicador plástico, representados pelos tensores \mathbf{m} e \mathbf{n} , são dados por:

$$m_{ij} = \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{\sqrt{s:s}} \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\sigma \end{bmatrix} + \frac{\bar{\eta}}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$n_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{\sqrt{s:s}} \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\sigma \end{bmatrix} + \frac{\eta}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

O módulo inelástico, obtido a partir de uma lei associada aos fenômenos de endurecimento ou amolecimento, é dado por

$$H = \left(\frac{\eta}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \mathcal{H} \quad (3.30)$$

A aplicação do modelo de Drucker-Prager deve levar em consideração a singularidade existente na superfície de escoamento, seu vértice. Portanto, é necessário que seja utilizada uma estratégia de solução alternativa durante a aplicação do algoritmo de integração das relações constitutivas. No contexto de superfícies de escoamento com singularidades tais como cantos e vértices, vários métodos já foram propostos, como os de Simo e Hughes (1998) e Souza Neto et al. (2008). Quando o retorno

ocorre no vértice, as funções de escoamento (equação (3.25)) e de potencial de fluxo plástico (equação (3.27)) devem ser alteradas para (Szabó e Kossa, 2012):

$$F(\sigma, \alpha) = \eta p(\sigma) - k \quad (3.31)$$

$$Q(\sigma, \sigma_y) = \bar{\eta} p(\sigma) \quad (3.32)$$

3.1.5 Critério de Mohr-Coulomb

A representação matemática do critério de Mohr-Coulomb, considerando encruamento linear isotrópico, é dada por

$$F(\sigma, \alpha) = \left(\cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{sen} \theta \text{sen} \phi \right) \sqrt{J_2} + p(\sigma) \text{sen} \phi - c \cos \phi \quad (3.33)$$

Da definição geral da função de escoamento, tem-se o gradiente dado por

$$n_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \frac{\partial F}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma} + \frac{\partial F}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \sigma} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \quad (3.34)$$

em que as derivadas dos invariantes em relação a tensão são as mesmas apresentadas na equação 3.19.

As derivadas da função de escoamento em relação aos invariantes para o critério de Mohr-Coulomb são

$$\frac{\partial F}{\partial I_1} = \frac{\text{sen} \phi}{3} \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial F}{\partial J_2} = \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \left(\cos \theta - \frac{\text{sen} \theta \text{sen} \phi}{\sqrt{3}} \right) \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = -\sqrt{J_2} \left(\text{sen} \theta + \frac{\cos \theta \text{sen} \phi}{\sqrt{3}} \right) \quad (3.37)$$

a derivada $\partial \theta / \partial \sigma$ é

$$\frac{\partial \theta}{\partial \sigma} = \left(\left(\frac{-9\sqrt{3}J_3}{4J_2^{\frac{5}{2}}} \frac{\partial J_2}{\partial \sigma} \right) + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2J_2^{\frac{2}{3}}} \frac{\partial J_3}{\partial \sigma} \right) \right) \left(\frac{1}{3\sqrt{1 - \frac{27J_3^2}{4J_2^3}}} \right) \quad (3.38)$$

Assim como o modelo de Drucker-Prager, o modelo de Mohr-Coulomb é não associado ($F \neq Q$). As derivadas para a lei não associativa de Mohr-Coulomb

também são obtidas através da substituição do ângulo de atrito, ϕ , pelo ângulo de dilatação, ψ .

O módulo inelástico é dado por

$$H = \cos \phi \mathcal{H} \quad (3.39)$$

Para tratar a singularidade existente na superfície de escoamento, o vértice, adota-se a mesma estratégia de solução alternativa durante a aplicação do algoritmo de integração das relações constitutivas utilizada no modelo de Drucker-Prager.

3.1.6 Critério de Ottosen

Seja a função de escoamento dada por

$$F(\boldsymbol{\sigma}) = \left[\alpha J_2 + \sigma_c \left(\lambda \sqrt{J_2} + \beta I_1 \right) \right]^{\frac{1}{2}} - \sigma_c \quad (3.40)$$

em que $\sigma_c = (\sigma_y + \mathcal{H} \alpha)$.

Das definições gerais, o gradiente de F é dado por

$$n_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \frac{\partial F}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma} + \frac{\partial F}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \sigma} + \frac{\partial F}{\partial J_3} \frac{\partial J_3}{\partial \sigma} \quad (3.41)$$

As derivadas dos invariantes em relação à tensão são as mesmas apresentadas na equação 3.19 e as derivadas da função de escoamento em relação aos invariantes são

$$\frac{\partial F}{\partial I_1} = \frac{\sigma_c \beta}{h} \quad (3.42a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial J_2} = \left[\alpha + \sigma_c \left(\frac{\lambda}{2\sqrt{J_2}} + \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial J_2} \right) \right] \frac{1}{h} \quad (3.42b)$$

$$\frac{\partial F}{\partial J_3} = \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial J_3} \frac{\sqrt{J_2}}{h} \quad (3.42c)$$

onde

$$h = 2 \left[\alpha J_2 + \sigma_c \left(\lambda \sqrt{J_2} + \beta I_1 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \theta} = \begin{cases} \frac{-c_1 c_2 \text{sen}(3\theta) \text{sen}(\frac{(\cos^{-1}(c_2 \cos(3\theta)))/3}{\text{sen}(\cos^{-1}(c_2 \cos(3\theta)))})}{\text{sen}(\cos^{-1}(c_2 \cos(3\theta)))}, & \text{se } \cos(3\theta) \geq 0 \\ \frac{-c_1 c_2 \text{sen}(3\theta) \text{sen}(\frac{(\pi \cos^{-1}(c_2 \cos(3\theta)))/3}{\text{sen}(\cos^{-1}(c_2 \cos(3\theta)))})}{\text{sen}(\cos^{-1}(c_2 \cos(3\theta)))}, & \text{se } \cos(3\theta) < 0 \end{cases} \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial J_2} = \frac{3\sqrt{3}J_3}{4J_2^{\frac{5}{2}}\text{sen}(3\theta)} \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial J_3} = -\frac{\sqrt{3}}{2J_2^{\frac{3}{2}}\text{sen}(3\theta)} \quad (3.46)$$

o modelo adotado é associativo ($n_{ij} = m_{ij}$).

O módulo inelástico, associado aos fenômenos de endurecimento ou amolecimento, é dado por

$$H = \left(1 - \frac{\lambda\sqrt{J_2} + \beta I_1}{h}\right) \mathcal{H} \quad (3.47)$$

Capítulo 4

IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Neste capítulo, será apresentado o projeto orientado a objetos da implementação realizada. As implementações deste trabalho foram realizadas no sistema computacional INSANE (INteractive Structural ANalysis Environment), desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais. O sistema é desenvolvido em JAVA, seguindo o paradigma de Programação Orientada a Objetos (POO). O INSANE tem sua estrutura dividida em três grandes aplicações: o pré e pós processador, responsáveis por aplicações gráficas interativas e um núcleo numérico, onde ocorre o processamento, contendo as implementações dos modelos numéricos e as técnicas de soluções apropriadas.

As alterações realizadas no sistema (concentradas, principalmente, no núcleo numérico do INSANE), serão apresentadas através de diagramas UML (Unified Modelling Language), que é uma linguagem padronizada para a modelagem de sistemas de software orientados a objetos. A figura 4.1 tem como objetivo ilustrar a simbologia adotada na construção dos diagramas. Na cor branca estão representadas as classes que não serão alteradas, as classes modificadas durante o desenvolvimento são representadas em amarelo e as classes criadas em verde.

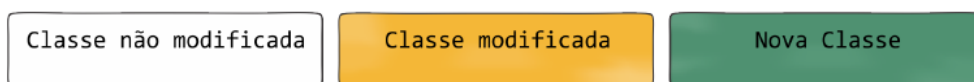


Figura 4.1: Notação UML utilizada.

4.1 Núcleo Numérico

O núcleo numérico do INSANE é responsável pelo processo de solução e obtenção de resultados da análise estrutural. O atual estágio organizacional do núcleo numérico é resultado de diversos trabalhos dentre os quais destacam-se Almeida (2005); Fonseca (2006); Saliba (2007); Fonseca (2008); Ajeje (2009); Fuina (2009) e Penna (2011). Sua estrutura é composta pela interface **Assembler** e pelas classes abstratas **Model** e **Solution**, conforme ilustrado na figura 4.2.

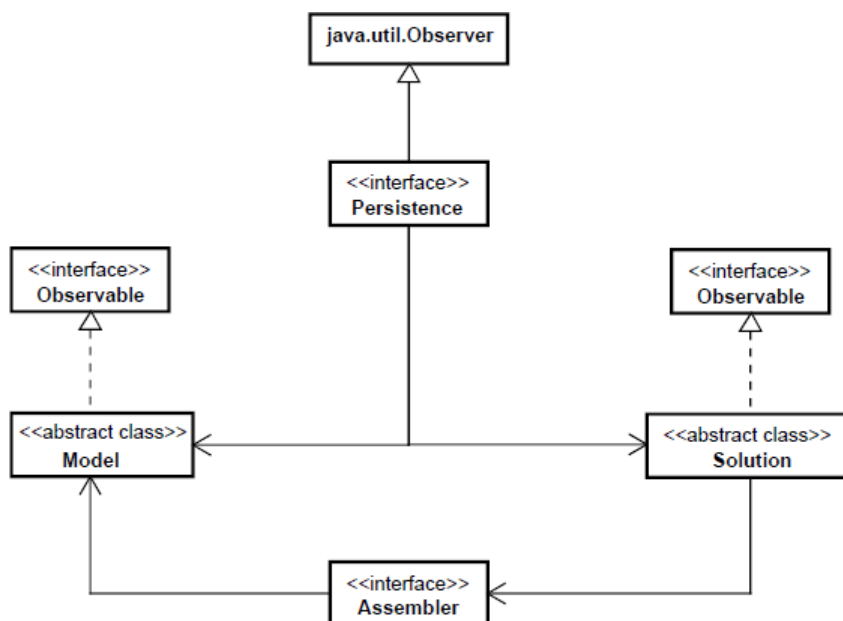


Figura 4.2: Organização do Núcleo Numérico.

A interface **Assembler** é a responsável pela montagem do sistema matricial de segunda ordem com o qual é possível representar diversos tipos de modelos, a classe abstrata **Solution** desencadeia o processo de solução, possuindo os recursos necessários para resolver esse sistema matricial, seja ele linear ou não linear, e a

classe abstrata **Model** possui os dados relativos ao modelo discreto a ser analisado e fornece para **Assembler** todas as informações necessárias para montar a equação do modelo, que será resolvida por **Solution**.

As classes abstratas **Model** e **Solution** se comunicam com a classe **Persistence**, que é a interface responsável pelo tratamento dos dados de entrada e pela persistência dos dados de saída, sempre que observada alguma alteração no estado dos modelos. Esta persistência é realizada por meio de arquivos XML (eXtensible Markup Language), que possibilitam a criação de dados estruturados com base em arquivo texto.

A comunicação entre as classes **Model** e **Solution** e a interface **Persistence** ocorre através de um mecanismo de propagação de mudanças proporcionado pelo padrão de projeto *Observer*. **Persistence** é um componente observador, enquanto os componentes observados são as classes abstratas **Model** e **Solution**. Quando alguma mudança ocorre no estado de um objeto observado, o mecanismo de propagação de mudanças é disparado e se encarrega de notificar os objetos observadores para se atualizarem, assegurando a consistência e a comunicação entre o componente observador e os componentes observados.

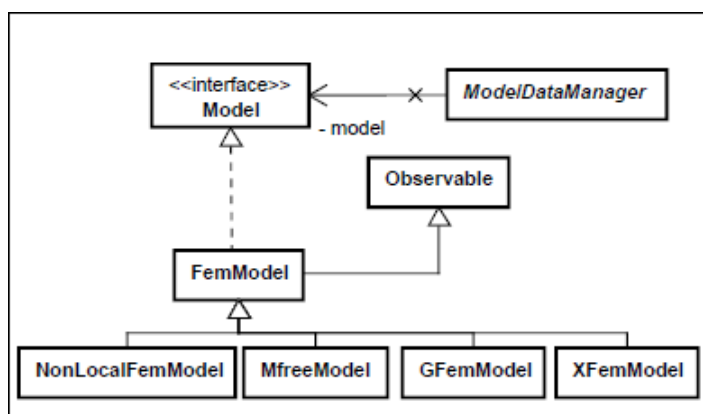


Figura 4.3: Hierarquia da classe Model (Penna, 2011).

A figura 4.3 mostra a hierarquia da interface **Model**. As classes que a implementam são constituídas por listas de objetos inerentes ao modelo discreto a ser analisado, como por exemplo **FemModel**, que representa um modelo de elementos

finitos propriamente dito e contém métodos de acesso e manipulação de seus dados.

Na mecânica dos sólidos computacional, para o caso de análise estática fisicamente não linear, as soluções são obtidas por meio de um processo incremental iterativo dado por:

$$K_t \cdot \delta U = \delta \lambda \cdot P + Q \quad (4.1)$$

onde K_t é a matriz de rigidez tangente, δU o vetor de deslocamentos incrementais, $\delta \lambda$ é um incremento do fator de carga, e os vetores de cargas de referência e de cargas residuais do modelo são, respectivamente, P e Q , sendo que, o último é obtido pela diferença entre o vetor de cargas externas e o vetor de forças equivalentes das tensões internas F_i .

No INSANE, o processo incremental iterativo segue o processo de solução do algoritmo genérico proposto por Yang e Shieh (1990). As implementações acerca do processo iterativo tem como base o trabalho de Fuina (2004), e tiveram sua inclusão no sistema a partir dos trabalhos de Fonseca (2006); Fonseca (2008); Fuina (2009) e Penna (2011).

Durante a solução, é solicitada a montagem do tensor constitutivo necessário para a obtenção da matriz de rigidez incremental. Neste contexto, a classe **ConstitutiveModel** é especialmente importante, pois uma vez que o modelo constitutivo recebe as informações dos elementos, do formato da integração, dos dados dos pontos materiais, das propriedades físicas do meio e do tipo de análise, todas as operações necessárias para o cálculo do operador tangente e das forças internas podem ser realizadas, sem se remeter diretamente aos elementos finitos, aos pontos de integração e nem mesmo ao modelo discreto, seja este do Método dos Elementos Finitos, ou outras abordagens, tais como o Método dos Elementos Finitos Generalizado (Alves, 2005), Método dos Elementos de Contorno (Anacleto et al., 2013) ou Métodos Sem Malha (Silva, 2012).

4.2 Implementação dos Modelos Elastoplásticos

A partir da criação do ambiente computacional proposto por Penna (2011), o modelo constitutivo passou a ser descrito por funções potenciais e seus respectivos gradientes, que resultam em um conjunto de operações tensoriais capazes de lidar com os tensores constitutivos, os gradientes das funções e as condições de carregamento e descarregamento. As operações da estrutura teórica unificada e as particularidades de cada modelo são então atribuídas a um conjunto de classes, denominadas “Filters”, criadas para responder pelas parcelas que compõem as operações comuns. As implementações são tais que cada “Filter” contém as informações do respectivo modelo constitutivo que ele quer representar e as hipóteses do modelo de análise. O modelo constitutivo é tratado pelo “Filter” no formato tensorial, possibilitando ao modelo de análise fornecer as componentes de cada tensor (de rigidez, de flexibilidade, de tensão e de deformação) necessárias para sua montagem.

A figura 4.4 ilustra a herança de classes de **ConstitutiveModel**. Observa-se que o modelo constitutivo geral, **UnifiedConstitutiveModel** possui uma instância de **UnifiedConstitutiveModelFilter**, entendida como a superclasse do conjunto de classes que formam a camada “Filter”.

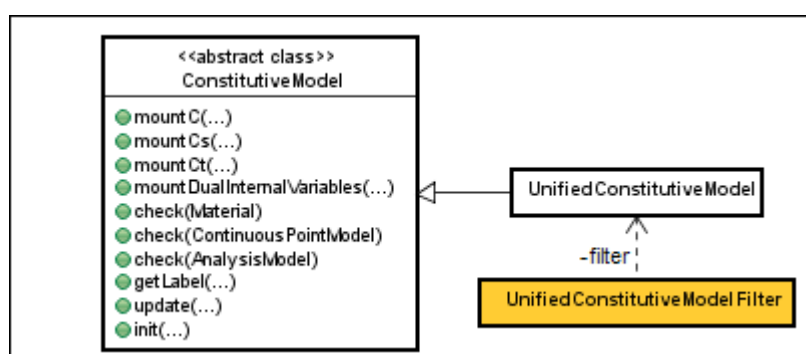


Figura 4.4: Diagrama de classes para ConstitutiveModel.

A classe **UnifiedConstitutiveModel** se auxilia dos respectivos “Filters” para a montagem das parcelas que compõem as operações gerais da estrutura teórica

unificada, tais como a obtenção do tensor de rigidez elástico ($mountC(...)$), da aproximação secante do tensor de rigidez incremental ($mountCs(...)$), a atualização das variáveis constitutivas ($update(...)$), o cálculo do tensor de tensões (realizado pelo método $mountDualInternalVariable(...)$) e do operador tangente ($mountCt(...)$). A figura 4.5 apresenta as atividades mais gerais do modelo constitutivo unificado.

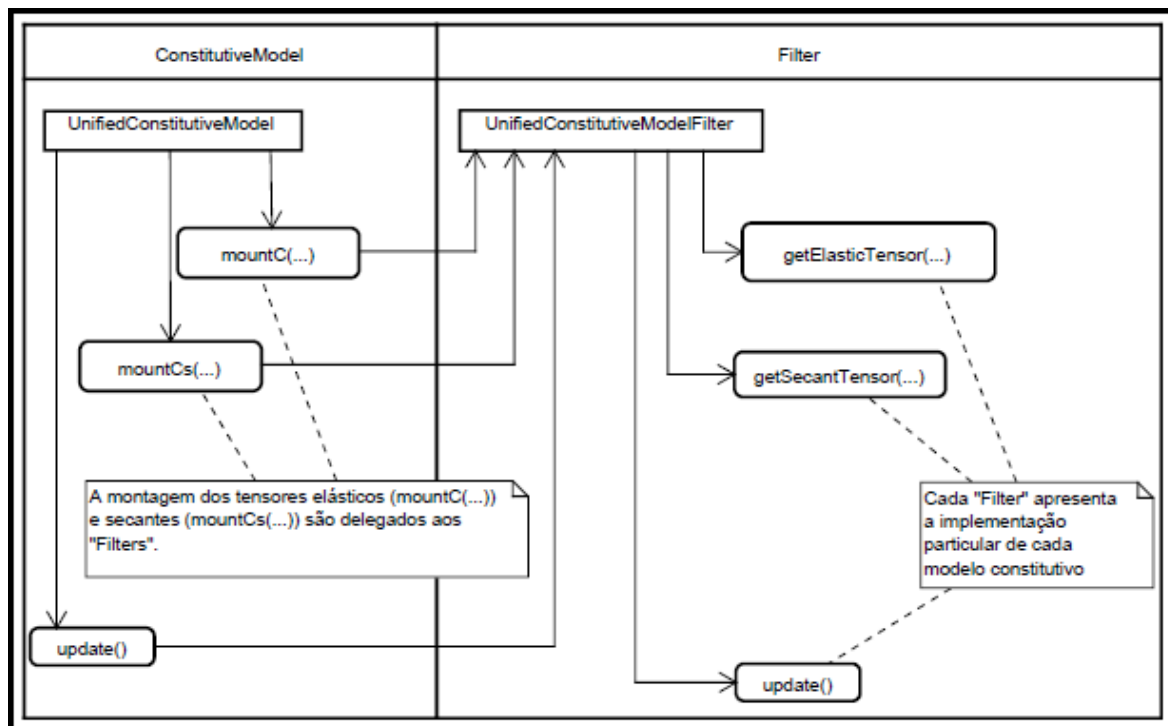


Figura 4.5: Obtenção dos tensores de rigidez elástico e secante e atualização das variáveis (Penna, 2011).

A herança de **UnifiedConstitutiveModelFilter** é apresentada na figura 4.6, onde estão destacadas as classes referentes aos modelos elastoplásticos com os critérios de Tresca, von Mises, Rankine, Mohr-Coulomb, Drucker-Prager e Ottosen.

Como pode ser visto na declaração dos métodos da figura 4.6, a classe **UnifiedConstitutiveModelFilter** é responsável por efetuar as operações referentes aos modelos constitutivos, delegando as especificidades de cada modelo aos respectivos

“Filters” através da solicitação das parcelas do tensor secante (método *getSecantTensor(...)*), do tensor de módulo inelástico (método *getHardeningSofteningPotential(...)*), do tensor relativo ao gradiente das funções de potenciais plásticos (método *getInelasticPotential(...)*) e do tensor dos gradientes das funções de carregamento (método *getLoadingFunctionPotential(...)*), que são utilizados no cálculo do tensor tangente.

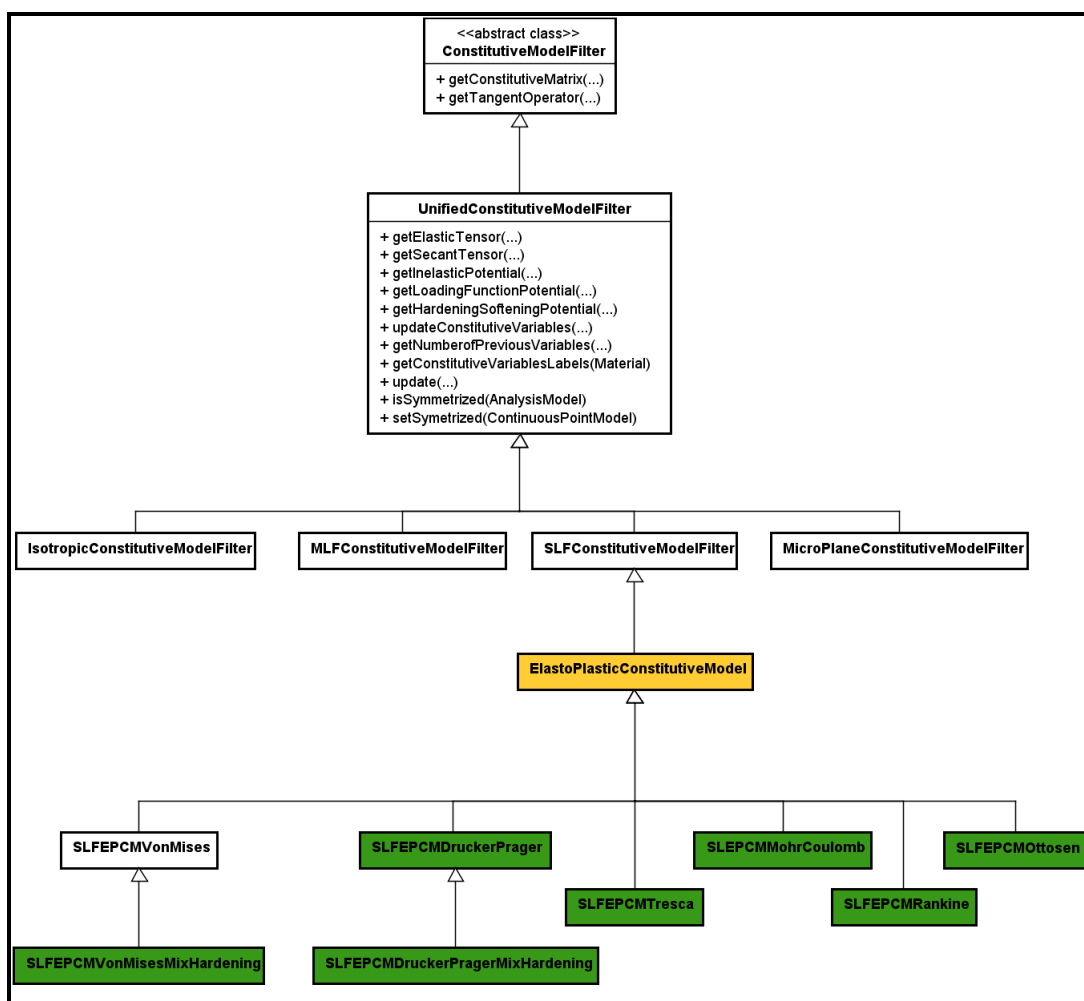


Figura 4.6: Diagrama de classes para UnifiedConstitutiveModelFilter

A interação entre o modelo constitutivo e os “Filters” é descrita nas figuras 4.7 e 4.8, através de diagramas de atividade, que apresentam o processo de obtenção do operador tangente e o cálculo das tensões, por exemplo, para o modelo elastoplástico de Drucker-Prager.

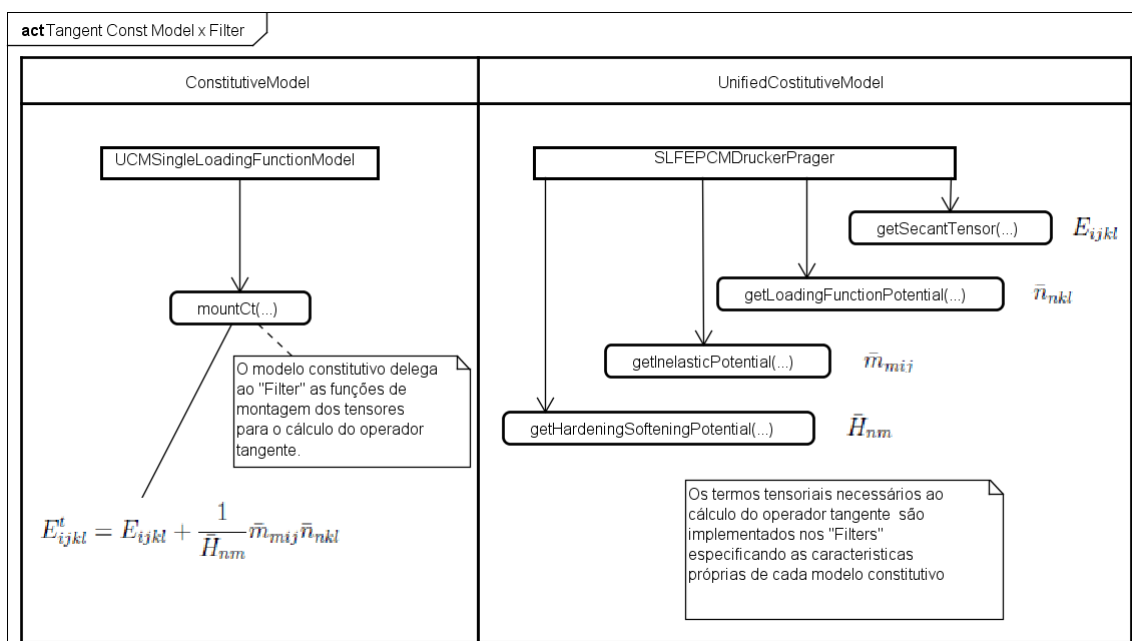


Figura 4.7: Cálculo do Operador Tangente. Adaptado de Penna (2011).

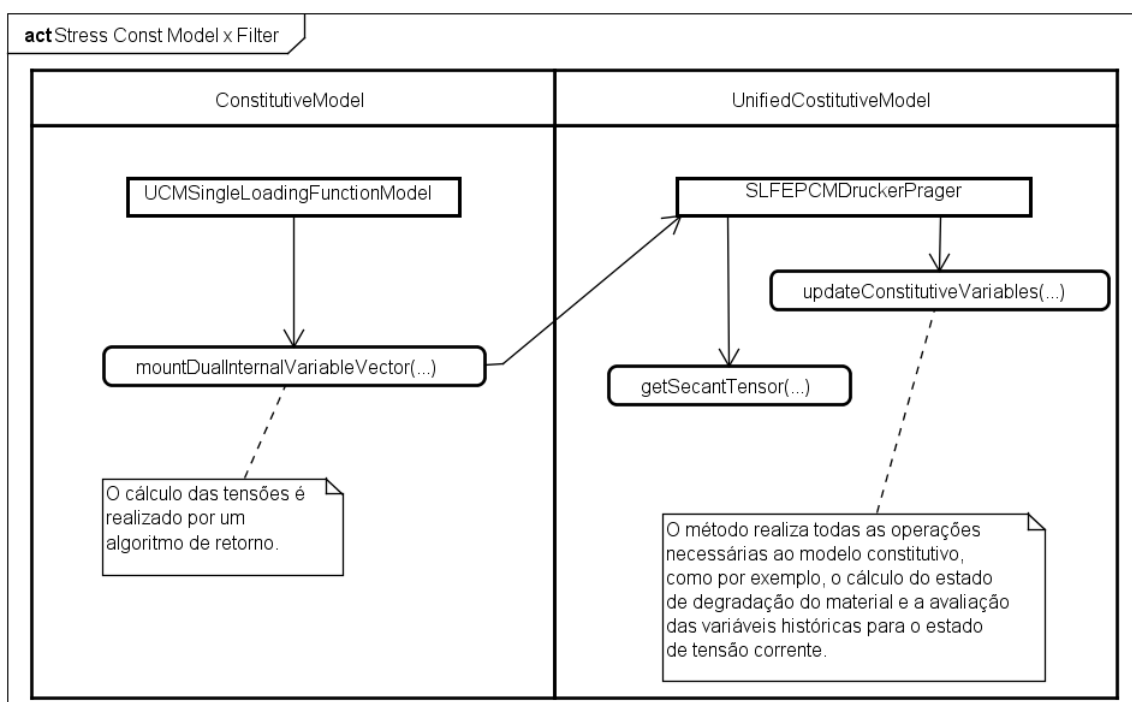


Figura 4.8: Cálculo das Tensões. Adaptado de Penna (2011).

A figura 4.9 evidencia a relação de herança entre as classes relativas aos modelos elastoplásticos e a classe abstrata **ElastoPlasticConstitutiveModelFilter**, que

ocorre através da utilização de métodos como *getElasticTensor(...)* e *getComplianceTensor(...)*.

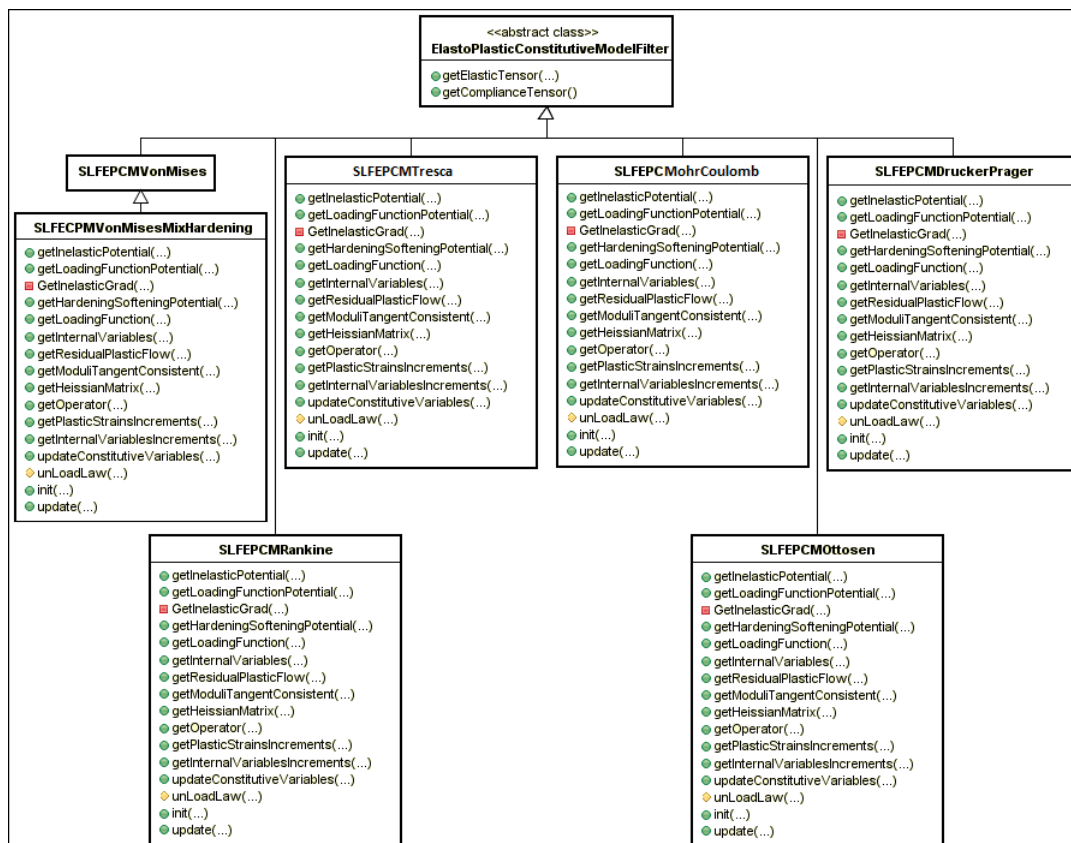


Figura 4.9: Diagrama de classes para ElastoPlasticConstitutiveModelFilter.

Na figura 4.9, também observam-se os métodos implementados nos filtros, seguindo a formulação apresentada na seção 3.1 do capítulo 3, como, por exemplo, métodos *getSecantTensor(...)* (E_{ijkl}^t), método *getHardeningSofteningPotential(...)* (\mathbf{H}_{nm}), método *getInelasticPotential(...)* (m_{ij}), método *getLoadingFunctionPotential(...)* (n_{kl}). De maneira geral, os filtros são bastante parecidos, contendo também métodos com as derivadas da função de carregamento e da função de potencial plástico, utilizadas no algoritmo de mapeamento de retorno, necessário para a integração numérica das relações constitutivas que regem o comportamento do material.

4.3 Classe Material

Os materiais são representados pelas classes que implementam a classe abstrata **Material** (figura 4.10) e seus atributos são um identificador e um mapa (HashMap), contendo os valores necessários para caracterizar os distintos materiais como, por exemplo, módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson.

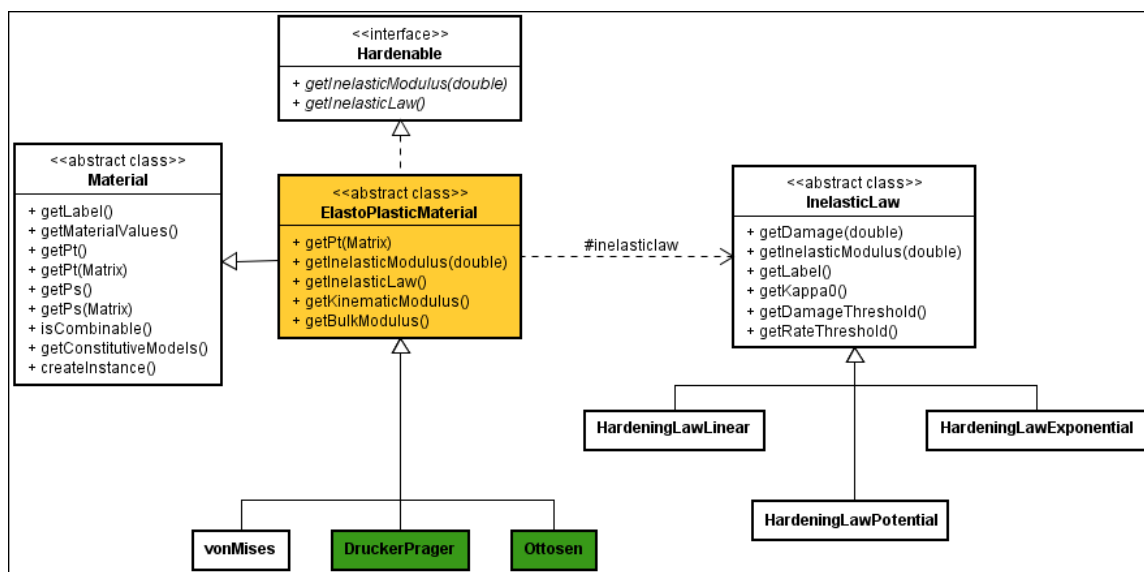


Figura 4.10: Diagrama de classes para Material.

Conforme a figura 4.10, a classe **ElastoPlasticMaterial** implementa a classe abstrata **Material**, herdando seus atributos e particularizando sua representação para materiais empregados em modelos elastoplásticos. De maneira geral, cada modelo constitutivo está associado a um tipo de material que o represente de forma mais adequada, entretanto, alguns modelos, como o de Tresca e Rankine, possuem os mesmos parâmetros de entrada que o modelo de von Mises e, portanto, utilizam a classe **VonMises** ou os modelos de Mohr-Coulomb e Drucker-Prager, que utilizam a classe **Drucker-Prager** para representação do material.

O comportamento não linear dos materiais elastoplásticos é definido por leis de endurecimento ou amolecimento. Estas leis são tratadas pela classe abstrata **InelasticLaw** e suas instâncias, que podem assumir diversas formas para a evolução

do módulo inelástico. Um aspecto importante a ser observado na figura 4.10 é que a classe abstrata **ElastoPlasticMaterial**, implementa a interface **Hardenable**, ao incorporar os métodos *getInelasticModulus(...)* e *getInelasticLaw(...)*, responsáveis, respectivamente, pelo cálculo do módulo inelástico específico do material e por indicar a lei inelástica utilizada na análise. A instância de **InelasticLaw** pode assumir várias formas, para as diferentes leis de endurecimento ou amolecimento implementadas por **InelasticLaw**, conforme mostra a hierarquia de classes, também ilustrada na figura 4.10.

Diversas funções de evolução do módulo inelástico têm sido propostas. Para a representação do comportamento inelástico exponencial, a função de endurecimento ou amolecimento utilizada é dada na equação 4.2, e que foi obtida a partir da derivada da funções de evolução do módulo inelástico apresentada por Benallal et al. (1987).

$$\mathcal{H}(\kappa) = b.a.e^{(-b.\kappa)} \quad (4.2)$$

sendo a e b parâmetros do material e κ a variável interna associada ao fenômeno de endurecimento ou amolecimento.

Além da função exponencial, o INSANE conta também com a função potencial (representada pela classe **HardenLawPotential**) apresentada por Bouchard et al. (2011) e por Vaz Jr e noz Rojas (2011), cuja lei de endurecimento ou amolecimento é definida por:

$$\mathcal{H}(\kappa) = \frac{b.a.n}{[K + (n.\kappa)]^{1-b}} \quad (4.3)$$

sendo a e b parâmetros relativos ao material, K uma deformação inicial relativa ao limite elástico, κ a variável interna associada ao endurecimento ou amolecimento, n o coeficiente responsável por ajustar os valores de κ , a e b .

4.4 Implementação do algoritmo para integração das tensões

Atualmente, o sistema conta com dois algoritmos de retorno, o método da projeção do ponto mais próximo (“closest-point projection”) e o método do plano de corte (“cutting-plane”). A figura 4.11 apresenta a associação entre **ElastoPlasticConstitutiveModel** e as classes dos algoritmos de retorno. Tal associação é feita a partir de uma instância da classe **ReturnMappingAlgorithm** que deverá ser informada na inicialização do modelo. Assim, todas as opções de algoritmos estarão disponíveis para qualquer um dos modelos implementados.

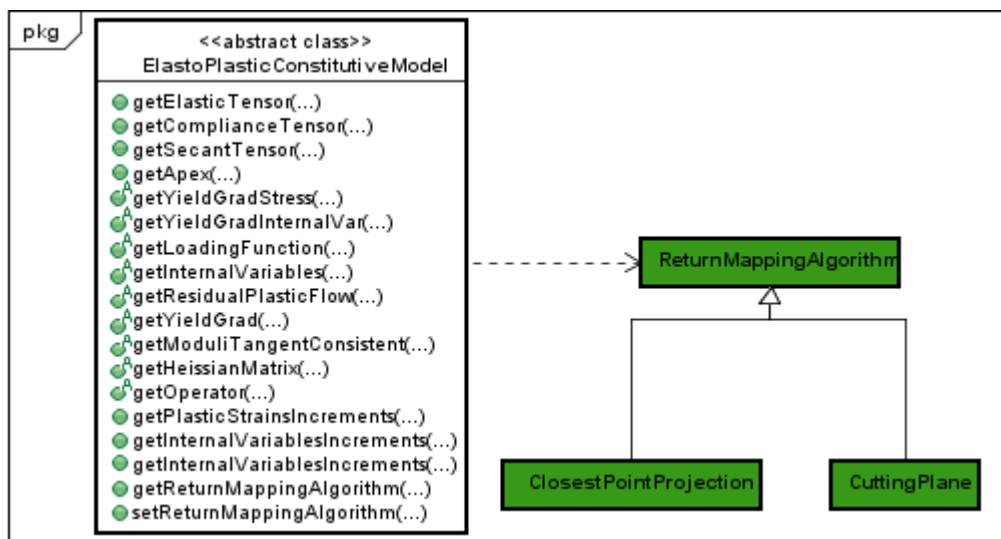


Figura 4.11: Diagrama de classes para ReturnMappingAlgorithm.

A figura 4.12 mostra um fluxograma para os algoritmos, implementados na classe **ReturnMappingAlgorithm**, segundo a proposta de Simo e Hughes (1998), visando ilustrar a estrutura dos algoritmos de mapeamento de retorno implementados.

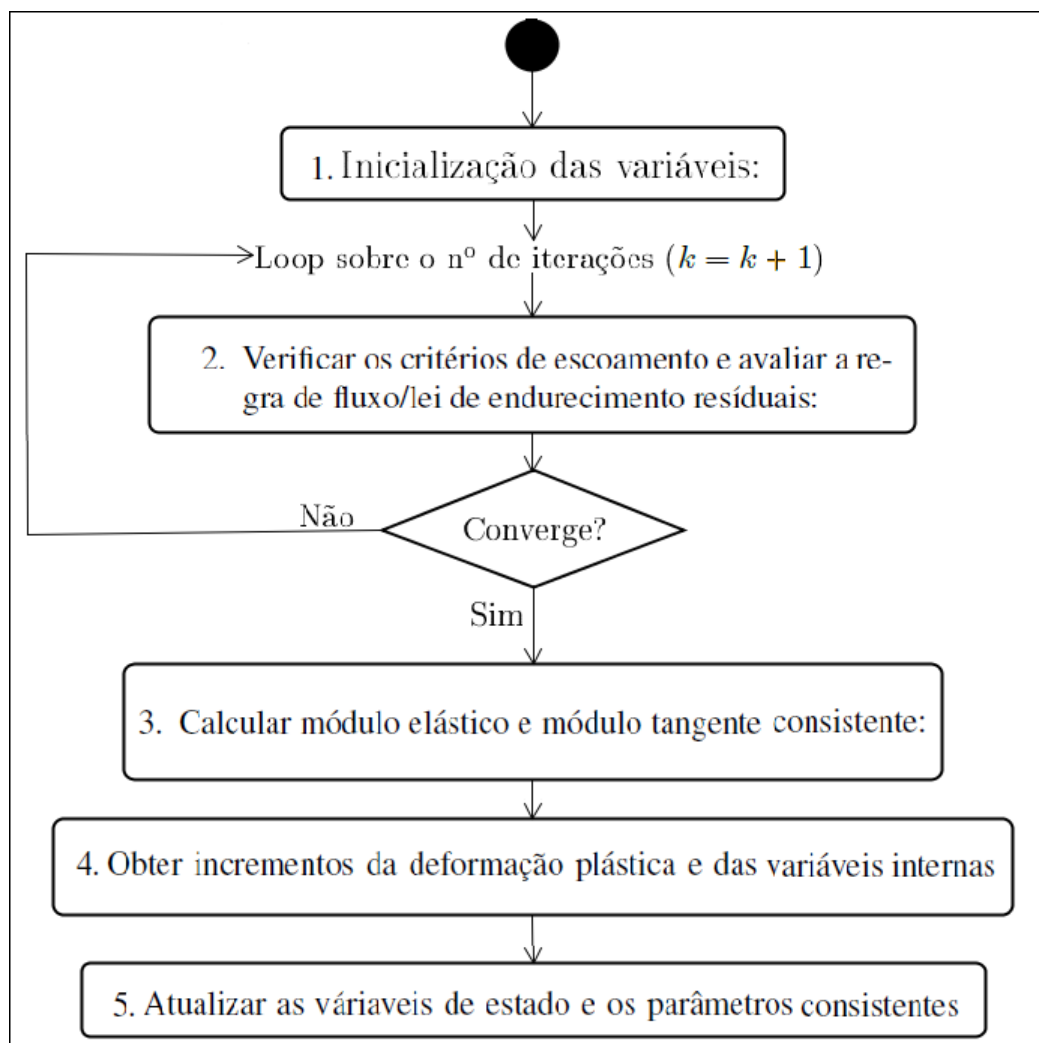


Figura 4.12: Diagrama de atividades para o algoritmo de retorno.

Capítulo 5

SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Neste capítulo, são apresentadas simulações numéricas, aplicando os modelos constitutivos implementados. Tais simulações foram baseadas em casos clássicos encontrados na literatura com a finalidade de ilustrar e validar a implementação, ressaltando as características individuais de cada modelo.

Dentre os problemas estabelecidos para análise e validação dos modelos, têm-se:

- (1) tração, compressão e cisalhamento puros;
- (2) compressão diametral;
- (3) flexão pura de uma barra;
- (4) viga em balanço;
- (5) fundação em bloco rígido (sapata corrida);
- (6) viga em balanço com seção variável;
- (7) estabilidade de um talude;
- (8) cilindro com pressão interna;
- (9) placa circular com carregamento uniforme;
- (10) chapa submetida à tração;
- (11) viga de concreto armado.

5.1 Tração, Compressão e Cisalhamento Puros

Nesta seção, os modelos constitutivos implementados são apresentados em um exemplo de tração, compressão e cisalhamento puros, modelados com elementos finitos planos. O objetivo deste exemplo é ilustrar todos os modelos implementados sujeitos a estados elementares de solitação, pois assim, todos eles devem reproduzir respostas equivalentes.

Será considerada uma chapa retangular em estado plano de tensão, adotando-se a malha com 16 elementos quadrilaterais de 4 nós de tamanho $0,250\text{m} \times 0,250\text{m}$, cujas configurações de geometria, de carga, bem como as condições de contorno para tração e compressão direta estão apresentadas na figura 5.1.

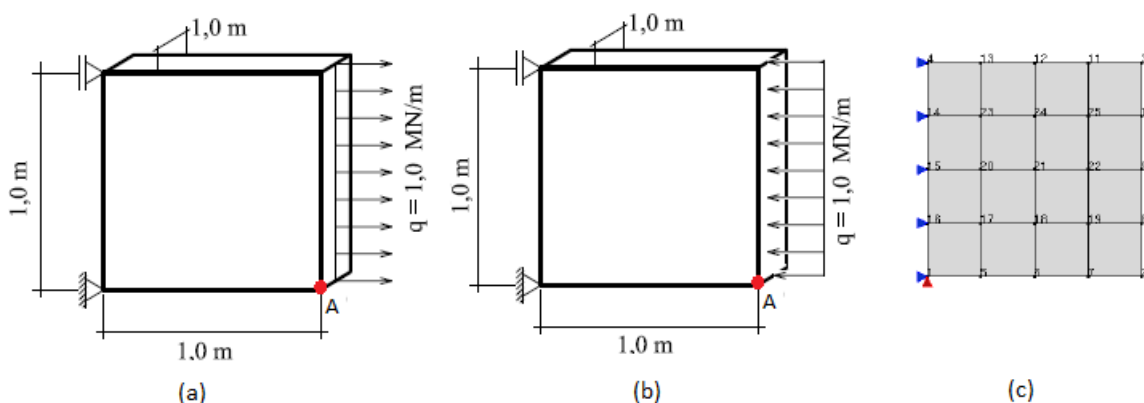


Figura 5.1: Condições de contorno, geometria e carga: (a) tração pura, (b) compressão pura. (c) Malha de elementos finitos.

Para todos os modelos constitutivos foram empregados os mesmos parâmetros do material, com módulo de elasticidade de $20000,0\text{ MPa}$, o coeficiente de Poisson de $0,2$ e tensão de escoamento de $2,0\text{ MPa}$. Foi empregada a lei de encruamento isotrópico linear com um módulo “softening” (amolecimento) de $2000,0\text{ MPa}$.

A análise foi realizada com aproximação tangente e tensor constitutivo contínuo. Para a solução das equações não lineares foi adotado o método de controle direto de deslocamento, em que o deslocamento horizontal do ponto A foi controlado com incremento de $0,000005m$ por passo, com tolerância em deslocamento de 1×10^{-4} .

Para a integração das tensões foi utilizado o algoritmo de retorno “Closest-Point Projection” (com exceção do modelo de “Ottosen”, em que foi utilizado o algoritmo “Cutting-Plane”).

As trajetórias de equilíbrio foram obtidas e, para cada modelo, as curvas “Fator de carga \times Deslocamento Horizontal” da extremidade da chapa estão apresentadas nas figuras 5.2 e 5.3.

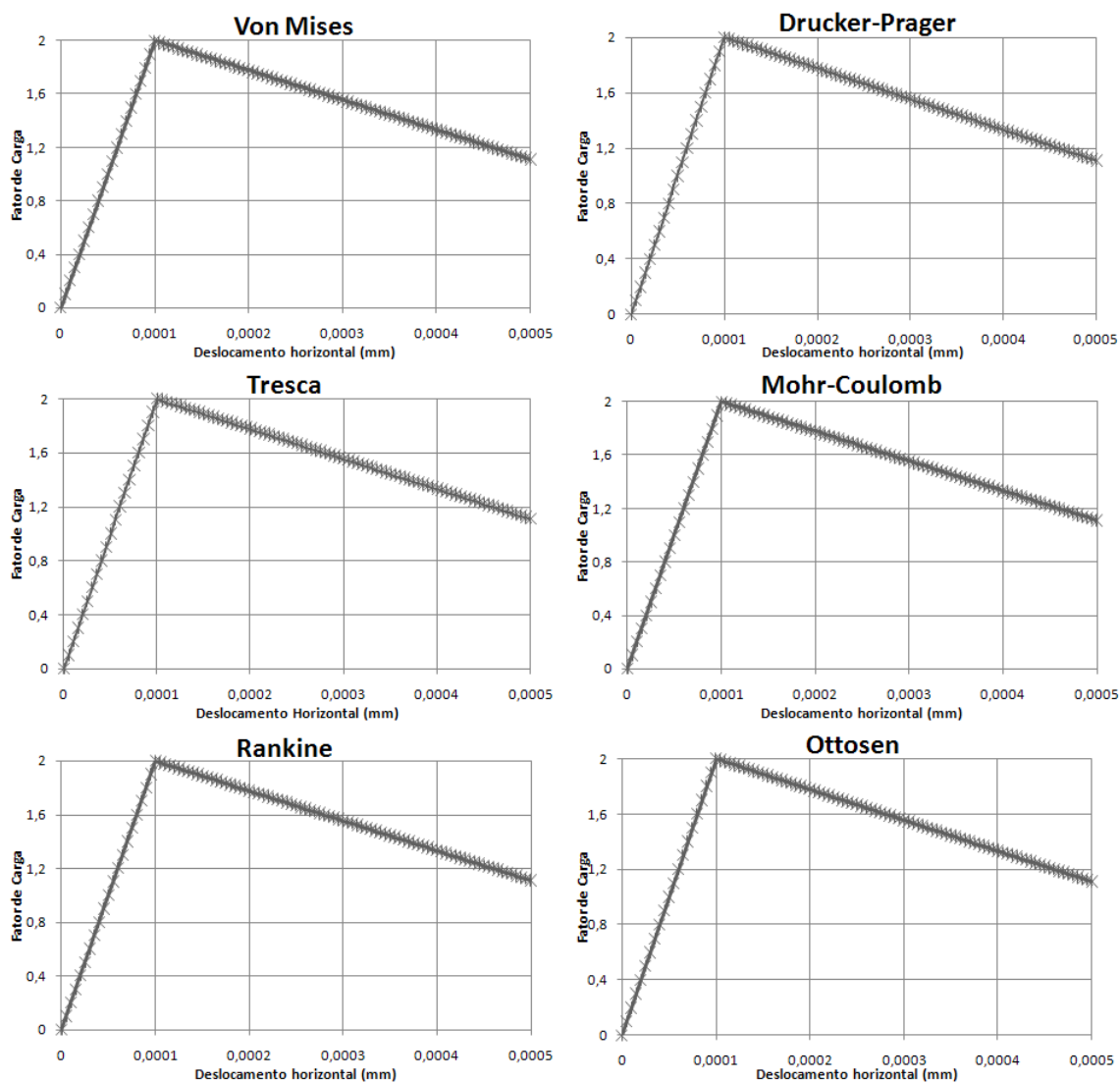


Figura 5.2: Tração direta: diagramas Fator de carga \times Deslocamento horizontal.

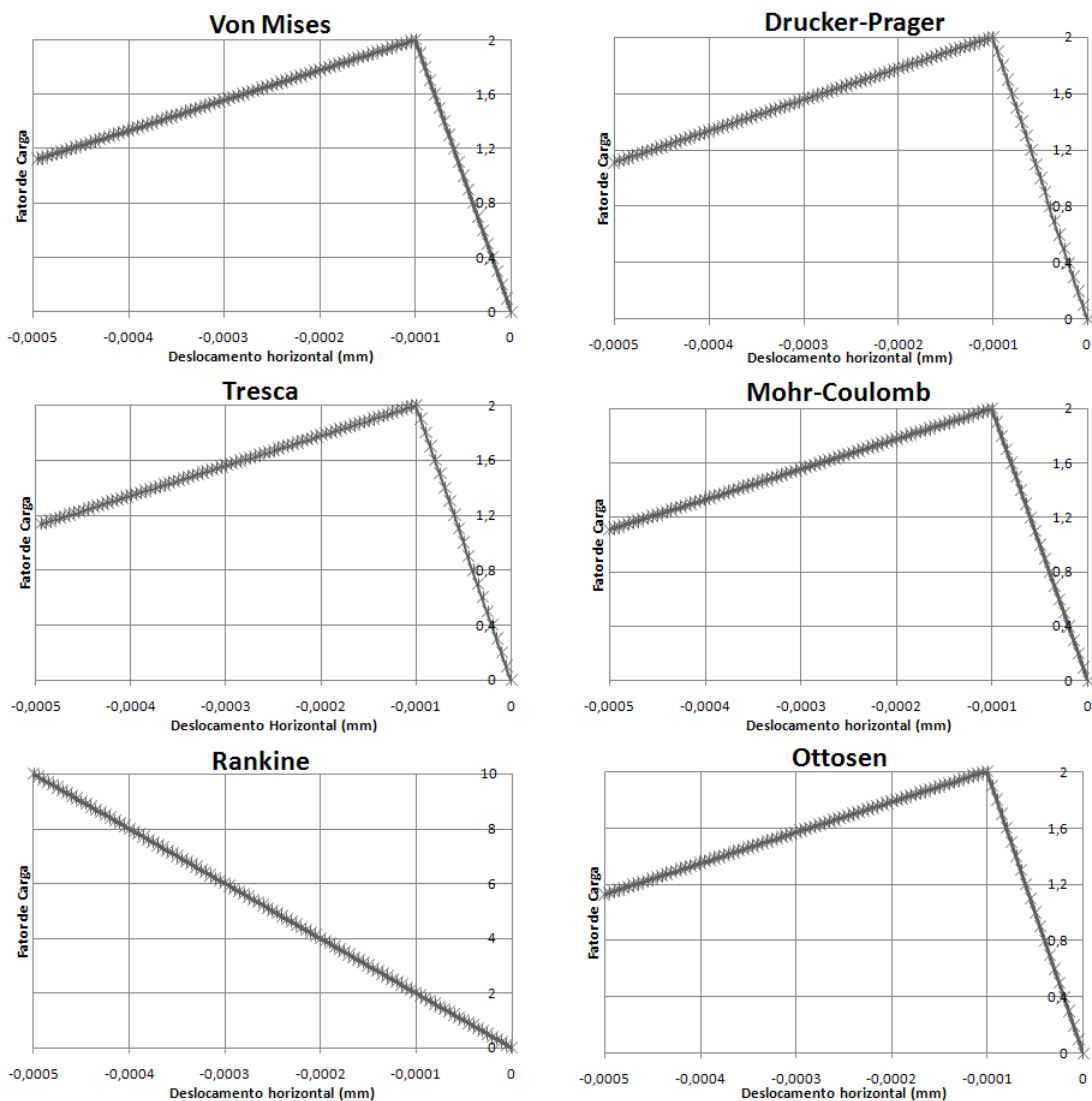


Figura 5.3: Compressão: diagramas Fator de carga \times Deslocamento horizontal.

Como era esperado, todos os modelos apresentam respostas semelhantes quando solicitados tanto à tração quanto à compressão uniaxial. A exceção é o modelo de Rankine cujo critério não prevê falha quando submetido à compressão apresentando assim, apenas o comportamento linear elástico, como pode-se observar na figura 5.3, sendo esta, uma característica do modelo.

Para que o ensaio de cisalhamento puro pudesse ser simulado foram alteradas as condições de contorno e mantidos os parâmetros de análise com controle do deslocamento horizontal do nó A. A figura 5.4 apresenta a geometria, as condições de

contorno e a malha utilizada nesta simulação. Os parâmetros adotados durante a análise numérica são os mesmos utilizados nas simulações de tração e compressão. As trajetórias de equilíbrio obtidas são apresentadas na figura 5.5.

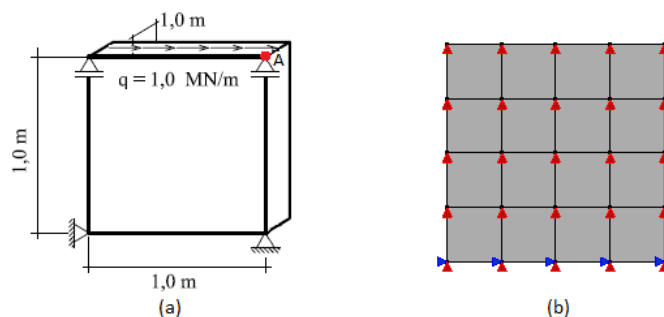


Figura 5.4: (a) Condições de contorno, geometria e carga para o cisalhamento puro. (b) Malha de elementos finitos.

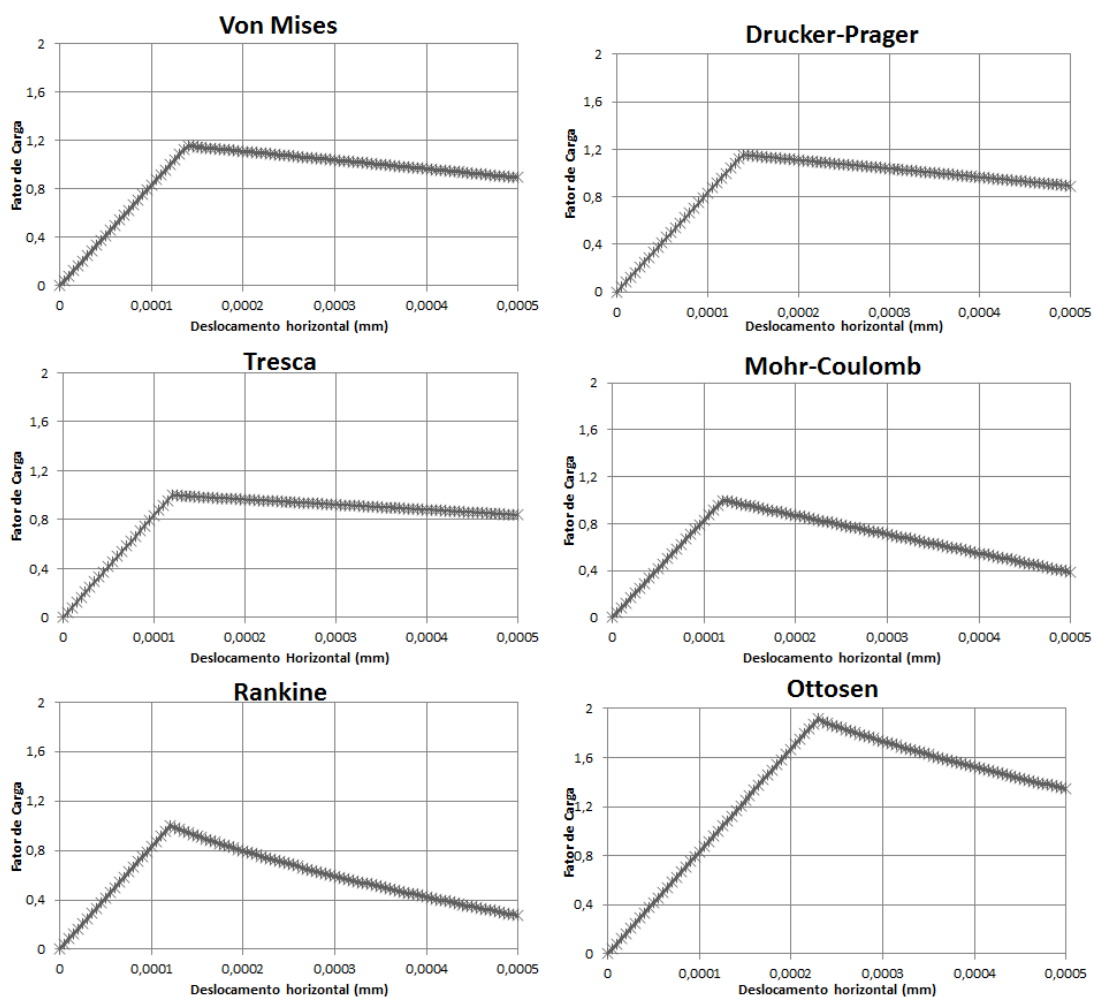


Figura 5.5: Cisalhamento puro: Diagramas Fator de carga \times Deslocamento horizontal.

O comportamento apresentado na simulação de cisalhamento puro variou de acordo com o modelo utilizado. Como esperado o modelo de von Mises apresentou comportamento semelhante aos da tração e compressão, pois o mesmo depende apenas do invariante J_2 , responsável pelo cálculo da distorção. Por se tratar de uma generalização do critério de von Mises, o critério de Drucker-Prager apresentou uma resposta igual ao do critério insensível à pressão hidrostática. Para os demais critérios, o cisalhamento é calculado de forma indireta pelo sistema e, por isso, apresentaram diferentes respostas se comparados uns com os outros.

5.1.1 Variação da Lei Inelástica e dos Parâmetros de Encruamento

Aqui os ensaios de tração e compressão direta foram adotados de maneira a observar a variação da lei inelástica do material com situações de endurecimento, amolecimento e plasticidade perfeita, adequando-se os parâmetros das funções para estes comportamentos e adotando-se as funções inelásticas linear, exponencial e potencial, implementadas no sistema INSANE.

Os dados apresentados para as leis inelásticas variam em cada modelo, sendo válido observar que, durante esta análise, não se teve a preocupação de adotar dados reais, pois o objetivo é apenas apresentar o funcionamento dos modelos. Ressalta-se também que todas as leis podem ser adotadas por todos os modelos implementados. Os parâmetros de cada modelo constitutivo são listados abaixo:

Critério de Rankine: $E = 2,0 \times 10^4 MPa$, $\nu = 0,2$, $\sigma_y = 2MPa$ e lei inelástica linear;

Critério de Drucker-Prager: $E = 2,0 \times 10^4 MPa$, $\nu = 0,2$, $\sigma_y = 2MPa$ e lei inelástica exponencial;

Critério de von Mises com encruamento isotrópico: $E = 1,0 \times 10^5 MPa$, $\nu = 0,2$, $\sigma_y = 50MPa$, $H = 500MPa$ e lei inelástica linear;

Critério de von Mises com encruamento cinemático: $E = 1,0 \times 10^5 MPa$,

$\nu = 0,2$, $\sigma_y = 50MPa$, $K = 1000MPa$ e lei inelástica linear;

Critério de von Mises com encruamento misto: $E = 1,0 \times 10^5 MPa$, $\nu = 0,2$, $\sigma_y = 50MPa$, $H = 500MPa$, $K = 1000MPa$ e lei inelástica linear;

Critério de Ottosen: $E = 32129MPa$, $\nu = 0,2$, $\sigma_y = 2MPa$ e leis inelásticas potencial, linear e exponencial;

A análise foi realizada com aproximação tangente e tensor constitutivo contínuo. Para solução das equações não lineares foi adotado método de controle direto de deslocamento, em que o deslocamento horizontal do ponto A foi controlado com incremento de $5 \times 10^{-6}m$ por passo, com tolerância em deslocamento de 1×10^{-4} .

A figura 5.6 reproduz o comportamento de endurecimento (módulo inelástico $H = 2000 MPa$), amolecimento (módulo inelástico $H = -2000 MPa$) e plasticidade perfeita (módulo inelástico $H = 0 MPa$) para o modelo de Rankine no ensaio de tração direta.

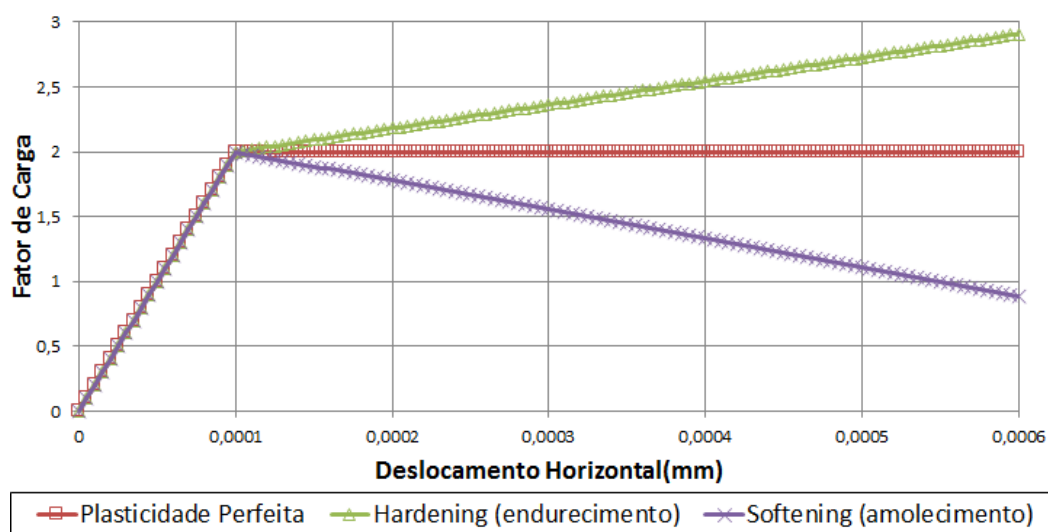


Figura 5.6: Rankine: Curvas Fator de Carga x Deslocamento Horizontal para variação do módulo inelástico.

A partir da observação dos resultados apresentados na figura 5.6, para as simulações, verifica-se claramente que o modelo de Rankine respondeu corretamente

quando submetido aos comportamentos de endurecimento, amolecimento e de plasticidade perfeita do material, em virtude do ajuste do módulo inelástico de encruamento isotrópico.

A resposta do modelo está diretamente associada à lei inelástica adotada, com as funções dependendo de um conjunto de parâmetros que devem ser prescritos para descrever o comportamento do material. Com o modelo de Drucker-Prager, buscou-se ilustrar a lei inelástica exponencial implementada no sistema. Os resultados são apresentados na figura 5.7.

A função inelástica exponencial possui a e b como parâmetros (equação 4.2). Portanto, a análise do comportamento do material é realizada primeiramente mantendo-se b constante e variando-se a e posteriormente procede-se mantendo a constante e variando-se b .

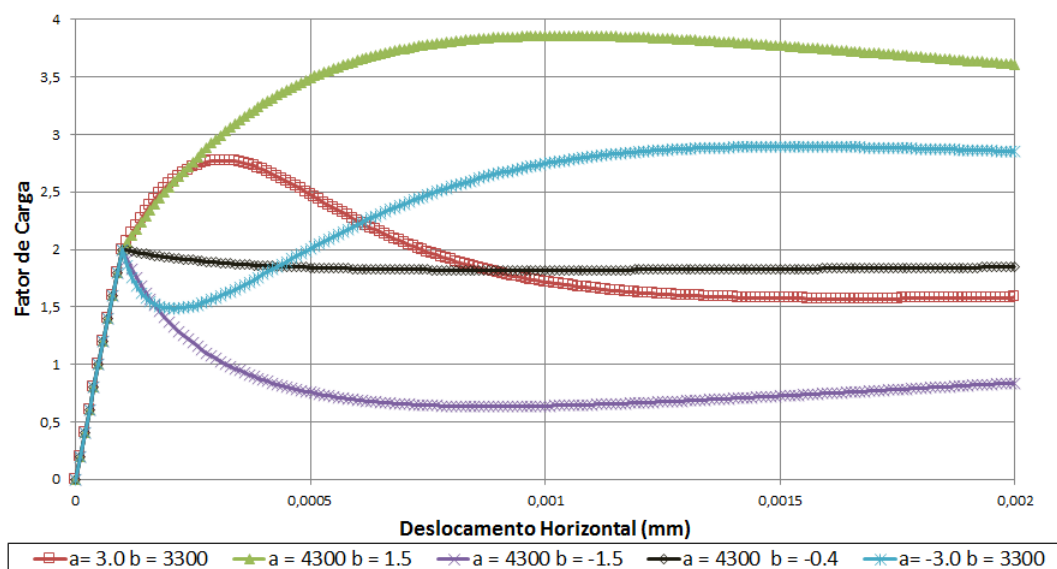


Figura 5.7: Drucker-Prager: Curvas Fator de Carga x Deslocamento Horizontal para variações dos parâmetros da lei inelástica exponencial.

Na figura 5.7, observa-se diferentes curvas obtidas pela variação dos parâmetros a e b da equação 4.2. Foram adotados valores abstratos para os parâmetros e com estas variações, buscou-se ilustrar tanto o comportamento de amolecimento quanto o de endurecimento, além de apresentar a sensibilidade das curvas aos parâmetros.

A partir da análise das respostas apresentadas na figura 5.7, pode-se observar que tanto o parâmetro a quanto o b podem representar o amolecimento e o endurecimento. Entretanto, pode-se verificar que o parâmetro b aparenta ser mais sensível que o parâmetro a , influenciando de maneira acentuada no crescimento ou decréscimo do fator de carga.

Com o modelo de von Mises são apresentados os comportamentos da chapa tracionada quando submetida aos variados tipos de encruamento (misto, isotrópico e cinemático). As trajetórias de equilíbrio obtidas para as curvas “Fator de carga x Deslocamento Horizontal” da extremidade da chapa são vistas na figura 5.8.

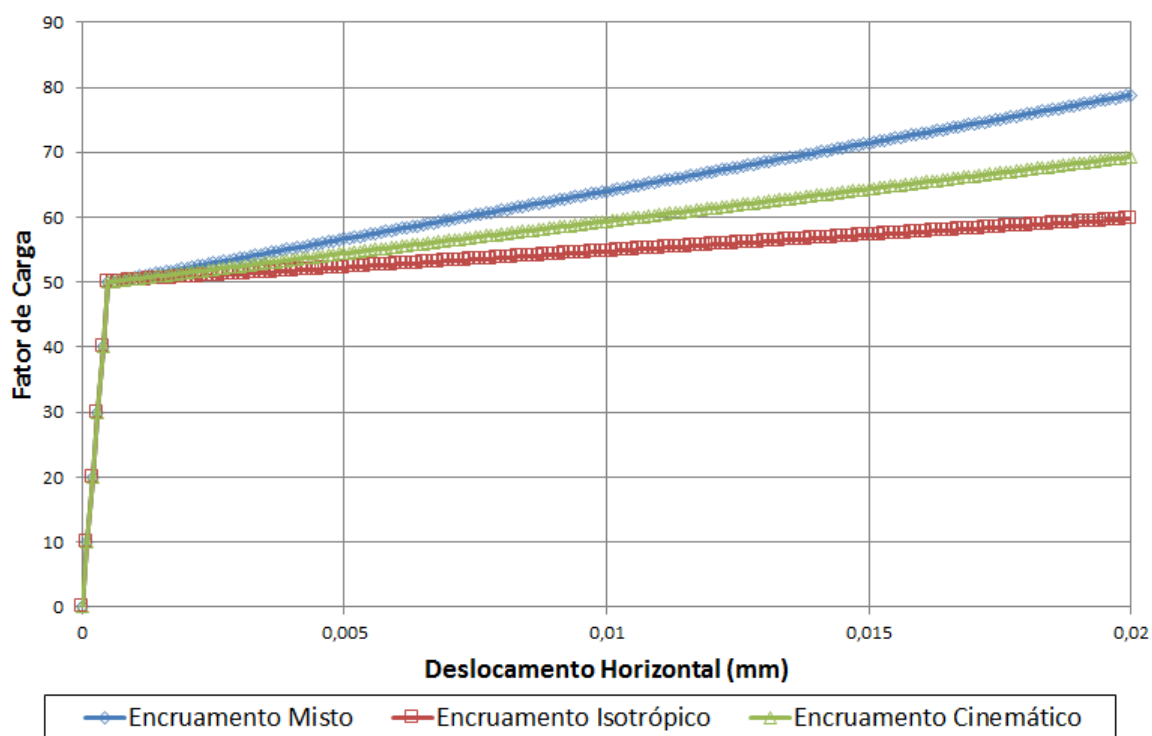


Figura 5.8: Von Mises: Curvas Fator de Carga x Deslocamento Horizontal para encruamento isotrópico, cinemático e misto

É possível observar a partir das curvas obtidas, que, quando é usado o encruamento misto, as tensões, após atingido o escoamento, alcançam um patamar maior para um mesmo nível de deformação em comparação com as curvas com encruamento isotrópico e cinemático. Este resultado era esperado, uma vez que o módulo

de encruamento misto é igual a soma dos outros dos módulos isotrópico e cinemático ($H + K = 1500MPa$).

Outro aspecto a ser observado é que para os três tipos de encruamento, as trajetórias de equilíbrio apresentam respostas semelhantes para um carregamento monotônico. No gráfico da figura 5.8, observa-se que quanto maior o módulo de encruamento adotado maior a inclinação da reta que representa o ramo após atingida a tensão de escoamento.

Uma melhor análise pode ser feita em termos da superfície de escoamento. As superfícies de escoamento foram geradas a partir dos valores das tensões obtidos no último passo da análise. Na figura 5.9, pode-se observar claramente a superfície elíptica de escoamento inicial com critério de von Mises, antes que qualquer carregamento fosse aplicado. Após a aplicação do carregamento, têm-se três outras superfícies, uma para cada tipo de encruamento (isotrópico, cinemático e misto) geradas a partir da implementação.

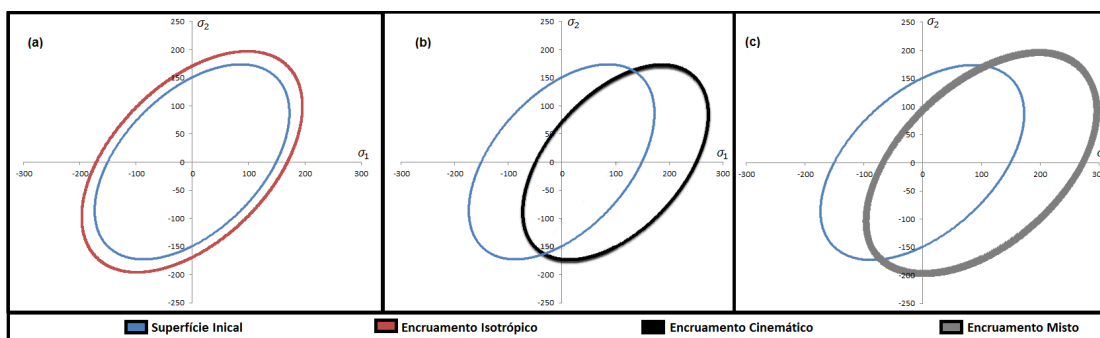


Figura 5.9: Superfície de escoamento de von Mises.

Os resultados obtidos mostraram que, quando aplicado o encruamento isotrópico, a superfície sofreu expansão uniforme, mantendo a sua posição de centro inalterada. Quando aplicado o encruamento cinemático, a superfície manteve sua forma e foi transladada na direção de aplicação da carga. A partir da consideração do módulo de encruamento misto no problema, a superfície teve tamanho alterado (conforme

encruamento isotrópico) e também sofre translação (conforme encruamento cinemático).

A figura 5.10 apresenta os resultados obtidos com o modelo de Ottosen, um critério de falha de quatro parâmetros válido para uma grande variedade de combinação de tensões, e desenvolvido para reproduzir matematicamente as relações tensão-deformação para o concreto. Neste modelo, buscou-se apresentar o comportamento das leis inelásticas em um ensaio de compressão uniaxial.

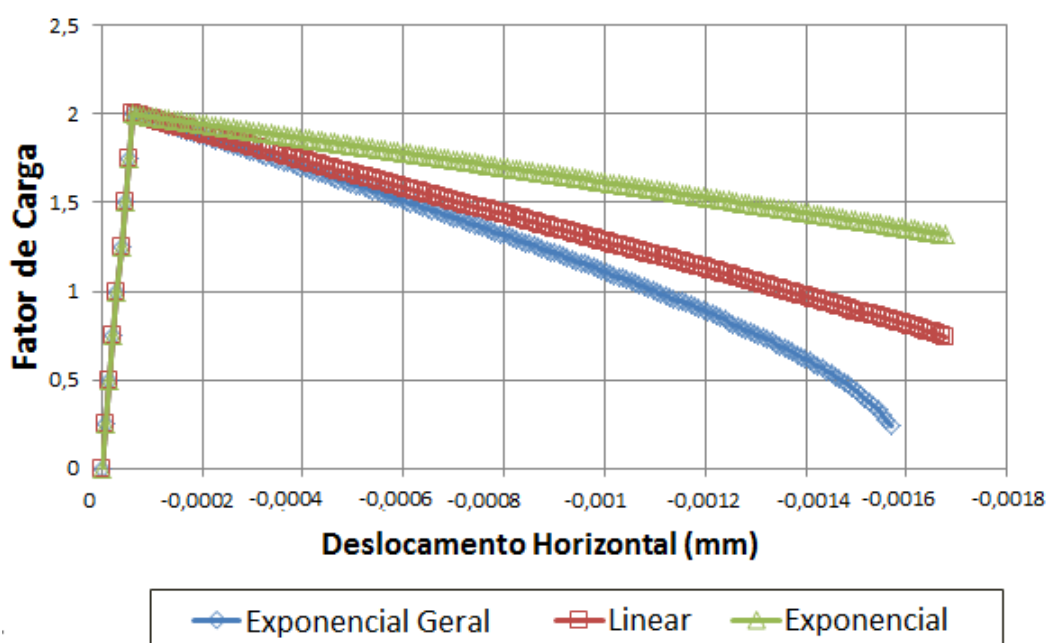


Figura 5.10: Ottosen: Curvas Fator de Carga x Deslocamento Horizontal para variação da lei inelástica em ensaio de compressão uniaxial.

Deve-se apontar que as condições de geometria e contorno apresentadas anteriormente foram mantidas, alterando o sentido da carga (passando de tração para compressão) e em todas as análises buscou-se representar o amolecimento do material. Os resultados apresentados na figura 5.10 mostram que todas as leis inelásticas adotadas foram capazes de reproduzir o amolecimento do material através do ajustes dos parâmetros nas curvas.

5.2 Compressão Diametral

O ensaio de compressão diametral é comumente usado para a determinação da resistência à tração do concreto e consiste em aplicar carregamentos diametralmente opostos em um corpo de prova cilíndrico a fim de solicitá-lo à tração indireta em sua região central. Neste sentido, critérios de plasticidade podem ser adotados para se determinar a tensão de ruptura. Para tanto, foi utilizado o modelo de Drucker-Prager com a aproximação interna da superfície de Mohr-Coulomb. A geometria do modelo, bem como as condições de carregamento estão especificados na figura 5.11.

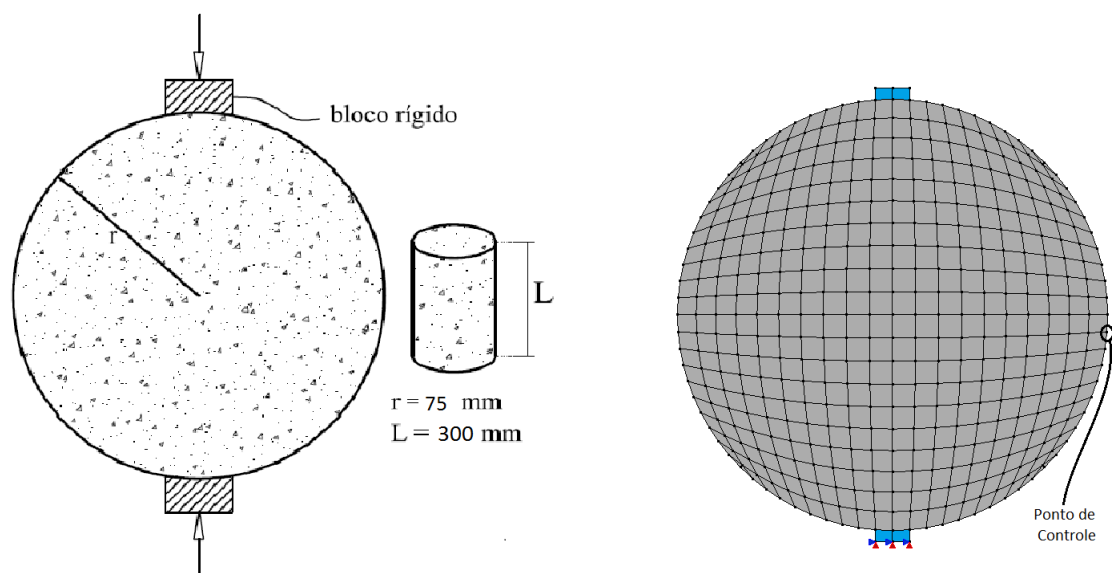


Figura 5.11: Configuração geométrica e malha de elementos finitos do modelo de compressão diametral.

Os parâmetros do material estão apresentados na tabela 5.1 e foram baseados no estudo apresentado por Cecilio (2011).

Tabela 5.1: Parâmetros do Material

Módulo de Elasticidade	$E = 20000,0 \text{ MPa}$
Coefficiente de Poisson	$\nu = 0,20$
Coesão	$c = 9,2376 \text{ kPa}$
Módulo Inelástico	1000 MPa
Ângulo de atrito interno (ϕ)	20°

Na análise não-linear, foi adotado o método de controle direto de deslocamento, com incremento de 0,00002179 mm, controlando o deslocamento horizontal do nó destacado na figura 5.11, tolerância para convergência de 5×10^{-3} e carga de referência $P = 60$ KN. O modelo foi analisado em estado plano de deformação.

O resultado das tensões no centro do disco, enquanto o material se encontra na zona elástica, pode ser obtido analiticamente em função da carga aplicada, P , do diâmetro do disco, D , e da espessura do disco, t , através da equação

$$\sigma_t = \frac{2P}{\pi DL} \quad (5.1)$$

A simulação não foi capaz de descrever o comportamento inelástico do corpo de prova. Entretanto, a simulação conseguiu representar o comportamento do material na zona elástica. A figura 5.12 apresenta o momento em que aparecem deformações residuais (passo 111) na peça, representada pelo variável de fluxo plástico acumulado, ilustrando assim o limite elástico do material.

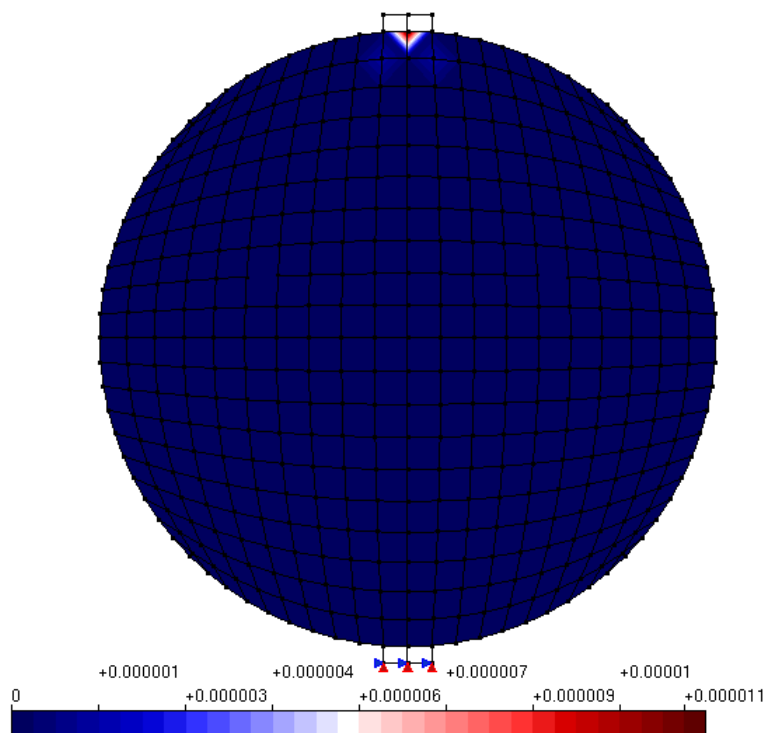


Figura 5.12: Início das deformações plásticas acumuladas.

A distribuição de tensões no disco está apresentada na figura 5.13, em que se observa claramente a condição de tração indireta do ensaio.

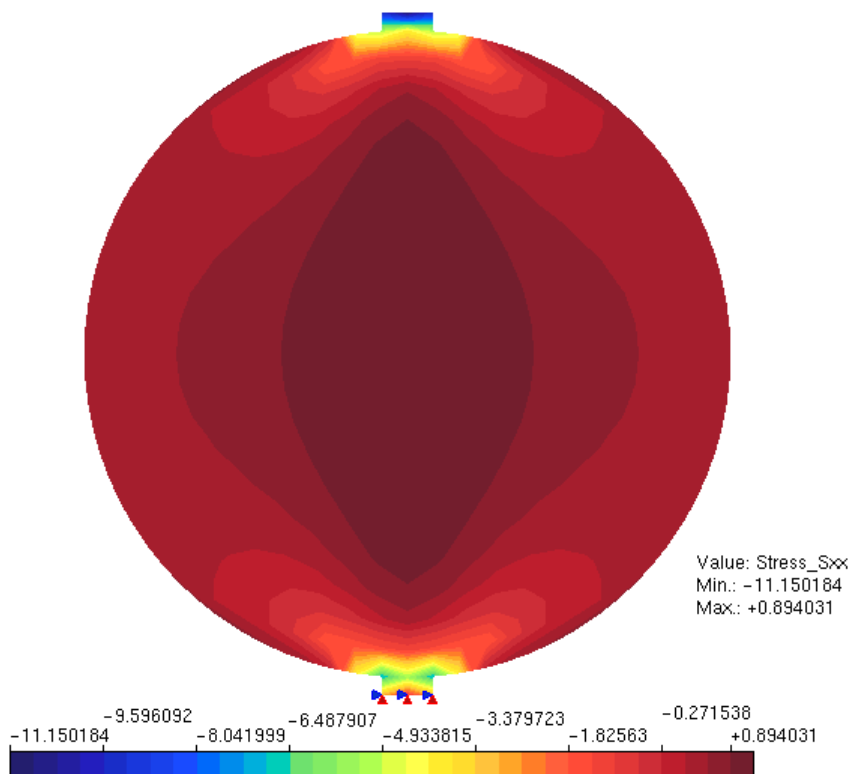


Figura 5.13: Distribuição de tensões σ_x .

A tensão limite de tração no regime elástico, segundo a equação 5.2 nas condições apresentadas, é de

$$\sigma_t = \frac{2 \times 60.000}{\pi \times 300 \times 150} = 0,848 MPa \quad (5.2)$$

O valor máximo obtido para a tensão, apresentado na figura 5.13, é de 0,894 MPa, apresentando uma excelente concordância com a solução analítica. As figuras 5.14 e 5.15 apresentam as distribuições de tensões normalizadas ao longo do eixo y do corpo de prova. Os gráficos das figuras 5.14 e 5.15 ressaltam o estado de tração dominante no centro do corpo de prova.

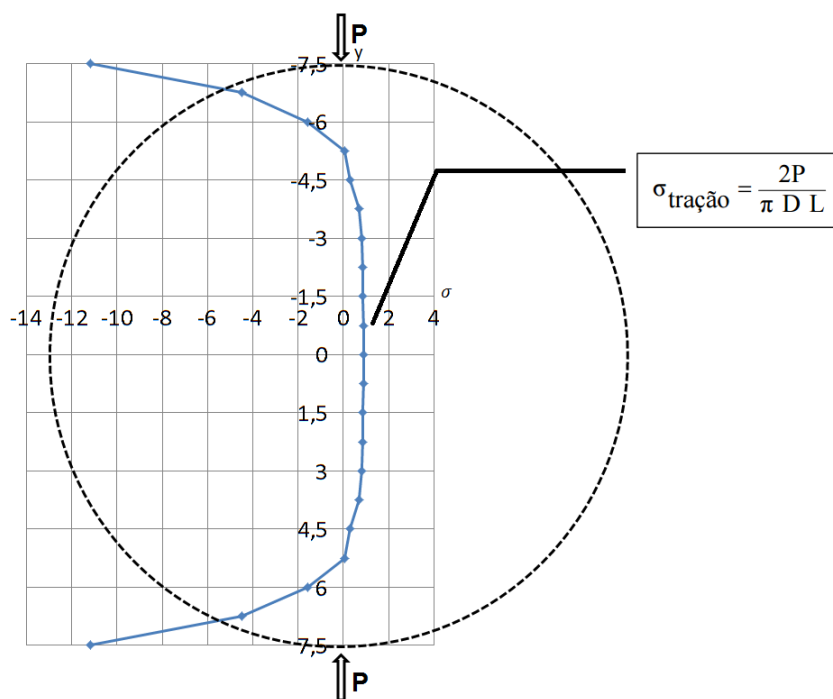


Figura 5.14: Distribuição de tensões σ_x ao longo do eixo y .

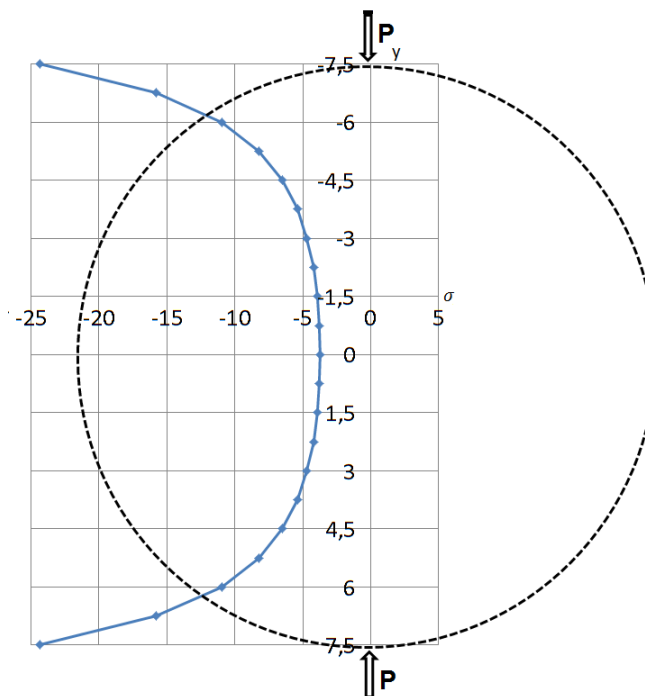


Figura 5.15: Distribuição de tensões σ_y ao longo do eixo y .

5.3 Flexão Pura de uma Barra

Apresenta-se uma viga metálica contendo um entalhe em V de 90° e sujeita à flexão pura. A definição da geometria e da malha de elementos finitos, bem como os carregamentos são vistos na figura 5.16. Esta barra foi estudada por Green (1953) *apud* Souza Neto et al. (2008), que propôs um limite de carregamento para este problema.

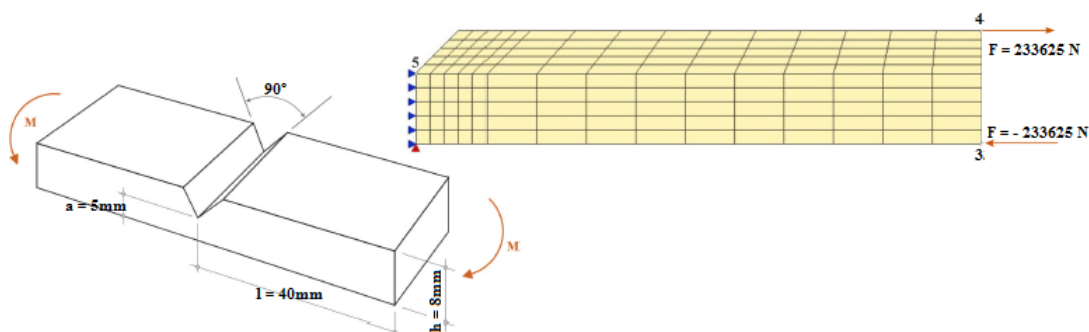


Figura 5.16: Flexão de uma barra com entalhe em V: definição do problema, condições de geometria e discretização da malha de elementos finitos. Adaptado de Souza Neto et al. (2008).

O limite do momento por unidade de largura da barra, obtido por Green (1953) *apud* Souza Neto et al. (2008), para um ângulo de entalhe de 90° é definido por:

$$M_u = 0,623ca^2 \quad (5.3)$$

onde a é a espessura da barra medida a partir do entalhe e c é a resistência ao cisalhamento, definida como

$$c = \frac{\sigma_0}{2} \quad (5.4)$$

em que σ_0 é a tensão de escoamento do material que, para esta análise, tem valor de 240 MPa.

Substituindo a equação 5.4 em 5.3 e utilizando o valor prescrito para a tensão de escoamento e as medidas que definem a geometria da barra, obtém-se o valor limite

para o momento, dado por

$$M_u \approx 1869 N.m \quad (5.5)$$

Da equação do momento

$$M_u = Fh \quad (5.6)$$

em que F é a força aplicada e h é a altura da barra, obtemos

$$F = 233625 N \quad (5.7)$$

que é o carregamento aplicado na modelagem deste problema.

Devido à simetria existente no problema, apenas a metade da barra foi discretizada. As condições de carregamento são impostas pela aplicação de um binário de forças, prescritas nos nós 3 e 4. Na modelagem da estrutura foram adotados os seguintes parâmetros para o material: $E_0 = 210000$ MPa e $\nu = 0,3$.

A análise procedeu-se com o ajuste dos parâmetros de encruamento para que o comportamento de plasticidade perfeita fosse representado, adotando-se valor zero para os módulos isotrópico e cinemático. Na solução do problema fisicamente não linear, foram adotados elementos finitos quadrilaterais de quatro nós e o método de controle de deslocamento generalizado, com fator de carga de $2,50 \times 10^{-5}$ e tolerância de 1×10^{-3} . O objetivo desta análise é comparar os resultados obtidos com os modelos constitutivos elastoplásticos de von Mises e Tresca com a solução proposta por Green (1953) *apud* Souza Neto et al. (2008). As trajetórias de equilíbrio com as soluções estão apresentadas na figura 5.17.

O valor máximo para o momento de flexão M/ca^2 obtido com a aplicação do modelo de von Mises foi de aproximadamente 0,630246, sendo 1,163% maior que o limite estabelecido por Green (1953) *apud* Souza Neto et al. (2008). O modelo de Tresca apresentou um valor de 0,657861 para o limite, sendo 5,595% maior que o limite, permitindo concluir que ambos os modelos implementados conseguiram representar adequadamente o comportamento de plasticidade perfeita.

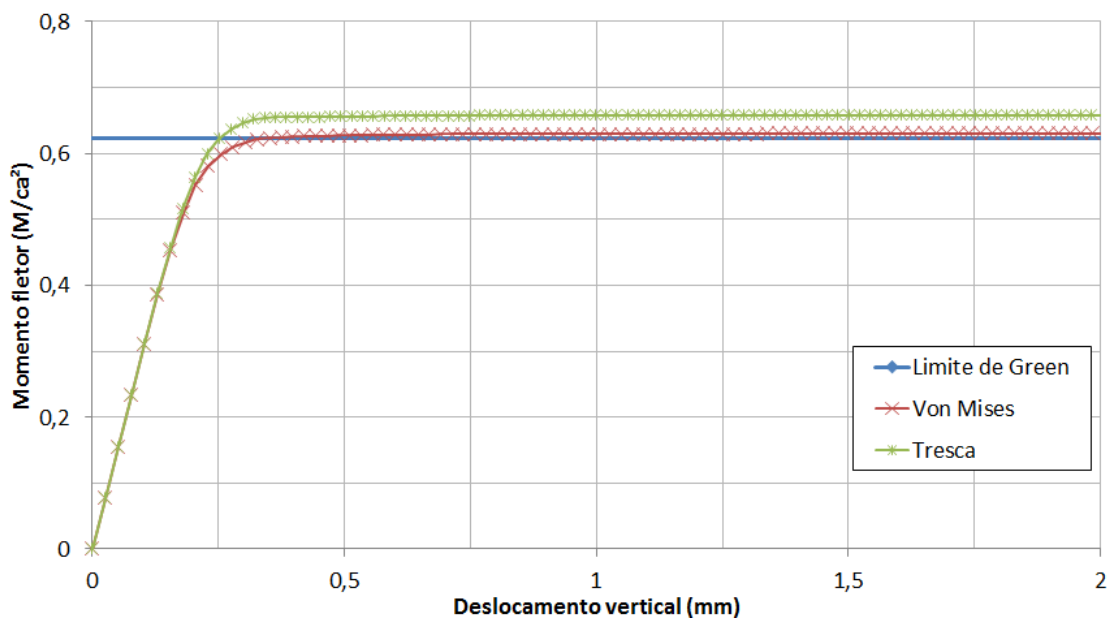


Figura 5.17: Comparação entre o resultado de Green (1953) e os resultados obtidos pelo modelo de von Mises e Tresca.

O contorno do fluxo plástico obtido na solução numérica, utilizando o modelo de von Mises, está representado na figura 5.18 em paralelo com os resultados obtidos pelo modelo de elementos finitos de Souza Neto et al. (2008). O traçado do contorno das deformações plásticas ilustra uma concentração de deformações próximas à trinca e ilustra o mecanismo de colapso da barra.

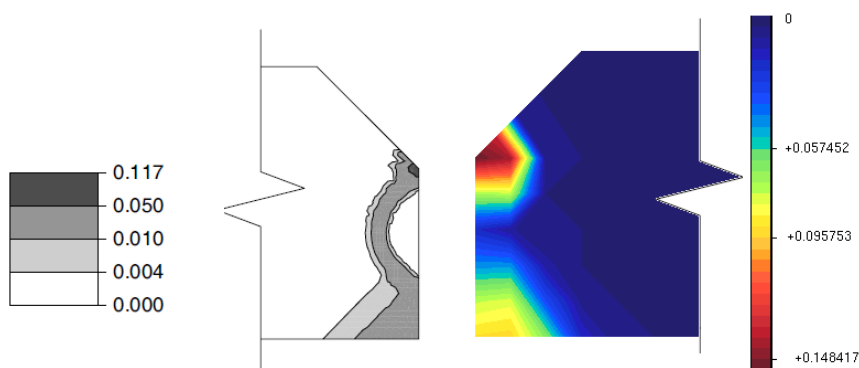


Figura 5.18: Mecanismo de colapso da viga obtido pelo modelo de elementos finitos de Souza Neto et al. (2008), à esquerda, e pelo modelo de von Mises implementado, à direita.

5.3.1 Algoritmo de Retorno e Módulo Tangente Consistente

Os algoritmos de retorno implementados são apresentados em um exemplo de flexão pura. Este exemplo ilustra todos os algoritmos implementados e também a utilização do operador tangente consistente.

Para esta análise foi utilizada a modelagem realizada no exemplo de flexão pura com o modelo de von Mises. A tabela 5.2 apresenta os dados relativos ao último passo da análise do modelo para os algoritmos de retorno “Closest-Point Projection” com operador tangente contínuo, “Cutting-Plane” e “Closest-Point Projection” com operador tangente consistente.

Tabela 5.2: Dados do último passo da análise

Algoritmo de Retorno	Closest-Point	Cutting-Plane	Operador Tangente
Processamento (segundos)	79,332	75,528	88,728
Fator de Carga ($\times 10^{-3}$)	1,0087699	1,008884822	1,009571372
Iterações	2	2	2

Analisando a tabela 5.2, podemos perceber que o algoritmo de retorno “Closest-Point Projection” com uso do operador tangente numericamente consistente apresentou os melhores valores com relação à convergência, apresentando um estágio de carga mais avançado que os outros dois algoritmos. A figura 5.19 apresenta o console de processamento com o uso deste o algoritmo de retorno.

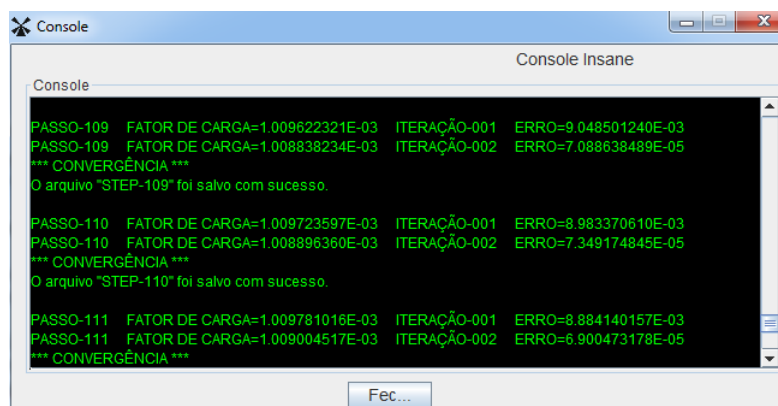


Figura 5.19: Console de processamento. Tração direta com uso do “Closest-Point Projection” e operador tangente consistente.

Analisando console de processamento, pode-se observar que este algoritmo levou 10 passos a menos para atingir o mesmo valor de carga que os outros dois algoritmos atingiram no passo final (figura 5.19). Quanto ao tempo de análise (levando cerca de 88,728s) e número de iterações, esta técnica mostrou-se inferior às outras.

A tabela 5.3 apresenta a quantidade de iterações até que fosse atingida a convergência para os passos 1, 40, 75 e 120.

Tabela 5.3: Tabela de convergência

Passo	Closest-Point	Cutting-Plane	Operador Tangente
1	3 iterações	3 iterações	3 iterações
40	3 iterações	3 iterações	4 iterações
75	2 iterações	2 iterações	4 iterações
120	2 iterações	2 iterações	2 iterações

Os algoritmos de retorno sem a utilização do módulo tangente apresentam comportamentos semelhantes durante a análise, variando muito pouco a quantidade de iterações e o tempo de processamento durante os passos.

Apesar de aparentar ser mais vantajosa a utilização do algoritmo de retorno com módulo tangente consistente, seu uso em análises de estruturas mais complexas fez com que aparecessem instabilidades numéricas. Em algumas situações, o processamento foi interrompido subitamente.

Por essas conclusões, sempre que possível, durante as análises, foi utilizado o algoritmo de retorno “Closest-Point Projection” com módulo tangente contínuo, pois este apresentou maior estabilidade entre todas as opções disponíveis.

5.4 Viga em Balanço

Este exemplo trata do colapso de uma viga em balanço. As características geométricas, as condições de contorno e as malhas utilizadas nos modelos estão ilustradas na figuras 5.20 e 5.21.

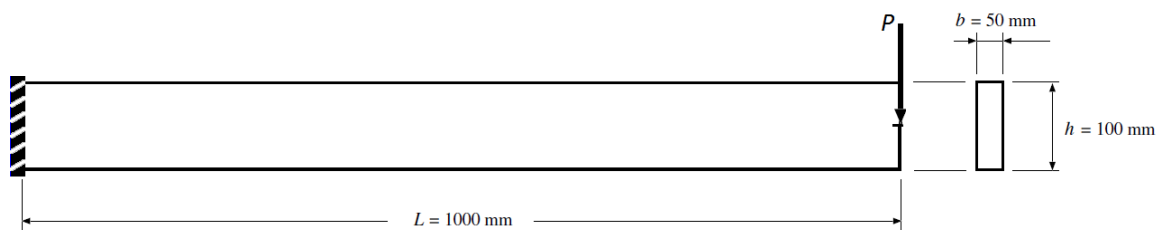


Figura 5.20: Geometria da viga em balanço submetida a carregamento na extremidade livre.

Nesta simulação, foram adotadas duas malhas distintas, variando-se o tipo de elemento (Q8 na figura 5.21-a e Q4 na 5.21-b).

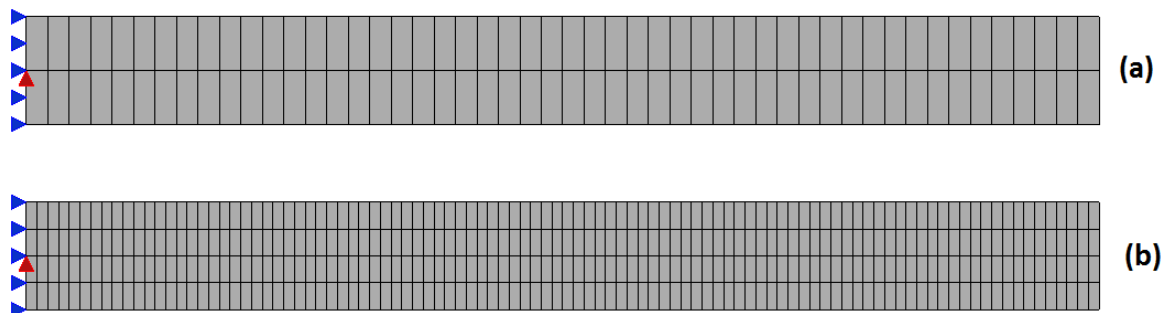


Figura 5.21: Malhas de elementos finitos para a viga em balanço submetida a carregamento na extremidade livre (a) Malha de elementos Q8. (b) Malha de elementos Q4.

As propriedades adotadas para o material estão na tabela 5.4.

Tabela 5.4: Parâmetros do Material

Módulo de Elasticidade	$E = 210GPa$
Coefficiente de Poisson	$\nu = 0,3$
Tensão de escoamento	$\sigma_y = 0.24GPa$

Lubliner (1990) fornece de forma detalhada a solução analítica para a carga limite de colapso da viga apresentada neste problema, que pode ser obtida por

$$F_{limite} = \frac{\sigma_y b h^2}{4L} \quad (5.8)$$

em que b e h são a largura e a altura da seção transversal, respectivamente, e L o

comprimento total da viga. Para a geometria e propriedades do material apresentados, o limite de carga analítico é

$$F_{limite} = \frac{0,24 \times 0,05 \times (0,1)^2}{4 \times 1,0} = 30kN \quad (5.9)$$

A partir destas informações, foi utilizado o modelo elastoplástico de von Mises, considerando plasticidade perfeita, análise sob condições de Estado Plano de Tensão (EPT), método de controle de deslocamento generalizado com fator de carga inicial de 0,015 e tolerância de 1×10^{-3} .

A figura 5.22 mostra a solução numérica obtida a partir da trajetória de equilíbrio “Carga aplicada \times Deslocamento vertical” do nó central da extremidade livre da viga. Para o modelo de elementos finitos de quatro nós, a carga alcançada no último passo foi de $F = 31,23kN$, apresentando um erro relativo de 4,11%. O modelo de elementos finitos de oito nós apresentou um nível de carga de $F = 30,47kN$, resultado que está em concordância com o limite teórico estabelecido, com um erro relativo de 1,57%.

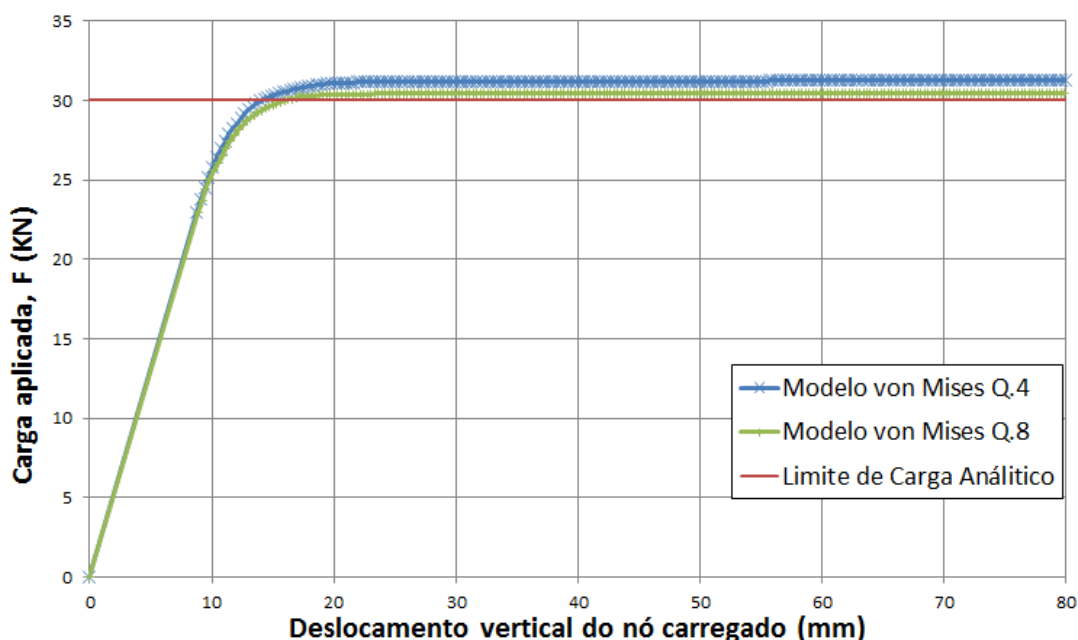


Figura 5.22: Carga Aplicada x Deslocamento Vertical para a viga em balanço.

Para otimizar o processo de solução, foi utilizado um artifício numérico durante

o ramo elástico. Este artifício pode ser observado no gráfico da figura 5.22, onde o ramo elástico é representado por um passo de carga correspondendo a 50 vezes o incremento do fator de carga.

A configuração deformada da viga quando a mesma atinge a carga de colapso e o contorno da variável de fluxo plástico acumulado, α , são ilustrados na figura 5.23.

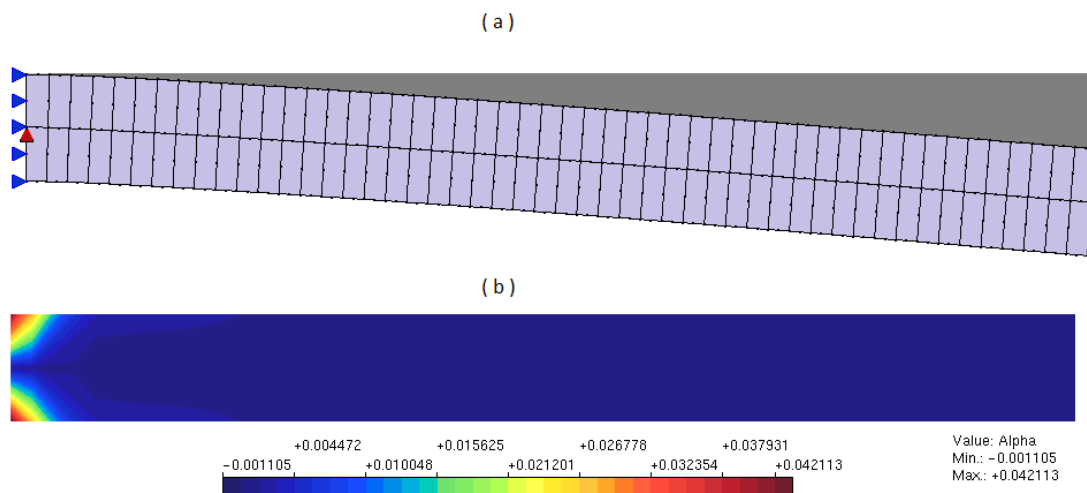


Figura 5.23: Viga engastada em balanço (a) Malha deformada e (b) Fluxo plástico.

Pode-se observar, na figura 5.23-b, a concentração de deformações plásticas na região próxima ao engaste, indicando o local onde ocorre a plastificação do material.

A solução elástica para a tensão máxima solicitante e para a flecha máxima na linha neutra para este modelo é dada por

$$\sigma_x = F \frac{PL}{I} y \quad (5.10)$$

$$y_{\text{máx}} = F \frac{PL^3}{3EI} \quad (5.11)$$

onde F é o fator de carga. Calculando os valores de σ_x e $y_{\text{máx}}$ para um fator de carga $F = 0,51$, obtém-se

$$\sigma_x = 0,51 \times \frac{30 \times 100}{5 \times 10^3} \times 12 \times 5 = 18,36 \frac{KN}{cm^2} = 183,6 MPa \quad (5.12)$$

$$y_{\text{máx}} = 0,51 \times \frac{30 \times 100^3}{3 \times 21.10^3 \times 5 \times 10^3} \times 12 = 0,583 cm \quad (5.13)$$

As figuras 5.24 e 5.25 apresentam os resultados obtidos com a modelagem numérica:

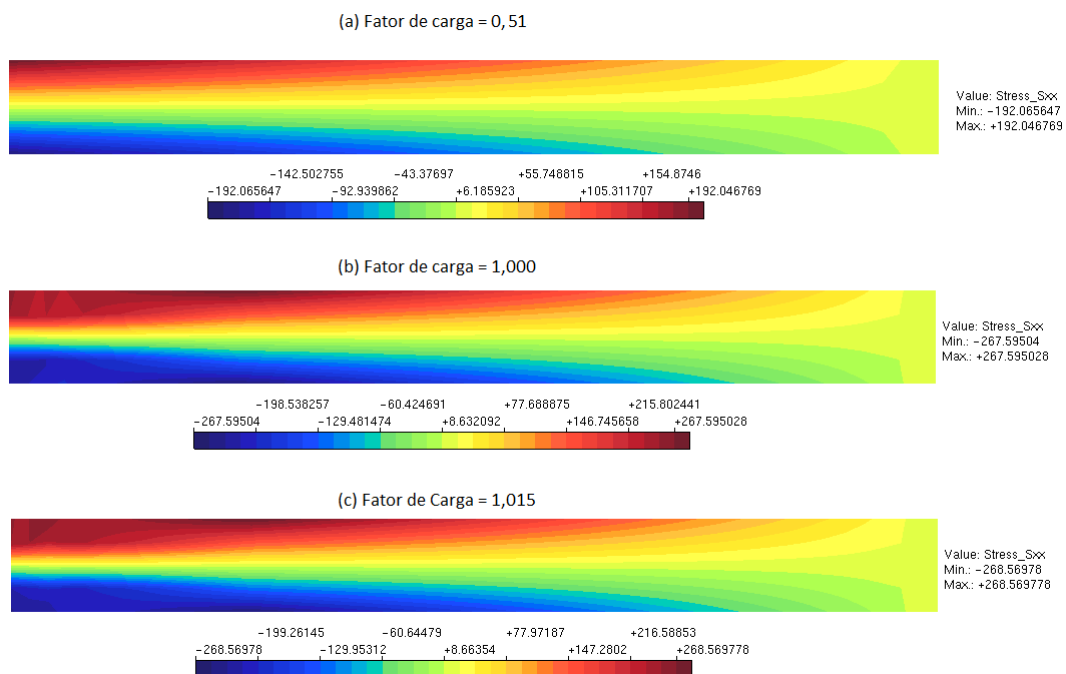


Figura 5.24: Distribuição de tensões.

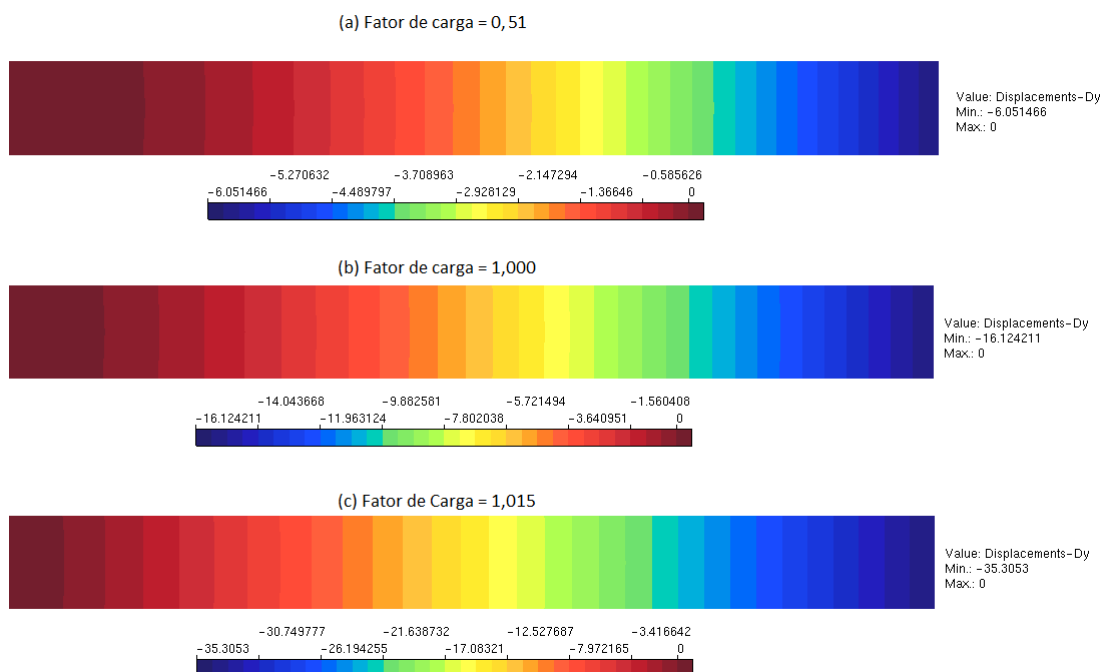


Figura 5.25: Evolução dos deslocamentos na direção vertical ao longo do carregamento.

O valor da tensão obtido no regime elástico através da análise numérica foi $\sigma_x = 192MPa$, apresentando um erro de 4,57%. A deflexão máxima medida no INSANE foi de $y_{\text{máx}} = 0,605cm$, com erro de 3,77% quando comparado à solução analítica.

A figura 5.26 mostra a solução numérica obtida através do critério de Drucker-Prager. Foram utilizados os mesmos parâmetros e a malha de elementos quadriláteros de oito nós da análise anterior. O objetivo desta análise é demonstrar que o critério de Drucker-Prager pode ser entendido como uma generalização do critério de von Mises, e por isso, ambos irão apresentar os mesmos resultados, entretanto, para que isso ocorra, os ângulos de atrito interno e dilatância devem ser considerados nulos.

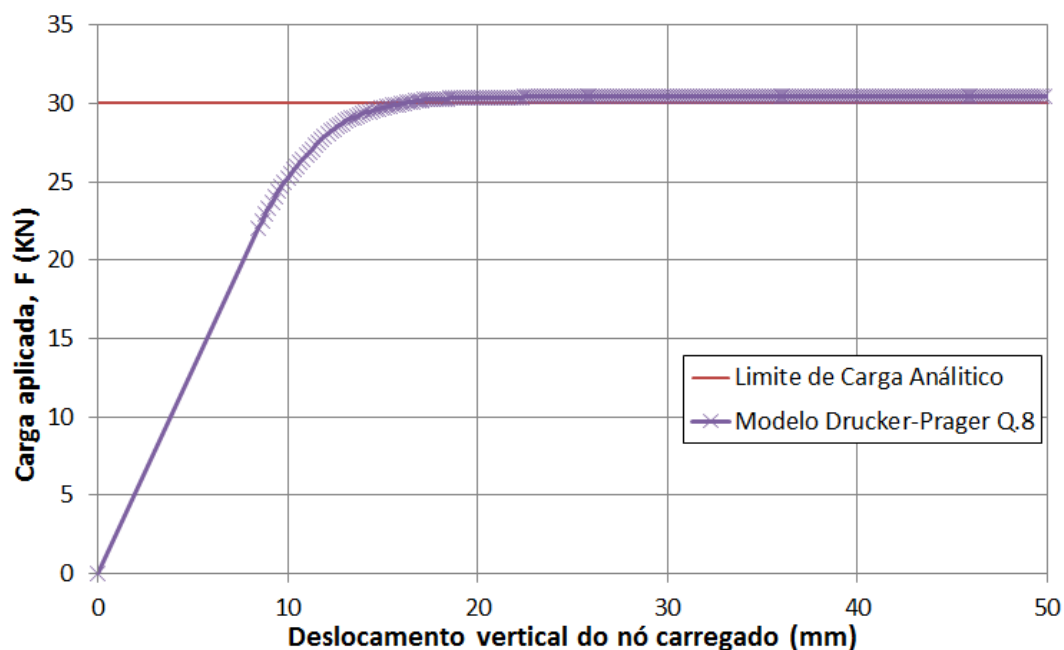


Figura 5.26: Carga Aplicada x Deslocamento Vertical para a viga em balanço utilizando o modelo de Drucker-Prager.

A solução numérica com o modelo Drucker-Prager apresentou um nível de carga de $F = 30,47kN$, o mesmo resultado obtido na análise com o critério de von Mises e malha Q8, mostrando que o critério, sensível à pressão hidrostática, é um caso mais geral do critério de von Mises, como já foi discutido na seção 2.3.5.

5.5 Fundação em Bloco Rígido

O colapso de uma sapata corrida foi analisado por Souza Neto et al. (2008). O problema consiste em uma base retangular, com uma largura B e comprimento L , apoiada sobre o solo (assumido como um meio infinito), submetida a uma pressão vertical P . A figura 5.27 ilustra a geometria do problema.

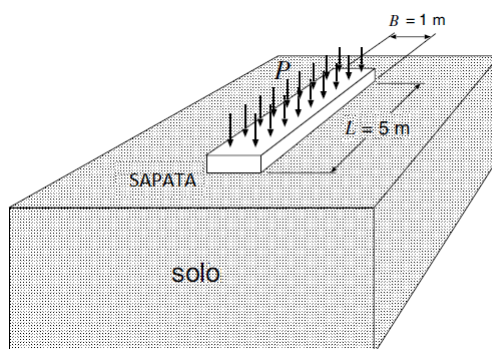


Figura 5.27: Sapata corrida: definição do problema. Adaptado de Souza Neto et al. (2008).

O objetivo desta análise é determinar a pressão sob a qual irá ocorrer o colapso da base. Os parâmetros do material estão na tabela 5.5.

Tabela 5.5: Parâmetros do Material

Módulo de Elasticidade	$E = 10^7 kPa$
Coefficiente de Poisson	$\nu = 0,48$
Coesão	$c = 490 kPa$

O solo foi modelado considerando-se os critérios de Drucker-Prager e Mohr-Coulomb, que são sensíveis à pressão hidrostática e, portanto, adequados a este tipo de análise. Devido à simetria, apenas a metade da seção transversal foi discretizada, utilizando uma malha de 140 elementos quadrilaterais de oito nós e análise sob condições de Estado Plano de Tensão (EPT). Na solução, foi adotado o método de controle direto de deslocamento com incremento de deslocamento vertical de $3.75 \times 10^{-7} m$ no ponto de simetria (conforme indicado na figura 5.28) e com tolerância de 1×10^{-3} . Para simular o domínio infinito, a malha de elementos finitos

foi discretizada com profundidade, largura e altura de 5,0 m conforme a figura 5.28. Considerou-se também que a sapata é rígida e sem atrito na interface solo/sapata.

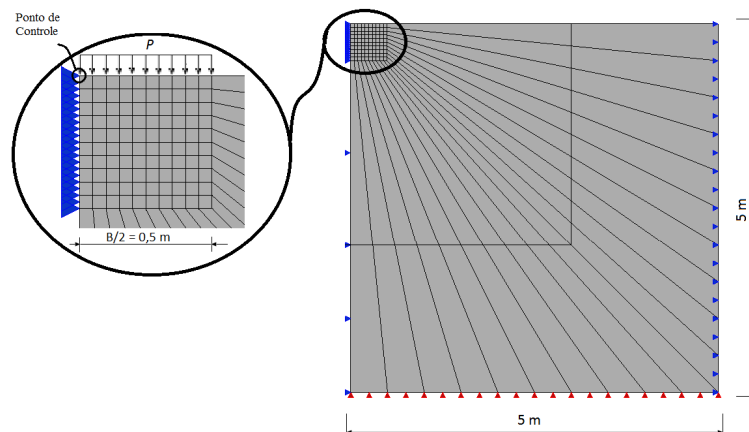


Figura 5.28: Sapata corrida: Malha de elementos finitos.

Somente a lei associativa ($\phi = \psi = 20$) foi considerada durante a análise. A figura 5.29 apresenta a comparação entre o resultado obtido com o critério de Mohr-Coulomb e a solução estabelecida por Prandtl (Souza Neto et al., 2008), que é dada por:

$$\frac{P_{lim}}{c} \approx 14,8 \quad (5.14)$$

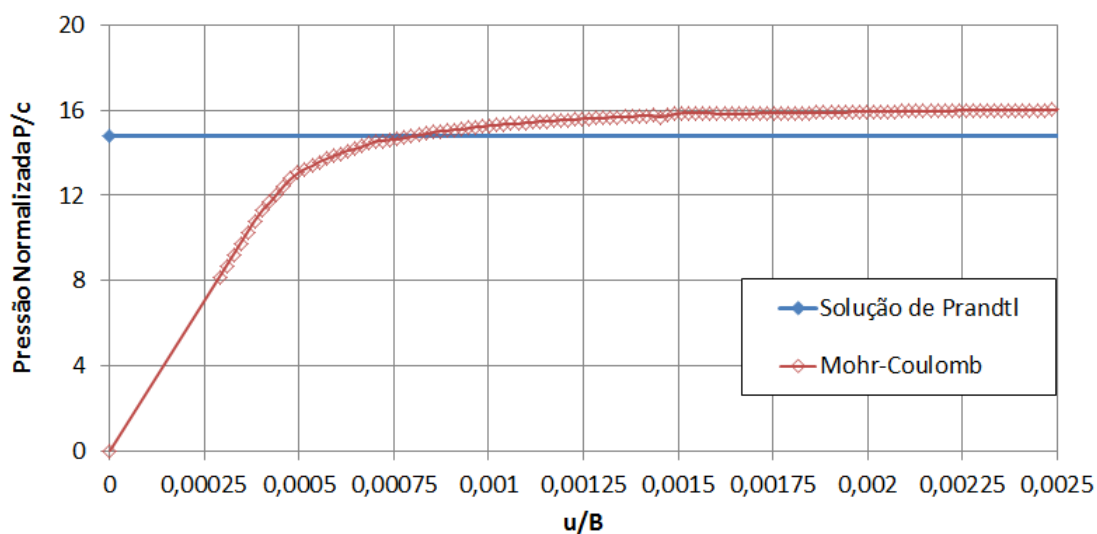


Figura 5.29: Bloco rígido. Curva Carga Aplicada x Deslocamento Vertical Normalizado para o modelo de Mohr-Coulomb.

O deslocamento obtido, utilizando o modelo de Mohr-Coulomb, foi normalizado e tem valor máximo $u/B = 0,0025$. A carga limite obtida para o modelo foi de $P_{lim}/c = 16,05$, 8,49% acima da solução apresenta por Prandtl.

Também foram utilizadas as três aproximações do modelo de Drucker-Prager para o modelo de Mohr-Coulomb (cone externo, cone interno e estado plano de deformação) e o deslocamento normalizado é $u/B = 0,004$. Os resultados estão apresentados na figura 5.30.

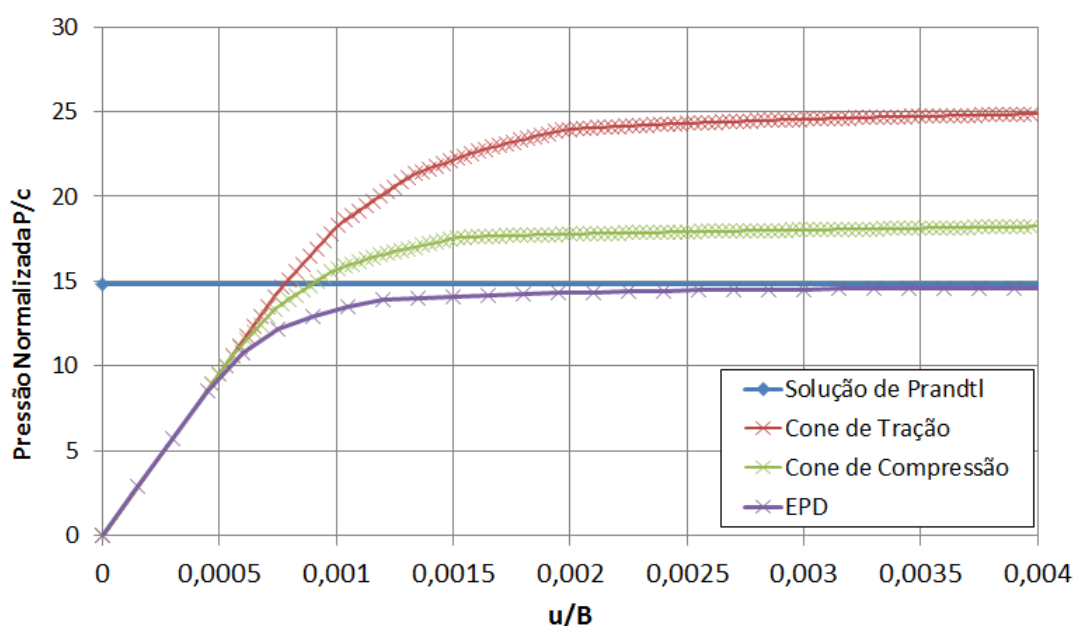


Figura 5.30: Bloco rígido. Curva Carga Aplicada x Deslocamento Vertical Normalizado para o modelo de Drucker-Prager.

O limite de carga normalizado obtido a partir do modelo numérico, utilizando a aproximação pelo cone externo, é aproximadamente $P_{lim}/c = 25,251$, um resultado 70% acima da solução proposta por Prandtl. A pressão normalizada prevista pelo cone interno foi de $P_{lim}/c = 18,400$ (24,3% acima da solução de Prandtl). O valor obtido em condições de estado plano de deformação foi de $P_{lim}/c = 14,754$, muito próximo do limite estabelecido por Prandtl, apresentando um erro de 0,31%.

5.6 Viga em Balanço com Seção Variável

Este exemplo traz a análise do colapso de uma viga em balanço com seção transversal variável, e, com carga de cisalhamento aplicado na extremidade livre. A figura 5.31 ilustra a geometria da viga e a malha de elementos finitos adotada na análise. A solução numérica procedeu-se utilizando os modelos elastoplásticos de Tresca considerando plasticidade perfeita e análise sob condições de Estado Plano de Deformação (EPD).

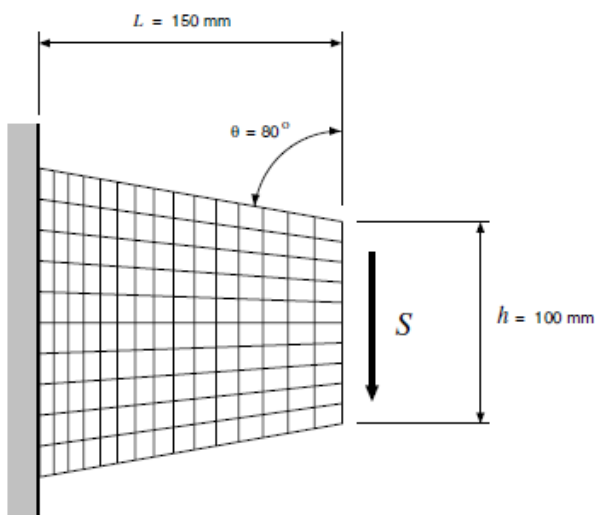


Figura 5.31: Viga em Balanço com Seção Variável. Geometria e malha de elementos finitos (Souza Neto et al., 2008).

A tabela 5.6 apresenta os parâmetros adotados para esta análise.

Tabela 5.6: Parâmetros do Material

Módulo de Elasticidade	$E = 210,0 \text{ GPa}$
Coefficiente de Poisson	$\nu = 0,3$
Tensão de Escoamento	$\sigma_y = 0,24 \text{ GPa}$

Green (1954) *apud* Souza Neto et al. (2008) obteve a solução analítica para cargas limites em estruturas com esta configuração geométrica. Para a estrutura em

análise, é proposto o seguinte limite normalizado para a carga:

$$\frac{S_u}{c} = 0,775 \quad (5.15)$$

onde c é a resistência ao cisalhamento (para o modelo de Tresca é dada por $c = \sigma_y/2$).

Na análise de elementos finitos realizada, a carga é aplicada de forma incremental até que ocorra o colapso. A figura 5.32 apresenta o diagrama “Deslocamento vertical \times Carga aplicada”, do nó do meio da borda livre.

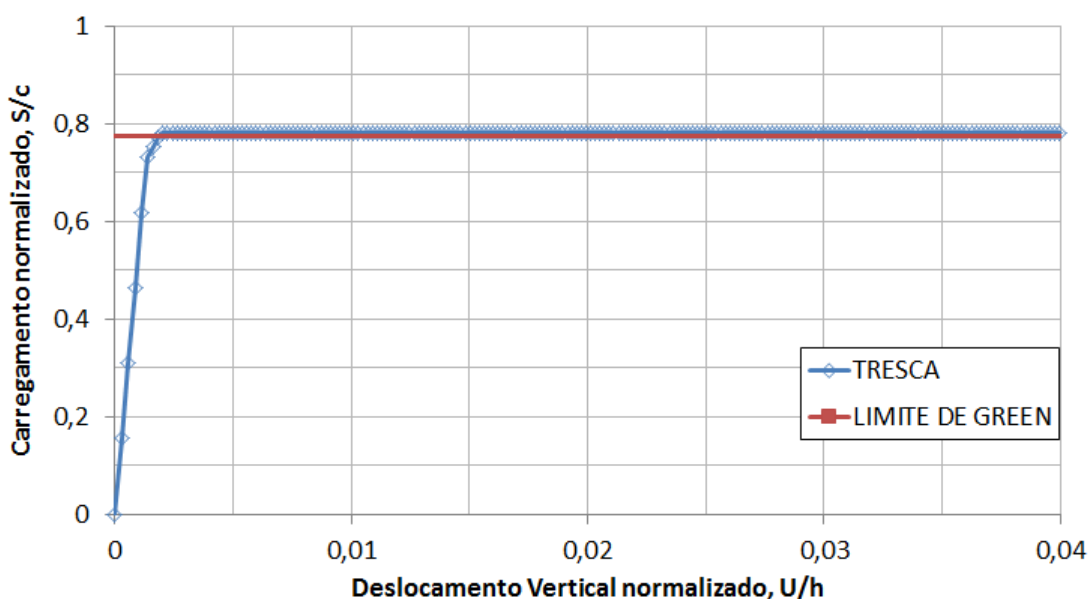


Figura 5.32: Viga em Balanço com Seção Variável. Curva Carga normalizada \times Deslocamento vertical normalizado.

A carga de colapso obtida foi de cerca de $S_{lim} = 0,78196$, um valor 0,90% acima do limite proposto por Green (1954). Isto permite concluir que o resultado obtido com o modelo de Tresca aproximou-se bem do limite analítico estabelecido.

O modelo foi analisado novamente, desta vez com o critério de Mohr-Coulomb, com o objetivo de demonstrar que este é uma generalização do critério de Tresca, e que, ambos apresentam os mesmos resultados se o ângulo de atrito interno for considerado nulo. O resultado da análise pode ser visto na figura 5.33 e comprova que o critério de Tresca pode ser considerado como um caso particular do critério de Mohr-Coulomb.

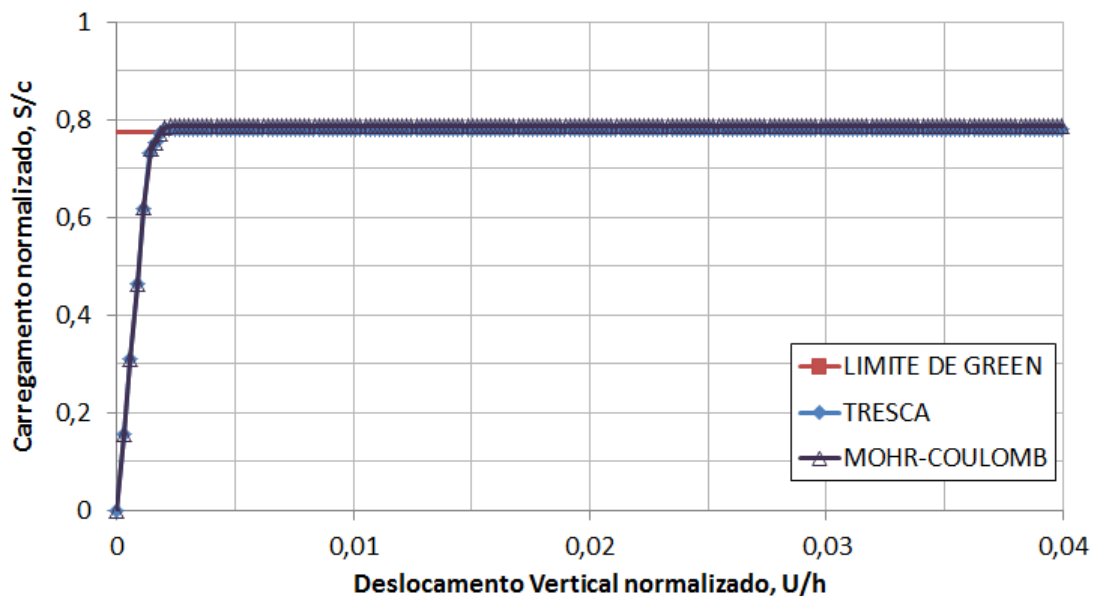


Figura 5.33: Viga em Balanço com Seção Variável. Comparação entre os modelos de Tresca e Mohr-Coulomb.

A título de verificação também foram feitas simulações com os modelos de von Mises e Drucker-Prager. Os resultados obtidos podem ser vistos na figura 5.34.

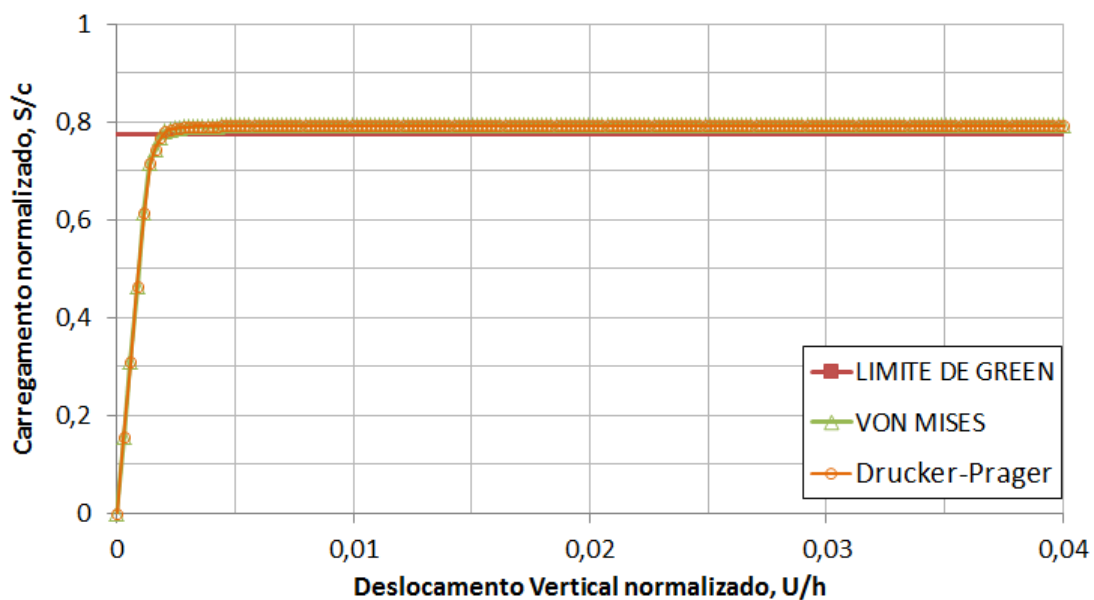


Figura 5.34: Viga em Balanço com Seção Variável. Comparação entre os modelos de von Mises e Drucker-Prager.

A carga de colapso obtida com os dois modelos foi de $S_{lim} = 0,79286$, um valor 1,72% acima do limite proposto por Green (1954), entretanto, apesar deste resultado ter apresentado uma excelente aproximação com a solução analítica, a solução obtida pelos critérios de Tresca e Mohr-Coulomb foi mais precisa.

A figura 5.35 apresenta uma ilustração esquemática do campo de deslocamentos proposto por Green (1954). Quando ocorre o colapso, a parte à direita da linha, gira deslizando sobre o arco circular BC. O mecanismo de colapso associado à viga analisada é do tipo charneira plástica.

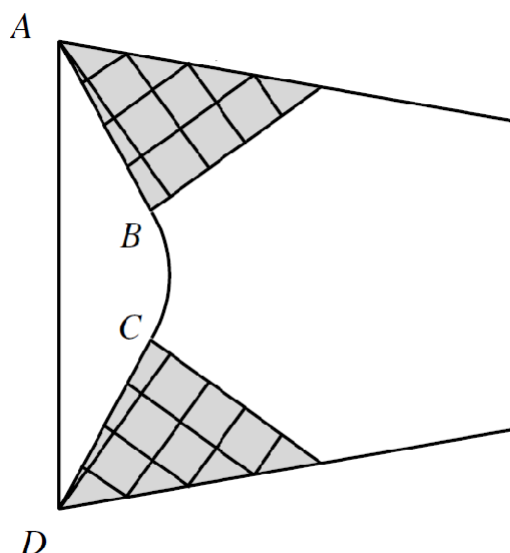
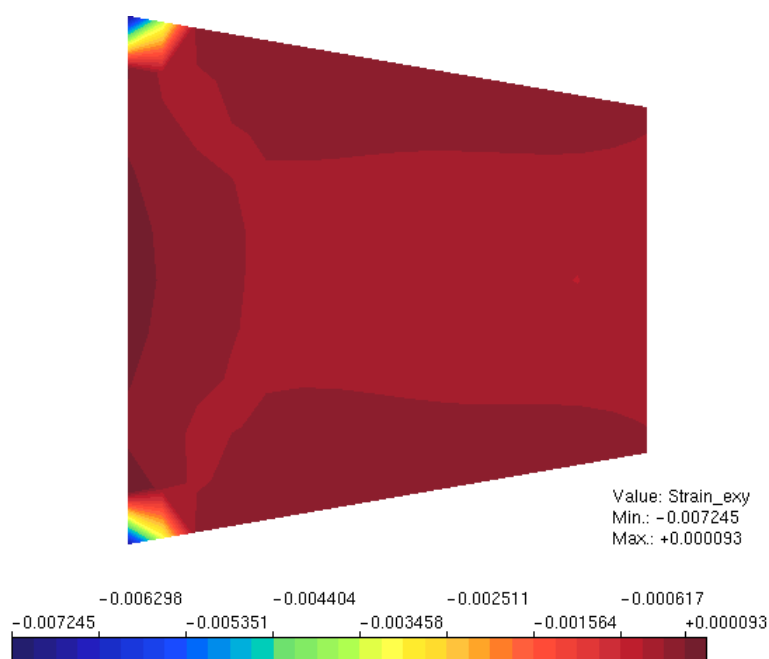
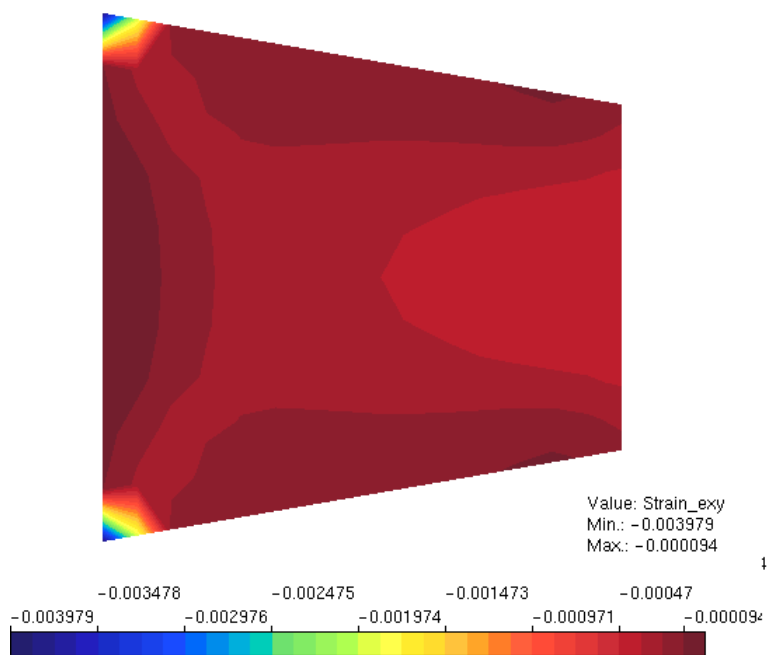


Figura 5.35: Viga em Balanço com Seção Variável. Campo de deslocamentos proposto por Green (1954) (Souza Neto et al., 2008).

De modo a ilustrar as deformações transversais, ε_{xy} , obtidas nos modelos numérico, têm-se na figura 5.35-a (para os critérios de Tresca e Mohr-Coulomb) e 5.35-b (para von Mises e Drucker-Prager), as isoformas de valores para as deformações no momento em que se atinge a carga crítica.



(a)



(b)

Figura 5.36: Viga em Balanço com Seção Variável. Deformações ε_{xy} obtidas com os modelos numéricos (a) de Tresca e Mohr-Coulomb e (b) de von Mises e Drucker-Prager.

Tais figuras evidenciam que a distribuição de deformações, para ambos os critérios, representa o comportamento esperado. Pode-se observar uma maior intensidade

das deformações na região próxima ao engaste, de maneira semelhante ao mecanismo de falha apresentado na figura 5.35.

5.7 Estabilidade de um Talude

Neste exemplo, foi realizada a análise de um talude de terra em estado plano de deformação. O objetivo é avaliar a segurança da inclinação do corte, ilustrado na figura 5.37.

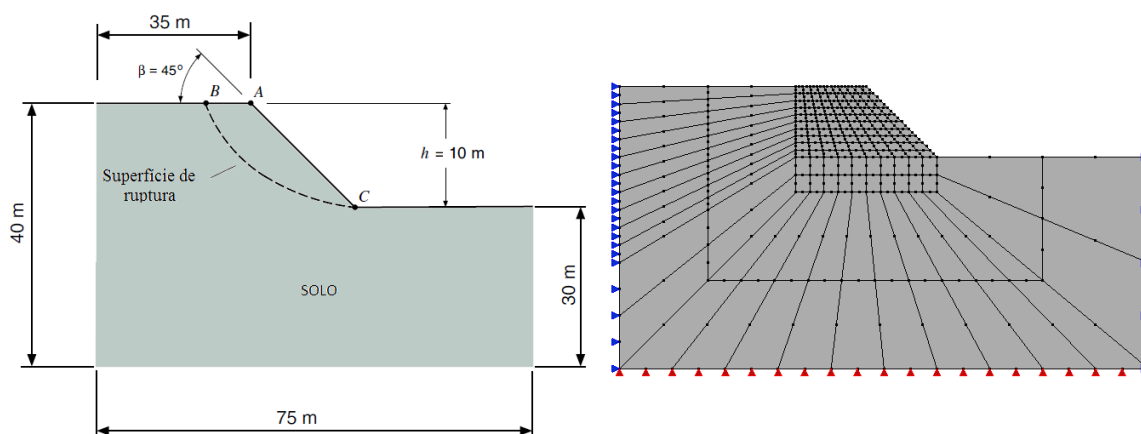


Figura 5.37: Estabilidade de talude. Geometria e malha de elementos finitos. Adaptado de Souza Neto et al. (2008).

O solo (perfeitamente plástico) foi modelado segundo o critério de Mohr-Coulomb com os seguintes parâmetros: módulo de elasticidade de 20 MPa, coeficiente de Poisson de 0,49, coesão de 0,05 MPa e peso específico de $20 \text{ KN}/\text{m}^3$. Foi adotado o modelo associativo com ângulo de atrito interno de 20° .

Para simulação numérica, adotou-se uma malha com 168 elementos finitos quadriláteros de oito nós, considerando plasticidade perfeita e análise sob condições de Estado Plano de Deformação (EPD), método de controle de deslocamento direto, com incremento de 0,0025m do deslocamento vertical do nó do topo do talude e tolerância de 1×10^{-3} . A figura 5.38 apresenta a trajetória de equilíbrio obtida após a análise.

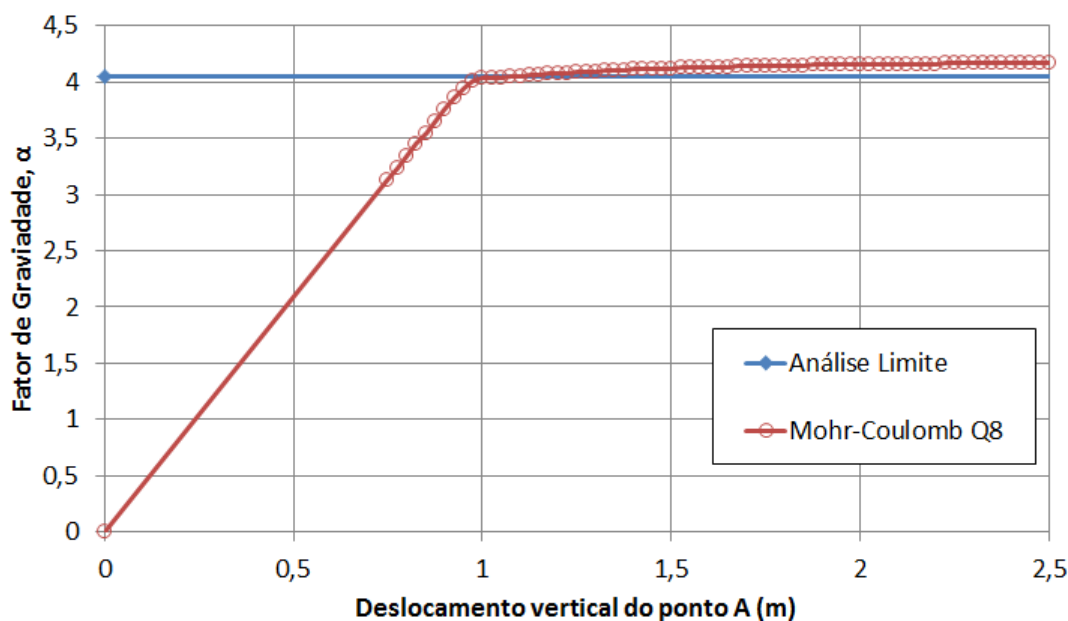


Figura 5.38: Estabilidade de um Talude.

A solução analítica para este problema está apresentada em Chen (1975) *apud* Souza Neto et al. (2008). Para o caso em que o ângulo de inclinação do talude, β , for maior que o ângulo de atrito interno do material, ϕ , como no presente problema, o talude irá colapsar quando a taxa

$$N = h \frac{\gamma}{c} \quad (5.16)$$

atingir o limite crítico. Aqui, h é a altura da inclinação, c é a coesão e γ é o peso específico do solo

$$\gamma = \rho g \quad (5.17)$$

onde ρ é a densidade do solo e g é a aceleração da gravidade. Para a geometria e propriedades do material apresentadas, $N = 4$.

Os valores críticos de N , denotados por N_s , denominados fator de estabilidade, são tabelados por Chen (1975). Para esta análise ($\beta = 45^\circ$ e $\phi = 20^\circ$) o valor adotado é

$$N_s = 16,18 \quad (5.18)$$

Este valor corresponde ao mecanismo de ruptura mostrado na figura 5.37. Um

fator de segurança com base na análise limite pode ser definido como $\alpha_{lim} = N_s/N$. Para as presentes dimensões e propriedades do material ($\beta = 45^\circ$ e $\phi = 20^\circ$) o valor adotado é

$$\alpha_{lim} \approx 4,045 \quad (5.19)$$

O limite α , ou seja, o fator de segurança, encontrado a partir da análise numérica com elementos Q8 é de cerca de

$$\alpha_{lim} = 4,1705 \quad (5.20)$$

um valor 3,1% acima do limite obtido a partir dos dados prescritos por Chen (1975).

5.8 Cilindro com Pressão Interna

Nesta simulação, estuda-se o comportamento de um cilindro metálico longo de paredes grossas submetido à pressão interna (figura 5.39-a). Para o presente problema, o escoamento tem início no interior do cilindro (com coordenada de raio $r = a$) produzindo uma região plástica, como observado na figura 5.39-b, que se desenvolve gradualmente, sob a forma de uma fronteira plástica cilíndrica (com raio c), em direção à face exterior do cilindro ($r = b$).

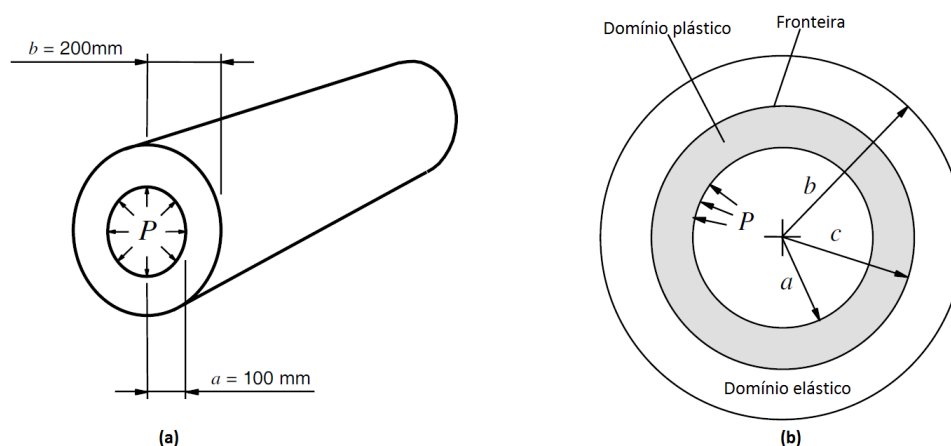


Figura 5.39: Cilindro com Pressão Interna - (a) Geometria e (b) seção transversal parcialmente plastificada. Adaptado de Souza Neto et al. (2008).

O colapso da estrutura ocorre quando a fronteira plástica atinge a borda exterior ($c = b$), e todo o cilindro esteja plastificado. Uma vez atingida a carga limite, o cilindro pode expandir indefinidamente sem aumento adicional da pressão aplicada. Uma solução analítica para este problema foi proposta por Hill (1950) e relaciona a pressão limite aplicada e o raio c da fronteira plástica por meio da expressão

$$P_{lim} = \frac{2\sigma_y}{\sqrt{3}} \ln \left(\frac{b}{a} \right) \quad (5.21)$$

Os parâmetros do material para esta análise são o Módulo de Elasticidade, 210 GPa, o coeficiente de Poisson, 0,30 e tensão de escoamento $\sigma_y = 0,24$ GPa. Para os parâmetros do material e condições de geometria apresentados, o limite de pressão é

$$P_{lim} \approx 0,19209 GPa. \quad (5.22)$$

Na análise por elementos finitos foi adotada uma malha quadrilateral de oito nós, como ilustrado na figura 5.40 e devido à simetria considerou-se apenas um quarto do cilindro (90°). A análise foi feita em estado plano de deformações e foi adotado o modelo de von Mises com plasticidade perfeita.

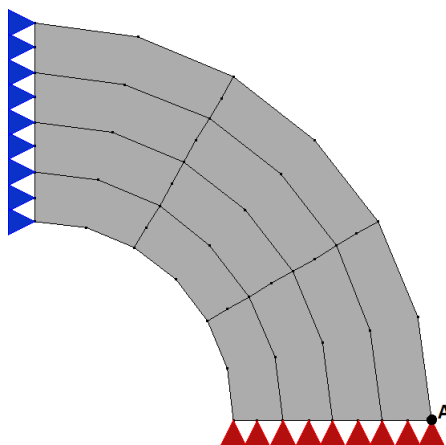


Figura 5.40: Cilindro com Pressão Interna - Malha de elementos finitos.

Para a solução das equações não lineares, adotou-se o método de controle direto de deslocamento, em que o deslocamento horizontal do ponto A foi controlado com incremento de $0,000001m$ por passo e tolerância para convergência em deslocamento

de 1×10^{-4} . A trajetória de equilíbrio para o deslocamento radial do nó A é apresentada no gráfico da figura 5.41, juntamente com o limite analítico obtido por Hill (1950).

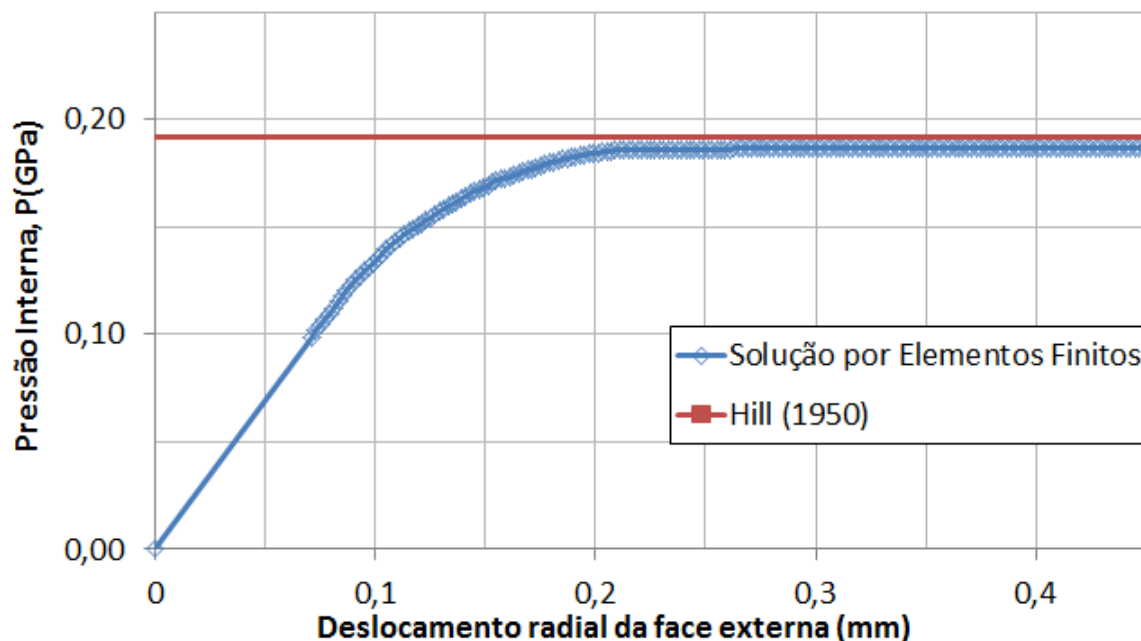


Figura 5.41: Cilindro com Pressão Interna - Trajetória de equilíbrio.

O valor máximo obtido para a pressão interna pelo modelo de elementos finitos foi de 0,1860 GPa, um valor muito próximo do limite estabelecido por Hill (1950).

A figura 5.42 mostra a evolução da fronteira plástica no cilindro à medida que o nível de carga vai aumentando. A um nível de pressão $P = 0,1$ GPa o cilindro ainda se encontra no regime elástico. Com a pressão igual a $P = 0,15$ GPa a fronteira plástica já progrediu bastante e se encontra quase na metade da espessura do cilindro. Para $P = 0,186$ GPa pode-se observar que a estrutura se encontra em um estado de plastificação bastante avançado, pressupondo assim, que o colapso da estrutura está prestes a acontecer.

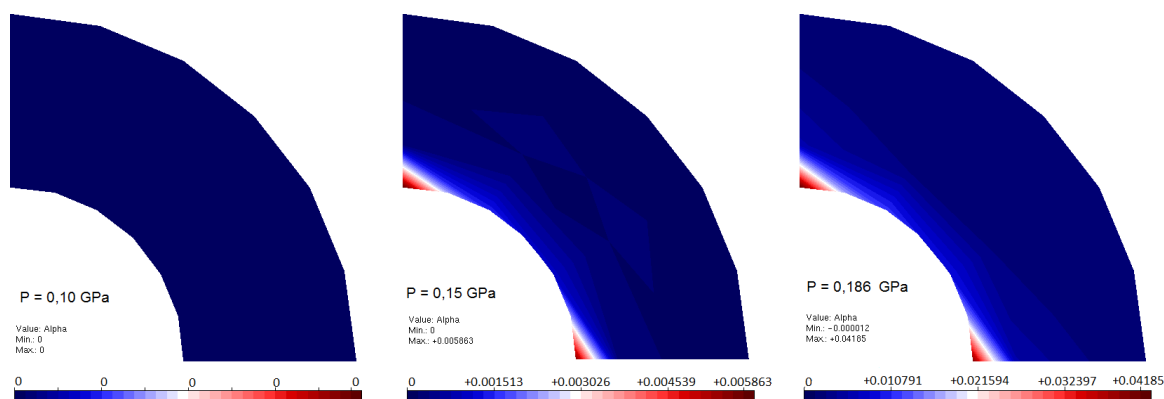


Figura 5.42: Cilindro com Pressão Interna - Evolução da fronteira plástica para o modelo de von Mises.

5.9 Placa Circular com Carregamento Uniforme

Este exemplo simula uma placa circular simplesmente apoiada e submetida a um carregamento uniformemente distribuído. As características geométricas e a malha de elementos finitos adotadas são mostradas na figura 5.43. A placa é discretizada em dez elementos quadrilaterais axissimétricos de oito nós, que estão distribuídos em duas camadas ao longo da espessura.

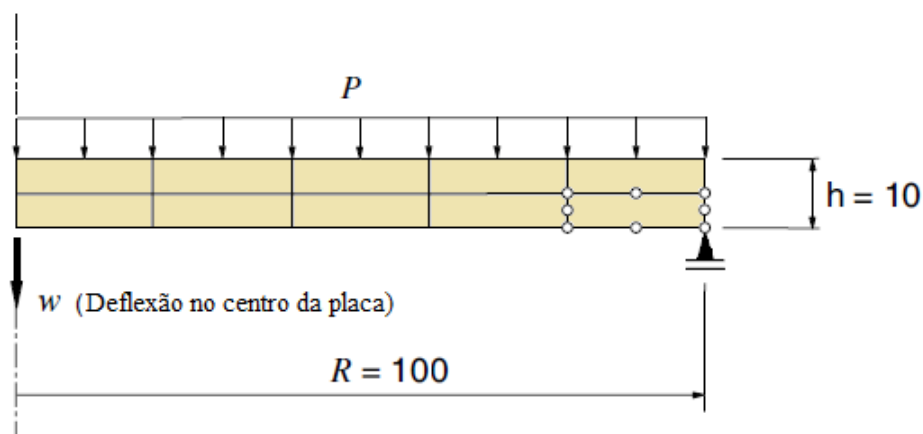


Figura 5.43: Placa Circular - Geometria e malha de elementos finitos. Adaptado de Souza Neto et al. (2008).

Com o objetivo de determinar o limite de carga para a placa através de uma

análise numérica, foi adotado um modelo perfeitamente plástico com os critérios de escoamento de von Mises e Tresca, com: $E_0 = 10^7$; $\nu = 0,24$ e $\sigma_y = 16000$.

O limite de carga para o presente problema também pode ser estimado usando os métodos de análise limite combinado com o método das diferenças finitas. O procedimento é descrito por Skrzypek (1993) e a carga limite correspondente é

$$P_{lim} \approx \frac{1,63\sigma_y h^2}{R^2} \quad (5.23)$$

Para os parâmetros apresentados nesta análise a carga limite é

$$P_{lim} \approx 260,8 \quad (5.24)$$

A análise não-linear foi processada utilizando o método de controle direto de deslocamento, controlando o deslocamento vertical do nó central da parte inferior da placa com incremento de 0,05 uc, tolerância para convergência em deslocamento de 1×10^{-4} e carga de referência $P = 1$ uf.

O gráfico da figura 5.44 representa a trajetória de equilíbrio "deslocamento no centro da placa \times pressão aplicada".

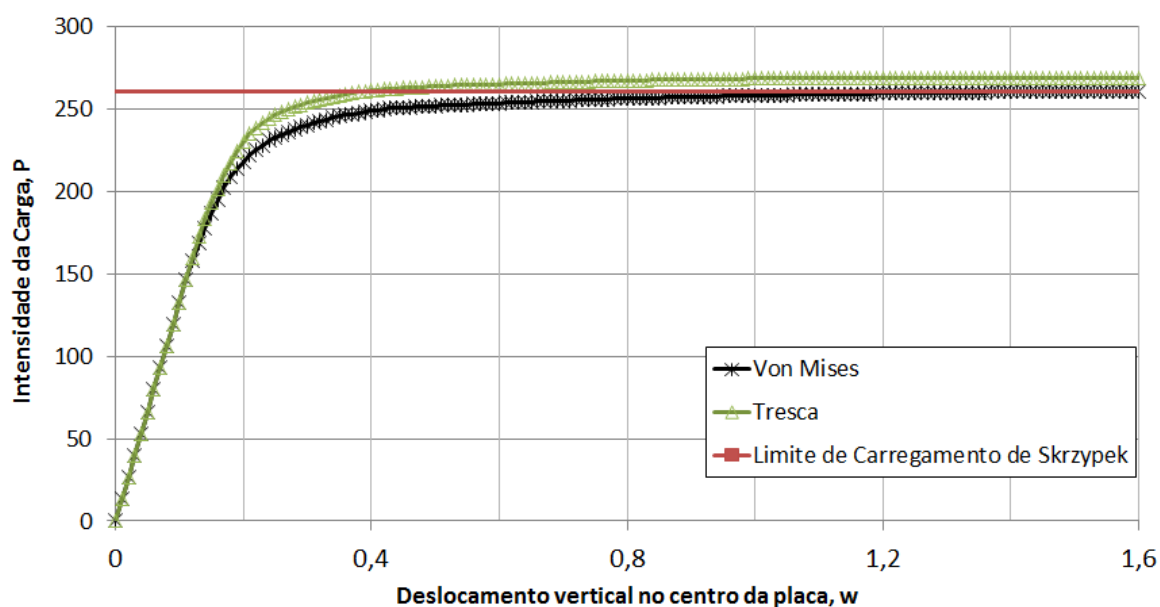


Figura 5.44: Placa Circular - Diagrama Carga \times Deslocamento.

A carga limite obtida nas análises por elementos finitos utilizando os modelos

de Tresca e von Mises apresentaram erros relativos de 3,093% e 0,365%, respectivamente. Deve-se notar que uma precisão elevada (principalmente para o modelo de von Mises) foi obtida apesar da utilização de uma malha pouco refinada.

As figuras 5.45, 5.46 e 5.47 ilustram as isoformas de valores para a variável de fluxo plástico acumulado ao longo da trajetória de equilíbrio para a solução obtida por Souza Neto et al. (2008) e para os modelos de Tresca e von Mises em diferentes fases do carregamento. Os resultados apresentam concordância com os resultados numéricos obtidos por Souza Neto et al. (2008).

Para o presente problema, o processo de plastificação tem seu início nas faces da placa, em torno do centro, e se propaga em direção à linha neutra à medida que a carga vai aumentando, até que se atinja o colapso da estrutura. Quando a carga apresenta um módulo $P = 100$ a placa ainda está no regime elástico. Em $P = 200$, tem-se o começo do escoamento, indicado pelas áreas sombreadas em vermelho nas figuras 5.46 e 5.47. Para $P = 259,5$, observa-se que apenas uma camada estreita em torno da linha neutra permanece no regime elástico, indicando o colapso iminente da estrutura.

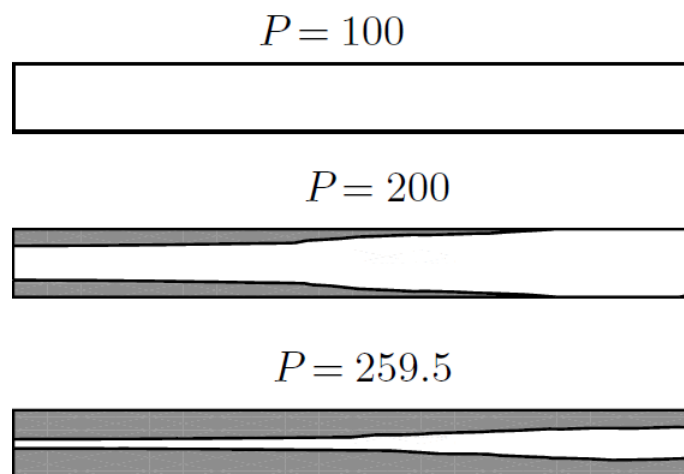


Figura 5.45: Placa Circular - Evolução do fluxo plástico obtido por Souza Neto et al. (2008).

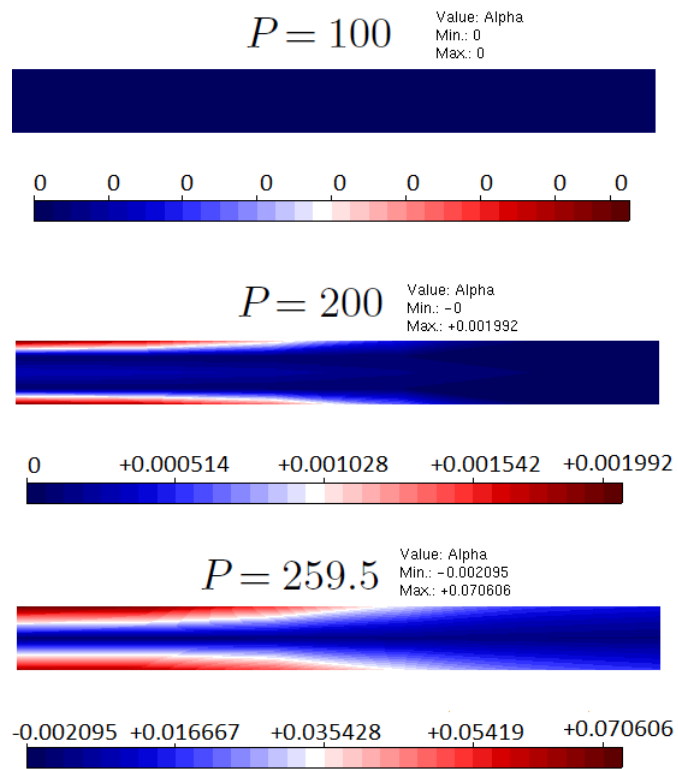


Figura 5.46: Placa Circular - Evolução do fluxo plástico para o modelo de Tresca.

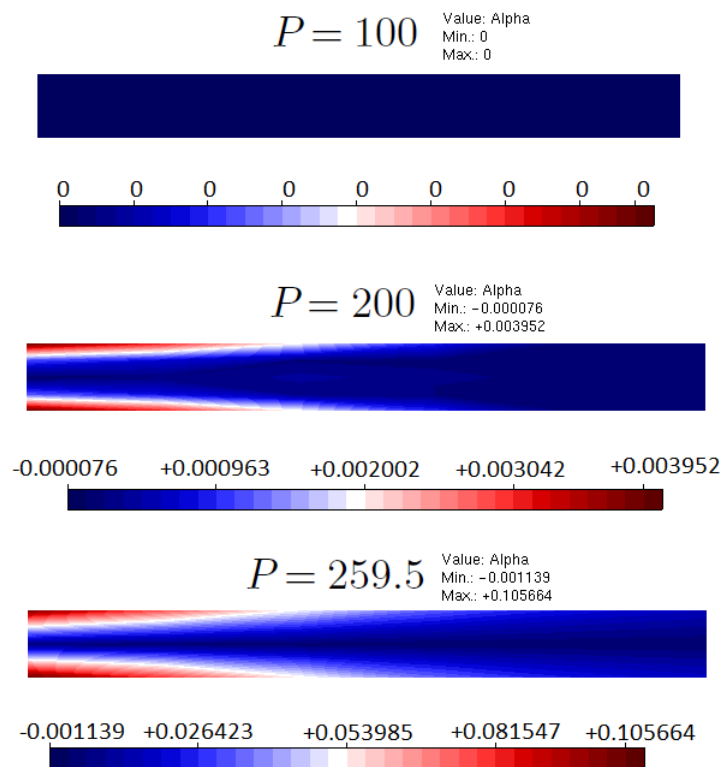


Figura 5.47: Placa Circular - Evolução do fluxo plástico para o modelo de von Mises.

Por fim, as figuras 5.48 e 5.49 ilustram as isofaixas de valores das tensões circunferenciais e radiais, correspondentes à carga máxima para os modelos de Tresca e de von Mises. Verifica-se que as tensões se distribuem simetricamente (tração e compressão) em torno da linha neutra. No caso das tensões radiais, observa-se uma variação das tensões na região do apoio da placa.

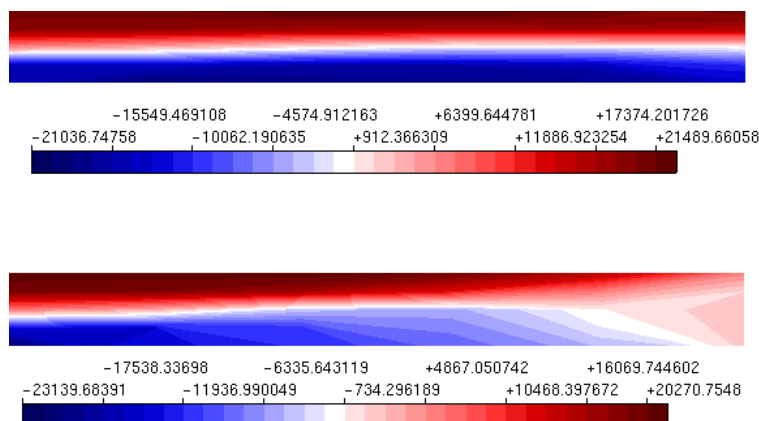


Figura 5.48: Placa Circular - Distribuições de tensões circunferenciais e radiais para o modelo de Tresca.

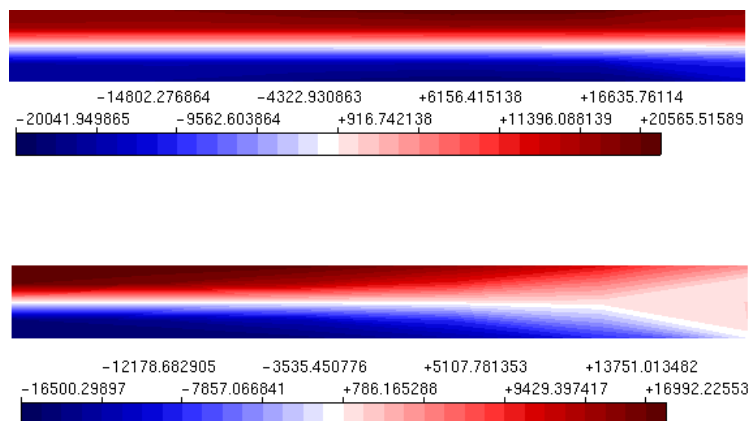


Figura 5.49: Placa Circular - Distribuições de tensões circunferenciais e radiais para o modelo de von Mises.

5.10 Chapa Submetida à Tração

5.10.1 Chapa com Furo

Este exemplo apresenta a simulação numérica de uma chapa fina perfurada sob estado plano de tensão. Este é um exemplo clássico, frequentemente utilizado como referência para a implementação do estado plano de tensão para modelos de plasticidade (Fuschi et al., 1992).

Na figura 5.50, são ilustradas a geometria da chapa e a malha de elementos finitos quadriláteros de quatro nós adotada. A chapa é carregada verticalmente e apenas um quarto da mesma é discretizada, dada sua simetria.

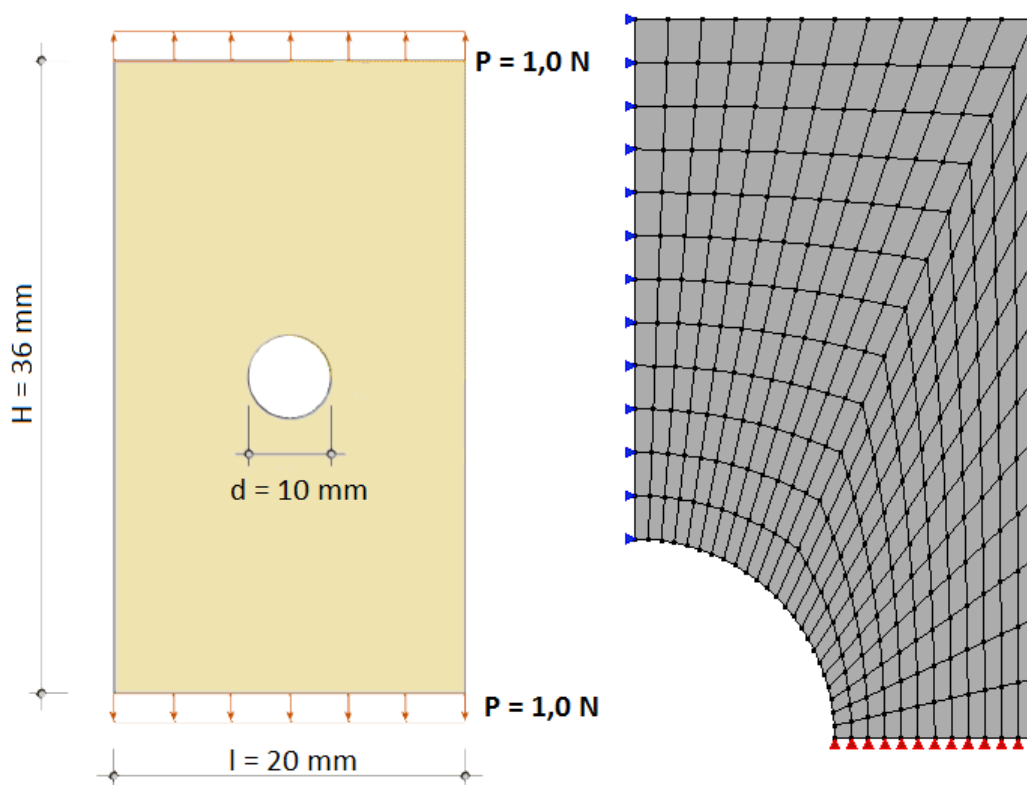


Figura 5.50: Chapa com Furo - Geometria e malha de elementos finitos.

A análise não linear foi processada para Estado Plano de Tensão (EPT), método de controle de deslocamentos generalizado, com incremento de 0,001, com carga de referência $P = 1 \text{ N}$ e tolerância para convergência em deslocamento igual a 1×10^{-4} .

A simulação numérica procedeu-se utilizando os modelos elastoplásticos de von Mises e de Rankine, com módulo de elasticidade $E = 70GPa$, coeficiente de poisson $\nu = 0,20$ e tensão de escoamento $\sigma_y = 0,243GPa$. A figura 5.51 mostra as trajetórias de equilíbrio correspondentes ao deslocamento vertical da face de aplicação da carga para os modelos adotados, em conjunto com a solução obtida por Souza Neto et al. (2008) utilizando o modelo de von Mises.

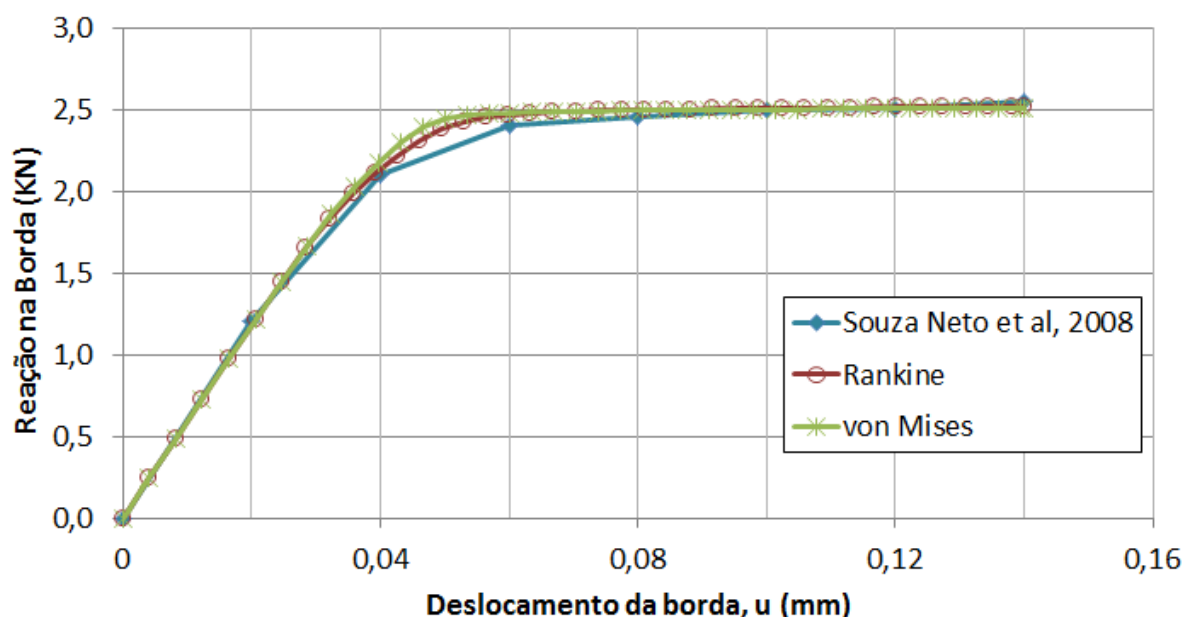


Figura 5.51: Chapa com Furo - Curva Reação na borda \times Deslocamento da borda.

A evolução do fluxo plástico está representada na figura 5.52, que mostra os gráficos de contorno da variável de fluxo plástico acumulado, α , em diferentes etapas do processo de carregamento para os modelos de von Mises e Rankine, comparados com os resultados apresentados em Souza Neto et al. (2008). Pode-se observar que os dois modelos conseguiram representar a evolução da região de plastificação, entretanto, o resultado obtido com o modelo de von Mises apresentou maior conformidade com a solução apresentada por Souza Neto et al. (2008), o que já era esperado, já que ambas foram obtidas a partir do mesmo modelo.

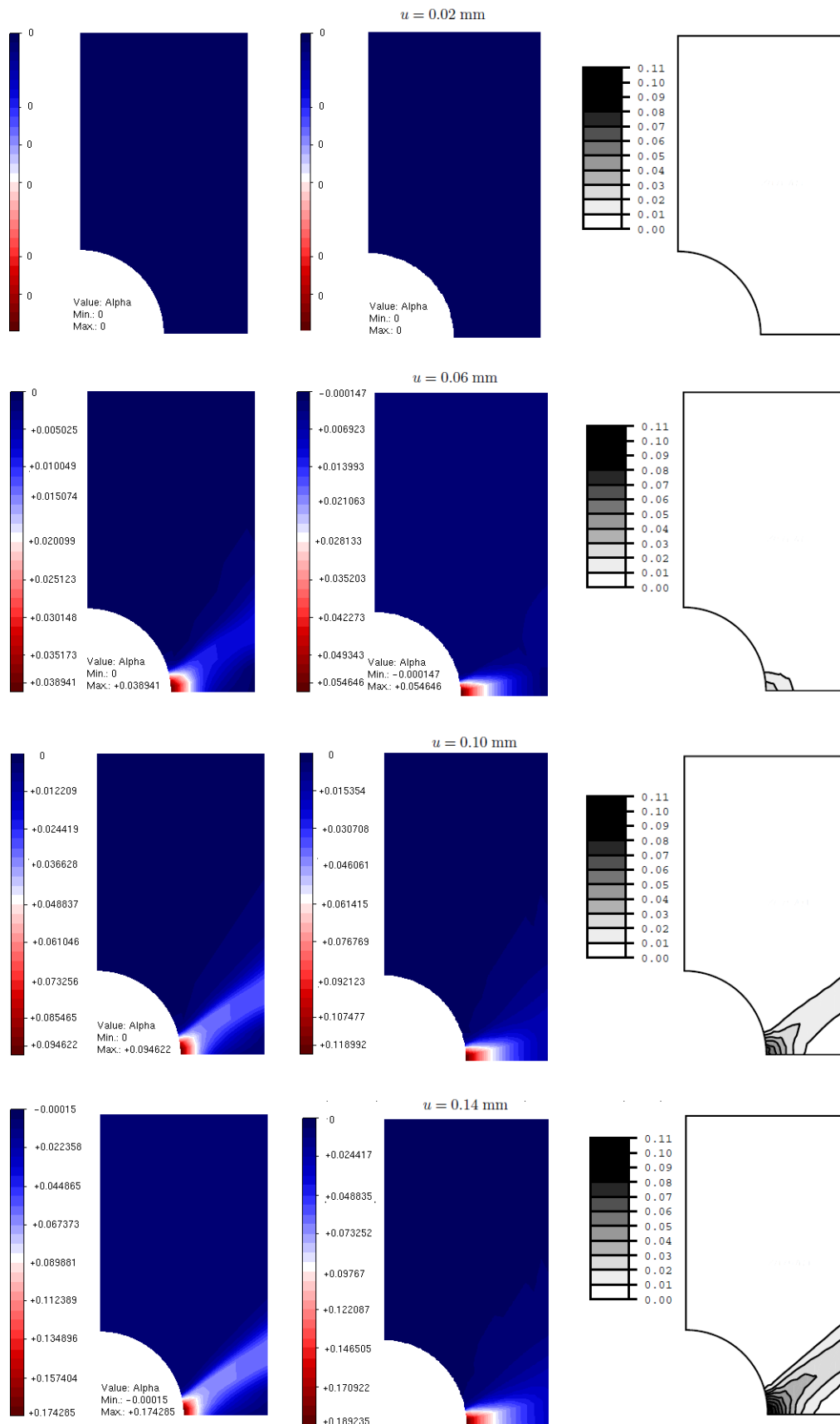


Figura 5.52: Evolução do fluxo plástico para os modelos de von Mises (à esquerda), Rankine (centro) e solução numérica obtida por Souza Neto et al. (2008) (à direita).

5.10.2 Chapa com Trinca

Este exemplo traz a análise em estado plano de deformação de uma chapa com dois entalhes profundos submetida à tração. Sob a hipótese de plasticidade perfeita, o presente problema é a versão de tração do problema 5.5 (Fundação em bloco rígido) e muitas vezes é adotado como um teste para as propriedades de convergência de elementos finitos na plasticidade incompressível (Nagtegaal et al., 1974). Este exemplo também é de grande importância para materiais metálicos, pois há a formação de uma zona elastoplástica na ponta da trinca, sendo esta região muito estudada na mecânica da fratura.

A geometria e a malha de elementos finitos usadas são mostradas na figura 5.53. A chapa, de largura $w = 10$ e comprimento $l = 30$, contém dois entalhes profundos e suas duas metades estão conectadas apenas por um ligamento de largura $b = 1$. Devido a simetria do problema, apenas um quarto da chapa foi discretizada, utilizando uma malha de 170 elementos quadrilaterais de oito nós.

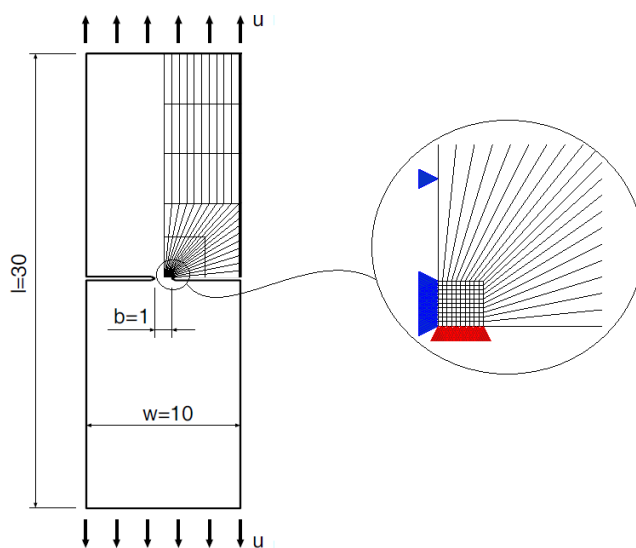


Figura 5.53: Chapa Tracionada com Trinca - Geometria e malha de elementos finitos. Adaptado de Souza Neto et al. (2008).

Prandtl propôs uma tensão limite analítica para o ligamento. Para o presente

problema, assumindo a hipótese de plasticidade perfeita, este limite é dado por

$$\sigma_{lim}^- = \frac{2 + \pi}{\sqrt{3}} \sigma_y \approx 2,97 \sigma_y \quad (5.25)$$

Os parâmetros do material utilizados nesta análise são o Módulo de Elasticidade, 206,9 MPa, o coeficiente de Poisson, 0,29 e a tensão de escoamento $\sigma_y = 0,45$. Para a análise não linear, adotou-se o método de controle de deslocamentos generalizado, com fator de carga igual a 0,01, tolerância para convergência em deslocamento de 1×10^{-4} , carga de referência igual a 1 N.

A estrutura foi analisada utilizando-se os modelos de von Mises e Rankine. As trajetórias de equilíbrio, “Deslocamento normalizado \times Tensão normalizada”, são apresentadas nos gráficos da figura 5.54.

A normalização da tensão foi feita multiplicando-se o fator de carga pela tensão limite. Para os deslocamentos, multiplicou-se o deslocamento vertical do topo por $2uE/\sigma_y$.

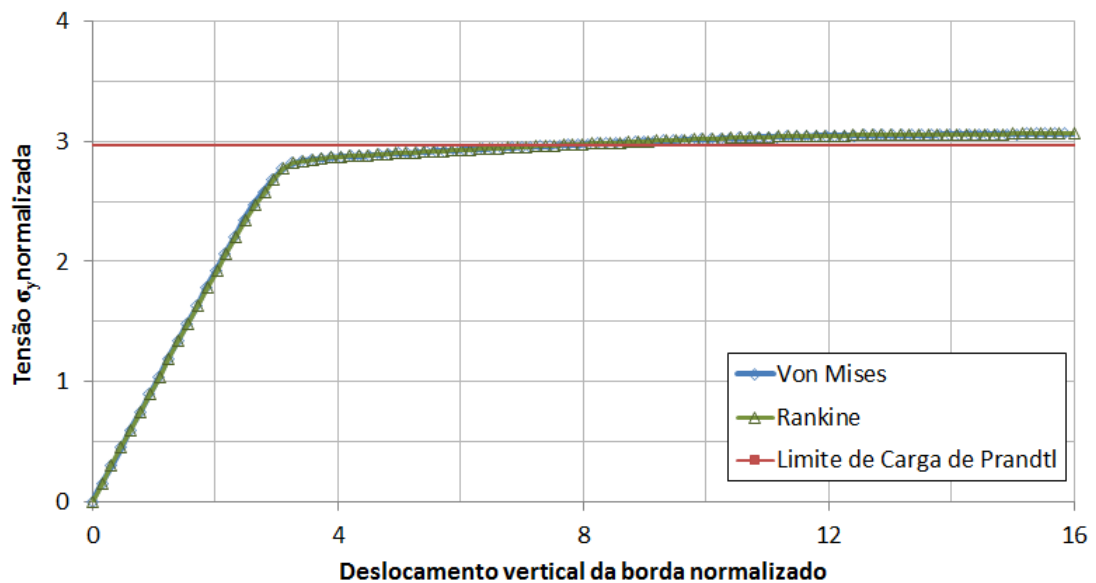


Figura 5.54: Chapa Tractionada com Trinca - Deslocamento vertical da borda normalizado \times Tensão normalizada com os modelos de von Mises e Rankine.

Verifica-se boa concordância dos resultados obtidos com os modelos de von Mises e Rankine com o resultado analítico, com ambos os modelos apresentando resultados

muito próximos. A carga limite obtida para os modelos de von Mises e Rankine é apenas 3,45% maior do que a solução de Prandtl.

A figura 5.55 apresenta os contornos dos autovalores de tensão (Eigenvalue-1 e Eigenvalue-2) e do cisalhamento máximo (Eigenvalue-12,21) para os modelos de von Mises e Rankine, respectivamente. A concentração de tensões, localizada na ponta da trinca, é um fenômeno característico deste tipo de ensaio, como visto nas figuras.

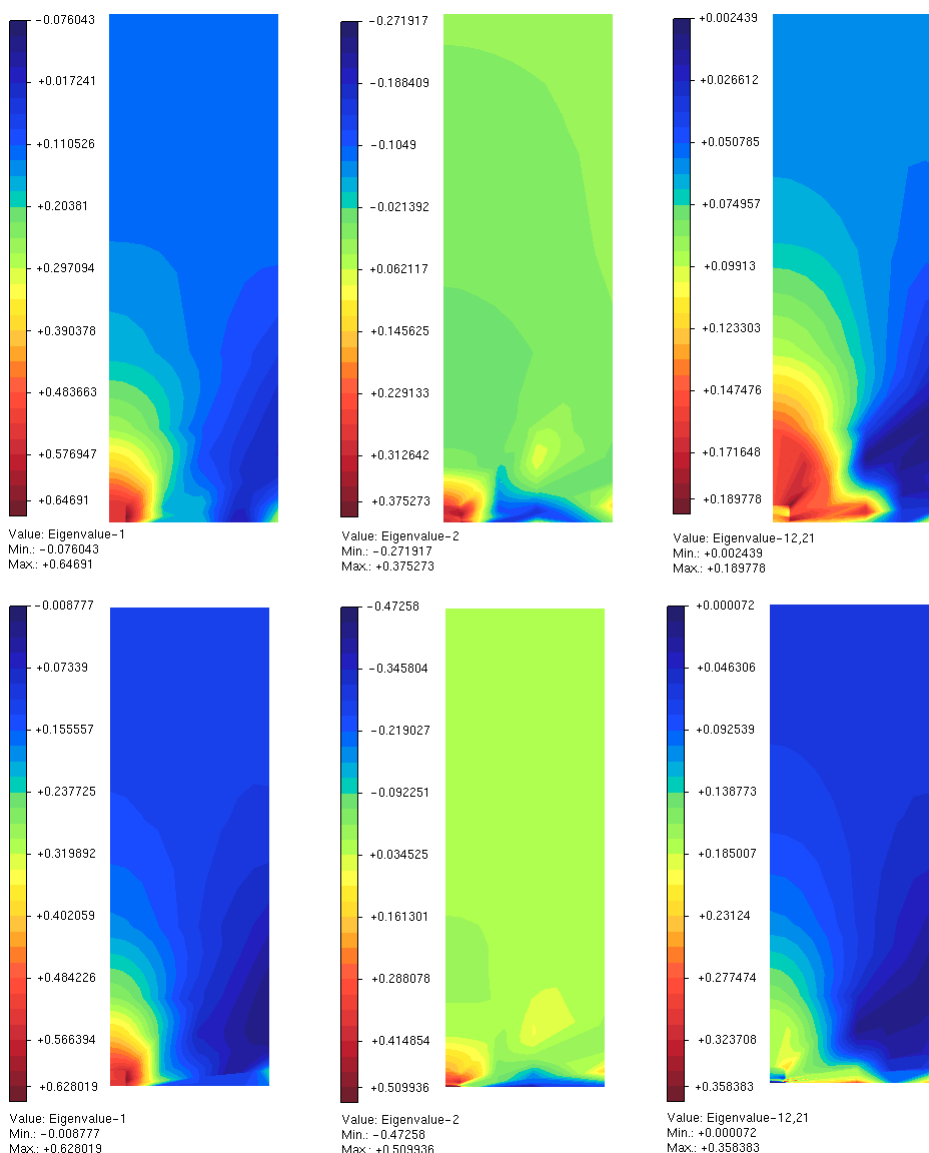


Figura 5.55: Chapa Tractionada com Trinca - Distribuição de tensões para o modelo de von Mises (acima) e para o modelo de Rankine (abaixo).

5.10.3 Chapa de Concreto com Fibras

Este exemplo apresenta um modelo de elementos finitos construído para simular o comportamento experimental obtido a partir de um teste de tração direta em uma placa de concreto reforçado com fibras. Devido à simetria das condições de carga e contorno, apenas um quarto da placa foi discretizada. As condições de contorno e a malha de elementos finitos adotadas são apresentadas na figura 5.56.

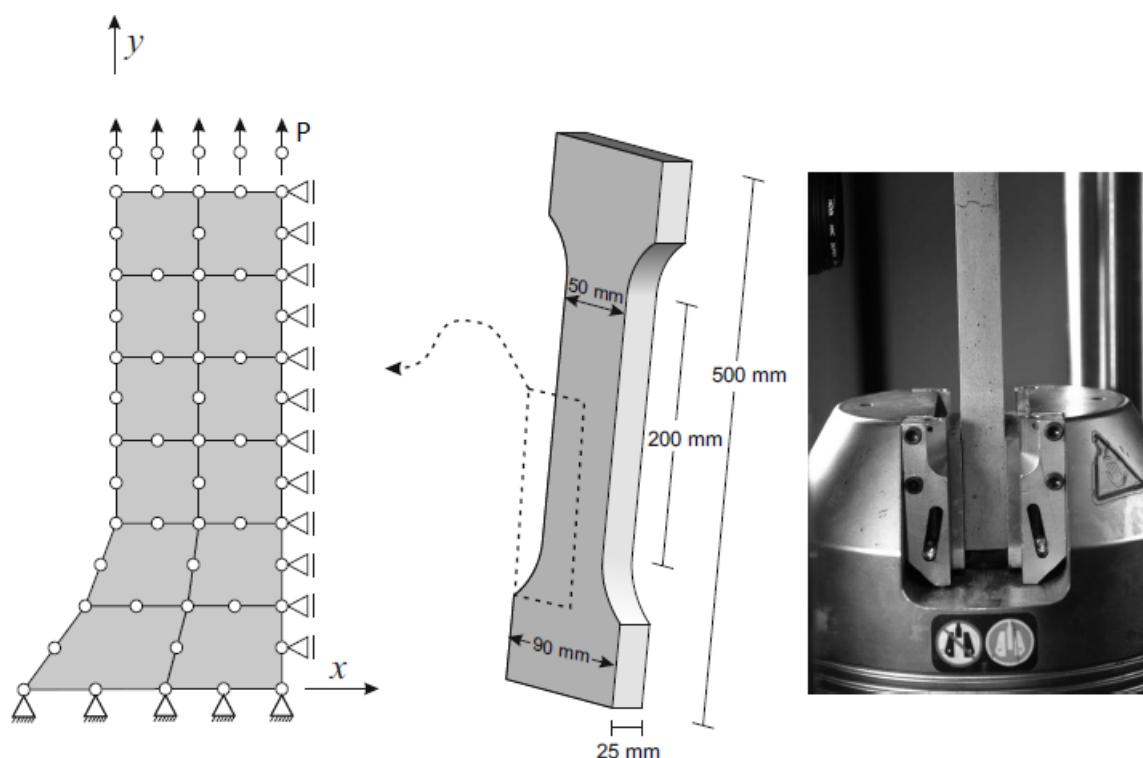


Figura 5.56: Chapa de Concreto com Fibras - Malha de elementos finitos, geometria e imagem das condições de apoio usadas no experimento de Pereira et al. (2012-b). Adaptado de Pereira et al. (2012-a).

O material é considerado um composto com matriz de cimento reforçado com fibras de 2% de poliacetato de vinila (PVA), conforme Pereira et al. (2012-b). Os parâmetros do material obtidos nos experimentos são dados na tabela 5.7.

Para a simulação numérica, foi adotado o modelo de Ottosen com lei de encruamento linear, utilizando o método de controle de deslocamento generalizado, com

Tabela 5.7: Chapa de concreto com fibras: Parâmetros do material .

Módulo de Elasticidade (E)	20000 MPa
Coefficiente de Poisson (ν)	0,2
Resistência à compressão (σ_c)	60,0 MPa
Resistência à tração (σ_t)	3,5 MPa
Tensão de escoamento (σ_u)	4,0 MPa
Hardening	1000,0 MPa

fator de carga inicial igual a 1 e tolerância para convergência em deslocamento de 1×10^{-4} . A trajetória de equilíbrio para “Tensão \times Deformação” está apresentada no gráfico da figura 5.57, juntamente com os resultados experimentais obtidos por Pereira et al. (2012-b).

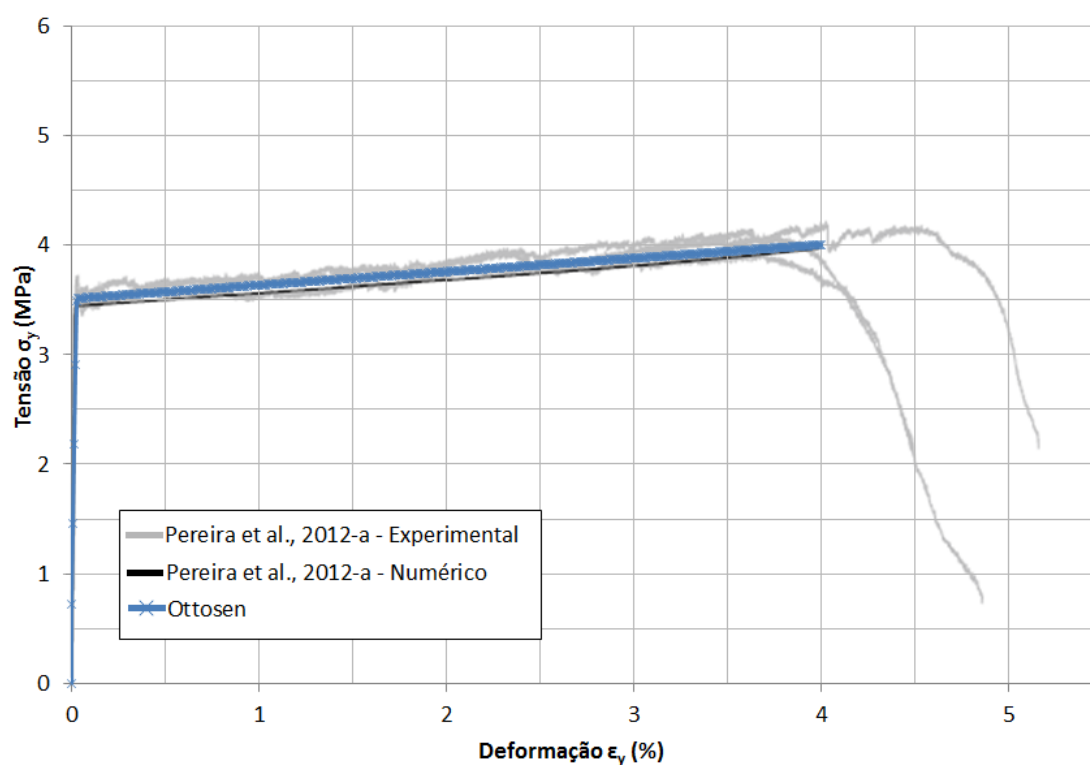


Figura 5.57: Chapa de Concreto com Fibras - Os resultados numéricos obtidos com o modelo de Ottosen comparados com os resultados experimentais e numéricos obtidos por Pereira et al. (2012-a).

Observa-se que o modelo numérico apresentou capacidade adequada para simular o comportamento do material e foi capaz de representar os resultados experimentais

com boa precisão.

A figura 5.58-a apresenta a malha deformada. Pode-se observar que as linhas ortogonais da malha ao longo do eixo longitudinal da chapa permaneceram paralelos após a deformação. O padrão de evolução dos deslocamentos, após atingida a tensão de escoamento, obtido com o modelo de Ottosen, implementado neste trabalho, pode ser visto na figura 5.58-b. Verifica-se que os resultados obtidos estão em excelente concordância com os resultados numéricos e experimentais apresentados por Pereira et al. (2012-a) (figura 5.58-c).

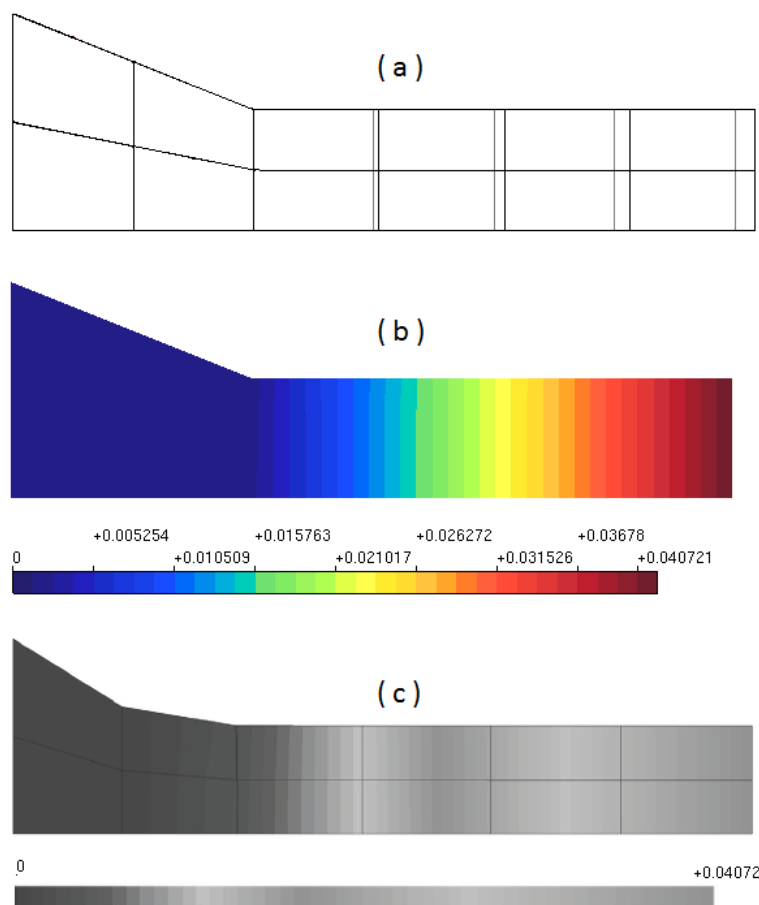


Figura 5.58: Chapa de Concreto com Fibras - (a) Malha deformada e Campos de deslocamentos obtidos (b) com o modelo de Ottosen e (c) solução numérica apresentada por Pereira et al. (2012-a).

5.11 Viga de concreto armado

Neste item, comparam-se os resultados obtidos através do modelo elastoplástico de Ottosen com valores determinados por ensaios experimentais para vigas de concreto armado. Estes ensaios foram realizados por Mazars e Pijaudier-Cabot (1989) em uma viga de concreto armado submetida à flexão em três pontos, cuja geometria pode ser vista na figura 5.59.

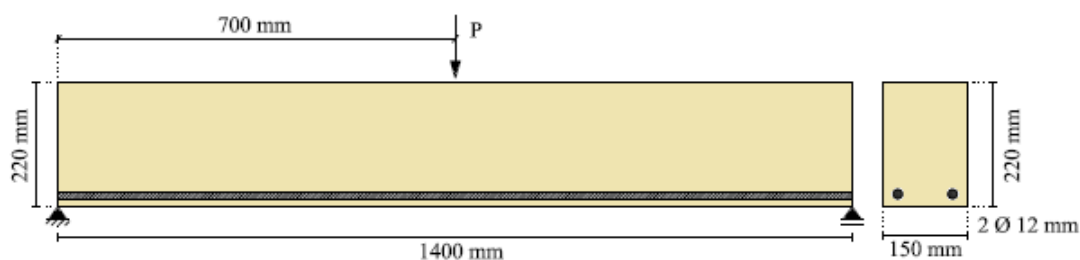


Figura 5.59: Viga de concreto armado estudada por Mazars e Pijaudier-Cabot (1989).

Mazars e Pijaudier-Cabot (1989) modelaram a armadura de forma discreta, considerando aderência perfeita com o concreto. Na modelagem foi adotado módulo de elasticidade de $210000,0 N/mm^2$ e coeficiente de Poisson de 0,3 para o aço, mas o limite de escoamento não foi especificado.

Na análise computacional, adotou-se o critério de Ottosen com lei de encruamento de potencial, para o concreto. Para o aço, foi adotado o critério elastoplástico de von Mises, assumindo plasticidade perfeita. Foi considerada aderência perfeita entre o aço e o concreto.

Na figura 5.60, é ilustrada a malha de elementos quadrilaterais de oito nós, para modelar o concreto, e elementos unidimensionais de dois nós, para representar a armadura.

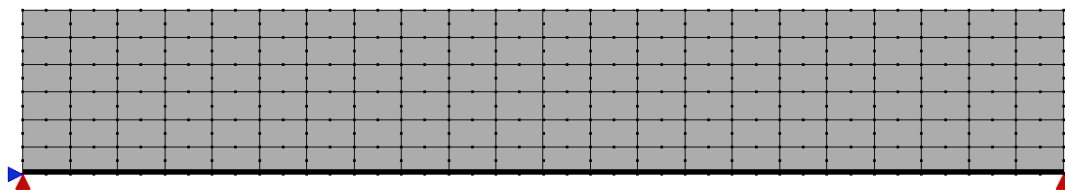


Figura 5.60: Malha de Elementos Finitos: viga de concreto armado submetida à flexão de três pontos.

Na análise não linear, foi adotado o método de controle direto de deslocamento horizontal, com incremento de 0,001mm, do nó de extremidade da malha, tolerância para convergência de 1×10^{-4} e carga de referência $P = 1,0N$. O modelo foi analisado em estado plano de tensão. Para a lei de encruamento potencial foram adotados os parâmetros $a = 0,96$, $b = 1350,00$, $K = 0,00005$ e $n = 1,0$.

As trajetórias de equilíbrio, correspondentes ao deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga são ilustradas na figura 5.61, juntamente com os valores experimentais apresentados por Mazars e Pijaudier-Cabot (1989). Nos resultados apresentados pela figura 5.61, verifica-se uma boa concordância entre os resultados experimentais e o modelo de Ottosen.

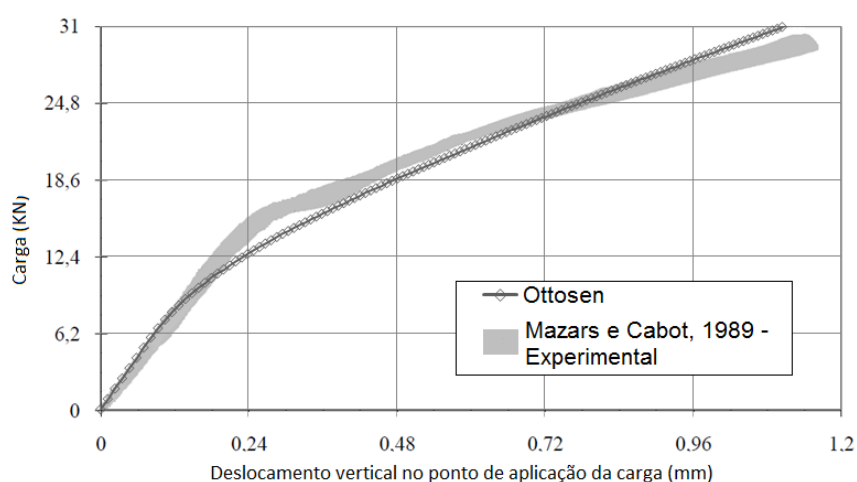


Figura 5.61: Trajetórias de equilíbrio do deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga.

Capítulo 6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresentou a formulação e a implementação para modelos constitutivos elastoplásticos, enfatizando os critérios de von Mises, Tresca, Rankine, Mohr-Coulomb, Drucker-Prager e Ottosen. Além dos modelos constitutivos, também foram apresentadas as equações para a implementação dos algoritmos de retorno “*Closest-Point Projection*” e “*Cutting-Plane*”, necessários para a integração das relações constitutivas que regem o comportamento do material.

Os modelos constitutivos foram implementados no ambiente computacional INSANE (INteractive Structural ANalysis Environment), segundo o Ambiente Teórico-Computacional para Modelos Constitutivos desenvolvido por Penna (2011). Pode-se constatar o grande potencial da biblioteca de modelos constitutivos do sistema computacional INSANE em razão da generalidade das implementações dos modelos e dos diversos recursos para modelagem constitutiva existentes nesta plataforma. Os modelos tradicionais de plasticidade, associada e não associada, foram facilmente incorporados ao arcabouço teórico, variando-se somente o algoritmo de retorno, de acordo com a necessidade de cada modelo.

6.1 Sobre as Simulações Numéricas

No capítulo 5, foram apresentadas diversas simulações numéricas de casos clássicos encontrados na literatura com a finalidade de ilustrar, validar e ressaltar as características individuais de cada modelo. A partir do que foi apresentado, pode-se

fazer as seguintes considerações:

- os modelos apresentaram comportamento adequado às solicitações em um estado de tração e compressão direta, e, as respostas obtidas foram condizentes com o que se esperava.

Para o cisalhamento simples, os modelos de von Mises e Drucker-Prager, por serem formulados a partir do segundo invariante de tensões do tensor desviador, J_2 , apresentaram comportamento semelhante ao observado na tração e na compressão. Para os demais modelos, o cisalhamento é calculado de forma indireta e por isso apresentaram respostas variadas.

- os modelos apresentaram comportamento adequado com a utilização dos algoritmos de retorno com módulo tangente contínuo. Após a inclusão do módulo tangente consistente, no entanto, em estruturas mais complexas a utilização do módulo consistente ocasionou o aumento de instabilidades numéricas durante as análises.
- foi ilustrado o processo de ajuste das funções inelásticas através da simulação numérica de tração pura. Assim, os diferentes parâmetros dessas funções foram sucessivamente alterados, verificando-se que os modelos se adequaram aos ajustes apresentados.
- analisando todas as simulações numéricas apresentadas, pode-se dizer que os modelos constitutivos para representar o comportamento elastoplástico dos materiais, apresentam uma boa correlação entre as respostas numéricas e os resultados experimentais e analíticos para situações com cargas monotônicas, concluindo-se que estes exemplos foram capazes de validar os modelos implementados.

6.2 Sugestões para Trabalhos Futuros

Como sugestões para continuação da pesquisa, podem-se citar:

- implementação de algoritmos de integração com estruturas, mais simples e mais complexas, que permitam convergências mais elevadas, de forma a requerer um menor custo computacional;
- Inserção de modelos para carregamentos cíclicos, análise em fadiga, por meio da implementação de leis de encruamento cinemático ou misto de modo a permitir a descrição do efeito Bauschinger, e assim melhorar a previsão do retorno elástico;
- Inserção de modelos de plasticidade compostos por múltiplas superfícies, acopladas ou não;
- Os modelos implementados foram testado para discretizações do Método dos Elementos Finitos (MEF). Porém, as implementações preservaram a generalização característica do Ambiente Teórico-Computacional Unificado para Modelos Constitutivos apresentado por Penna (2011), onde é ressaltada a independência do ambiente unificado em relação ao método numérico. Assim, propõe-se verificar a independência dos modelos para discretizações baseadas nos Métodos Sem Malha (MSM), no Método de Elementos de Contorno (MEC) ou no Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG).

Referências Bibliográficas

- Ajeje, F. H., 2009. Abordagem orientada a objetos para implementação computacional de elementos finitos de cascas planas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Almeida, M. L., 2005. Elementos finitos paramétricos implementados em java. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Alves, F. H., 2005. Estratégia global-local aplicada ao método dos elementos finitos generalizados. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Anacleto, F. E. S., Peixoto, R. G., Penna, S. S., Ribeiro, G. O. e Pitangueira, R. L. S., 2013. ‘Non-linear solution algorithm for the implicit boundary element method concerning various control methods’. *XXXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, .
- Bathe, K.-J. e Montáns, F. J., 2004. ‘On modeling mixed hardening in computational plasticity’. *Computers & Structures*, vol. 82, pp. 535–539.
- Benallal, A., Billardon, R., Doghri, I. e Moret-Bailly, L., 1987. ‘Crack initiation and propagation analyses taking into account initial strain hardening and damage fields’. *Fourth Int. Conf. of Numerical Methods in Fracture Mechanics*, .
- Bono, G. F. F., 2008. Modelos Constitutivos Para Análise Tridimensional de Estruturas de Concreto Armado Através do Método dos Elementos Finitos. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.
- Bouchard, P. O., Bourgeon, L., Fayolle, S. e Mocellin, K., 2011. ‘An enhanced

- lemaitre model formulation for materials processing damage computation'. *Int J Mater Form*, vol. 4, pp. 299–315.
- Carol, I., Rizzi, E. e William, K., 1994. 'A unified theory of elastic degradation and damage based on a loading surface'. *International Journal of Solid and Structures*, vol. 31 (20), pp. 2835–2865.
- CEB, 2010. 'Ceb-fip model code 2010 - final draft'. *Bulletin D'Information*, .
- Cecilio, D. L., 2011. Modelagem e simulação elastoplástica em elemento finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil.
- Chen, W. F., 1975. *Limit Analysis and Soil Plasticity*. Elsevier.
- Chen, W. F. e Han, D. J., 1982. *Plasticity in Reinforced Concrete*. McGraw-Hill, Nova York, EUA.
- Chen, W. F. e Han, D. J., 2007. *Plasticity for Structural Engineers*. J. Ross Publishing Classics, J. Ross Pub.
- Dahl, K. K. B., (1992), A failure criterion for normal and high strength concrete.
- Fonseca, F. T., 2008. Sistema computacional para análise dinâmica geometricamente não-linear através do método dos elementos finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Fonseca, M. T., 2006. Aplicação orientada a objetos para análise fisicamente não-linear com modelos reticulados de seções transversais compostas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Fuina, J. S., 2004. Métodos de controle de deformações para análise não-linear de estruturas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil.
- Fuina, J. S., 2009. Formulações de Modelos Constitutivos de Microplanos para Contínuos Generalizados. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.

- Fuschi, P., Perić, D. e Owen, D. R. J., 1992. ‘Studies on generalized midpoint integration in rate-independent plasticity with reference to plane stress j2-flow theory’. *Comput. Structs*, vol. 43, pp. 1117–1133.
- Grassl, P. e Jirásek, M., 2006. ‘Damage-plastic model for concrete failure’. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 43(22-23), pp. 7166–7196.
- Green, A. P., 1953. ‘The plastic yielding of notched bars due to bending’. *Quart. J. Mech. Appl. Math*, vol. 50, pp. 29–54.
- Green, A. P., 1954. ‘A theory of the plastic yielding due to bending of cantilevers and fixed-ended beams. part i’. *Mech. Phys. Solids*, vol. 3, pp. 1–15.
- Grilo, T. J., 2011. Estudo de modelos constitutivos anisotrópicos para chapas metálicas. Dissertação de Mestrado, Universidade de Aveiro, Portugal.
- Hill, R., 1950. *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford University Press, Londres, Inglaterra.
- Kossa, A., 2011. Exact Stress Integration Schemes for Elastoplasticity. Tese de Doutorado, Budapest University of Technology and Economics, Budapeste, Hungria.
- Lemaitre, J., 1992. *A Course on Damage Mechanics*. Springer-Verlag, Germany.
- Lemaitre, J. e Chaboche, J. L., 1990. *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido.
- Lubliner, J., 1990. *Plasticity Theory*. Macmillan Publishing Company, Nova York, EUA.
- Malavolta, A. T., 2008. Metodologia Para Determinação dos Parâmetros Utilizados em Uma Nova Superfície de Escoamento Anisotrópica Para Processos de Conformação de Chapas Metálicas. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil.
- Mazars, J. e Pijaudier-Cabot, G., 1989. ‘Continuum damage theory - application to concrete’. *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, vol. (115), pp. 345–365.
- Murakami, S., 2012. *Continuum Damage Mechanics*. Springer, Nagoya, Japão.

- Nagtegaal, J., Parks, D. M. e Rice, J. M., 1974. 'On numerically accurate finite element solutions in the fully plastic range'. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng*, vol. 4, pp. 153–177.
- Nayak, G. e Zienkiewicz, O., 1972. 'Elastoplastic stress analysis: A generalisation for various constitutive laws including strain softening'. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol. (5), pp. 113–135.
- Neto, J. M., 1998. Um Estudo da Formulação de Modelos Constitutivos Viscoelásticos e Elasto-Viscoplásticos e do Emprego de Algoritmos Implícitos e Explícitos Para a Sua Integração Numérica. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil.
- Ortiz, M. e Popov, E. P., 1985. 'Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations'. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol. 21, pp. 1561–1576.
- Ortiz, M. e Simo, J. C., 1986. 'Analysis of a new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations'. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol. 23, pp. 353–366.
- Ottosen, N., (1980), Nonlinear finite element analysis of concrete structures, Technical report, Riso Natinal Labortory, Denmark.
- Ottosen, N. S., 1977. 'A failure criterion of concrete'. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, vol. 103, pp. 527–535.
- Owen, D. R. J. e Hinton, E., 1980. *Finite Elements in Plasticity*. Pineridge Press Limited, Swansea, EUA.
- Park, H. e Kim, J. Y., 2005. 'Plasticity model using multiple failure criteria for concrete in compression'. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 42, pp. 2303–2322.
- Penna, S. S., 2011. Formulação Multipotencial para Modelos de Degradação Elástica: Unificação Teórica, Proposta de Novo Modelo, Implementação Computacional e Modelagem de Estruturas de Concreto. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.

- Pereira, E. B., Barros, J. A. O. e Fisher, G., (2012-a), 3 d 4-parameter elasto-plasticity model for strain hardening cementitious composites, Technical report, University of Minho, Portugal.
- Pereira, E. B., Fischer, G. e Barros, J. A. O., 2012-b. ‘Direct assessment of tensile stresscrack opening behavior of strain hardening cementitious composites (shcc)’. *Cement and Concrete Research*, vol. 42, pp. 834–846.
- Pockszevnicki, B. C., 2004. Análise de materiais em regime elastoplástico usando modelo j2 com dano e modelo de cap suave. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil.
- Proença, S. P. B., 1988. Sobre Modelos Matemáticos do Comportamento Não-Linear do Concreto: Análise Crítica e Contribuições. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil.
- Saliba, S. S., 2007. Implementação computacional e análise crítica de elementos finitos de placas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Silva, R. P., 2012. Análise Não-Linear de Estruturas de Concreto por meio do Método Element Free Galerkin. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Simo, J. C. e Hughes, T. J. R., 1998. *Computational Inelasticity*. Springer-Verlag, Nova York, EUA.
- Simo, J. C. e Taylor, R. L., 1985. ‘Consistent tangent operators for rate independent elasto-plasticity’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 48, pp. 101–118.
- Skrzypek, J. J., 1993. *Plasticity and Creep Theory*. CRC Press, Londres.
- Sloan, S. W. e Booker, J., 1986. ‘Removal of singularities in tresca and mohr-coulomb yield functions’. *Communications in Applied Numerical Methods*, vol. 2, pp. 173–179.

- Souza Neto, E. A., Perić, D. e Owen, D. R. J., 2008. *Computational Methods For Plasticity: Theory and Application*. Wiley, Swansea, EUA.
- Szabó, L. e Kossa, A., 2012. ‘A new exact integration method for the drucker-pragerelastoplastic model with linear isotropic hardening’. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 49, pp. 170–190.
- Taqieddin, Z. N., 2008. *Elasto-Plastic and Damage Modeling of Reinforced Concrete*. Tese de Doutorado, Louisiana State University, Baton Rouge, Louisiana, EUA.
- Vaz Jr, M. e noz Rojas, P. M., 2011. ‘Damage evolution and thermal coupled effects in inelastic solids’. *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 53, pp. 387–398.
- Yan, J., 2004. *Study of baushinger effect in various spring steels*. Dissertação de Mestrado, Universidadede de Toronto, Toronto, Canadá.
- Yang, Y. B. e Shieh, M. S., 1990. ‘Solution method for nonlinear problems with multiple critical points’. *AIAA Journal*, vol. 28(12), pp. 2110–2216.

Apêndice A

Modelos Numéricos: Equações Auxiliares

A.1 Derivadas de Primeira e Segunda Ordem

A implementação dos modelos elastoplásticos descritos exige a obtenção dos gradientes (derivadas de primeira e segunda ordem) das funções de escoamento e do potencial plástico. Estes gradientes são obtidos aplicando a regra da cadeia para derivar os três invariantes de tensão I_1 , J_2 e J_3 .

A.1.1 Derivadas de primeira ordem dos invariantes de tensão

As derivadas de primeira ordem dos invariantes de tensão I_1 , J_2 e J_3 são dadas pelas seguintes expressões:

$$\frac{\partial I_1}{\partial \sigma_x} = \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_y} = \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_z} = 1 \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial \tau_{xy}} = \frac{\partial I_1}{\partial \tau_{xz}} = \frac{\partial I_1}{\partial \tau_{yz}} = 0 \quad (\text{A.2})$$

assim

$$\frac{\partial I_1}{\partial \sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \delta_{ij} \quad (\text{A.3})$$

Para J_2 :

$$\frac{\partial J_2}{\partial \sigma_x} = \frac{1}{3}(2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z) \quad (\text{A.4a})$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial \sigma_y} = \frac{1}{3}(2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z) \quad (\text{A.4b})$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial \sigma_z} = \frac{1}{3}(2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y) \quad (\text{A.4c})$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial \tau_{xy}} = 2\tau_{xy} \quad (\text{A.4d})$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial \tau_{xz}} = 2\tau_{xz} \quad (\text{A.4e})$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial \tau_{yz}} = 2\tau_{yz} \quad (\text{A.4f})$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial \sigma} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z) & 2\tau_{xy} & 2\tau_{xz} \\ 2\tau_{xy} & \frac{1}{3}(2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z) & 2\tau_{yz} \\ 2\tau_{xz} & 2\tau_{yz} & \frac{1}{3}(2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y) \end{bmatrix} = s_{ij} \quad (\text{A.5})$$

Para J_3 :

$$\frac{\partial J_3}{\partial \sigma_x} = \frac{1}{9}(2\sigma_x^2 - \sigma_y^2 - \sigma_z^2 + 4\sigma_y\sigma_z) + \frac{1}{3}(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 - 2\tau_{yz}^2) \quad (\text{A.6a})$$

$$\frac{\partial J_3}{\partial \sigma_y} = \frac{1}{9}(2\sigma_y^2 - \sigma_x^2 - \sigma_z^2 + 4\sigma_x\sigma_z) + \frac{1}{3}(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 - 2\tau_{xz}^2) \quad (\text{A.6b})$$

$$\frac{\partial J_3}{\partial \sigma_z} = \frac{1}{9}(2\sigma_z^2 - \sigma_x^2 - \sigma_y^2 + 4\sigma_x\sigma_y) + \frac{1}{3}(\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 - 2\tau_{xy}^2) \quad (\text{A.6c})$$

$$\frac{\partial J_3}{\partial \tau_{xy}} = \frac{2}{3}\tau_{xy}(\sigma_x + \sigma_y - 2\sigma_z) + 2\tau_{xz}yz \quad (\text{A.6d})$$

$$\frac{\partial J_3}{\partial \tau_{xz}} = \frac{2}{3}\tau_{xz}(\sigma_x + \sigma_z - 2\sigma_y) + 2\tau_{xy}yz \quad (\text{A.6e})$$

$$\frac{\partial J_3}{\partial \tau_{yz}} = \frac{2}{3}\tau_{yz}(\sigma_y + \sigma_z - 2\sigma_x) + 2\tau_{xy}xz \quad (\text{A.6f})$$

assim

$$\frac{\partial J_2}{\partial \sigma} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z) & 2\tau_{xy} & 2\tau_{xz} \\ 2\tau_{xy} & \frac{1}{3}(2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z) & 2\tau_{yz} \\ 2\tau_{xz} & 2\tau_{yz} & \frac{1}{3}(2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3}(2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z) & 2\tau_{xy} & 2\tau_{xz} \\ 2\tau_{xy} & \frac{1}{3}(2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z) & 2\tau_{yz} \\ 2\tau_{xz} & 2\tau_{yz} & \frac{1}{3}(2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y) \end{bmatrix} - \frac{2}{3}J_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = t_{ij} = s_{ij}s_{kj} - \frac{2}{3}J_2\delta_{ij} \quad (\text{A.8})$$

A.1.2 Derivadas de segunda ordem dos invariantes de tensão

As derivadas de segunda ordem dos invariantes de tensão I_1 , J_2 e J_3 são dadas pelas seguintes expressões:

$$\frac{\partial^2 I_1}{\partial \sigma^2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{A.9})$$

O primeiro invariante de tensão, I_1 , possui todas as derivadas de segunda ordem em relação às componentes de tensão nulas, como podemos observar na equação A.9.

Considerando o segundo invariante da tensão desviadora, J_2 , são obtidos os seguintes termos para a derivada de segunda ordem

- Se $i \leq 3$, com k e l menores que 4, obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_j} \left(\frac{\partial J_2}{\sigma_i} \right) = \frac{\partial}{\sigma_j} \left[\frac{1}{3} (2\sigma_j - \sigma_k - \sigma_l) \right] \quad (\text{A.10})$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_j} \left(\frac{\partial J_2}{\sigma_i} \right) = \begin{cases} \frac{2}{3}, & \text{para } j = 1 \\ -\frac{1}{3}, & \text{para } j \neq i \text{ e } j \leq 3 \\ 0, & \text{para } j > 3 \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

- se $i > 3$, obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_j} \left(\frac{\partial J_2}{\sigma_i} \right) = \frac{\partial}{\partial_j} (\sigma_i) \quad (\text{A.12})$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_j} \left(\frac{\partial J_2}{\sigma_i} \right) = \begin{cases} 2, & \text{para } j = i \\ 0, & \text{para } j \neq i \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

onde σ_j representa uma componente genérica do segundo invariante de tensões desviadoras, J_2 . Para o terceiro invariante do tensor de tensões desviadoras têm-se:

- Se $i \leq 3$, com k e l não excedendo 3, obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_j} \left(\frac{\partial J_3}{\sigma_i} \right) = \frac{\partial}{\partial \sigma_j} \left(\frac{1}{9} (2\sigma_i^2 - \sigma_k^2 - \sigma_l^2 - 2\sigma_i \sigma_k - 2\sigma_i \sigma_l + 4\sigma_k \sigma_l) + \frac{1}{3} (\sigma_u^2 + \sigma_v^2 - 2\sigma_{i+3}^2) \right) \quad (\text{A.14})$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_j} \left(\frac{\partial J_3}{\sigma_i} \right) = \begin{cases} \frac{2}{9}(2\sigma_j - \sigma_k - \sigma_l), \text{ para } j = i \\ \frac{2}{9}(2\sigma_j - \sigma_k - \sigma_l), \text{ para } j \neq i \text{ e } j \leq 3 \\ -\frac{4}{3}\sigma_j, \text{ para } j > 3 \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

- se $i > 3$, obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_j} \left(\frac{\partial J_3}{\sigma_i} \right) = \frac{\partial}{\sigma_j} \left(\frac{2}{3}\sigma_i(\sigma_u + \sigma_v - 2\sigma_{i-3} + 2\sigma_k\sigma_l) \right) \quad (\text{A.16})$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_j} \left(\frac{\partial J_3}{\sigma_i} \right) = \begin{cases} -\frac{4}{3}\sigma_j, \text{ para } j = i - 3 \\ \frac{2}{3}\sigma_j, \text{ para } j \neq i - 3 \text{ e } j \leq 3 \\ \frac{2}{3}(\sigma_k + \sigma_l - 2\sigma_{i-3}), \text{ para } j > 3 \text{ e } k, l \leq 3 \\ 2\sigma_k, \text{ para } j \neq i, j > 3 \text{ e } k > 3 \end{cases} \quad (\text{A.17})$$