

**MODELO DE DANO ORTOTRÓPICO NÃO  
LOCAL APLICADO À REGULARIZAÇÃO DE  
RESULTADOS NA ANÁLISE FISICAMENTE  
NÃO LINEAR**

**Pedro Lúcio Ferreira Brasil de Souza**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

**MODELO DE DANO ORTOTRÓPICO NÃO LOCAL  
APLICADO À REGULARIZAÇÃO DE RESULTADOS NA  
ANÁLISE FÍSICAMENTE NÃO LINEAR**

Pedro Lúcio Ferreira Brasil de Souza

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de “Mestre em Engenharia de Estruturas”.

Comissão Examinadora:

---

Prof. Dr. Samuel Silva Penna  
DEES - UFMG (Orientador)

---

Prof. Dr. Roque Luiz da Silva Pitangueira  
DEES - UFMG

---

Prof. Dr. Américo Campos Filho  
UFRGS

Belo Horizonte, 25 de Novembro de 2016

S729m

Souza, Pedro Lúcio Ferreira Brasil de.

Modelo de dano ortotrópico não local aplicado à regularização de resultados na análise fisicamente não linear [manuscrito] / Pedro Lúcio Ferreira Brasil de Souza. – 2016.

xiv, 106 f., enc.: il.

Orientador: Samuel Silva Penna.

Dissertação (mestrado) Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Apêndices: f. 93-103.

Bibliografia: f. 104-106.

1. Engenharia de estruturas - Teses. 2. Concreto armado - Teses. 3. Método dos elementos finitos - Teses. I. Penna, Samuel Silva. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. III. Título.

CDU: 624(043)

*Nenhuma mente que se abre para uma nova ideia, voltará a ter o tamanho original.*

(Albert Einstein)

*Eu não conheço tudo que vem pela frente, mas seja o que for, vou enfrentar gargalhando.*

(Segundo Imediato Stubb, do romance “Moby Dick” de Herman Melville)

*À minha família*



# Índice

<b>Índice</b>	<b>ii</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>viii</b>
<b>Lista de Abreviaturas e Siglas</b>	<b>ix</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>x</b>
<b>Resumo</b>	<b>xii</b>
<b>Abstract</b>	<b>xiii</b>
<b>Agradecimentos</b>	<b>xiv</b>
<b>1 INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1 Objetivos . . . . .	2
1.1.1 Objetivos Gerais . . . . .	2
1.1.2 Objetivos Específicos . . . . .	3
1.2 Organização do Texto . . . . .	3
<b>2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>5</b>
2.1 Comportamento do Concreto . . . . .	5
2.2 Análise Fisicamente Não Linear . . . . .	10
2.2.1 Modelos para Fissuração no Concreto . . . . .	11
2.2.2 Evolução dos Modelos de Fissuração Distribuída . . . . .	12
2.2.3 Modelos Constitutivos Baseados na Teoria de Dano . . . . .	15
2.2.4 Modelo de Dano Ortotrópico de de Borst e Gutierrez (1999) . . . . .	20
2.2.5 Equações de Evolução de Dano . . . . .	22
2.3 Localização de Deformações . . . . .	23
2.4 Modelos Não Locais . . . . .	27
2.5 Solução de Problemas de Análise Fisicamente Não Linear . . . . .	35
2.5.1 Introdução . . . . .	35
2.5.2 Métodos Incrementais Iterativos para Solução de Problemas não Lineares . . . . .	37

<b>3</b>	<b>Simulações Numéricas</b>	<b>40</b>
3.1	Simulação da Localização de Deformação Induzida . . . . .	40
3.2	Tração Direta com Refinamento da Malha . . . . .	54
3.3	Análise de Convergência-Ensaio de Flexão em 3 pontos . . . . .	60
<b>4</b>	<b>Validação do Modelo</b>	<b>72</b>
4.1	Introdução . . . . .	72
4.2	Modelagem . . . . .	73
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>89</b>
5.1	Considerações sobre as Simulações Numéricas . . . . .	89
5.2	Contribuições deste Trabalho . . . . .	91
5.3	Sugestão para Trabalhos Futuros . . . . .	92
<b>A</b>	<b>Resultados das Isofaixas de Dano e Deformação Principal para Análise de Efeito de Tamanho</b>	<b>94</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>102</b>



# Lista de Figuras

2.1	Material Concreto: escalas de observação (van Mier, 1995) . . . . .	5
2.2	Curva Tensão-Deformação típica para concreto à tração no nível de aproximação macro (van Mier, 1995) . . . . .	7
2.3	Lei proposta por Boone e Ingraffea (Penna, 2011) . . . . .	8
2.4	Lei proposta por Boone e Ingraffea (Penna, 2011) . . . . .	8
2.5	Dano uniaxial para um feixe de fibras paralelas (Jirasek, 2004) . . . . .	16
2.6	Evolução da tensão efetiva, $\bar{\sigma}$ , parâmetro de dano, $\omega$ e tensão nominal, $\sigma$ , sob carregamento monotônico (Jirasek, 2004) . . . . .	19
2.7	Evolução da tensão efetiva, $\bar{\sigma}$ , parâmetro de dano, $\omega$ e tensão nominal, $\sigma$ , sob carregamento não monotônico (Jirasek, 2004) . . . . .	19
2.8	Sistema de coordenadas global (X-Y) e local (n-s) ((Penna, 2011)) . . . . .	21
2.9	Chapa de concreto sujeita à tração: (a) geometria da amostra e disposição dos LVDTs, (b) relações entre deslocamentos e tempo decorrido de teste de Shah et al. (1995) . . . . .	25
2.10	relação tensão-deslocamento e estágios diferentes da fissuração de Shah et al. (1995) . . . . .	25
2.11	Localização de deformações numericamente induzida (Fuina, 2009) . . . . .	27
2.12	(a) Domínio não Local, (b) Função de Ponderação . . . . .	30
2.13	Função de Distribuição de Gauss . . . . .	31
2.14	Função de Distribuição Sino . . . . .	32
2.15	Função de Distribuição Linear . . . . .	32
2.16	Função de Distribuição Constante . . . . .	33
2.17	Função de Distribuição Degrau . . . . .	33
2.18	Trajetórias de equilíbrio típicas em problemas não-lineares . . . . .	35
2.19	Resumo dos métodos de controle . . . . .	39
3.1	Dados do Ensaio . . . . .	41

3.2	Malhas utilizadas . . . . .	42
3.3	Parâmetros dos Materiais . . . . .	42
3.4	Parametrização para Material 1 . . . . .	43
3.5	Parametrização para Material 2 . . . . .	43
3.6	Análise 1 (L=2m): Pontos de Gauss e área de influência para as malhas 1(a), 2(b), 3(c) e 4(d) . . . . .	44
3.7	Análise 2 (L=4m): Pontos de Gauss e área de influência para as malhas 1(a), 2(b), 3(c) e 4(d) . . . . .	45
3.8	Parâmetros dos Materiais . . . . .	46
3.9	Numeração dos Nós . . . . .	46
3.10	Trajetórias de equilíbrio para os nós 4, 6 e 8 . . . . .	47
3.11	Resultado para o Modelo Local . . . . .	48
3.12	Resultado para o Modelo Constitutivo Não Local-L=4,0m e k=8,0 . . . . .	49
3.13	Deformação $\epsilon_{xx}$ para a Malha 4 com a análise via modelo local no passo 11 . . . . .	49
3.14	Deformação $\epsilon_{xx}$ para a Malha 4 com a análise via modelo local no passo 14 . . . . .	50
3.15	Deformação $\epsilon_{xx}$ para a Malha 4 com a análise via modelo local no passo 60 . . . . .	50
3.16	Deformação $\epsilon_{xx}$ para a Malha 4 com a análise via modelo local no passo 200 (último passo) . . . . .	50
3.17	Deformação $\epsilon_{xx}$ para a Malha 4 com a análise via modelo não local, com L=4,0 e k=8,0, no passo 14 . . . . .	51
3.18	Deformação $\epsilon_{xx}$ para a Malha 4 com a análise via modelo não local, com L=4,0 e k=8,0, no passo 200 (último passo) . . . . .	51
3.19	Resultado para o Modelo Local . . . . .	52
3.20	Resultado para o Modelo não Local . . . . .	52
3.21	Resultado para o Modelo Constitutivo Não Local . . . . .	53
3.22	Deformação $\epsilon_{xx}$ para a Malha 4 com a análise via modelo não local, com L=2,0 e k=1,0, no passo 14 . . . . .	53
3.23	Deformação $\epsilon_{xx}$ para a Malha 4 com a análise via modelo não local, com L=2,0 e k=1,0, no passo 58 (último passo) . . . . .	54
3.24	Tração Direta . . . . .	55
3.25	(a)Malha 1, (b)Malha 2, (c)Malha 3, (d)Malha 4, (e)Malha 5 . . . . .	55

3.26	Resultados para Modelo Constitutivo Local . . . . .	56
3.27	Evolução dos Parâmetros para o Modelo Não Local . . . . .	57
3.28	Resultados para Modelo Constitutivo Não Local . . . . .	57
3.29	Deformação $\epsilon_{xx}$ , para a malha de 1 elemento, dos passos 1(a) e 150(b)	58
3.30	Deformação $\epsilon_{xx}$ para a malha de 256 elementos analisada via modelo local, dos passos 1(a) e 150(b) . . . . .	59
3.31	Deformação $\epsilon_{xx}$ para a malha de 256 elementos analisada via modelo local, dos passos 28(a) e 29(b) . . . . .	59
3.32	Deformação $\epsilon_{xx}$ para a malha de 256 elementos analisada via modelo não local, dos passos 1(a) e 150(b) . . . . .	60
3.33	Dados do Ensaio . . . . .	61
3.34	Parametrização do Material . . . . .	62
3.35	Malhas Utilizadas . . . . .	62
3.36	Trajatórias de Equilíbrio para Modelos Locais . . . . .	63
3.37	Trajatórias de Equilíbrio para Modelos Não Locais . . . . .	63
3.38	Trajatórias de Equilíbrio-Fator Carga x Deslocamento Vertical no ponto A . . . . .	64
3.39	Dano ao longo da estrutura para o Modelo Local no passo 34 . . . . .	65
3.40	Dano ao longo da estrutura para o Modelo Local no passo 35 . . . . .	65
3.41	Dano ao longo da estrutura para o Modelo Local no passo 200 . . . . .	66
3.42	Deformações principais de tração ao longo da estrutura para o Modelo Local no passo 34 . . . . .	66
3.43	Deformações principais de tração ao longo da estrutura para o Modelo Local no passo 35 . . . . .	67
3.44	Deformações principais de tração ao longo da estrutura para o Modelo Local no passo 200 . . . . .	67
3.45	Dano ao longo da estrutura para o Modelo Não Local no passo 34 . . . . .	68
3.46	Dano ao longo da estrutura para o Modelo Não Local no passo 35 . . . . .	68
3.47	Dano ao longo da estrutura para o Modelo Não Local no passo 200 . . . . .	68
3.48	Deformação principal de Tração ao longo da estrutura para o Modelo Não Local no passo 34 . . . . .	69
3.49	Deformação principal de Tração ao longo da estrutura para o Modelo Não Local no passo 35 . . . . .	69

3.50	Deformação principal de Tração ao longo da estrutura para o Modelo Não Local no passo 200 . . . . .	70
3.51	Deformada da estrutura para o Modelo Local . . . . .	70
3.52	Deformada da estrutura para o Modelo Local . . . . .	71
4.1	Dados do Ensaio: Geometria, condições de carregamento e contorno .	73
4.2	Dados do Ensaio: Proporção entre tamanhos . . . . .	73
4.3	Malha para Tamanho 1 . . . . .	74
4.4	Malha para Tamanho 2 . . . . .	74
4.5	Malha para Tamanho 3 . . . . .	75
4.6	Parametrização para Lei exponencial . . . . .	76
4.7	Parametrização para Lei Polinomial . . . . .	76
4.8	Parametrização para Lei Bi-Linear . . . . .	77
4.9	Trajetórias de Equilíbrio para Modelos Não Locais-Variação do Tamanho da Estrutura . . . . .	78
4.10	Trajetórias de Equilíbrio para Modelos Não Locais-Variação da Função de Evolução do Dano . . . . .	79
4.11	Evolução do dano para modelo não local e as três funções de dano: Exponencial (a), (d) e (g); Polinomial (b), (e) e (h) e Bi-Linear (c), (f) e (i), passos 5, 10 e 198 . . . . .	80
4.12	Isofaixas da deformação principal de tração para modelo não local e as três funções de carregamento: Exponencial (a), (d) e (g); Polinomial (b), (e) e (h) e Bi-Linear (c), (f) e (i), passos 5, 10 e 198 . . . . .	81
4.13	Estrutura deformada para modelo constitutivo não local e as três funções de carregamento: Exponencial (a), Polinomial (b) e Bi-Linear (c) . . . . .	82
4.14	Influência das Funções de Distribuição nas Trajetórias de Equilíbrio para Modelos Não Locais . . . . .	83
4.15	Influência do parâmetro k para a função de distribuição . . . . .	84
4.16	Influência do parâmetro k para a função de distribuição de Gauss . .	85
4.17	Influência do parâmetro k para a função de distribuição Sino . . . . .	85
4.18	Influência do parâmetro k para a função de distribuição Degrau . . .	85
4.19	Influência da função de distribuição para k=1 . . . . .	86
4.20	Influência da função de distribuição para k=2 . . . . .	86

4.21	Influência da função de distribuição para $k=4$ . . . . .	86
4.22	Influência da função de distribuição para $k=8$ . . . . .	87
4.23	Influência do parâmetro $k$ para a função de distribuição Gauss . . . . .	87
4.24	Influência do parâmetro $k$ para a função de distribuição Sino . . . . .	88
4.25	Influência do parâmetro $k$ para a função de distribuição Degrau . . . . .	88
4.26	Influência do parâmetro $k$ para a função de distribuição Linear . . . . .	88
A.1	Isofaixas de dano para função de dano exponencial-passo 5 . . . . .	94
A.2	Isofaixas de dano para função de dano exponencial-passo 15 . . . . .	95
A.3	Isofaixas de dano para função de dano exponencial-passo 198 . . . . .	95
A.4	Isofaixas de dano para função de dano polinomial-passo 5 . . . . .	95
A.5	Isofaixas de dano para função de dano polinomial-passo 15 . . . . .	96
A.6	Isofaixas de dano para função de dano polinomial-passo 198 . . . . .	96
A.7	Isofaixas de dano para função de dano bi linear-passo 5 . . . . .	97
A.8	Isofaixas de dano para função de dano bi linear-passo 15 . . . . .	97
A.9	Isofaixas de dano para função de dano bi linear-passo 198 . . . . .	97
A.10	Isofaixas da deformação principal de tração para função de dano exponencial-passo 5 . . . . .	98
A.11	Isofaixas da deformação principal de tração para função de dano exponencial-passo 15 . . . . .	98
A.12	Isofaixas da deformação principal de tração para função de dano exponencial-passo 198 . . . . .	99
A.13	Isofaixas da deformação principal de tração para função de dano polinomial-passo 5 . . . . .	99
A.14	Isofaixas da deformação principal de tração para função de dano polinomial-passo 15 . . . . .	100
A.15	Isofaixas da deformação principal de tração para função de dano polinomial-passo 198 . . . . .	100
A.16	Isofaixas da deformação principal de tração para função de dano bi linear-passo 5 . . . . .	101
A.17	Isofaixas da deformação principal de tração para função de dano bi linear-passo 15 . . . . .	101
A.18	Isofaixas da deformação principal de tração para função de dano bi linear-passo 198 . . . . .	101

# Lista de Abreviaturas e Siglas

UFMG Universidade Federal de Minas Gerais

INSANE Interactive Structural Analysis Environment

MEF Método dos Elementos Finitos

EPT Estado Plano de Tensões

EPD Estado Plano de Deformações

# Lista de Símbolos

$\sigma_t$	Tensão de tração atuante no concreto
$\sigma_c$	Tensão de compressão atuante no concreto
$f_t$	Tensão limite de resistência do concreto à tração
$f_c$	Tensão limite de resistência do concreto à compressão
$g_f$	Energia de fratura específica
$\epsilon_t$	Deformação limite elástica do concreto à tração
$\epsilon_c$	Deformação limite elástica do concreto à compressão
$E_0$	Módulo de elasticidade inicial
$E_s$	Módulo de elasticidade secante
$[K]$	Matriz de rigidez tangente
$\delta U$	Vetor de deslocamentos
$P$	Vetor de cargas
$\delta \lambda$	Fator de carga
$Q$	Vetor de forças residuais
$D$	Matriz de rigidez
$\nu$	Coefficiente de Poisson

$\beta_r$	Coeficiente de retenção ao cisalhamento
$\alpha$	Coeficiente de retenção à rigidez normal do elemento
$C$	Matriz de flexibilidade
$\omega$	Variável de dano
$\phi$	Variável de integridade
$A$	Área da seção transversal
$\bar{A}$	Área efetiva da seção transversal
$\bar{\sigma}$	Tensão efetiva
$\kappa$	Variável histórica
$[T^\sigma]$	: a matriz de transformação para a variável de tensão
$[T^\epsilon]$	: a matriz de transformação para a variável de deformação
$\alpha(\mathbf{x})$	Função de distribuição
$V_r(\mathbf{x})$	Volume do sólido de revolução gerado pela distribuição estatística
$L$	Raio da função de distribuição
$d_0$	Comprimento característico do material
$\beta$	Parâmetro para a intensidade do crescimento do dano
$\kappa_0$	Deformação principal de tração
$\kappa_f$	Deformação máxima assumida
$\mathbf{x}$	Vetor de coordenadas do ponto avaliado
$\mathbf{s}$	Vetor de coordenadas do ponto do domínio não local



# Resumo

Este trabalho apresenta um estudo sobre modelos constitutivos de dano ortotrópico, para a solução de problemas fisicamente não lineares de estruturas de concreto, a partir de uma abordagem não local. É apresentado um estudo sobre a análise fisicamente não linear do concreto e sobre o fenômeno de localização de deformações numericamente induzidas, mostrando que este pode conduzir a análise a resultados não representativos. Para lidar com este fenômeno, mecanismos de regularização se fazem necessários, e a partir daí, são apresentados os modelos não locais, que visam minimizar e os problemas de origem unicamente numérica que surgem com a análise não linear.

O estudo é consolidado a partir de simulações numéricas que comparam resultados de problemas a partir da análise via modelos de dano ortotrópicos locais e não locais. Para esta etapa será utilizado o software INSANE (INteractive Structural ANalysis Environment) que possui modelos locais e não locais já implementados. Com estas simulações, as limitações de modelos locais podem ser constatadas assim como as melhorias nos resultados proporcionado por meio da utilização de modelos não locais. Além da comparação de modelos, serão realizadas simulações para comparar a análise numérica via modelos não locais com resultados experimentais.

# Abstract

This work presents a study about constitutive models of orthotropic damage, applied from a non-local formulation, for solve physically nonlinear problems, on concrete structures. There will done a study on the analysis of physically nonlinear concrete structures and the strain localization numerically induced phenomenon, showing that this can lead the analyses to unrepresentative results. To solve this phenomenon, regularization mechanisms are needed, and from that, non local models are presented, with the objective to minimize the numerical problems that arise with the non-linear analysis.

The study is consolidated by numerical simulations that compares results of problems solved with the analysis by local orthotropic damage models and non-local orthotropic damage models. For this analyses will be used the software Insane(Interactive Structural Analysis Environment) that has local and nonlocal models already implemented. With these simulations, the limitations of local models can be observed as well as improvements in the results provided by the use of non local models. Besides the comparison models, simulations will be performed to compare the numerical analysis by nonlocal models with experimental results.

# Agradecimentos

A meus pais, Analberto e Luciana, meu irmão, Carlos, e minhas avós, Ana Maria e Vanda (*in memoriam*), pelo incentivo profissional e intelectual ao longo de toda a minha formação.

À minha querida esposa Thaís pelo carinho, incentivo e pelas horas de “terapia” nos momentos mais difíceis desta caminhada.

Ao meu orientador, prof. Samuel Penna, pela amizade, orientação, ensinamentos e paciência.

Ao prof. Felício Barros, por todos os ensinamentos, desde a graduação e por me explicar todas as regras do programa, mostrando que seria possível completar esta caminhada, mesmo com meu tempo tão escasso.

Ao prof. Roque, pelo incentivo e confiança ao me acolher neste grupo de pesquisa tão desafiante.

Aos meus grandes amigos Ibrahim, Lineker, Maurício e Roberto que, de certa forma, contribuíram para este trabalho com conselhos, apoio e amizade.

Aos colegas de mestrado pelo companheirismo durante o curso, em especial ao Hugo Vieira.

À gerência e a meus colegas de Usiminas pelo incentivo, amizade e, principalmente, pelo tempo cedido e pela flexibilidade nas viagens à trabalho.

Ao meu gato pela companhia ao lado do computador, durante todos os momentos de estudo.

Aos professores e funcionários do Departamento de Engenharia de Estruturas da UFMG, em especial à Inês por toda a ajuda e boa vontade.

À FAPEMIG pelo suporte financeiro nos congressos.

# Capítulo 1

## INTRODUÇÃO

A análise estrutural consiste na determinação do estado de tensões e deformações de uma estrutura qualquer, de modo a permitir que esta seja dimensionada a partir das capacidades resistentes dos materiais que a compõe. Para isso, é necessário primeiramente a substituição do objeto real por um modelo matemático simplificado e, neste contexto, a Teoria da Elasticidade e a Mecânica dos Sólidos fornecem modelos matemáticos que utilizam equações diferenciais, cujas soluções são as grandezas estáticas e cinemáticas do problema. Contudo, a solução destas equações é conhecida apenas para casos bem particulares, podendo se tornar laboriosa para casos mais complexos. Para tornar o processo mais simples e acessível à rotina da engenharia, foram desenvolvidos métodos que utilizam modelos discretos para descrever o problema de meio contínuo original. Assim sendo, a estrutura original, complexa, passa a ser um conjunto finito de subdomínios que juntos fornecerão o estado das diversas grandezas da análise.

Neste contexto, o Método dos Elementos Finitos (MEF) constitui uma importante ferramenta de apoio ao engenheiro na análise estrutural. O método permite a divisão de toda a estrutura em uma quantidade finita de subdomínios, chamados de elementos, conectados por pontos, chamados de nós, definindo uma malha discreta. A obtenção dos resultados do modelo ocorre a partir da solução de um conjunto de equações algébricas.

O MEF evoluiu bastante da década de sessenta até os dias de hoje, e ainda se

mantém como a principal ferramenta de análise estrutural de problemas de natureza linear, ou seja, quando há uma relação de proporcionalidade entre, por exemplo, a tensão e a deformação, e de natureza não linear, quando não existe esta relação de proporcionalidade. A não linearidade de problemas estruturais, simplificada, pode ser de natureza geométrica e/ou de constituição física do meio material. Nas estruturas de concreto, a não linearidade física é bastante comum e em geral preponderante sobre a geométrica. No concreto, pelo fato deste material apresentar baixa resistência à tração, a formação de fissuras causa a perda da integridade do material e, portanto, altera as propriedades físicas do meio. A solução destes problemas é representada por trajetórias de equilíbrio. Tais trajetórias representam o estado de equilíbrio entre as forças internas e externas em cada um dos pontos do domínio, em função do estado de tensão e deformação. Para a obtenção destas trajetórias, são utilizados processos incrementais-iterativos com controle de variáveis do problema.

A existência de uma malha de elementos pode ocasionar diversos problemas de natureza numérica, que tornam o modelo não adequado para traduzir o comportamento real da estrutura. Um fato bastante comum, que ocorre durante a solução de problemas fisicamente não lineares, é a localização de deformações, que impede a obtenção correta das trajetórias de equilíbrio do modelo. Para contornar este problema, uma estratégia adotada é a utilização de modelos não locais, que visam uniformizar o comportamento da malha e atenuar os efeitos de localização de deformação.

## **1.1 Objetivos**

### **1.1.1 Objetivos Gerais**

O presente trabalho tem como objetivo avaliar o comportamento de um modelo de dano ortotrópico, utilizado em uma abordagem não local para a solução de problemas de localização de deformações numericamente induzida, na análise não linear

de estruturas de concreto.

### **1.1.2 Objetivos Específicos**

Este trabalho tem como objetivo específico a modelagem de estruturas no sistema computacional INSANE (INteractive Structural ANalysis Environment), desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais, para avaliar a resposta de modelos não locais, já disponíveis. Serão modelados problemas clássicos e simulações já realizadas e disponíveis na literatura. Com isso, pode-se avaliar se os resultados fornecidos pela modelagem são adequados e representativos.

Serão avaliadas ainda, a influência de todas as variáveis necessárias para a análise não local, mostrando como cada uma delas interfere na resposta do problema.

## **1.2 Organização do Texto**

Este trabalho é dividido em cinco capítulos.

No capítulo 2 será apresentada toda a base teórica necessária para o desenvolvimento deste trabalho. Serão apresentadas considerações sobre o comportamento do material concreto e sobre a solução de problemas de análise não linear. Será ainda exposto o fenômeno de localização de deformações, que consiste no problema a ser sanado por meio da abordagem não local. Além disso, será apresentada a formulação de modelos constitutivos baseados em leis de dano, mais especificamente, o modelo constitutivo de dano ortotrópico, utilizado nas modelagens. Finalmente, será apresentado a base teórica de modelos não locais, mostrando sua formulação e o algoritmo clássico de sua implementação.

No capítulo 3 são apresentadas as simulações numéricas realizadas para se avaliar o comportamento dos modelos não locais. Foram realizadas três simulações numéricas em problemas de indução de localização de deformações, refinamento de malha

em tração direta e convergência da solução na flexão.

No capítulo 4 é apresentada mais uma modelagem, neste caso, de um ensaio de efeito de tamanho em flexão de vigas. Nesta última modelagem, apresenta-se a comparação dos resultados obtidos com resultados experimentais apresentados por Álvarez et al. (2012) para avaliar a resposta dos modelos numéricos não locais. Foi avaliado também a influência de cada uma das variáveis deste modelo na resposta do problema.

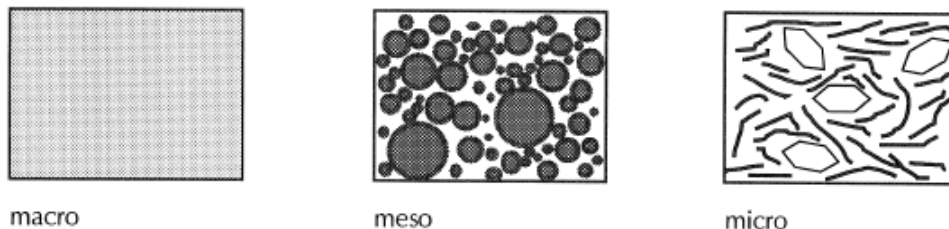
Finalmente, no capítulo 5, apresentam-se as considerações finais deste trabalho, com uma síntese de tudo aquilo que foi observado e constatado sobre o tema proposto. Além disso, serão apresentadas sugestões de trabalhos futuros, a serem desenvolvidos, para a continuidade deste estudo.

# Capítulo 2

## REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 Comportamento do Concreto

O concreto é um material heterogêneo, composto por uma matriz cimentícia (cimento portland e água) combinada com agregados, que, individualmente, também são materiais heterogêneos. Para a análise numérica de estruturas de concreto, principalmente em regimes não lineares, sua utilização requer considerações e simplificações que necessitam ser estudadas e compreendidas para que possam ser corretamente aplicadas. Uma simplificação bastante utilizada para este material diz respeito à escala em que este será tratado, sendo que, dependendo da escala, o material (ou seus agregados) passa a ser considerado como homogêneo. Segundo van Mier (1995), a ciência dos materiais trabalha a partir da análise em três diferentes escalas, apresentados na Figura 2.1: macro, meso e micro-escala, cada uma destas, fornecendo uma análise com considerações e comportamentos específicos.



**Figura 2.1:** Material Concreto: escalas de observação (van Mier, 1995)



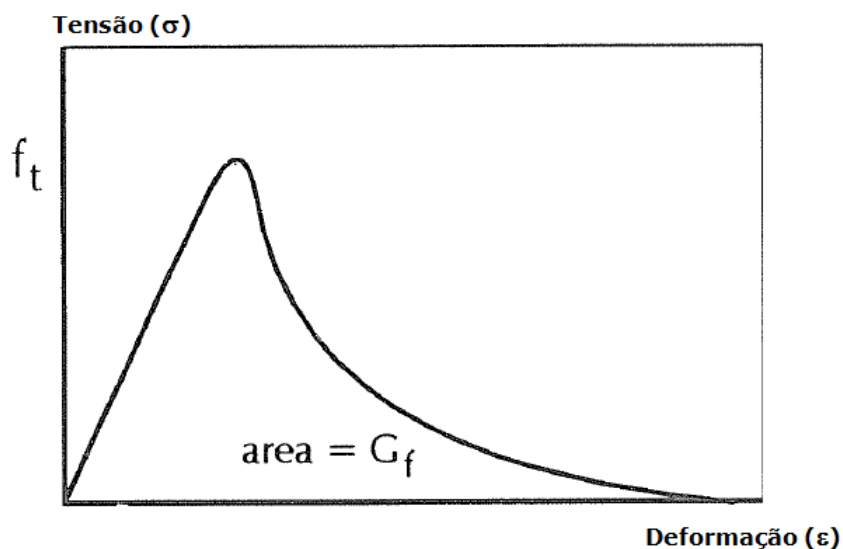
O primeiro nível de aproximação é o macro, que não diferencia a matriz e os agregados, ou seja, considera o material como isotrópico e homogêneo. Este nível permite que estruturas possam ser discretizadas em elementos finitos, relativamente grandes, com mesmas propriedades físicas e mecânicas, muito embora, o comportamento do material, em seu ramo não linear, passa a ser tratado unicamente via modelo constitutivo. Com isso, apesar da grande vantagem deste nível permitir uma fácil modelagem da estrutura, este se torna dependente de uma malha e de um modelo constitutivo, para seu ramo não linear.

Já com o nível de aproximação meso, a estrutura é analisada em uma escala de milímetros a centímetros, ou seja, cada agregado é distinguido e analisado individualmente, sendo estes, considerados isotrópicos. Neste nível, pode-se analisar a interação entre a matriz cimentícia e os agregados, mostrando que a resistência desta matriz é bastante inferior à resistência de cada um dos materiais, individualmente. Ou seja, a partir da análise do comportamento do material no nível meso, pode-se explicar a resposta estrutural do material no nível macro.

Finalmente, o nível de aproximação micro analisa o material considerando as ligações de cálcio-silicatos-hidratos (CSH), sendo estas partículas ligadas entre si por meio de forças de VanderWaals. Conforme observado, cada nível de aproximação apresenta uma consideração de homogeneidade. Enquanto o nível macro considera o concreto como homogêneo e o nível meso considera os agregados e a matriz, no nível micro, as partículas são consideradas como homogêneas.

Conforme mencionado, nas análises estruturais via MEF, objeto de estudo deste trabalho, o nível de aproximação mais comumente utilizado é o nível macro. Por isso, é importante o estudo dos mecanismos de fratura desta aproximação. A Figura 2.2 apresenta uma “curva tensão *versus* deformação” típica do material concreto, submetido à tração, a partir da aproximação macro. Nesta curva, observa-se um comportamento relativamente linear até um limite de resistência do material à tração

( $f_t$ ), seguido por um comportamento não linear, traduzido por uma curva. Note-se ainda que a área sob a curva tensão-deformação é denominada como energia de fratura ( $G_f$ ).



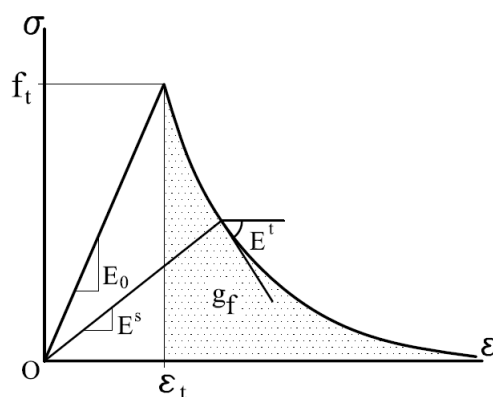
**Figura 2.2:** Curva Tensão-Deformação típica para concreto à tração no nível de aproximação macro (van Mier, 1995)

Para tentar traduzir, matematicamente, o comportamento da curva de tensão-deformação, várias leis são propostas. Para solicitações de tração, uma lei bastante utilizada é a lei proposta por Boone e Ingraffea (1987). A lei propõe que o concreto possui comportamento exponencial após a tensão limite de resistência à tração, da seguinte forma:

$$\sigma_t = f_t e^{-k(\epsilon - \epsilon_t)} \quad (2.1)$$

onde:  $\sigma$  é a tensão,  $\epsilon$  é a deformação corrente,  $\epsilon_t$  é a deformação relativa ao limite elástico à tração,  $f_t$  é a tensão limite de resistência do concreto à tração,  $g_f$ , a energia de fratura específica e  $k = \frac{f_t}{g_f}$ .

Graficamente, pode-se observar o comportamento do concreto à tração, segundo esta lei, na Figura 2.3:



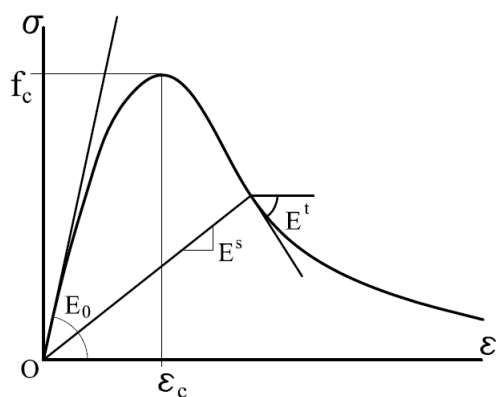
**Figura 2.3:** Lei proposta por Boone e Ingrassia (Penna, 2011)

Para as solicitações de compressão uma lei que pode ser utilizada, por exemplo, é a lei de Carreira e Chu (1985). A lei propõe que o concreto apresente comportamento polinomial, da seguinte forma:

$$\sigma_c = f_c \frac{k \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_c} \right)}{k - 1 + \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_c} \right)^k} \quad (2.2)$$

onde:  $\sigma$  é a tensão,  $\epsilon$  é a deformação corrente,  $\epsilon_c$  é a deformação relativa à tensão de resistência à compressão,  $f_c$  é a tensão limite de resistência do concreto à compressão e  $E_0$  é o módulo de elasticidade equivalente no domínio elástico e  $k = \frac{1}{1 - \left( \frac{f_c}{\epsilon_c E_0} \right)}$ .

Graficamente, pode-se observar o comportamento do concreto à compressão, segundo esta lei, na Figura 2.4:



**Figura 2.4:** Lei proposta por Boone e Ingrassia (Penna, 2011)

Nas Figuras 2.3 e 2.4 pode-se observar o comportamento linear e não linear do concreto, a partir da aproximação macro. Nas duas leis, além de se ter valores diferentes para os limites de resistência, o formato geral da curva também apresenta diferenças. Estas diferenças do material frente às solicitações de tração e compressão se devem basicamente ao fenômeno da fissuração, que consiste na transição do regime linear para o não linear. Este fenômeno, conforme já mencionado, nas aproximações meso-escala é considerado a partir de modelos constitutivos. O processo de fissuração se inicia a partir de microfissuras, que evoluem ao longo da matriz cimentícia, até a formação de macrofissuras. As macrofissuras, mesmo evoluindo, permitem a transferência de tensões no interior do material, sendo que, esta redistribuição de tensões no concreto, permite com que o material possua uma certa rigidez residual. Este processo permanece até o momento em que o concreto passa a ter um aumento de deformações com um decréscimo de tensões, comportamento conhecido como amolecimento (ou “softening”) do material.

De acordo com Wight e MacGregor (2009), existem quatro etapas durante o processo de fissuração. A primeira delas, a fissuração com ausência de cargas, ocorre a partir da contração da matriz cimentícia durante o processo de hidratação do concreto. Nesta etapa, esta contração confina os agregados, provocando tensões de tração, que por sua vez, provocam a fissuração da pasta. A segunda etapa da fissuração ocorre quando os níveis de tensão são superiores a 30 a 40% dos limites de resistência do material. Nesta etapa, os limites de tração e cisalhamento na interface dos agregados com a matriz são excedidas e com isso, fissuras são formadas neste contato. Entretanto, estas fissuras se mantêm estáveis, aumentando apenas com um conseqüente aumento de carregamento. Caso o nível de carregamento sobre o material exceda 50 a 60% dos seus limites de resistência, a terceira etapa do processo de fissuração é alcançada. Nesta etapa, as fissuras se localizam entre as fissuras da segunda etapa, ou seja, entre dois pontos de interface de agregados com a matriz cimentícia. Também nesta etapa, as fissuras são constantes com um carregamento

constante, havendo acréscimo de fissuras apenas com o acréscimo de carregamento. Finalmente, a quarta etapa de fissuração ocorre com o nível de carregamento sobre o material excedendo 75 a 80% dos seus limites de resistência, quando tem-se, efetivamente, um comportamento não linear do material. Nesta etapa, as fissuras se formam, predominantemente, na matriz cimentícia, e a deformação na estrutura apresenta um aumento considerável.

Sendo a fissuração um fenômeno repleto de particularidades, e as análises numéricas trabalhando com o concreto no nível macro de escala, torna-se necessário um tratamento matemático que seja capaz de representar regiões fissuradas e não fissuradas, de uma estrutura de concreto. Além disso, em regiões de fissuração, o material perde boa parte de sua rigidez e passa a estar sujeito a deformações mais acentuadas, que podem levar ao fenômeno de localização de deformações, fenômeno este que será descrito na Seção 2.3.

## **2.2 Análise Fisicamente Não Linear**

Conforme descrito na Seção 2.1, o concreto é um material repleto de particularidades e, para sua correta modelagem matemática, é necessário um conjunto de equações que possam representar suas características de maneira adequada. Durante uma análise não linear, esta representação deve, particularmente, possuir uma tratativa matemática do fenômeno da fissuração, uma vez que este é a origem da não linearidade do material. O comportamento do meio é descrito por modelos constitutivos. Tais modelos são formulados a partir de hipóteses e leis representativas do material.

Durante o processo de solução de um problema não linear o modelo constitutivo é acionado no momento do cálculo do estado de tensão da estrutura e seu vetor de forças internas, ditando todo o comportamento da estrutura a partir do ramo pós crítico.

Na análise numérica de estruturas de concreto, conforme já mencionado, tem-se, inicialmente, o material com comportamento linear e elástico. Apesar do concreto ser um material composto, ou seja, heterogêneo, considera-se que o domínio do problema analisado é suficientemente grande e representativo, permitindo desconsiderar as não homogeneidades do material. A partir dos incrementos de carregamento, o material se degrada cada vez mais, até atingir seu limite elástico, sendo tratado, a partir daí, com comportamento não linear. Ressalta-se que, em uma malha muito refinada, observam-se regiões onde o estado de tensão já atingiu seu limite elástico, e outras, onde ainda domina o comportamento linear, de modo que, diferentes comportamentos são vistos simultaneamente no domínio do problema.

Conforme mencionado, a grande evidência da presença de não linearidades físicas nas estruturas de concreto está no fenômeno da fissuração, que pode levar à formação de descontinuidades geométricas no domínio do problema. A modelagem deste fenômeno é que irá conduzir a propagação da degradação e a perda de rigidez do modelo.

### **2.2.1 Modelos para Fissuração no Concreto**

Os modelos para representar a fissuração no concreto via MEF podem, resumidamente, ser divididos em dois tipos: modelos de fissuras discretas e modelos de fissuras distribuídas.

Os modelos de fissuras discretas são utilizados quando se deseja o detalhamento localizado da formação de fissuras. Este modelo pressupõe que a formação de uma fissura significa na separação entre dois elementos vizinhos, dada pela perda da conectividade nodal dos elementos.

Este modelo possui como principal limitação o fato da modelagem da fissura depender de um conhecimento prévio da direção e do modo de propagação da descontinuidade. Ou seja, após a formação da fissura, localizada na zona de maior solicitação, o usuário deverá redefinir a malha informando o modo de propagação e

a direção da propagação da fissura.

A grande vantagem na utilização deste modelo está no fato de um maior realismo na representação da geometria da fissura.

Os modelos de fissuras distribuídas trabalham com uma modelagem mais generalizada da fissura. Neles, as regiões mais solicitadas, onde ocorre a formação das fissuras, são representadas por um número infinito de pequenas fissuras distribuídas de forma uniforme no elemento danificado. Ou seja, a rigor, o que ocorre é a alteração da característica do material, de isotrópico para ortotrópico, na região danificada, de modo que a fissura passa a ser tratada como uma característica física do meio e não apenas como uma descontinuidade geométrica.

Assim sendo, os modelos de fissuração distribuída vencem a principal limitação encontrado nos modelos discretos, porém tornam-se bastante dependentes do modelo constitutivo adotado (daí a importância de um bom estudo e conhecimento do problema) e da malha. A escolha da malha nestes modelos é extremamente significativa, uma vez que, malhas mais refinadas podem produzir zonas de fissuração pouco realistas.

Outra grande vantagem destes modelos é o fato de trabalharem com relações constitutivas, cujas leis podem ser prescritas para representar o comportamento do material à tração e à compressão.

### **2.2.2 Evolução dos Modelos de Fissuração Distribuída**

A tratativa matemática para o modelo de fissuração distribuída, para o caso de Estado Plano de Tensões, se inicia com uma primeira simplificação proposta por Cervenka (1970), Rashid (1968) e Vallippan e Doolan (1972), na qual, para os casos planos, a matriz constitutiva evolui de uma condição íntegra para um estado degradado, em que o módulo de elasticidade na direção normal à fissura e o módulo de elasticidade transversal, são considerados nulos, conforme apresentado pela Equação 2.4.

$$D = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

onde:  $D$  é a rigidez do elemento,  $E$  é o módulo de elasticidade, igual nas três direções e  $\nu$  é o coeficiente de Poisson;

Modelos baseados nesta teoria apresentaram diversos problemas de instabilidade numérica e devido a este problema, Suidan e Schnobrich (1973) e Yuzugullu e Schnobrich (1973) mantiveram o módulo de elasticidade transversal, porém reduzido por um fator de retenção ao cisalhamento ( $\beta_r$ , que varia de 0 a 1). Com isso, após a formação da fissura, o tensor constitutivo passa a assumir a seguinte forma:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & \beta_r G \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Similarmente, os modelos de fissuração distribuída evoluíram para a inclusão de um fator de redução do módulo de elasticidade na direção normal à fissura ao invés de simplesmente desconsiderá-lo nesta direção. Com isso, à matriz constitutiva é acrescentado mais um fator de redução ( $\alpha$ , que varia de 0 a 1) para a redução do módulo de elasticidade na direção normal à fissura. Este fator de redução, da mesma forma como no fator de redução ao cisalhamento, é inserido principalmente para tentar promover a redução do módulo de elasticidade de forma gradual, isso porque, naturalmente o processo de fissuração possui este comportamento, e ainda, as reduções bruscas na elasticidade podem ocasionar problemas de instabilidade numérica. A partir daí, o tensor constitutivo assume a seguinte forma:



$$D = \begin{pmatrix} \alpha E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & \beta_r G \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Pode-se observar que a evolução dos modelos de fissuras distribuídas caminharam no sentido de buscar artifícios matemáticos que promovam uma redução não acentuada nos termos da matriz constitutiva do problema. Neste contexto, surge a teoria de dano, que permite generalizar os modelos constitutivos, por meio da gradativa redução da rigidez, no lugar de reduções bruscas, no momento da formação da fissura. Este artifício se dá a partir da inserção da variável de dano, que será detalhada na seção 2.2.3, à matriz constitutiva. Assim, pressupõe-se na existência de uma relação constitutiva ortotrópica entre deformações e tensões, dada pela Equação 2.7.

$$\epsilon = C\sigma \quad (2.7)$$

sendo C chamada matriz de flexibilidade do sistema (Pitangueira, 1998), dada por:

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Observa-se que, neste momento, tem-se a diferenciação do módulo de elasticidade do problema, sendo que cada direção ortogonal possui um valor diferente para esta grandeza, sendo:  $E_1$ , o módulo de elasticidade na direção normal à fissura,  $E_2$ , o módulo de elasticidade na direção normal à fissura e  $G_{12}$ , o módulo de elasticidade na direção transversal à fissura.

A partir desta matriz e desta relação constitutiva, é possível a obtenção da matriz de rigidez secante do modelo a partir da inversão da matriz de flexibilidade, mostrada na Equação 2.8, chegando à relação, para o Estado Plano de Tensões, apresentada pela Equação 2.9.

$$D = \frac{1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \begin{bmatrix} E_1 & \nu_{12}E_1 & 0 \\ \nu_{12}E_2 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \nu_{12}\nu_{21}G_{12} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

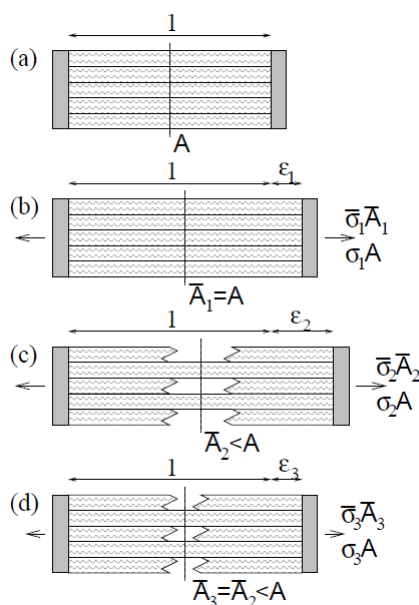
Além disso, as leis de dano adicionam ao problema mais uma variável, o Dano ( $\omega$ ), para as relações constitutivas dos materiais. Esta variável mede o nível de degradação do módulo de elasticidade do material, em função de sua deformação, como será definido na Seção 2.2.3. Dessa forma, a matriz constitutiva do material passa a depender do dano para as direções transversais e longitudinais à fissura, além de considerar as degradações devido ao efeito de Poisson e a matriz secante passa a assumir a forma, para o caso de Estado Plano de Tensões, apresentada pela Equação 2.10:

$$D = \frac{1}{1 - [(1 - \omega_1)(1 - \omega_2)]\nu^2} \begin{bmatrix} E_0(1 - \omega_1) & [(1 - \omega_1)(1 - \omega_2)]\nu E_0 & 0 \\ [(1 - \omega_1)(1 - \omega_2)]\nu E_0 & E_0(1 - \omega_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 - [(1 - \omega_1)(1 - \omega_2)]\nu^2 G \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

sendo  $\omega_1$  e  $\omega_2$  as variáveis de dano, que serão definidas na Seção 2.2.3, nas direções normal e transversal à fissura, respectivamente.

### 2.2.3 Modelos Constitutivos Baseados na Teoria de Dano

Conforme mencionado, as teorias de dano adicionam ao problema mais uma variável, o Dano, para as relações constitutivas dos materiais. Esta variável mede o nível de degradação do módulo de elasticidade do material, em função dos estados de tensão e deformação ao qual está submetido. Para melhor definir a variável de dano, considera-se uma estrutura formada por um feixe de fibras, compostas por materiais parcialmente frágeis submetida a um carregamento axial paralelo à direção destas fibras, conforme apresentado por Jirasek (2004). A Figura 2.5 apresenta o ensaio proposto para a definição da variável de dano.



**Figura 2.5:** Dano uniaxial para um feixe de fibras paralelas (Jirasek, 2004)

Na Figura 2.5, têm-se representadas as seguintes variáveis:  $\sigma$ , a tensão nominal atuante na estrutura,  $\bar{\sigma}$ , a tensão efetiva atuante na estrutura,  $A$ , a área da seção transversal da estrutura,  $\bar{A}$ , a área efetiva da seção transversal da estrutura,  $L$ , o comprimento da estrutura e  $\epsilon$ , a deformação na estrutura.

Sabe-se que o carregamento atuante sobre a estrutura é dado por  $\sigma A$  e, com isso, observa-se nas Figuras 2.5(a) a 2.5(c) a evolução da deformação da estrutura com o aumento deste carregamento. Em um primeiro momento (Figura 2.5(b)), a solicitação sobre a estrutura ainda encontra-se no regime elástico linear. Há um aumento no comprimento da estrutura devido à deformação  $\epsilon_1$  e variáveis de tensão e área são equivalentes aos valores tensão e área efetivos.

Com o aumento do carregamento sobre a estrutura (Figura 2.5(c)), a solicitação já não mais se encontra no regime linear e há uma degradação da seção transversal da estrutura. Com isso, há uma redução na área efetiva,  $\bar{A}$ , um aumento da tensão efetiva,  $\bar{\sigma}$ , e do comprimento total da estrutura devido à deformação  $\epsilon_2$ . Como o material das fibras é parcialmente frágil, cada fibra atinge seu limite elástico em um momento distinto, de modo que, mesmo após o início da degradação da área efetiva,

a estrutura ainda apresenta área capaz de absorver a tensão efetiva atuante.

Finalmente, chega-se ao momento ilustrado na Figura 2.5(d), quando a tensão efetiva não cresce suficientemente para acompanhar o decréscimo da área efetiva. Neste momento, ocorre uma diminuição do comprimento da estrutura, já que a deformação  $\epsilon_3 < \epsilon_2$ , caracterizando o fenômeno de amolecimento, já descrito no item 2.1. Assim, pode-se descrever a seguinte relação entre tensão e tensão efetiva:

$$\sigma A = \bar{\sigma} \bar{A} \rightarrow \sigma = \frac{\bar{A}}{A} \bar{\sigma} \quad (2.11)$$

O quociente entre a área efetiva e área da seção transversal é chamado de integridade ( $\phi$ ), explicitado na Equação 2.12.

$$\phi = \frac{\bar{A}}{A} \quad (2.12)$$

Assim sendo, sabe-se que o valor da área efetiva ( $\bar{A}$ ) varia de  $A$  a  $0$ , sendo que, a integridade varia de  $1$  (ramo elástico) a  $0$  (degradação máxima).

A variável de dano ( $\omega$ ), por sua vez, é determinada a partir da integridade da estrutura, descrita pela Equação 2.13, da seguinte forma.

$$\omega = 1 - \phi \quad (2.13)$$

A partir da Equação 2.13, tem-se que, para a integridade máxima ( $\phi = 1$ ), o dano é nulo ( $\omega=0$ ). Da mesma forma, para a integridade nula ( $\phi = 0$ ) o dano é máximo ( $\omega=1$ ).

Generalizando as formulações anteriores a partir da lei de Hooke, pode-se dizer que a tensão efetiva é dada por:

$$\bar{\sigma} = E\epsilon \quad (2.14)$$

Combinando as Equações 2.11, 2.12, 2.13 e 2.14 tem-se:

$$\sigma = (1 - \omega)E\epsilon \quad (2.15)$$

Dessa forma, pode-se conceituar e definir a variável de dano, que será utilizada nas formulações para os modelos constitutivos, utilizados posteriormente.

A variável de dano foi obtida a partir da perda de área efetiva da seção transversal. Da mesma forma, podem-se formular as equações de dano a partir dos módulos de elasticidade secante e elástico da estrutura, dado por:

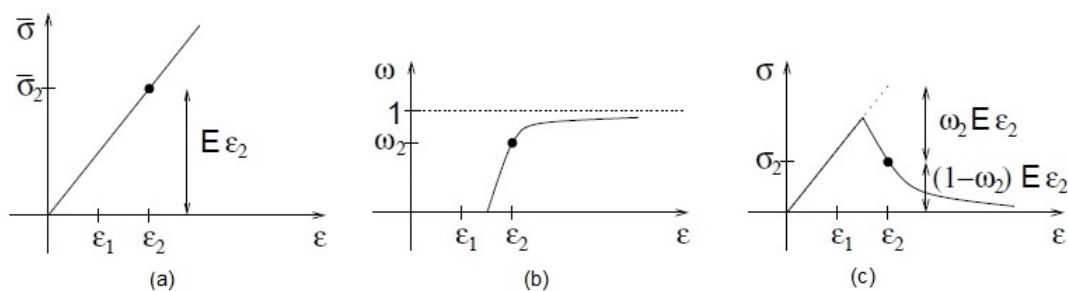
$$\bar{\omega} = 1 - \frac{E_s}{E_0} \quad (2.16)$$

sendo:  $\bar{\omega}$  , a variável dano,  $E_s$  , o módulo de elasticidade secante do material e  $E_0$  , o módulo de elasticidade do material íntegro.

Observa-se que o dano é uma variável do problema que depende diretamente da deformação da estrutura. Com isso, pode-se definir a variável de dano como uma função da variável de deformação.

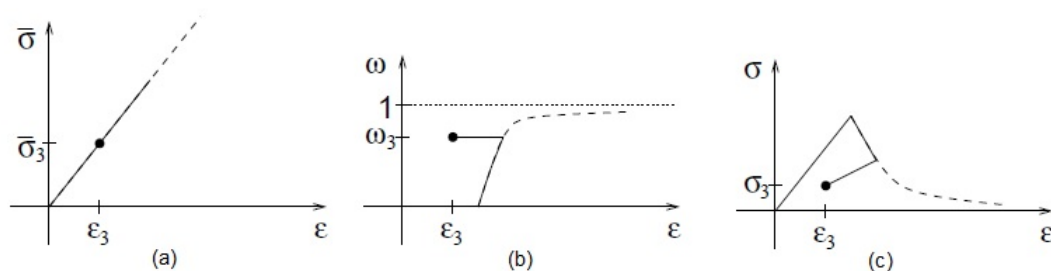
$$\bar{\omega} = f(\epsilon) \quad (2.17)$$

A partir desta relação, podem-se plotar três gráficos que demonstram a correlação entre cada uma das variáveis do problema. A Figura 2.6 ilustra o comportamento das variáveis de tensão efetiva (a), dano (b) e tensão real (c) com a variação da deformação da estrutura, para casos de carregamento contínuo e monotônico. Observa-se pela Figura 2.6(b) que o dano se inicia entre a deformação  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$ . Com isso, o estado de tensão, dado pela Equação 2.15 nada mais é do que a diferença entre o estado de tensão efetiva e a degradação da estrutura.



**Figura 2.6:** Evolução da tensão efetiva,  $\bar{\sigma}$ , parâmetro de dano,  $\omega$  e tensão nominal,  $\sigma$ , sob carregamento monotônico (Jirasek, 2004)

Para casos de carregamento com descarregamento, deve-se destacar uma particularidade das equações de dano. A Figura 2.7 ilustra esta estado:



**Figura 2.7:** Evolução da tensão efetiva,  $\bar{\sigma}$ , parâmetro de dano,  $\omega$  e tensão nominal,  $\sigma$ , sob carregamento não monotônico (Jirasek, 2004)

Nota-se que, neste caso, houve o carregamento da estrutura para um nível de deformação superior a  $\epsilon_3$ , com um descarregamento até o nível de deformação equivalente a  $\epsilon_3$ . Observa-se que, inicialmente,  $\epsilon_3$  encontra-se dentro do limite elástico da estrutura (sem degradação, com  $\omega = 0$ ). Porém, como após o carregamento houve degradação da estrutura, esta, com o descarregamento, não é capaz de voltar ao seu estado íntegro, carregando o dano máximo já obtido. Assim, chega-se a uma importante conclusão, de que o dano é uma variável que depende não apenas da deformação corrente, dependendo também da máxima deformação já obtida pela estrutura. Assim, diferentemente das formulações clássicas de elasticidade não linear,

as formulações baseadas na teoria de dano necessitam de controlar alguma variável do problema, para averiguar se o nível do dano é maior ou menor que o maior valor desta variável, ou seja, se naquele momento da análise houve ou não degradação. Para isso, define-se a Equação 2.18.

$$\kappa = \max(\epsilon) \quad (2.18)$$

A Equação 2.18 define mais uma variável para o problema,  $\kappa$ , que nada mais é que o maior valor de  $\epsilon$  já obtido durante a análise, guardando todo o histórico de deformações do material. Portanto, o dano depende não apenas da deformação corrente, mas também da variável histórica ( $\kappa$ ). Logo:

$$\bar{\omega} = f(\kappa) \quad (2.19)$$

## 2.2.4 Modelo de Dano Ortotrópico de de Borst e Gutierrez (1999)

O modelo de dano isotrópico proposto por de Borst e Gutiérrez (1999) é bastante elementar, tendo em vista que a propagação do dano ocorre igualmente em todas as direções. Neste modelo tem-se:

$$\{\sigma\} = (1 - \omega)[D^e] \{\epsilon_{kl}\} \quad (2.20)$$

sendo:  $\omega$ , a variável dano, que varia de 0 a 1, sendo 1 o estado de perda total de rigidez,  $D^e$ , a matriz constitutiva elástica.

Logo, a matriz constitutiva em Estado Plano de Tensões (EPT) é definida como:

$$[D] = \frac{(1 - \omega)}{(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} E_0 & E_0\nu & 0 \\ E_0\nu & E_0 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu)(\beta_r G) \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Pode-se observar a partir da Equação 2.21 que o dano se propaga igualmente em todas as direções do material.

Por outro lado, nas formulações ortotrópicas, tem-se comportamentos distintos nas direções de ortotropia do material, entretanto, de Borst e Gutiérrez (1999) propõe um modelo simplificado, de modo a haver dano apenas na direção principal de tração. Neste modelo, para Estado Plano de Tensões, a relação secante entre tensões ( $\sigma_{ns}$ ) e deformações ( $\epsilon_{ns}$ ), no sistema local de fissuração, é dada por:

$$\{\sigma_{ns}\} = [D_{ns}^s] \{\epsilon_{ns}\} \quad (2.22)$$

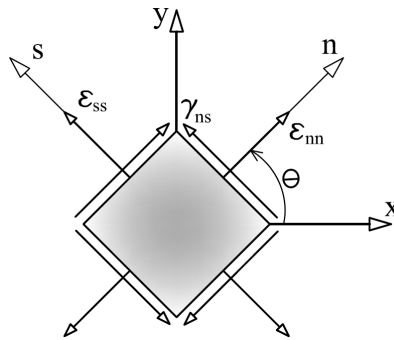
A matriz constitutiva  $[D_{ns}^s]$ , em estado plano de tensões, é definida como:

$$[D_{ns}^s] = \begin{bmatrix} \frac{(1-\omega_1)E_0}{1-(1-\omega_1)v^2} & \frac{(1-\omega_1)vE_0}{1-(1-\omega_1)v^2} & 0 \\ \frac{(1-\omega_1)vE_0}{1-(1-\omega_1)v^2} & \frac{E_0}{1-(1-\omega_1)v^2} & 0 \\ 0 & 0 & (1-\omega_2)G \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

sendo:  $\omega_1$ , a variável dano na direção 1 (tração e compressão) e  $1 - \omega_2$ , a variável de retenção ao cisalhamento;

Esta mesma relação pode ser reescrita rotacionando o sistema de coordenadas do modelo, para o sistema global de coordenadas, apresentado na Figura 2.8 da seguinte forma.

$$\{\sigma_{xy}\} = [T^\sigma(\theta)]^{-1} [D_{ns}^s] [T^\epsilon(\theta)] \{\epsilon_{xy}\} \quad (2.24)$$



**Figura 2.8:** Sistema de coordenadas global (X-Y) e local (n-s) ((Penna, 2011))



A Equação 2.24 é válida tanto para modelo com direção de dano fixa, quanto para dano com direção variável. Para o modelo com direção fixa, a relação tensão-deformação tangente, necessária em processos incrementais iterativos que utilizam o método de Newton Raphson, pode ser obtida derivando-se a Equação 2.24, obtendo-se a seguinte relação:

$$\{d\sigma_{xy}\} = [T^\sigma(\theta)_0]^{-1}([D_{ns}^s] - [\Delta D_{ns}])[T^\epsilon(\theta)_0] \{d\epsilon_{xy}\} \quad (2.25)$$

sendo:  $\theta_0$ : o ângulo fixo da direção do dano,  $[T^\sigma(\theta)_0]$ , a matriz de transformação para a variável de tensão,  $[T^\epsilon(\theta)_0]$ , a matriz de transformação para a variável de deformação e  $[\Delta D_{ns}]$  definido como:

$$[\Delta D_{ns}] = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ \nu d_{11} & 0 & 0 \\ d_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

sendo:  $d_{11} = \frac{\partial \omega_1}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \epsilon_{nn}} \frac{E(\epsilon_{nn} + \nu \epsilon_{ss})}{(1 - (1 - \omega_1)\nu^2)^2}$ ,  $d_{31} = \frac{\partial \omega_2}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \epsilon_{nn}} G \gamma_{ns}$ ,  $\frac{\partial \kappa}{\partial \epsilon_{nn}} = 1$  em carregamento e 0 nas demais situações;

Conforme já mencionado, após a degradação do material, as relações entre tensão e deformação são dados pela matriz constitutiva secante, apresentada na Equação 2.23.

### 2.2.5 Equações de Evolução de Dano

Para a realização da análise numérica de uma estrutura a partir dos modelos constitutivos apresentados, é necessário que se defina a função de evolução do dano, capaz de calcular a variável de dano à partir das deformações da estrutura. São vários os modelos e propostas para as equações de dano, de modo que, neste trabalho, serão tratadas três delas: uma lei de dano exponencial é definida pela Equação 2.27, uma lei polinomial, definida pela Equação 2.28 e uma lei bilinear, definida pela Equação 2.29.

$$\omega(\tilde{\epsilon}) = 1 - \frac{\kappa_0}{\tilde{\epsilon}}(1 - \alpha + \alpha e^{-\beta(\tilde{\epsilon} - \kappa_0)}) \quad (2.27)$$

sendo:  $\tilde{\epsilon}$ : deformação equivalente,  $\kappa_0$ : o valor da deformação equivalente a partir do qual o processo de dano se inicia,  $\alpha$ : parâmetro que representa o maior valor de dano admitido e  $\beta$ : parâmetro que representa a intensidade do crescimento do dano.

$$\omega(\tilde{\epsilon}) = 1 - \frac{1}{E\tilde{\epsilon}} f_t \frac{k \frac{\tilde{\epsilon}}{\epsilon_t}}{k - 1 + \left(\frac{\tilde{\epsilon}}{\epsilon_t}\right)^k} \quad (2.28)$$

sendo:  $E$  o módulo de elasticidade do material,  $\tilde{\epsilon}$ : deformação equivalente,  $\epsilon_t$  a deformação associada à tensão,  $f_t$  a tensão limite de resistência à tração,  $k = \frac{1}{1 - (\frac{f_t}{\kappa_0 E})}$ , onde  $\kappa_0 > \frac{f_t}{E}$

$$\omega(\tilde{\epsilon}) = \frac{\kappa_f}{\kappa_f - \kappa_0} \left(1 - \frac{\kappa_0}{\tilde{\epsilon}}\right) \quad (2.29)$$

sendo:  $\kappa_0$  o valor da deformação equivalente a partir do qual o processo de dano se inicia,  $\kappa_f$  a deformação equivalente máxima assumida e  $\tilde{\epsilon}$  a deformação equivalente.

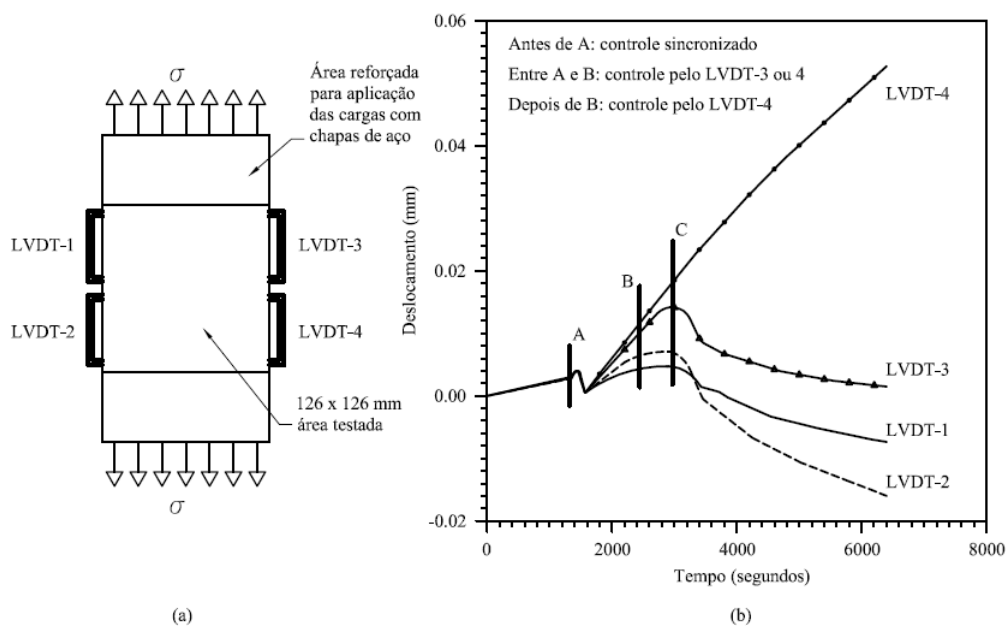
## 2.3 Localização de Deformações

A fissuração é um fenômeno que pode provocar um outro fenômeno, a localização de deformações, fenômeno este que constitui em um tema de extrema relevância na análise de problemas fisicamente não lineares.

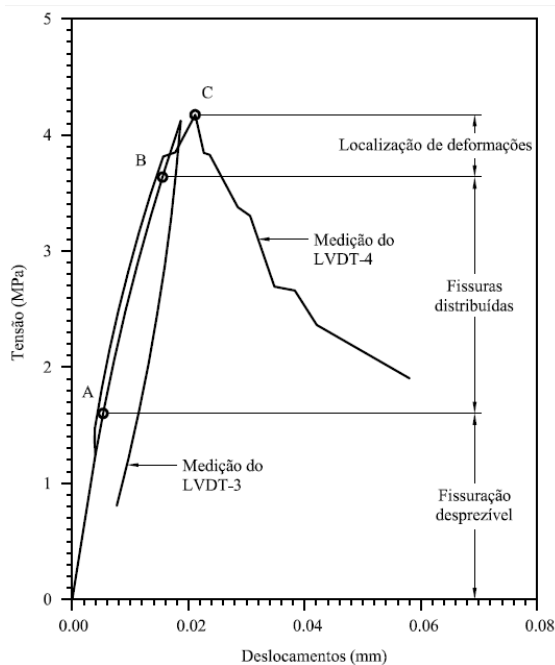
Sob o carregamento incremental, o material pode apresentar perda de rigidez, e esta perda, quando muito acentuada, conduz a estrutura a elevadas deformações. Naturalmente, a zona na qual a perda de rigidez levou a estrutura a elevadas deformações será a zona crítica de ruptura da estrutura, zona esta que caracterizará os limites de resistência e ductilidade da estrutura. Assim, a má caracterização desta zona pode levar a estimativas equivocadas desses limites.

De uma maneira geral, a localização pode ser ocasionada por características geométricas da estrutura, como quinas e pontas, zonas concentradoras de tensão, ou

ainda por instabilidades no material, como o caso de fissuras e trincas. Entretanto, deve-se ainda ter em consideração que a localização de deformações pode ocorrer de forma relativamente aleatória, uma vez que, o concreto é um material heterogêneo e a fissuração se inicia nas regiões de interface da matriz cimentícia com os agregados. Assim sendo, mesmo em estruturas submetidas a um estado constante de tensão, pode haver a presença de uma zona de localização, disposta de forma aleatória, como observado no ensaio apresentado por Shah et al. (1995). Nesse ensaio (Figuras 2.9 e 2.10), uma chapa de concreto é submetida à tração e, com o aumento do nível do carregamento, micro fissuras internas se propagam de uma forma distribuída ao longo da chapa. Quando o carregamento alcança aproximadamente 80% do carregamento crítico (Ponto C nas Figuras 2.9 e 2.10), as micro fissuras aumentam de tamanho e se localizam em uma região específica da peça (LVDT4 nas Figuras 2.9 e 2.10), onde uma fissura maior começa a se desenvolver. Ou seja, o processo de fissuração passa a ser concentrado em uma determinada região, característica que demonstra a existência do fenômeno de localização de deformações, enquanto fenômeno real, tornando-o dependente de uma combinação dos comportamentos observados na região de localização (LVDT4 nas Figuras 2.9 e 2.10) e nas regiões de descarregamento (LVDT1, 2 e 3 nas Figuras 2.9 e 2.10). A partir daí, esta região da peça passa a conduzir o comportamento não linear da estrutura, conforme apresentado nas Figuras 2.9 e 2.10:



**Figura 2.9:** Chapa de concreto sujeita à tração: (a) geometria da amostra e disposição dos LVDTs, (b) relações entre deslocamentos e tempo decorrido de teste de Shah et al. (1995)

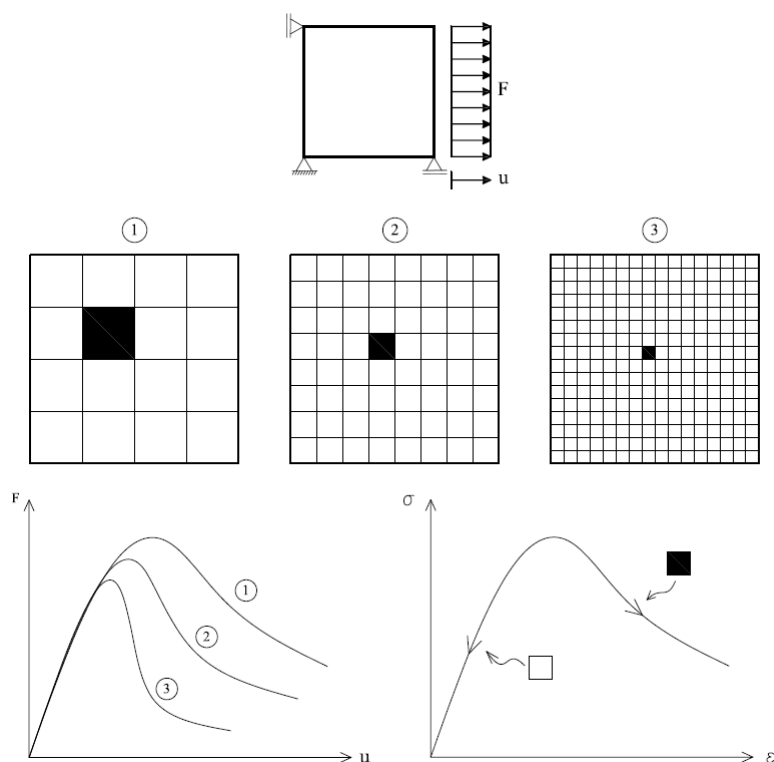


**Figura 2.10:** relação tensão-deslocamento e estágios diferentes da fissuração de Shah et al. (1995)

Na análise numérica de problemas fisicamente não lineares, os modelos devem ser capazes de traduzir o fenômeno acima descrito, especialmente em descarregamento, para que se tenha uma solução adequada para o problema e para que não se confunda o fenômeno real com a denominada localização de deformações numericamente induzida.

O fenômeno de localização de deformações numericamente induzida possui características semelhantes às do fenômeno real, descrito anteriormente, porém tem origem em inconsistências unicamente numéricas, sem nenhuma relação com características físicas do problema, relacionadas à natureza heterogênea do meio. Assim, o analista pode se deparar com um fenômeno aparentemente real, em seu modelo, que levará a resultados não representativos dos limites de resistência e ductilidade da estrutura.

Este fenômeno numérico pode ser facilmente constatado quando uma mesma estrutura, submetida a um mesmo estado de carregamento, apresenta resultados extremamente diferentes, quando modelada com malhas distintas. Normalmente, malhas mais refinadas (com maior número de elementos) estão mais sujeitas a este fenômeno. Isto geralmente ocorre por alguma inconsistência no modelo adotado, de forma que, quanto maior o número de elementos finitos, maior o “erro” introduzido por esta inconsistência, fazendo com que as deformações se localizem em uma determinada região da malha (Fuina, 2009). Como exemplo, apresenta-se um ensaio de tração em um chapa plana, modelado com diferentes malhas. Mesmo considerando todos os elementos das malhas com as mesmas propriedades mecânicas, os resultados representados por curvas de carga ( $F$ ) *versus* deslocamento ( $u$ ) são diferentes para cada uma das malhas utilizadas.



**Figura 2.11:** Localização de deformações numericamente induzida (Fuina, 2009)

## 2.4 Modelos Não Locais

Como discutido na Seção 2.2, a análise não linear de estruturas de concreto, baseados na teoria de dano, necessita de uma matriz constitutiva que possa representar o estado de degradação do material. Esta matriz deve ser capaz de, a partir do estado de deformação ao longo da estrutura, definir as zonas de degradação do meio, além da evolução do dano ao longo destas. A partir da evolução do dano na estrutura, o material fica sujeito ao fenômeno de amolecimento, quando a tensão efetiva no material não acompanha a degradação da área efetiva, podendo levar a análise a diversos problemas de instabilidade numérica e a resultados não representativos.

Outro grande problema observado nas análises numéricas não lineares é a dependência da malha. Por exemplo, segundo Bazant e Oh (1983), as malhas de elementos retangulares tendem a propagar a fissura ao longo das diagonais dos elementos,

fato que pode não representar o correto comportamento de uma estrutura. Além disso, durante o processo de amolecimento, a zona degradada fica submetida a uma elevada deformação, enquanto o restante da estrutura estará submetida a um descarregamento elástico. A partir daí, a dimensão desta zona degradada pode alterar a disposição da trajetória de equilíbrio do problema, em seu ramo descendente.

Portanto, resumindo-se, pode-se levantar duas grandes limitações numéricas em problemas de análise não linear: o fenômeno de amolecimento e a dimensão da zona degradada que pode influenciar na trajetória de equilíbrio do problema. Ou seja, a análise fica vulnerável a algum problema de ordem numérica localizado em uma região específica, comprometendo todo o comportamento da estrutura.

A formulação não local esteve presente em diversos trabalhos e estudos ao longo dos anos, mostrando a pertinência em se estudar este tema. Dentre vários estudos, destacam-se alguns deles que foram utilizados para a elaboração deste trabalho.

Bazant e Cabot (1987), Bazant e Lin (1988) e Bazant e Jirasek (2002), discutem o histórico da formulação não local mostrando seus principais avanços, demonstrando como os modelos evoluíram para simular e adequar as análises via método dos elementos finitos à problemas que apresentam fenômenos de localização de deformação, efeitos de tamanho e dependência de malha durante o amolecimento. Além disso, os autores corroboram a ideia deste campo de pesquisa demonstrando a importância e os novos caminhos a serem percorridos.

Poh e Swaddiwudhipong (2009) desenvolveram um estudo sobre a dependência da malha em problemas não lineares via método dos elementos finitos. Foi mostrado que durante o fenômeno de amolecimento a formulação não local, tanto via formulação integral ou via gradientes avançados, chegam em resultados satisfatórios capazes de reduzir a concentração de deformação via amolecimento. Mesmo quando a formulação não local não se mostra satisfatória, o tratamento da malha via formulação não local para o aperfeiçoamento do resultado se mostra muito mais adequado e menos laborioso que o discretização convencional. Da mesma forma,

Jirasek (2004) também apresenta os problemas de malhas de elementos finitos no fenômeno de amolecimento e demonstra como, a partir formulação não local, se pode chegar a resultados mais representativos. Para isso, são apresentados exemplos de problemas uni e bi-dimensionais.

de Sciarra (2009) efetuou um estudo a partir de uma formulação não local para fenômenos de natureza estrutural e termodinâmica, estudando os ganhos na análise numérica em problemas com dependência da malha.

Bellégo et al. (2003) desenvolveram um estudo para a calibração de modelos não locais a partir de curvas de carga-deflexão realizando testes em problemas de efeito de tamanho.

A formulação não local visa minimizar os problemas descritos, fazendo com que a modelagem seja menos afetada por instabilidades numéricas, menos dependente da malha e, assim, mais estável. Esta formulação considera que as variáveis do problema são grandezas não locais, ou seja, os valores obtidos na análise numérica, para cada ponto do domínio, sofrem influência de sua vizinhança. Assim sendo, a formulação é capaz de suavizar os resultados não representativos de certos pontos (fruto de instabilidades numéricas) a partir da influência de resultados na vizinhança (não sujeitos a instabilidades).

Com isso, a variável de controle do problema passa a ser uma média ponderada dos valores contidos em um domínio de influência. Caso a solução local tenha apresentado pontos com resposta discrepantes, terão, neste segundo momento, um resultado que agora também depende de sua vizinhança, tornando sua solução muito mais adequada e representativa.

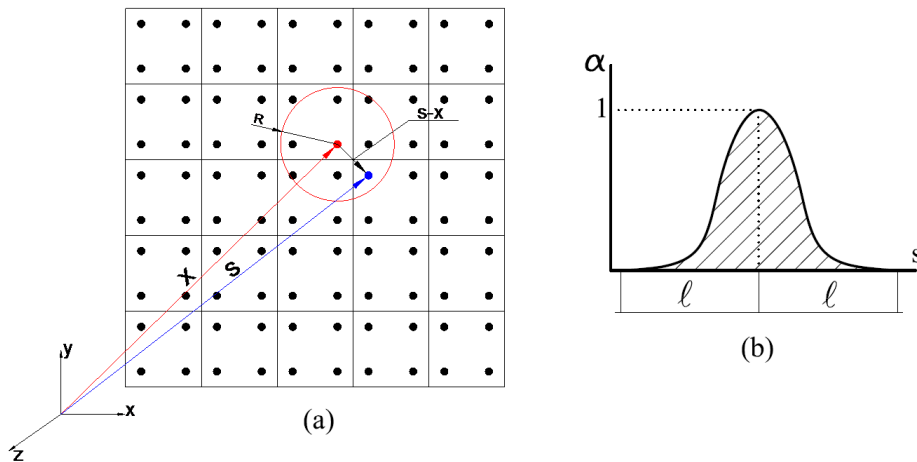
Para a análise de um problema, segundo a formulação não local, é fundamental a escolha da variável do modelo constitutivo a ser tratada como não local. O presente estudo segue as recomendações de Bazant e Cabot (1987) e Bazant e Lin (1988) para a escolha dessa variável. Nestes trabalhos os autores afirmam que o tratamento não local deve ser dado apenas às variáveis de comportamento crescente ao longo da



análise. O dano é uma variável que possui valores sempre nulos dentro do regime de deformações elásticas e, depois de atingida a deformação elástica limite, seu valor varia de forma crescente até 1, sendo, portanto, uma variável adequada à formulação. Diferentemente do dano, a deformação é uma variável que deve ser tratada como local, pois seus valores, ao longo da história de carregamento, não necessariamente se comportam de maneira crescente em todos os pontos. Outra escolha adequada para a abordagem não local é a variável histórica do modelo constitutivo, que representa o valor máximo já obtido por determinada grandeza do modelo, durante o processo de solução, sendo portanto, uma variável crescente. Escolhida a variável não local, seu valor é calculado por:

$$\tilde{\epsilon}_{nl} = \frac{1}{V_r(\mathbf{x})} \int_V \alpha(\mathbf{s}-\mathbf{x}) \tilde{\epsilon}(\mathbf{s}) dV = \int_V \alpha'(\mathbf{x},\mathbf{s}) \tilde{\epsilon}(\mathbf{s}) dV \quad (2.30)$$

sendo,  $\tilde{\epsilon}$  a variável local,  $\tilde{\epsilon}_{nl}$  a variável não local,  $V_r(\mathbf{x}) = \int_V \alpha(\mathbf{s}-\mathbf{x}) dV$ , ou seja, o volume do sólido de revolução gerado pela distribuição estatística adotada,  $\alpha'(\mathbf{x},\mathbf{s}) = \frac{\alpha(\mathbf{s}-\mathbf{x})}{V_r(\mathbf{x})}$ ,  $\mathbf{x}$  é o vetor de coordenadas do ponto avaliado e  $\mathbf{s}$  é o vetor de coordenadas dos pontos na região de influência do ponto, conforme pode ser observado na Figura 2.12(a).



**Figura 2.12:** (a) Domínio não Local, (b) Função de Ponderação

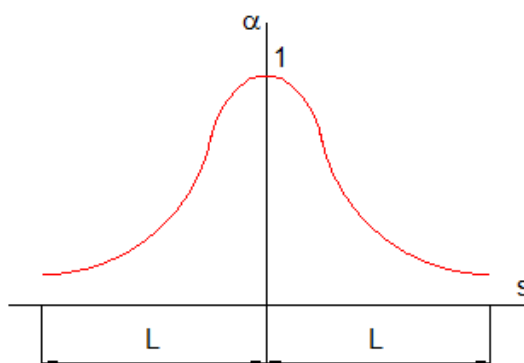
A função de ponderação,  $(\alpha)$ , também denominada de função de distribuição,

ou função peso, será aquela que irá determinar o peso que cada variável do domínio terá na obtenção da variável não local (Figura 2.12(b)). São diversas as funções possíveis de serem utilizadas. A primeira função apresentada é a função de ponderação baseada na distribuição normal ou Gaussiana, que é uma das funções de ponderação mais utilizadas na formulação não local e é dada por:

$$\alpha(x) = \exp\left(-k \frac{x^2}{\ell^2}\right) \quad (2.31)$$

Na Equação 2.31, destaca-se que a variável “ $\ell$ ” é chamada de comprimento interno da distribuição ou ainda do domínio da distribuição e a variável “ $k$ ” é responsável pelo formato da curva, tornando os pontos mais distantes do domínio mais ou menos influentes.

O formato da curva gerada por esta distribuição é apresentado na Figura 2.13



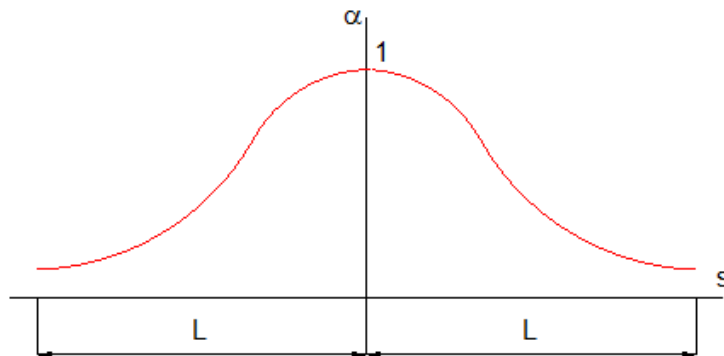
**Figura 2.13:** Função de Distribuição de Gauss

Outra possibilidade para a função de ponderação é a distribuição Sino (“Bell Shaped”), apresentada pela Equação 2.32 e Figura 2.14:

$$\alpha(x) = \left(1 - \frac{x^2}{(k\ell)^2}\right)^2 \quad (2.32)$$

Para a distribuição Sino,  $L$  e  $k$  possuem o mesmo sentido que as variáveis da função de distribuição de Gauss. Destaca-se ainda que, esta função só é válida para

pontos internos ao domínio de modo que, para os pontos contidos fora deste domínio, a contribuição é desprezada.

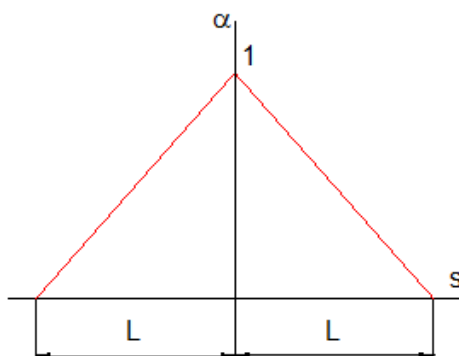


**Figura 2.14:** Função de Distribuição Sino

A função de distribuição linear, Figura 2.15, ou triangular, é descrita na Equação 2.33:

$$\alpha(x) = \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \quad (2.33)$$

O domínio da função linear é descrito por duas retas que possuem valores unitários para  $x=0$  e valores nulos para  $x = \pm 1$ .

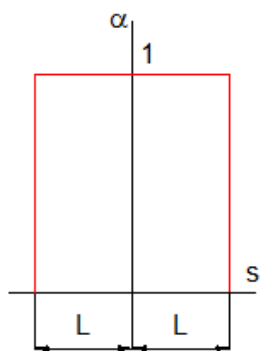


**Figura 2.15:** Função de Distribuição Linear

A função de distribuição constante, Figura 2.16, é apresentada pela Equação 2.34

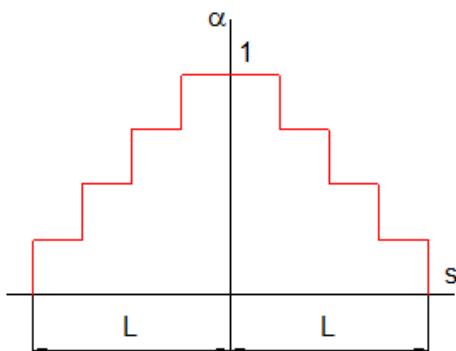
$$\alpha(x) = 1, \text{ para } -\ell < x < \ell; \quad (2.34)$$

Esta função é a mais elementar dentre todas as funções de distribuição, simplesmente atribuindo um valor unitário para pontos dentro do domínio e valores nulos para pontos fora do domínio.



**Figura 2.16:** Função de Distribuição Constante

Finalmente, a função de distribuição Degraus, Figura 2.17, possui um comportamento semelhante à função linear, porém, esta função divide o domínio da distribuição em uma quantidade pré estabelecida de pesos (variável  $k$ ) formando um gráfico com o formato de degraus.



**Figura 2.17:** Função de Distribuição Degrau

Para a que a formulação não local possa ser utilizada em problemas de elementos finitos, é necessário a substituição da integral da Equação 2.30, pelo somatório apresentado na Equação 2.35

$$\bar{\epsilon}_k(x) = \sum (w_l J_l \alpha_{kl} \epsilon_l) \quad (2.35)$$

sendo  $w$  o peso do ponto de Gauss,  $J$  o Jacobiano do elemento finito correspondente e

$$\alpha_{kl} = \frac{\alpha_0(\|x_k - x_l\|)}{\sum (w_m J_m \alpha_0(\|x_k - x_l\|))} \quad (2.36)$$

Destaca-se que a ponderação, dada por  $\alpha_{kl}$ , é utilizada apenas se a distância entre os pontos de coordenadas  $(k;l)$  é menor que o tamanho do domínio da distribuição, ou seja, esteja dentro do espaço compreendido pelo círculo de raio  $L$  (comprimento interno da distribuição) e centro na coordenada  $k$ .

Jirasek (2004) propõe um algoritmo eficiente para a inicialização dos domínios não locais de cada ponto. O algoritmo é dado por:

Loop por todos os pontos de Gauss para  $x_k$  :

1- Determinação de todos os pontos de Gauss presentes no domínio da distribuição, ou seja, aqueles que satisfaçam a seguinte condição:

$$\|x_k - x_l\| < \ell$$

E para cada um deles, determinar:

$$\alpha_{kl} = w_l J_l \alpha_0(\|x_k - x_l\|)$$

2- Computar a soma dada por:

$$\alpha_k = \sum \alpha_{kl}$$

3- Dividir todo valor de  $\alpha_{kl}$  por  $\alpha_k$  e armazenar este dado em uma matriz associada ao ponto de coordenada  $k$ , numa posição associada ao ponto de coordenada

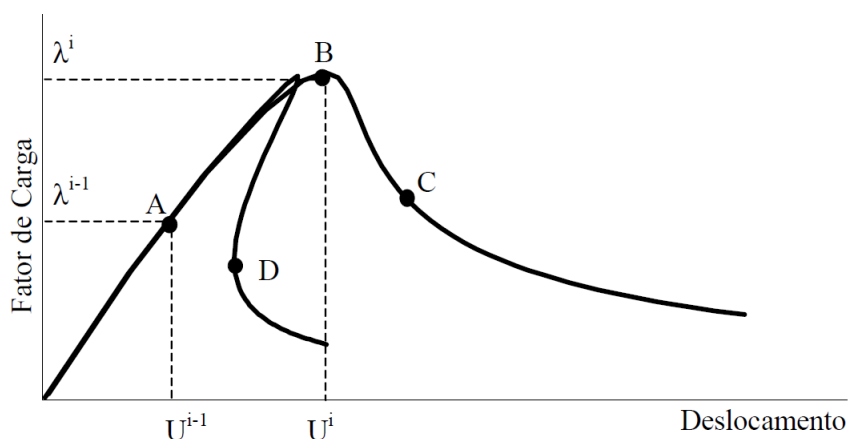
1.

A formulação apresentada é denominada formulação integral, entretanto, destaca-se que existe ainda outra formulação possível, denominada gradientes avançados, como pode ser visto no trabalho de de Borst e Gutiérrez (1999).

## 2.5 Solução de Problemas de Análise Fisicamente Não Linear

### 2.5.1 Introdução

A solução de problemas fisicamente não lineares requer uma estratégia particular que envolve a determinação de trajetórias de equilíbrio, conforme já mencionado. A determinação destas trajetórias permite representar o comportamento de estruturas de concreto no regime pós crítico (Trecho B-C na Figura 2.18), onde se observam decréscimos de carga para um acréscimo nos deslocamentos.



**Figura 2.18:** Trajetórias de equilíbrio típicas em problemas não-lineares

A rigor, uma trajetória de equilíbrio estabelece que as forças internas e externas estão em equilíbrio para a configuração deformada da estrutura em um determinado estágio de carregamento. Para problemas de natureza linear, a trajetória de equilíbrio é simplesmente uma reta. Em uma análise não linear, os deslocamentos da

estrutura evoluem passo a passo até que uma configuração final de equilíbrio seja estabelecida, passando por sucessivas condições de equilíbrio intermediárias determinadas ao longo da análise. A determinação das condições de equilíbrio pressupõe a determinação do equilíbrio em um estágio anterior do carregamento. Ou seja, em uma análise não linear, deve-se prever cada estágio de equilíbrio da estrutura até a aplicação total do carregamento (Filho, 2012).

Para que o equilíbrio seja estabelecido ao longo da aplicação do carregamento, é fundamental a utilização de uma estratégia incremental-iterativa nas variáveis do problema. Com isso, dado um campo de deslocamento  $U$  e um fator de carga proporcional  $\lambda$ , equivalentes a um ponto da trajetória de equilíbrio (Ponto A da Figura 2.18), obtém-se o ponto seguinte (Ponto B na Figura 2.18), controlando as grandezas do problema neste intervalo.

Para a realização deste controle de variáveis, diversos métodos podem ser utilizados, sendo que, cada um deles apresenta limitações e vantagens. O conhecimento dos métodos de determinação das trajetórias de equilíbrio é fundamental na utilização de softwares que utilizam o MEF para a solução de problemas não lineares. Dentre os principais métodos de controle, destacam-se o de controle de cargas, controle de direto de deslocamentos, controle de comprimento de arco e de controle de deslocamento generalizado.

O método de controle de carga é altamente limitado uma vez que não permite determinar trajetórias de equilíbrio a partir de pontos críticos (ponto B da Figura 2.18), pois ocorre a redução do carregamento com o aumento de deslocamentos.

O método de controle direto de deslocamentos permite a representação dos pontos críticos, entretanto não é possível a descrição de trajetórias de equilíbrio pós-crítico onde ocorra redução de carga acompanhada de redução de deslocamento (ponto D na Figura 2.18). Além disso, a escolha do grau de liberdade controlado tem influência na solução do problema.

Os métodos de comprimento de arco e de deslocamentos generalizados visam

solucionar as dificuldades apresentadas nos métodos de controle de carga e de deslocamentos. Para isso, os métodos fazem uso de combinações de deslocamentos e fatores de carga para controlar a trajetória de iteração.

## 2.5.2 Métodos Incrementais Iterativos para Solução de Problemas não Lineares

Um problema de análise fisicamente não linear consiste na resolução da equação de equilíbrio, que relaciona forças externas e deslocamentos totais. Esta solução é calculada a partir de métodos incrementais-iterativos, de modo que, para a iteração  $j$  do passo  $i$ , a equação pode ser escrita da seguinte forma:

$$[K]_{j-1}^i \{\delta U\}_j^i = \delta \lambda_j^i \{P\} + \{Q\}_j^i \quad (2.37)$$

sendo:  $[K]_{j-1}^i$ , a matriz de rigidez tangente na iteração “ $j-1$ ” do passo  $i$  que é função do deslocamento  $\{\delta U\}_j^i$ ,  $\{\delta U\}_j^i$ , o vetor de deslocamentos incrementais da iteração  $j$  do passo  $i$ ,  $P$ , o vetor de cargas de referência,  $\delta \lambda_j^i$ , o fator de carga da iteração  $j$  do passo  $i$  e  $Q$ , o vetor de forças residuais da iteração “ $j-1$ ” do passo  $i$ .

O equilíbrio é obtido a partir da igualdade de forças externas (carregamento aplicado sobre a estrutura) e forças internas, que dependem do material, ou seja, da rigidez. A utilização de métodos incrementais-iterativos é tal que a matriz de rigidez tangente do problema é calculada a cada iteração até que haja a igualdade de forças. Esta igualdade, por sua vez, é controlada a partir do vetor de forças residuais e o processo continua até que o critério de convergência adotado seja atendido.

Basicamente, o método funciona da seguinte forma:

1- A partir dos dados iniciais do problema, calcula-se o vetor de forças externas e a matriz de rigidez tangente do problema, obtidas com as propriedades iniciais do meio;

2- Calcula-se o vetor de deslocamentos a partir da matriz de rigidez e do vetor



de forças;

3- Realiza-se um incremento do fator de carga (depende do método de controle utilizado);

4- A partir do incremento do fator de carga, atualiza-se o vetor de deslocamentos;

5- Realiza-se o cálculo das deformações de cada um dos elementos do modelo, a partir dos deslocamentos obtidos;

6- Calcula-se o estado de tensão do modelo, a partir das deformações. Neste momento, verifica-se o estado do material, por meio de um modelo constitutivo;

7- De posse do estado de tensão, calcula-se o vetor de forças internas;

8- Finalmente, ao se confrontar os vetores de forças internas e externas, realiza-se o balanceamento de forças e se obtém o vetor de forças residuais;

9- Efetua-se a verificação da convergência e se determina se será necessário mais uma iteração para este passo;

Conforme descrito no procedimento acima, os métodos de controle são acionados no item 3 onde ocorre o incremento do fator de carga. A seguir, apresenta-se uma tabela resumo com as equações de incremento do fator de carga para cada um dos métodos de controle, baseado no trabalho apresentado em Fuina (2004).

MÉTODO DE CONTROLE	$\delta\lambda$ para $j=1$	$\delta\lambda$ para $j>1$
Controle de Carga	$\delta\lambda = \text{Constante}$	$\delta\lambda = 0$
Controle Direto de Deslocamento	$\delta\lambda = \frac{\delta U_1^k}{\delta U_1^{pk}}$	$\delta\lambda = -\frac{\delta U_1^k}{\delta U_1^{pk}}$
Controle de Comprimento de Arco	$\delta\lambda_1 = \pm \frac{\Delta S}{\sqrt{\{\delta U\}_1^{P^T} \times \{\delta U\}_1^P}}$	Trajectoria de interação ortogonal à tangente da interação inicial $\delta\lambda_j = -\frac{\{\delta U\}_1^T \times \{\delta U\}_j^Q}{\{\delta U\}_1^T \times \{\delta U\}_j^P}$
		Trajectoria de interação ortogonal à tangente da interação anterior $\delta\lambda_j = -\frac{\{\delta U\}_{j-1}^T \times \{\delta U\}_j^Q}{\{\delta U\}_{j-1}^T \times \{\delta U\}_j^P}$
		Trajectoria cilíndrica: equação do segundo grau que permite a obtenção do fator de carga. Para maiores dados, vide Fuina 2004
Controle de Deslocamento Generalizado	$\delta\lambda_1 = \delta\lambda_1^1 \left( \frac{\{\delta U\}_1^{P,j^T} \times \{\delta U\}_1^{P,1}}{\{\delta U\}_1^{P,i^T} \times \{\delta U\}_1^{P,1}} \right)$	$\delta\lambda_j = \delta - \left( \frac{\{\delta U\}_1^{P,i^T} \times \{\delta U\}_1^{Q,j}}{\{\delta U\}_1^{P,i^T} \times \{\delta U\}_1^{P,j}} \right)$
Controle por Trabalho	$\delta\lambda_1 = \pm \sqrt{\frac{\Delta W}{\{\delta U\}_1^{P,T} \times \{P\}}}$	$\delta\lambda_j = -\frac{\{\delta U\}_j^{Q,T} \times \{P\}}{\{\delta U\}_j^{P,T} \times \{P\}}$
Método de Resíduo Ortogonal	$\delta\lambda_j = \pm \text{Constante}$	$\delta\lambda_j = \delta\lambda_1 \frac{\{\tilde{Q}\}_j^T \times \{\Delta U\}_j}{\delta\lambda \{P\}^T \times \{\Delta U\}_j}$

Figura 2.19: Resumo dos métodos de controle

# Capítulo 3

## Simulações Numéricas

Nesta seção, apresentam-se simulações numéricas com o objetivo de avaliar a resposta de modelos não locais em comparação a modelos locais. Para isso, será utilizado o sistema computacional INSANE (INteractive Structural ANalysis Environment), desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais. O sistema é desenvolvido em JAVA, seguindo o paradigma de Programação Orientada a Objetos (POO), aplicando todos os conceitos proporcionados pela metodologia, resultando em um código segmentado, consequência direta de abstrações e generalizações oriundas de herança de classes e polimorfismo conjugadas à padrões de projetos de softwares adequados Penna (2011).

### 3.1 Simulação da Localização de Deformação Induzida

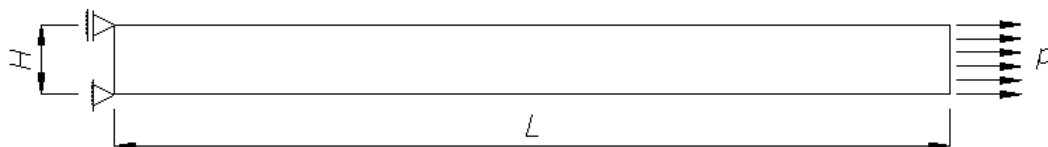
A localização de deformação é um fenômeno muito presente em estruturas de concreto. Na ocorrência da localização, uma pequena região da estrutura passa a comandar todo o processo de carregamento, enquanto as demais regiões sofrem um descarregamento acentuado.

Nesta simulação, a localização de deformações será induzida de um modo a se avaliar os efeitos que tal fenômeno provoca em estruturas de concreto.

Para a simulação de uma zona de localização, serão definidos dois materiais,

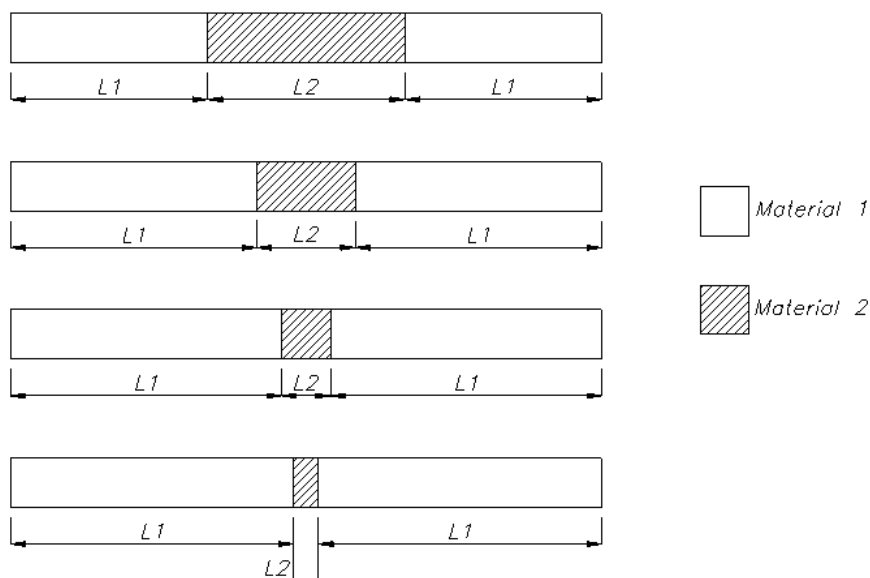
com resistências distintas, para a mesma estrutura. A partir daí, serão estudadas diferentes malhas, de modo que, a zona contemplada com o material menos resistente, terá sua dimensão alterada, diminuindo seu tamanho cada vez mais. Com isso, tem-se como premissa zonas cada vez menores, com resistência mais baixa que o restante da estrutura, que tenderão a atingir o seu limite elástico mais cedo e com isso, concentrar as deformações da estrutura.

A Figura 3.1 apresenta a geometria, condições de contorno e carregamento adotados na simulação, onde,  $L = 12m$ ,  $H = 1,0m$ ,  $t = 1,0m$  e  $p = 1MN/m$ .



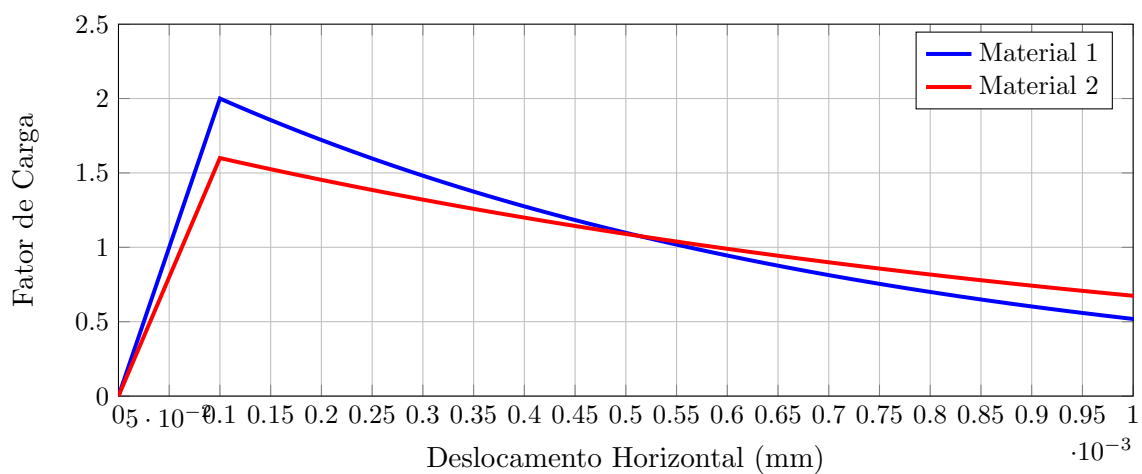
**Figura 3.1:** Dados do Ensaio

A Figura 3.2 apresenta as malhas utilizadas neste estudo. Observa-se a redução na região da estrutura com material de menor resistência, redução tal que, como mencionado, levará a estrutura à localização de deformação. Na Figura 3.2, o valor da dimensão  $L_2$  é: 4,0m, 2,0m, 1,0m e 0,5m, para as malhas 1, 2, 3 e 4, respectivamente.



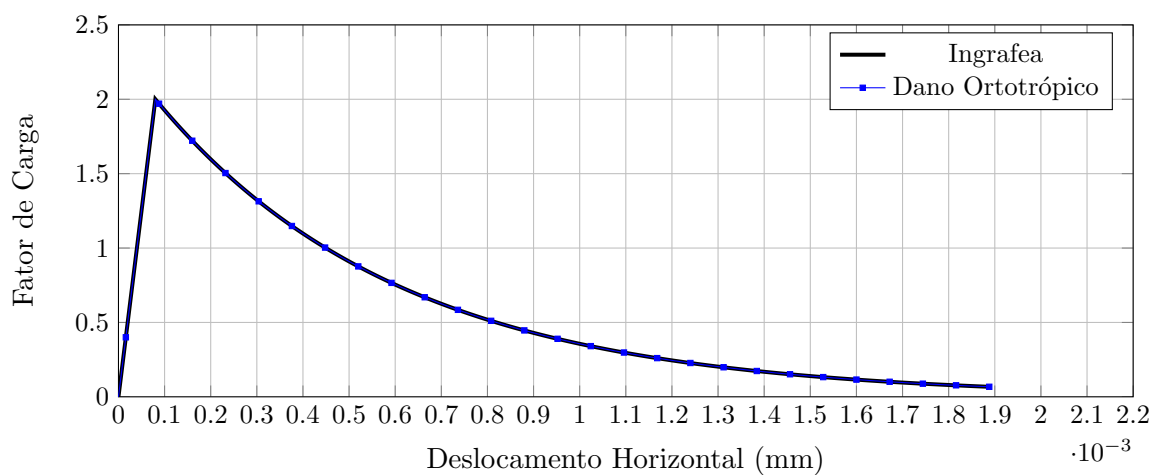
**Figura 3.2:** Malhas utilizadas

Conforme mencionado, serão definidos dois materiais com diferentes resistências. O Material 1 apresenta como parâmetros:  $E_0=20000$  MPa,  $\nu=0,2$ ,  $f_t=2,0$  MPa e  $g_f=0,0013$  MPa. O Material 2, por outro lado, apresenta como parâmetros físicos:  $E_0=20000$  MPa,  $\nu=0,2$ ,  $f_t=1,6$  MPa e  $g_f=0,0013$  MPa. O comportamento dos dois materiais pode ser observado na Figura 3.3, onde se pode visualizar as diferentes resistências.

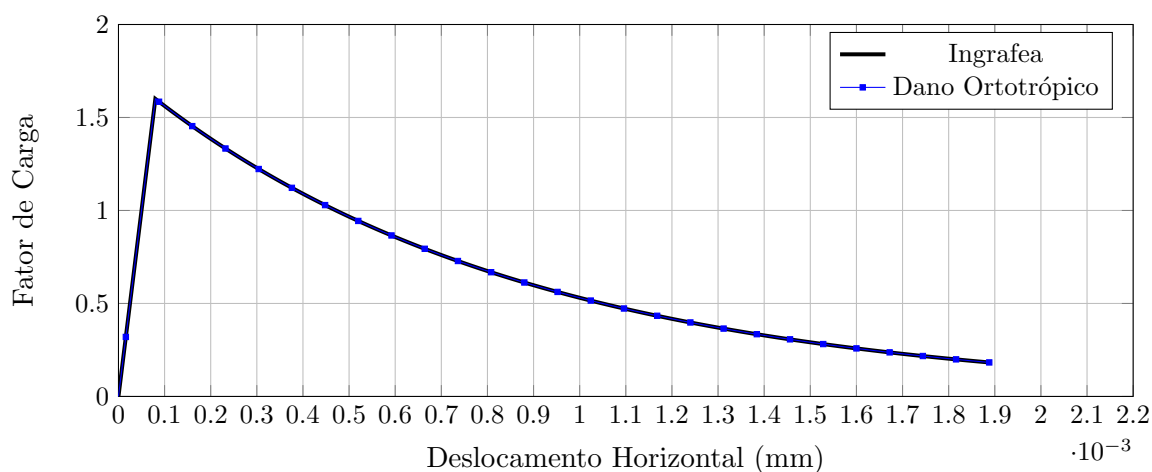


**Figura 3.3:** Parâmetros dos Materiais

A simulação será realizada utilizando o modelo de dano ortotrópico, com a lei de evolução de dano exponencial (2.27) e, para a definição das variáveis desta lei, é necessário realizar uma parametrização com uma lei que utiliza como variáveis, os parâmetros já definidos ( $f_t$  e  $g_f$ ). Assim, a parametrização será realizada usando como referência a lei proposta por Boone e Ingraffea (1987) (Equação 2.2). Os gráficos das Figuras 3.10 e 3.9, apresentam as curvas obtidas com a parametrizações. Os valores das variáveis obtidos foram:  $\alpha=0,99$ ,  $\beta=1500$  e  $\kappa=0,0001$ , para o Material 1 e  $\alpha=0,99$ ,  $\beta=1200$  e  $\kappa=0,00008$ , para o Material 2.



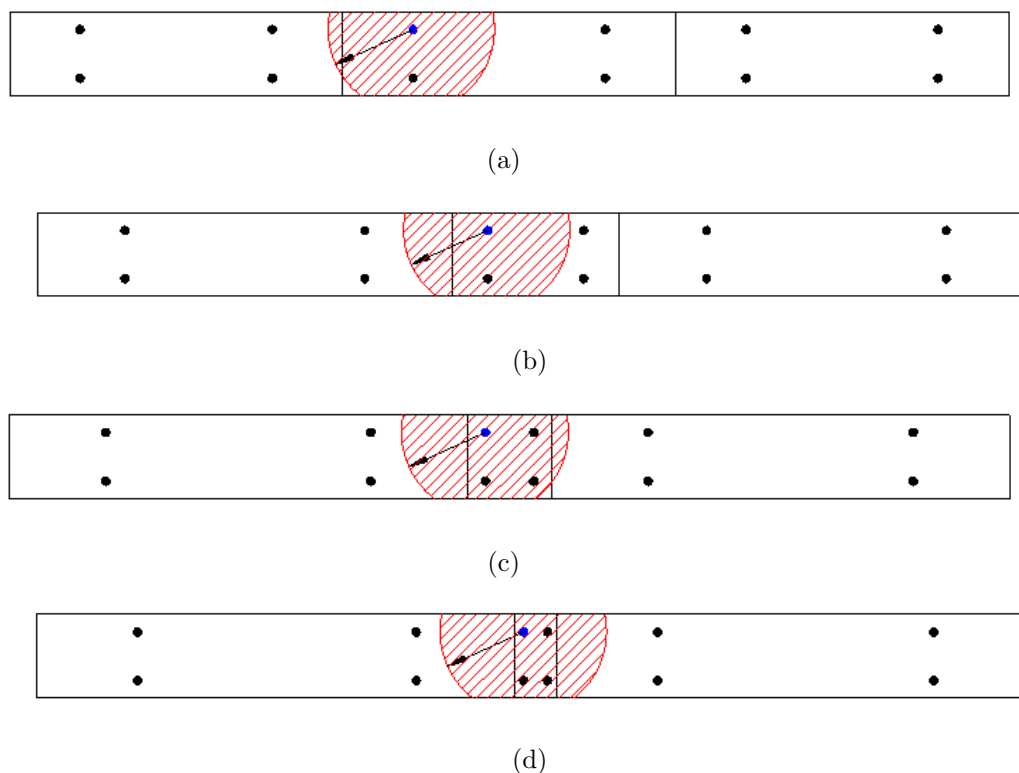
**Figura 3.4:** Parametrização para Material 1



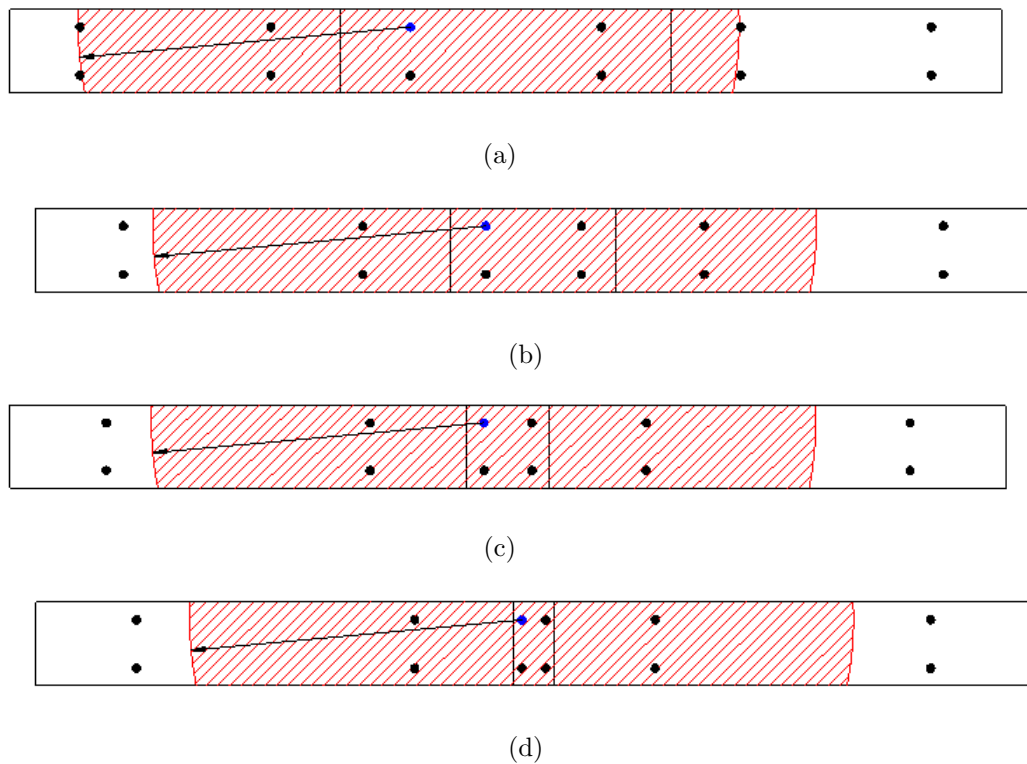
**Figura 3.5:** Parametrização para Material 2

Para os modelos não locais, neste estudo, pretende-se realizar duas análises, utilizando parâmetros da função peso Gaussiana (Equação 2.31) distintos. Na primeira delas, utiliza-se  $L=2,0m$  e  $k=1,0$  e na segunda, utiliza-se  $L=4,0m$  e  $k=8,0$ . Com estes parâmetros, procura-se estudar o comportamento do modelo quando se consideram apenas os Pontos de Gauss próximos à zona menos resistente ( $L=2,0m$ ), ou quando se consideram também alguns pontos mais afastados desta zona ( $L=4,0m$ ). Entretanto, mesmo considerando os pontos mais distantes da zona de localização, para o resultado dos pontos desta zona, a influência destes será reduzida, uma vez que o valor da constante ( $k=8,0$ ) foi bastante elevado.

As Figura 3.6 e 3.7 mostram a localização de cada Ponto de Gauss da malha e o raio da função de distribuição não local, evidenciando quais e quantos pontos serão considerados no cálculo dos Pontos de Gauss da zona menos resistente.



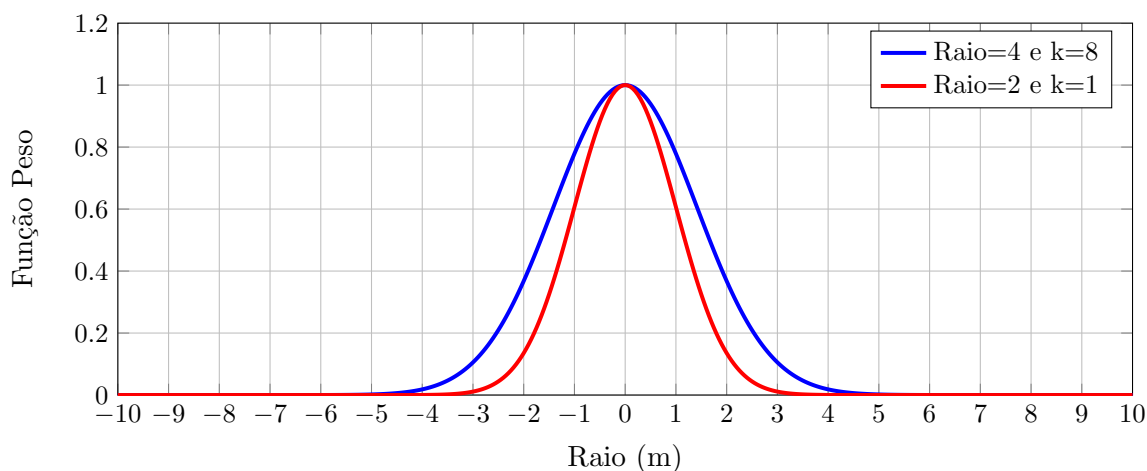
**Figura 3.6:** Análise 1 ( $L=2m$ ): Pontos de Gauss e área de influência para as malhas 1(a), 2(b), 3(c) e 4(d)



**Figura 3.7:** Análise 2 ( $L=4m$ ): Pontos de Gauss e área de influência para as malhas 1(a), 2(b), 3(c) e 4(d)

A Figura 3.8, por sua vez, ilustra como será o comportamento da função de distribuição em função de cada um dos parâmetros ( $L$  e  $k$ ) utilizados. Ressalta-se que, durante a utilização dos valores deste gráfico, serão adotados apenas os valores situados no intervalo de abrangência definido pelo raio da distribuição.





**Figura 3.8:** Parâmetros dos Materiais

Como já mencionado, este problema exhibe uma situação clara de localização de deformações e com isso, pretende-se avaliar o comportamento e a resposta numérica de modelos locais e não locais. Entretanto, é importante que primeiro se definam quais serão os pontos de controle para a avaliação dos resultados, pois, como têm-se materiais diferentes, cada nó possuirá um deslocamento diferente e com isso, sua trajetória de equilíbrio também será diferente. A Figura 3.9 apresenta a numeração padrão dos nós deste estudo, para que se possa explicar e identificar como será realizada a comparação de resultados.

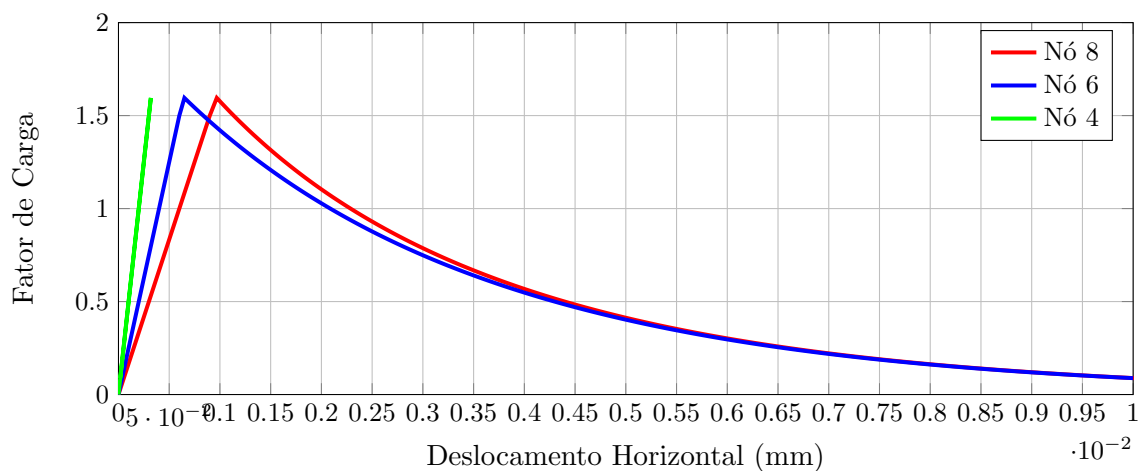


**Figura 3.9:** Numeração dos Nós

Independente da malha utilizada, sempre existirão 3 elementos, neste estudo, e 8 nós. Para a solução deste problema, utilizou-se o método de controle de deslocamentos, controlando-se o nó 6, com incremento de deslocamento de 0,00005m e tolerância para convergência de 0,0001. A escolha deste nó se deve pelo fato deste se encontrar na zona de transição de um material mais rígido, para outro, menos

rígido. Assim, realizando o incremento de deslocamentos neste nó, garante-se que a estrutura como um todo seja solicitada, o que não ocorreria se utilizassem nós além da zona de transição de materiais, pois neste caso, todo o incremento de deslocamento seria absorvido pelo material de menor rigidez, sem que houvesse transmissão por toda a estrutura.

Da mesma forma, para que se tenha a resposta da estrutura como um todo, é necessário analisar a trajetória de equilíbrio do nó 8. Este nó é capaz de traduzir como ocorre as variações da deformação da estrutura como um todo. Caso fossem utilizados os nós 6 ou 4, a resposta obtida para o problema seria localizada. Para exemplificar a questão tratada, a Figura 3.10 apresenta as trajetórias de equilíbrio de cada um destes 3 nós.

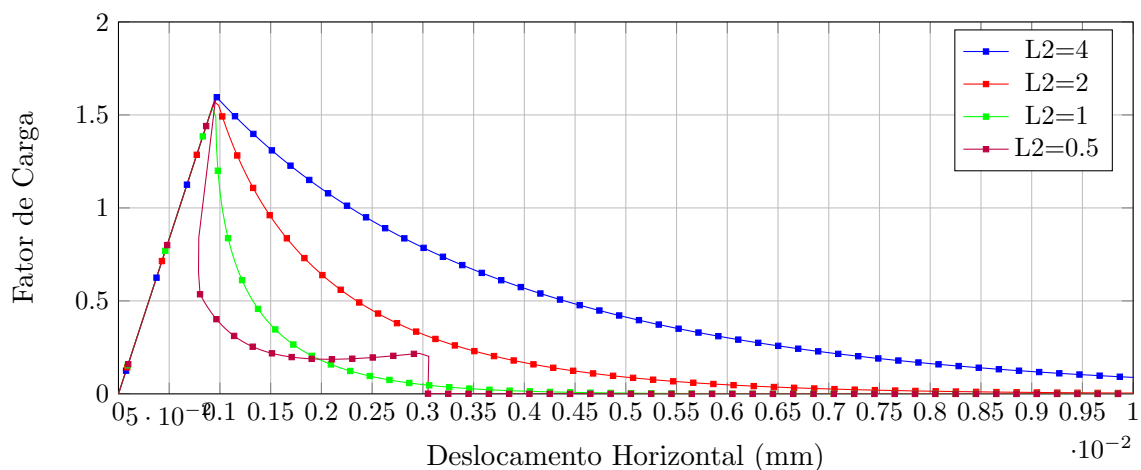


**Figura 3.10:** Trajetórias de equilíbrio para os nós 4, 6 e 8

Pode-se observar que para o nó 4, a trajetória de equilíbrio não chega ao ramo pós crítico, havendo descarregamento, após o limite de resistência à tração do material 2 ser atingido. Para os demais nós, a trajetória de equilíbrio atinge o seu ramo descendente, mas sempre limitado ao limite do material 2. Assim sendo, para o nó 8, o que ocorre é que a trajetória de equilíbrio traduz um somatório de efeitos dos nós 4 e 6.

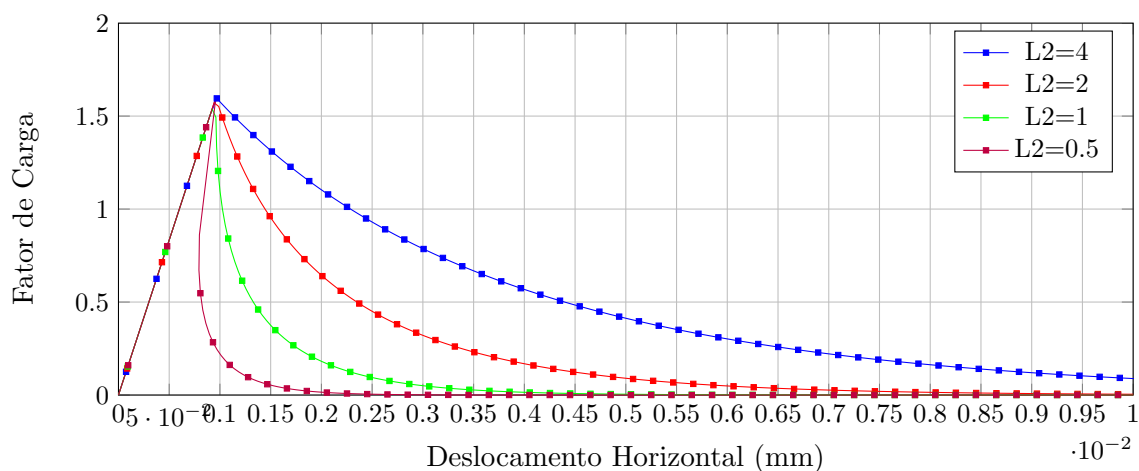
Tendo em vista esse efeito, analisa-se a seguir o comportamento do modelo local

para a trajetória de equilíbrio do nó 8, das diversas malhas. A Figura 3.11 apresenta as trajetórias de equilíbrio, e a partir destas, observa-se a ocorrência do fenômeno de localização de deformações numericamente induzida na Malha 4, ou seja, naquela onde de fato, como premissa do problema, o trecho da estrutura com material menos rígido foi localizado.



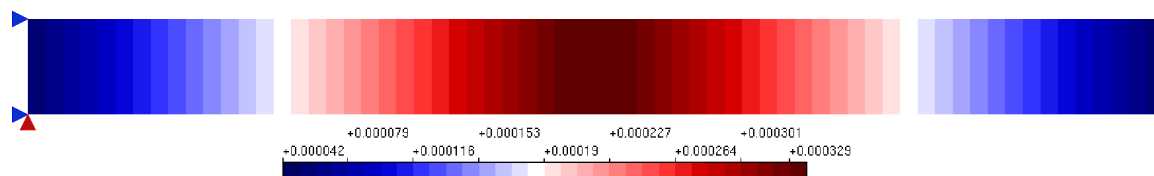
**Figura 3.11:** Resultado para o Modelo Local

Para os modelos não locais, conforme se observa na Figura 3.12, a localização de deformação na malha 4 não interferiu nos resultados da análise, utilizando os parâmetros:  $L=4,0m$  e  $k=8,0$ . Para este resultado, nota-se que todas as malhas analisadas apresentaram trajetórias de equilíbrio sem a presença de localização de deformações numericamente induzidas. Além disso, as trajetórias de equilíbrio retratam um comportamento de uma estrutura composta por dois materiais distintos.

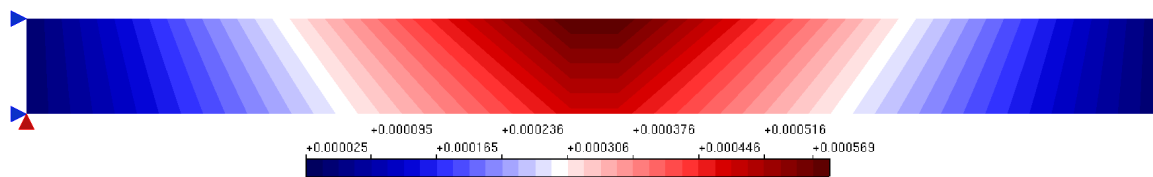


**Figura 3.12:** Resultado para o Modelo Constitutivo Não Local-L=4,0m e k=8,0

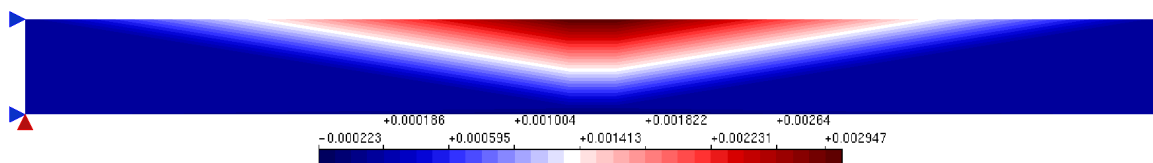
Analisando as isofaixas de deformação ( $\epsilon_{xx}$ ) da estrutura, para a Malha 4, pode-se constatar claramente o fenômeno de localização de deformações numericamente induzidas, e perceber as diferenças na coerência e qualidade dos resultados dos dois modelos analisados. As Figuras 3.13, 3.14, 3.15 e 3.16 apresentam a evoluções das deformações nos modelos locais. Pode-se observar que a análise se inicia de maneira coerente, com um estado de deformações uniforme, com concentração na região de menor rigidez (Figura 3.13). Entretanto a partir do passo 14 (Figura 3.14), as isofaixas passam a se comportar de forma irregular, com a deformação variando ao longo da altura da estrutura, evidenciando a presença de localização de deformações. Esta localização evolui concentrando-se exclusivamente na parte superior da estrutura (Figura 3.15), finalizando a análise com uma configuração regular (Figura 3.16), ou seja, resultado inesperado e incoerente para a análise.



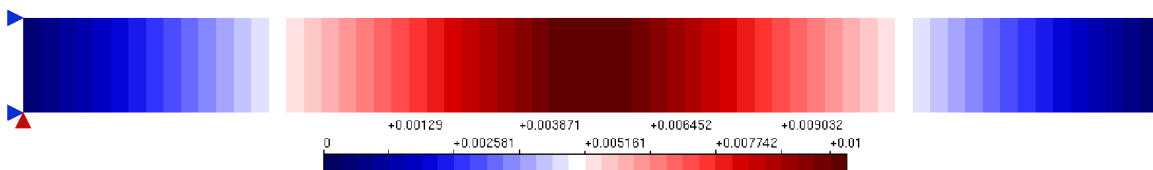
**Figura 3.13:** Deformação  $\epsilon_{xx}$  para a Malha 4 com a análise via modelo local no passo 11



**Figura 3.14:** Deformação  $\epsilon_{xx}$  para a Malha 4 com a análise via modelo local no passo 14

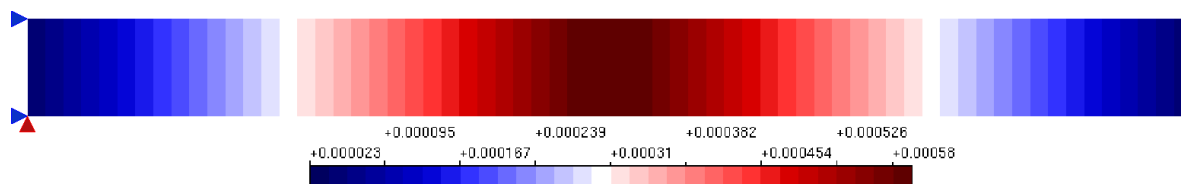


**Figura 3.15:** Deformação  $\epsilon_{xx}$  para a Malha 4 com a análise via modelo local no passo 60

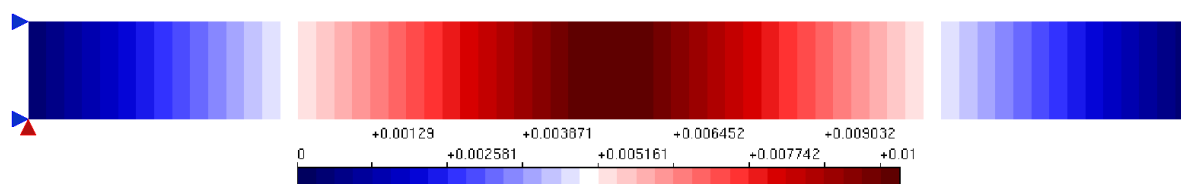


**Figura 3.16:** Deformação  $\epsilon_{xx}$  para a Malha 4 com a análise via modelo local no passo 200 (último passo)

A mesma análise, realizada para os modelos não locais se mostra muito mais coerente, conforme observado nas Figuras 3.17, 3.18, indicando um comportamento regular e uniforme ao longo de toda a análise. As Figuras 3.17 e 3.18 apresentam as isofaixas de deformação ( $\epsilon_{xx}$ ) da estrutura, para a malha 4, nos passos 14 e 200, e nestas, observa-se um comportamento diferente daquele apresentado pela análise local, mostrando um estado de deformação uniforme, conforme esperado.

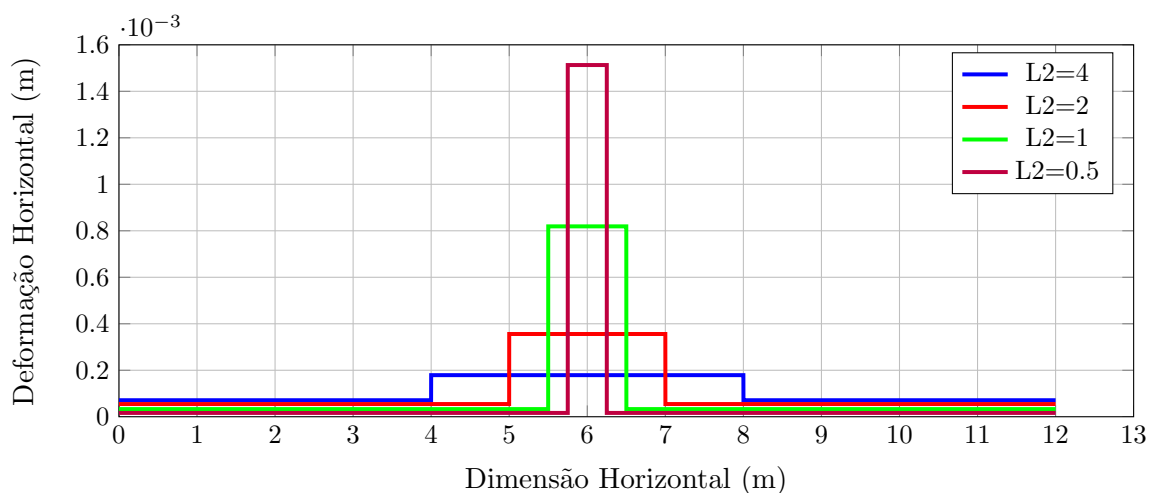


**Figura 3.17:** Deformação  $\epsilon_{xx}$  para a Malha 4 com a análise via modelo não local, com  $L=4,0$  e  $k=8,0$ , no passo 14

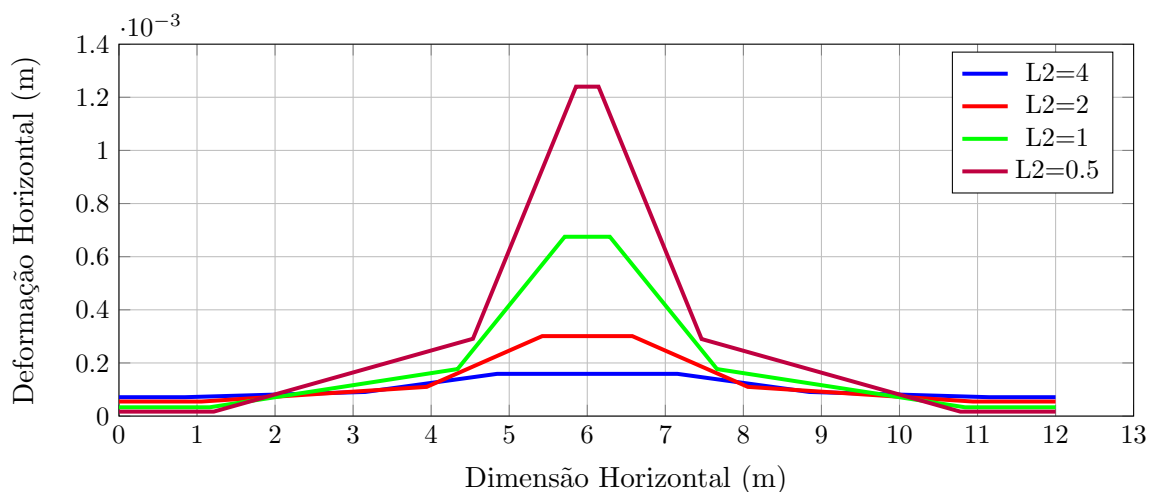


**Figura 3.18:** Deformação  $\epsilon_{xx}$  para a Malha 4 com a análise via modelo não local, com  $L=4,0$  e  $k=8,0$ , no passo 200 (último passo)

Finalmente, pode-se ainda constatar os efeitos da localização nos modelos locais e não locais a partir dos gráficos apresentados nas Figuras 3.19 e 3.20. Nestes gráficos, pode-se observar a diferença entre deformações ao longo do comprimento da estrutura (eixo horizontal), sendo que, a estrutura concentra deformações em seu trecho intermediário, ou seja, aquele em que o material é menos resistente. Nas duas figuras, tem-se uma maior concentração de deformações quanto menor é a zona de menor resistência. Porém, a transição entre as zonas de diferentes resistências é muito mais suave no resultado para o modelo não local (Figura 3.20). O resultado observado no modelo local (Figura 3.19) apresenta elevadas discontinuidades, no campo de deformações, entre os elementos, agravando os efeitos da localização.

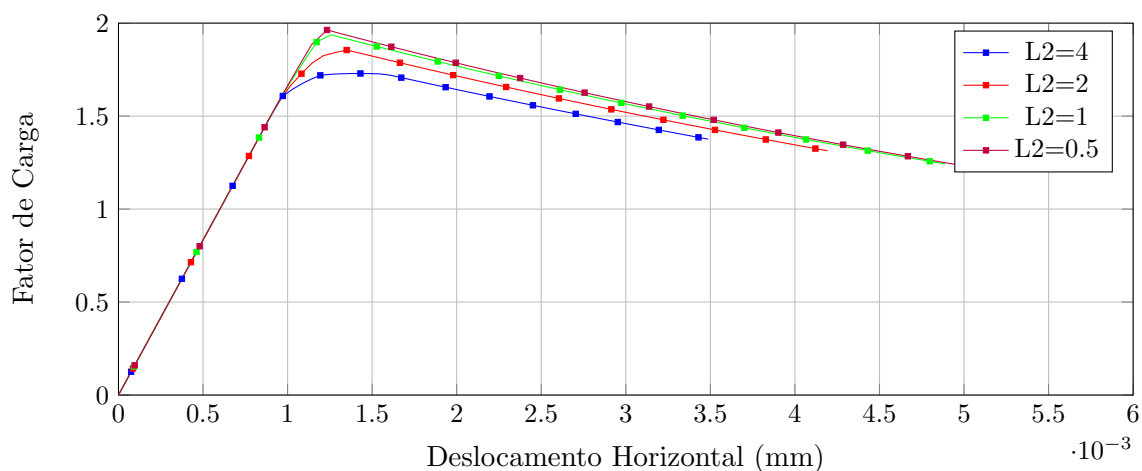


**Figura 3.19:** Resultado para o Modelo Local



**Figura 3.20:** Resultado para o Modelo não Local

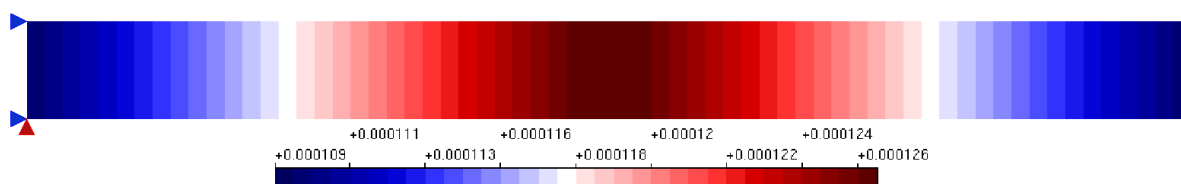
Já na segunda análise proposta via modelo não local ( $L=2,0\text{m}$  e  $k=1,0$ ), o raio para a função de distribuição é menor e todos os Pontos de Gauss presentes na zona menos resistente tem seus resultados dependendo apenas dos outros Pontos de Gauss, também presentes na mesma zona. A Figura 3.21 apresenta as trajetórias de equilíbrio desta análise.



**Figura 3.21:** Resultado para o Modelo Constitutivo Não Local

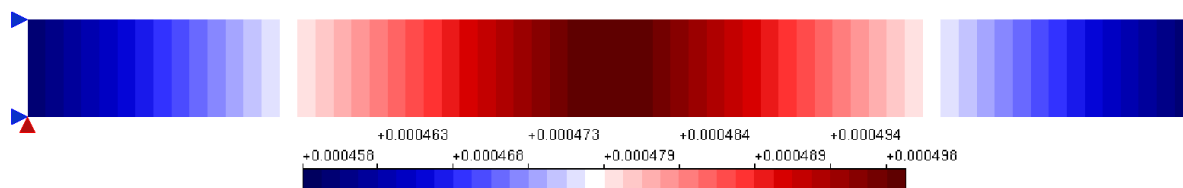
Nota-se que, nesta análise, a estrutura não se comporta como uma estrutura composta de dois materiais, como ocorreu na análise via modelo não local com  $L=4m$ . Neste caso, o modelo está representando uma estrutura de apenas um material homogeneizado, mas com uma zona de localização de deformações, já pré definida. Dessa forma, quanto menor a dimensão desta zona, mais a trajetória de equilíbrio da estrutura tende à trajetória de equilíbrio do material mais resistente.

Apesar da diferença de comportamentos das trajetórias de equilíbrio das duas análises não locais, as isofaixas de deformação ( $\epsilon_{xx}$ ), Figuras 3.22 e 3.23, se mostraram coerentes, traduzindo um comportamento uniforme.



**Figura 3.22:** Deformação  $\epsilon_{xx}$  para a Malha 4 com a análise via modelo não local, com  $L=2,0$  e  $k=1,0$ , no passo 14





**Figura 3.23:** Deformação  $\epsilon_{xx}$  para a Malha 4 com a análise via modelo não local, com  $L=2,0$  e  $k=1,0$ , no passo 58 (último passo)

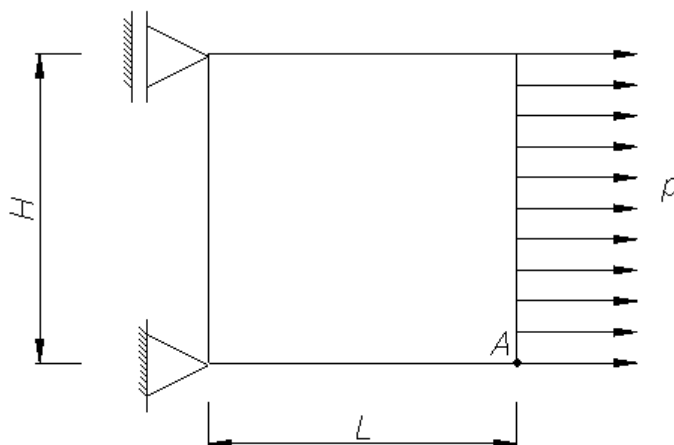
## 3.2 Tração Direta com Refinamento da Malha

Em uma análise fisicamente não linear, problemas de origem numérica são muito recorrentes, especialmente quando o Método dos Elementos Finitos é adotado. Estes problemas podem causar a instabilidade da análise provocando divergência do processo de solução, ou ainda, conduzindo o modelo a respostas incoerentes. Tais questões são discutidas no conceito de localização de deformações numericamente induzidas.

Nesta simulação, será mostrado que modelos locais estão suscetíveis a instabilidades numéricas, e modelos não locais são capazes de regularizar os resultados, atenuando, ou até mesmo, sanando, os referidos problemas numéricos.

Neste estudo, a estrutura estará submetida a um carregamento uniforme de tração e, pelo fato da condição de tensão ser elementar e o modelo com dimensões unitárias, a curva tensão *versus* deformação do material deverá ser representada. Com isso, é desejável que todas as malhas apresentem o mesmo resultado, independente de seu grau de refinamento. Entretanto, um maior grau de refinamento da malha pode levar o problema ao fenômeno de localização de deformações numericamente induzidas.

A Figura 3.24 apresenta a geometria, condições de contorno e carregamento adotados na simulação, onde,  $L = H = t = 1m$ ,  $p = 1MN/m$ . Para o material foram adotados os parâmetros:  $E_0=20000$  MPa,  $\nu=0,2$ .

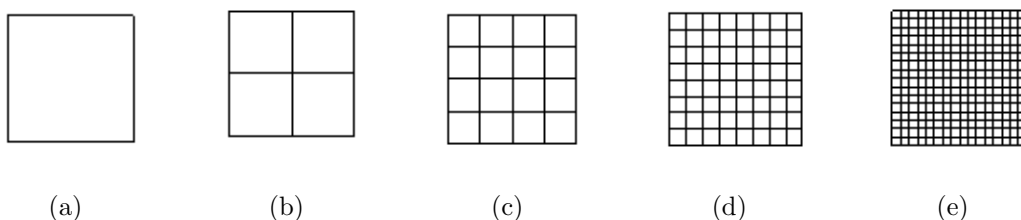


**Figura 3.24:** Tração Direta

Adotou-se, neste estudo, a equação de evolução de dano exponencial (Equação 2.27), e seus parâmetros são definidos como:  $\alpha=0,99$ ,  $\beta=1000$  e  $\kappa=0,000125$ .

Para o modelo não local, utilizou-se a função de distribuição de Gauss (Equação 2.31), sendo seus parâmetros ( $L$  e  $k$ ) obtidos a partir de um conjunto de análises, variando-os até a obtenção dos valores que melhor se adequaram ao problema. Durante a apresentação dos resultados deste estudo, este conjunto de análises será exibido para uma das malhas, demonstrando a influência de cada parâmetro.

Serão utilizadas cinco malhas, com diferentes graus de refinamento (sendo a menos refinada com 1 elemento e a mais refinada com 256 elementos). A Figura 3.25 apresenta as malhas utilizadas neste estudo.

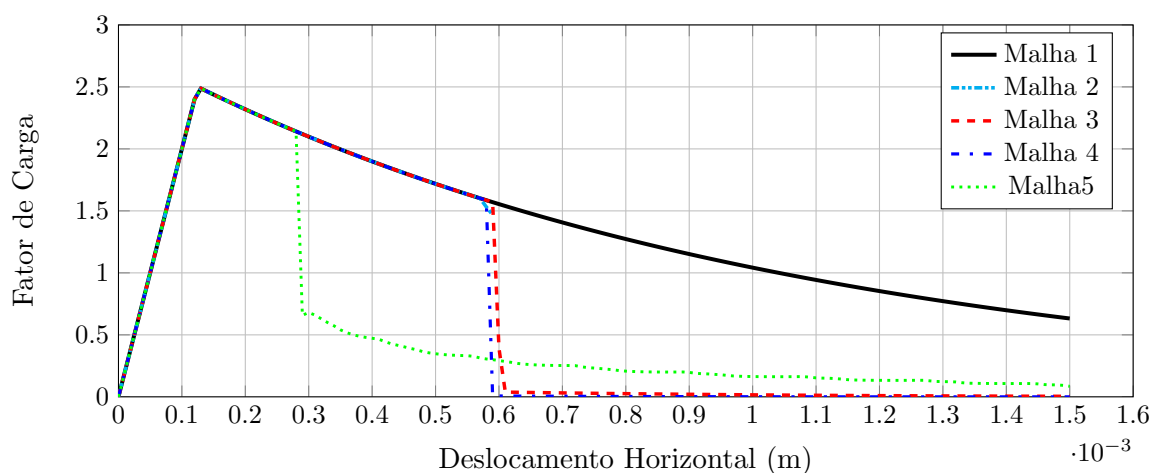


**Figura 3.25:** (a)Malha 1, (b)Malha 2, (c)Malha 3, (d)Malha 4, (e)Malha 5

Para obtenção das trajetórias de equilíbrio, empregou-se o método de controle de deslocamentos, com incremento do deslocamento horizontal do ponto A da Figura

3.24 de 0,00005 m e tolerância para convergência de 0,0001.

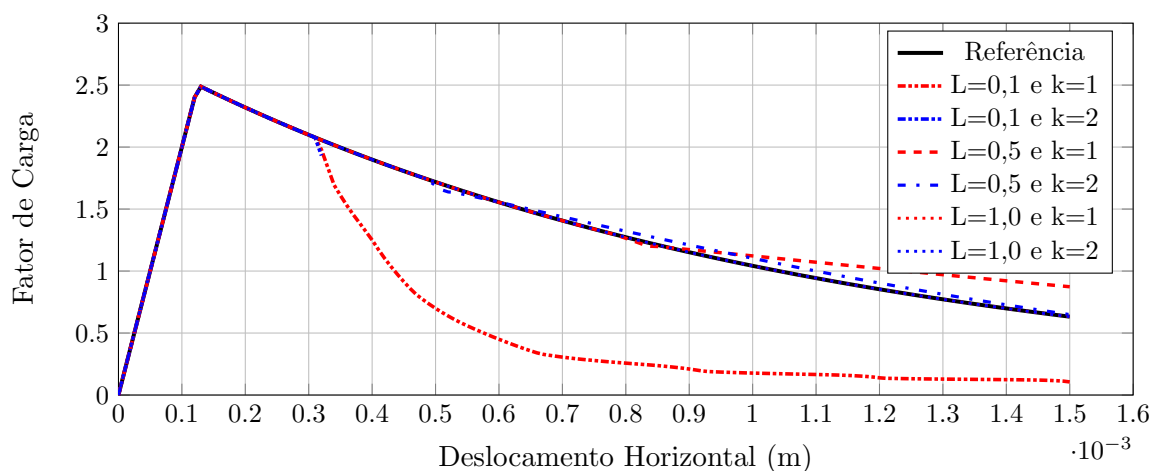
Realizadas as análises, pode-se observar nas trajetórias de equilíbrio (Figura 3.26) obtidas para as malhas 1, 2, 3 e 4, que apenas a malha 1 foi capaz de descrever completamente a curva “Fator de Carga x Deslocamento Horizontal”. Para as demais malhas, pode-se observar a localização de deformações representadas pela abrupta descontinuidade da curva correspondente à trajetória de equilíbrio.



**Figura 3.26:** Resultados para Modelo Constitutivo Local

Assim, constata-se que o modelo constitutivo adotado sofre com problemas ocasionados pelo refinamento da malha.

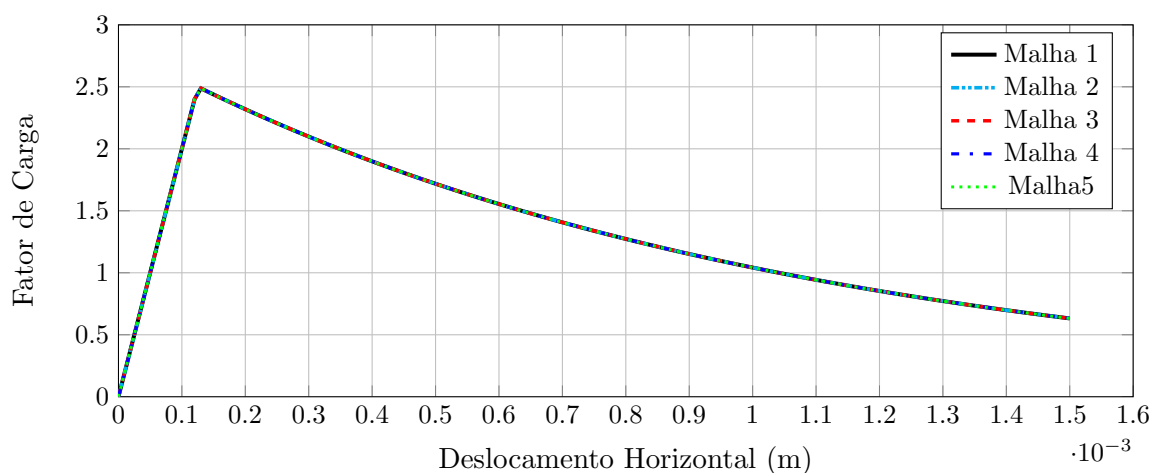
Para a análise via modelos não locais, primeiramente, é necessário a definição dos parâmetros não locais ( $L$  e  $k$ ), conforme já mencionado. Para isso, utiliza-se como referência a solução local da malha 1, variando os parâmetros durante a análise da malha mais refinada (malha 5). A Figura 3.27 apresenta as trajetórias de equilíbrio para esta malha, com a variação de parâmetros não locais.



**Figura 3.27:** Evolução dos Parâmetros para o Modelo Não Local

Baseado nas trajetórias descritas pela Figura 3.27, pode-se observar que, para o maior raio da distribuição não local ( $L=1,0\text{m}$ ), a trajetória de equilíbrio é coincidente com a trajetória de equilíbrio de referência, independentemente dos valores da constante  $k$ , adotada. Por outro lado, com  $L=0,5\text{m}$ , as trajetórias de equilíbrio para os dois valores das constantes são diferentes, de modo que, para  $k=2$ , a trajetória de equilíbrio se aproxima mais dos valores de referência. Com isso, os parâmetros não locais ficam definidos como:  $L=1,0\text{m}$  e  $k=2$ .

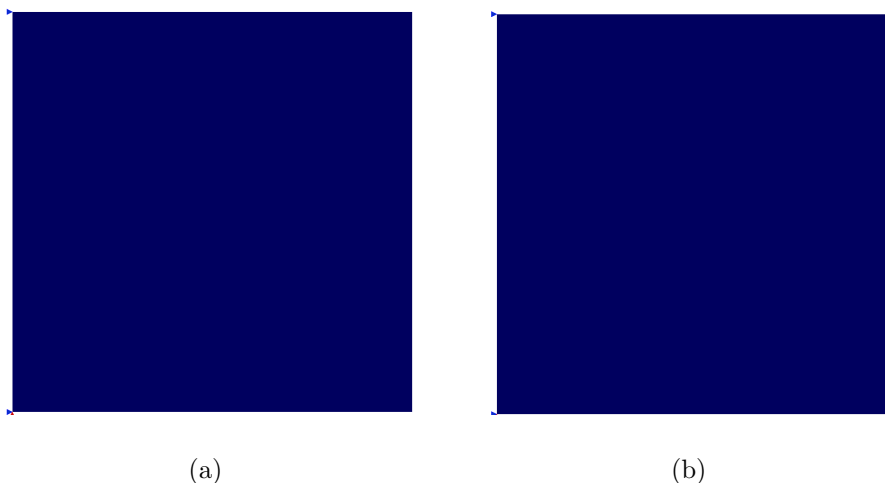
A partir destes parâmetros, e dos outros já definidos, realiza-se a análise via modelos não locais obtendo-se as trajetórias de equilíbrio descritas pela Figura 3.28.



**Figura 3.28:** Resultados para Modelo Constitutivo Não Local

O gráfico da Figura 3.28 apresenta o resultado da análise não local descrita juntamente com a solução de referência do problema (resultado da malha de 1 elemento). Com isso, observa-se que todas as curvas são coincidentes mostrando que, mesmo para malhas bem refinadas, logo, mais sujeitas à localização de deformações numericamente induzidas, os resultados do problema foram satisfatórios.

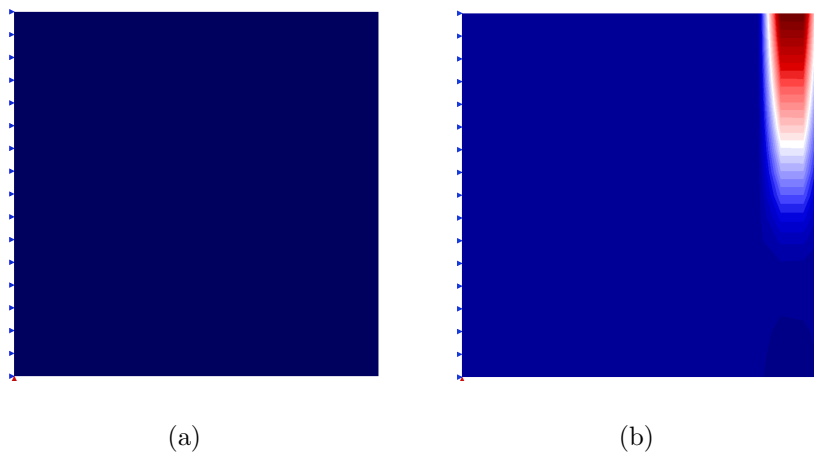
Outra forma de avaliação da qualidade do resultado é a partir das isofaixas de deformação da estrutura, para cada modelo. A partir das trajetórias de equilíbrio do problema, pôde-se constatar a ausência do fenômeno de localização de deformações no modelo não local, que pode ser confirmado a partir das isofaixas de deformação ( $\epsilon_{xx}$ ) das estruturas. A Figura 3.29 apresenta as isofaixas de deformação da estrutura, para a malha de apenas 1 elemento (solução de referência), para o primeiro e o último passo, da análise. Observa-se que o estado de deformação da estrutura se mantém uniforme durante toda a análise, o que era esperado tendo em vista a condição elementar de carregamento.



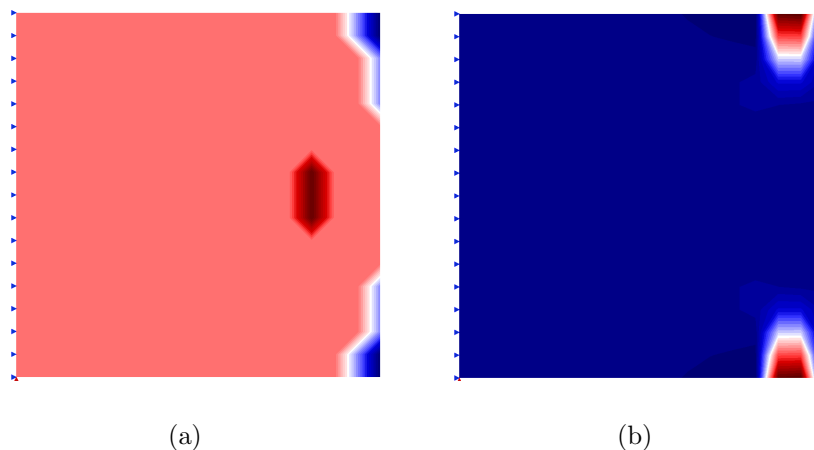
**Figura 3.29:** Deformação  $\epsilon_{xx}$ , para a malha de 1 elemento, dos passos 1(a) e 150(b)

Na trajetória de equilíbrio dos modelos locais (Figura 3.26) foi observado a presença de localização de deformação numericamente induzida, o que também pode ser constatado durante a análise das isofaixas de deformação ( $\epsilon_{xx}$ ), desta estrutura. As Figura 3.30 e 3.31 apresentam estas isofaixas para os diversos passos ao longo da

análise. Observa-se que o padrão uniforme apresentado pela solução de referência (Figura 3.29) já não é observado nem no primeiro e o último passo (Figura 3.30), e nem mesmo em passos intermediários subsequentes (Figura 3.31), sendo percebidas elevadas variações no padrão das isofaixas. Com isso, percebe-se, mais uma vez, que o modelo não foi adequado para a representação do problema.



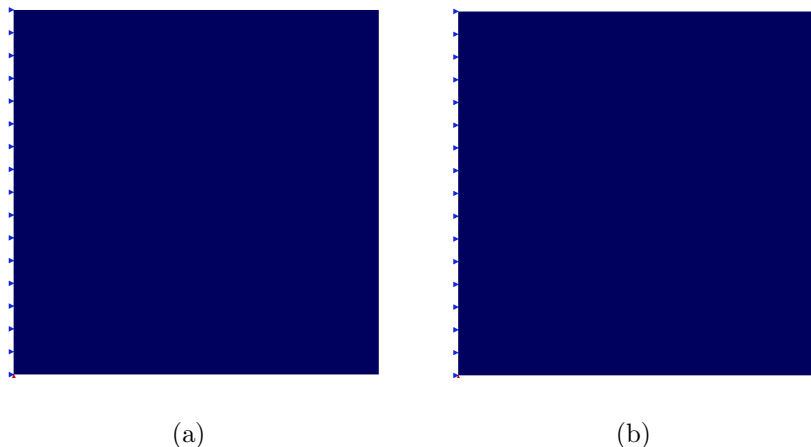
**Figura 3.30:** Deformação  $\epsilon_{xx}$  para a malha de 256 elementos analisada via modelo local, dos passos 1(a) e 150(b)



**Figura 3.31:** Deformação  $\epsilon_{xx}$  para a malha de 256 elementos analisada via modelo local, dos passos 28(a) e 29(b)

Finalmente, a Figura 3.32 apresenta as isofaixas de deformação para a malha de 256 elementos analisada via modelo não local. Conforme observado nas trajetórias de equilíbrio, os modelos não locais tiveram um comportamento análogo à solução

de referência, de modo que, não foram observadas variações de padrão nas isofoixas de deformação ao longo de toda a análise.



**Figura 3.32:** Deformação  $\epsilon_{xx}$  para a malha de 256 elementos analisada via modelo não local, dos passos 1(a) e 150(b)

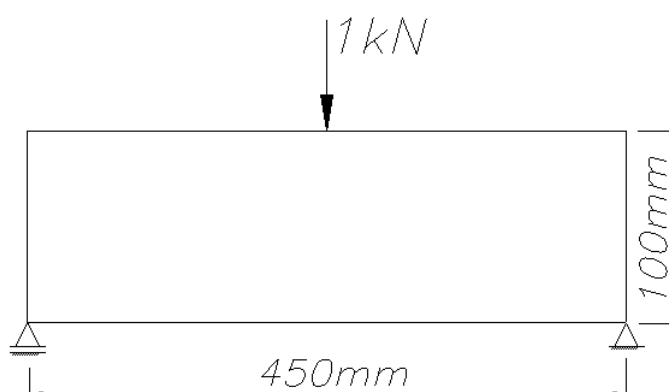
### 3.3 Análise de Convergência-Ensaio de Flexão em 3 pontos

Nesta simulação, os modelos constitutivos locais e não locais serão avaliados em um estudo de convergência de solução. Os estudos anteriores tratam de um caso de estruturas submetidas à tração simples, ou seja, o grau de refinamento da malha não deveria interferir nas soluções. Entretanto, para o caso da flexão, o refinamento da malha tem grande influência nos resultados do modelo, uma vez que malhas pouco refinadas conduzem a estrutura modelada a respostas mais rígidas do que malhas mais refinadas. Em elementos finitos espera-se que, com o refinamento sucessivo da malha, o modelo apresentará convergência para uma solução referência.

Jirasek (2004) propõe um ensaio de flexão em três pontos para avaliar a convergência de modelos locais e não locais. Conforme mencionado, o refinamento da malha levaria o problema a uma convergência na solução, entretanto, este mesmo

refinamento pode levar a estrutura ao problema de localização de deformações numericamente induzida. Com isso, este ensaio se mostra interessante para se avaliar tanto o comportamento dos modelos constitutivos ao problema de localização de deformações numericamente induzida, quanto sua influência na convergência à uma solução.

A Figura 3.33 apresenta a geometria, a carga de referência e as condições de contorno adotadas neste estudo.



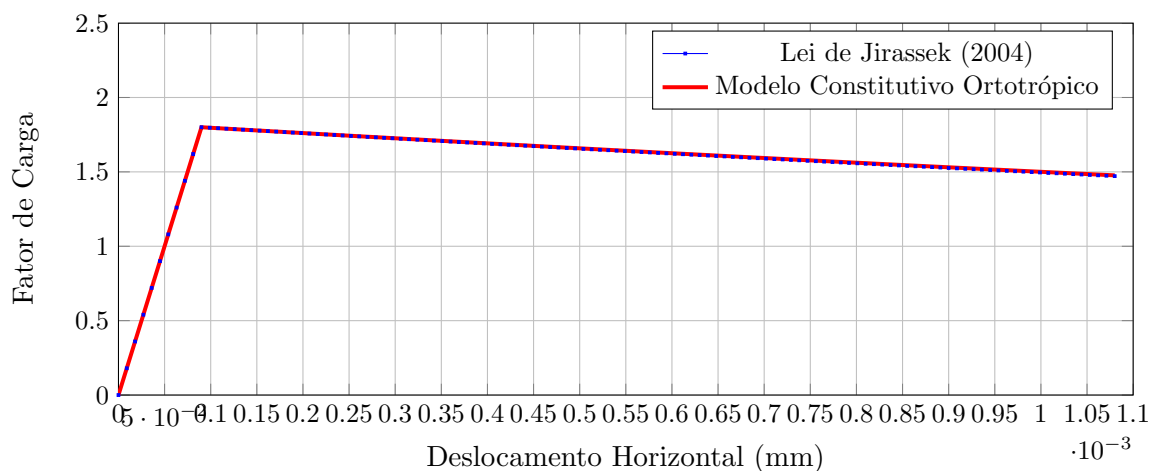
**Figura 3.33:** Dados do Ensaio

Jirasek (2004) propõe os seguintes parâmetros para o material:  $E_0 = 20000 MPa$  e  $\nu = 0,2$  e ainda adota a função de dano apresentada pela Equação 3.1.

$$\sigma(k) = 1 - \frac{\epsilon_0}{k} \exp\left(-\frac{k - \epsilon_0}{\epsilon_f - \epsilon_0}\right) \quad (3.1)$$

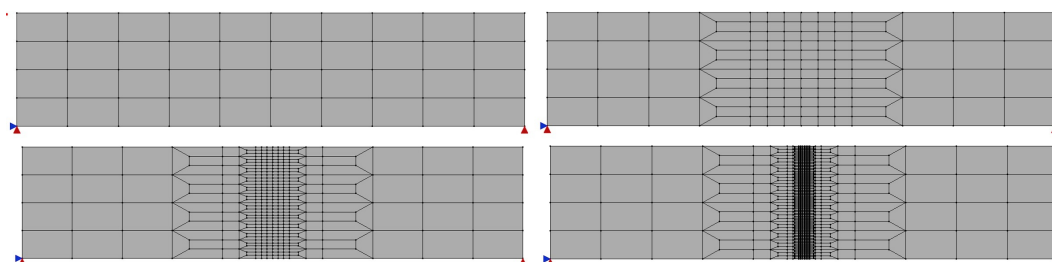
Neste estudo será adotada, mais uma vez, a lei de evolução de dano exponencial e para se obterem os parâmetros desta lei, é necessário realizar uma parametrização com a lei proposta por Jirasek (2004). A Figura 3.34 apresenta a parametrização e a partir desta, foram obtidos os seguintes parâmetros da lei exponencial:  $\alpha = 0,99$ ;  $\beta = 200$  e  $\kappa = 0,00009$ .





**Figura 3.34:** Parametrização do Material

Para a avaliação da convergência, são apresentadas 4 malhas na Figura 3.35. As malhas possuem elementos de dimensões: 45x25mm (Malha 1), 15x8,33mm (Malha 2), 5,0x2,78mm (Malha 3) e 1,66x0,925mm (Malha 4).

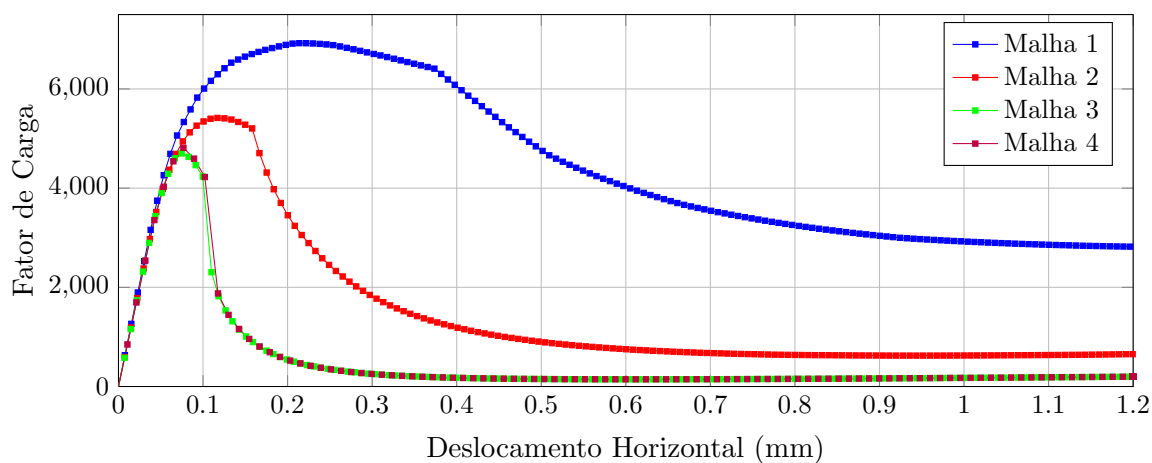


**Figura 3.35:** Malhas Utilizadas

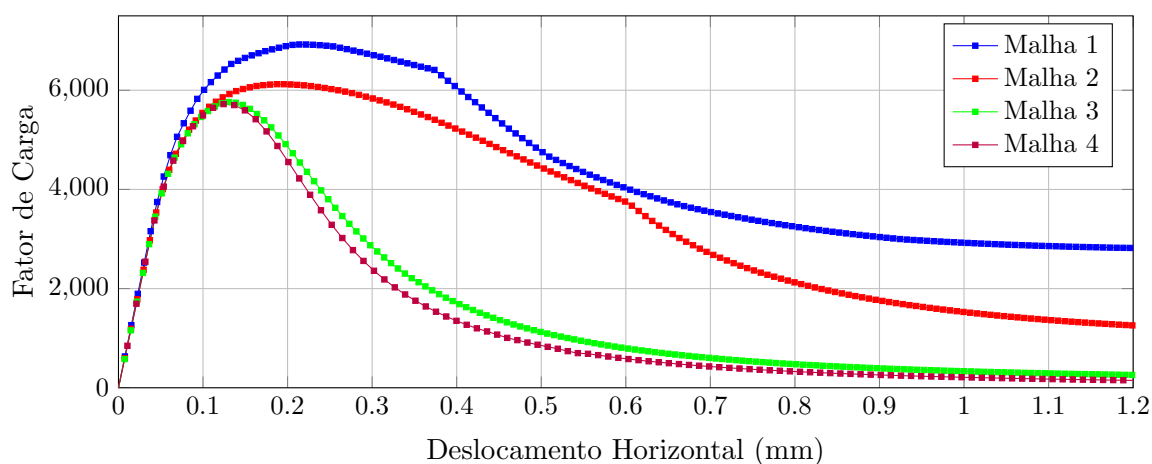
Os parâmetros para o modelo não local relativos à função Gaussiana (Equação 2.31), propostos por Jirasek (2004) foram:  $L = 8,0mm$  e  $k = 0,5$ . No processo de solução, foi adotado o método de controle de deslocamento com incremento do deslocamento vertical no ponto A da Figura 3.33 de  $-0,004mm$  e tolerância de 0,0001.

As Figuras 3.36 e 3.37 apresentam os resultados da análise adotando-se modelos constitutivos locais (Figura 3.36) e não locais (Figura 3.37). A partir da análise das trajetórias de equilíbrio, pode-se observar a convergência dos resultados para uma

solução de referência em ambos os casos. Entretanto, para as análises via modelo local, claramente, observa-se a ocorrência de localização de deformações a partir das trajetórias de equilíbrio. O mesmo ocorre para as malhas menos refinadas na análise via modelo constitutivo não local, uma vez que o raio de  $8mm$  é bem pequeno se comparado às dimensões dos elementos, tornando a análise bem próxima de uma análise local. Contudo, as malhas 3 e 4, cujas dimensões dos elementos são inferiores ao raio adotado, tem-se resultados regularizados e, portanto, com a convergência obtida.



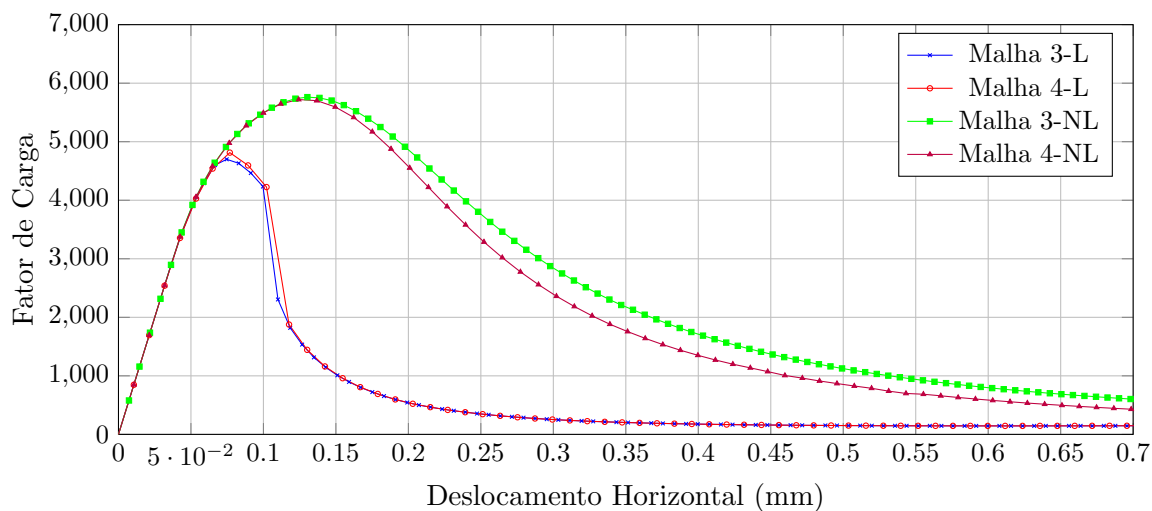
**Figura 3.36:** Trajetórias de Equilíbrio para Modelos Locais



**Figura 3.37:** Trajetórias de Equilíbrio para Modelos Não Locais

A Figura 3.38 apresenta as trajetórias de equilíbrio dos modelos locais e não

locais, para as malhas mais refinadas (malha 3 e 4). Assim comparados os resultados, observa-se que, mesmo havendo a convergência para uma solução, os modelos locais apresentam uma resposta bem diferente da solução obtida com o modelo não local. Este fato mostra de forma clara como o fenômeno, de origem numérica, afeta a acurácia dos resultados, uma vez que, mesmo com um refinamento de malha e a convergência para a solução. Ressalta-se que a localização numericamente induzida pode ser constatada a partir dos “saltos” e da mudança repentina de inclinação das curvas referentes ao modelo local. Tal comportamento não ocorre nas trajetórias referentes ao modelo não local.

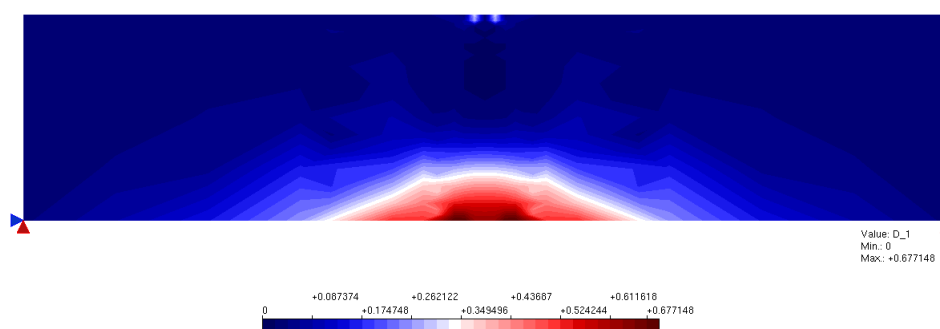


**Figura 3.38:** Trajetórias de Equilíbrio-Fator Carga x Deslocamento Vertical no ponto A

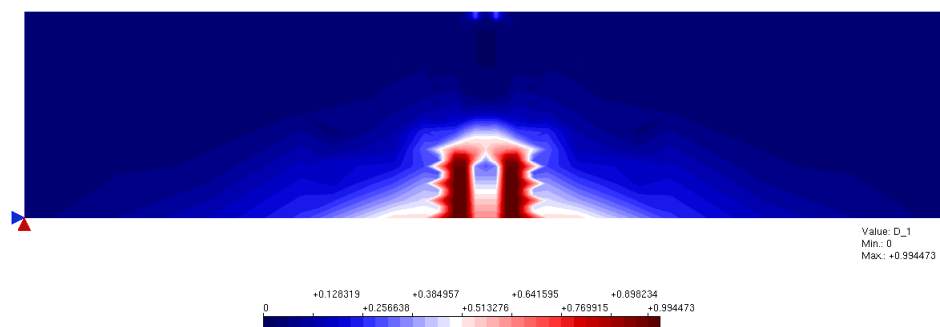
Analisa-se as isofaixas de evolução do dano na estrutura e da deformação principal de tração, a fim de se avaliarem as localizações constatadas nas trajetórias de equilíbrio, na análise via modelo local e não local. Nesta análise, será utilizada apenas a Malha 3. Sabe-se que o dano é calculado a partir das deformações principais de tração, com isso, estas duas grandezas devem apresentar isofaixas de mesmo padrão.

A Figuras 3.39, 3.40 e 3.41 apresentam as isofaixas de valores do dano na estrutura para os modelos locais. Observa-se que no início da análise, Figura 3.39, o dano possui um comportamento adequado e coerente, mantendo-se concentrado na

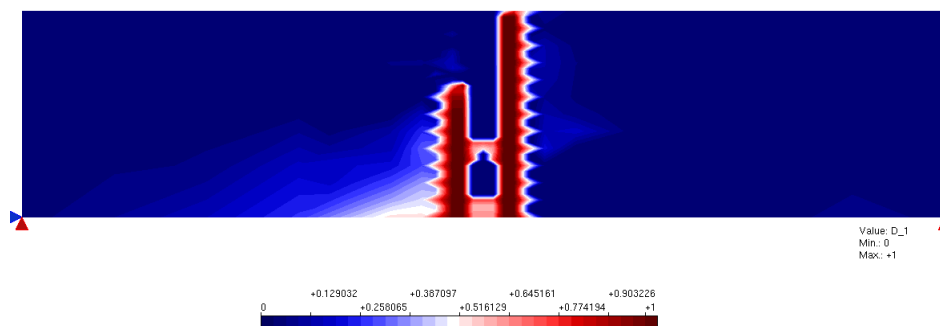
região de maior tensão de tração da estrutura. Este padrão se altera a partir do passo 35 da análise, Figura 3.40, onde já é possível perceber problemas na análise, tendo em vista que as isofaixas de dano não se concentram uniformemente no centro da estrutura. Este padrão irregular persiste até o último passo da análise, Figura 3.41, evoluindo ainda de maneira não simétrica, corroborando os resultados obtidos nas trajetórias de equilíbrio, ou seja, com indícios de localização de deformação numericamente induzida.



**Figura 3.39:** Dano ao longo da estrutura para o Modelo Local no passo 34

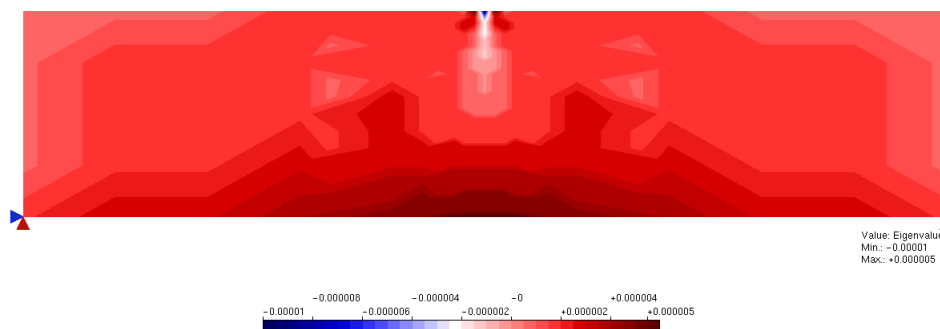


**Figura 3.40:** Dano ao longo da estrutura para o Modelo Local no passo 35

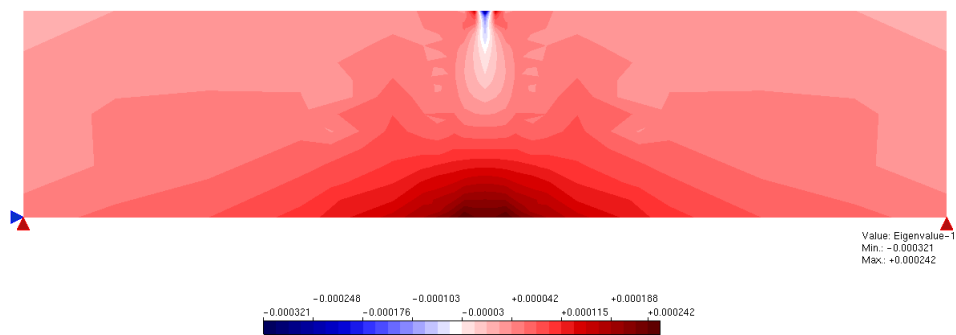


**Figura 3.41:** Dano ao longo da estrutura para o Modelo Local no passo 200

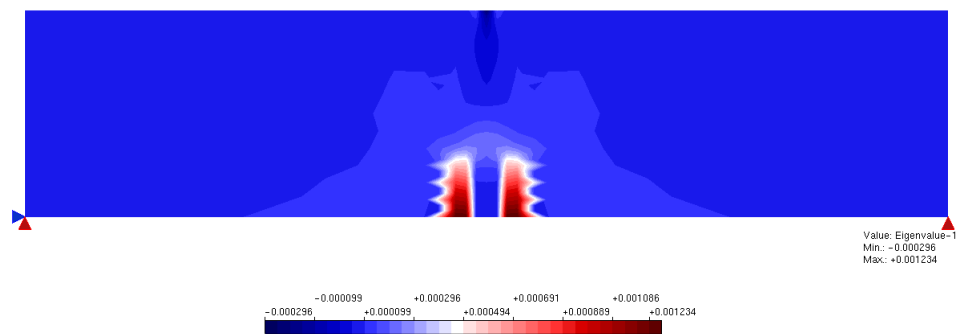
As isofaixas para as deformações principais de tração apresentam um padrão semelhante aquele observado nas isofaixas de dano, conforme apresentado nas Figuras 3.42, 3.43 e 3.44. Estas isofaixas apresentam as deformações principais de tração para os mesmos passos apresentados nas isofaixas de dano e, mais uma vez, percebe-se que o pico de deformações não se localiza no centro da estrutura, indicando que a análise não se mostrou representativa.



**Figura 3.42:** Deformações principais de tração ao longo da estrutura para o Modelo Local no passo 34

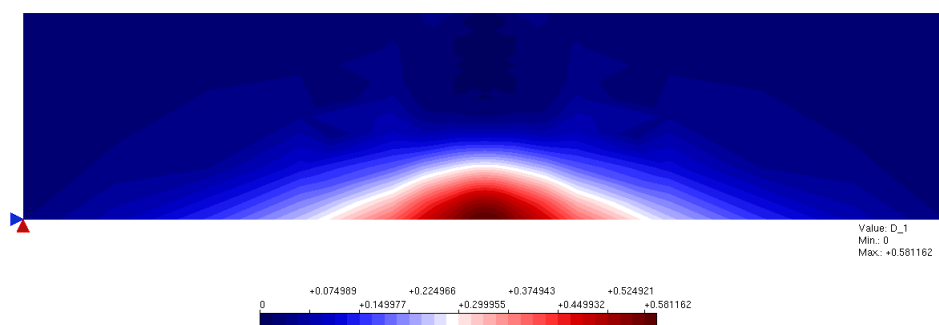


**Figura 3.43:** Deformações principais de tração ao longo da estrutura para o Modelo Local no passo 35

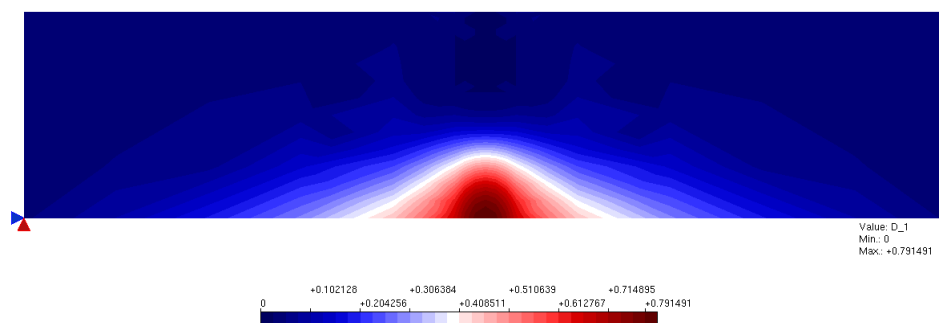


**Figura 3.44:** Deformações principais de tração ao longo da estrutura para o Modelo Local no passo 200

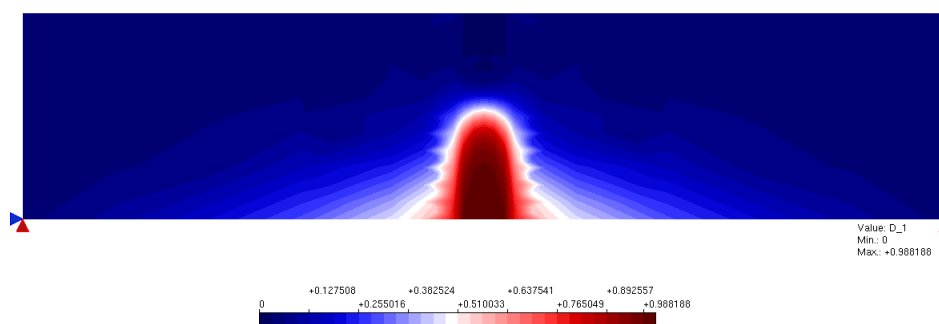
As Figuras 3.45, 3.46 e 3.47 apresentam as isofaixas de dano para os modelos não locais. Nestas, o padrão observado na evolução do dano é muito mais coerente do que aquele observado nos modelos locais (Figuras 3.39, 3.40 e 3.41), uma vez que, o dano se mantém simétrico e concentrado de maneira uniforme no centro da estrutura, conforme esperado em um ensaio de flexão em 3 pontos com carga centrada.



**Figura 3.45:** Dano ao longo da estrutura para o Modelo Não Local no passo 34



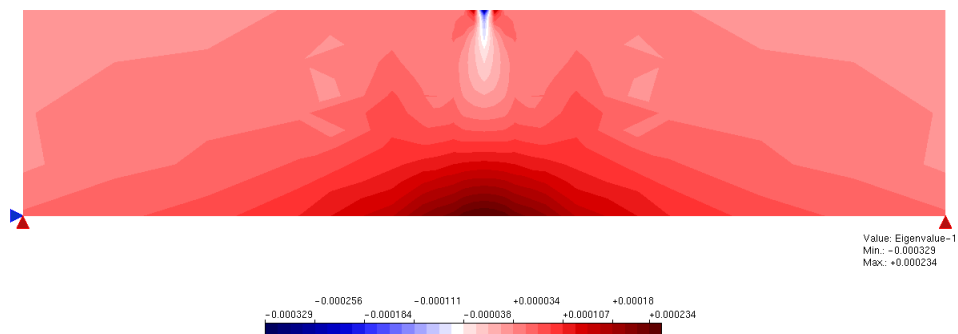
**Figura 3.46:** Dano ao longo da estrutura para o Modelo Não Local no passo 35



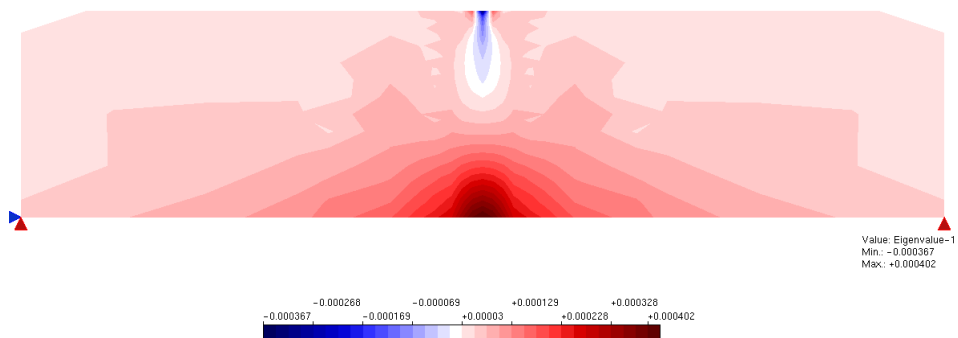
**Figura 3.47:** Dano ao longo da estrutura para o Modelo Não Local no passo 200

O mesmo comportamento é observado nas isofaixas das deformações principais de tração, conforme Figuras 3.48, 3.49 e 3.50. Os valores máximos verificados nestas isofaixas, se encontram no centro da estrutura, apresentando simetria. Outro ponto digno de nota quando se comparam as isofaixas de dano com as isofaixas das

deformações principais de tração é a dimensão da zona de degeneração. Nota-se que, para o dano, a quantidade de elementos degenerados é bem superior à quantidade de elementos degenerados nas isofaixas da deformação principal de tração. Isso ocorre pois, elementos que não sofreram degeneração, sofrem influência de elementos vizinhos degenerados, com a ponderação da função de distribuição.

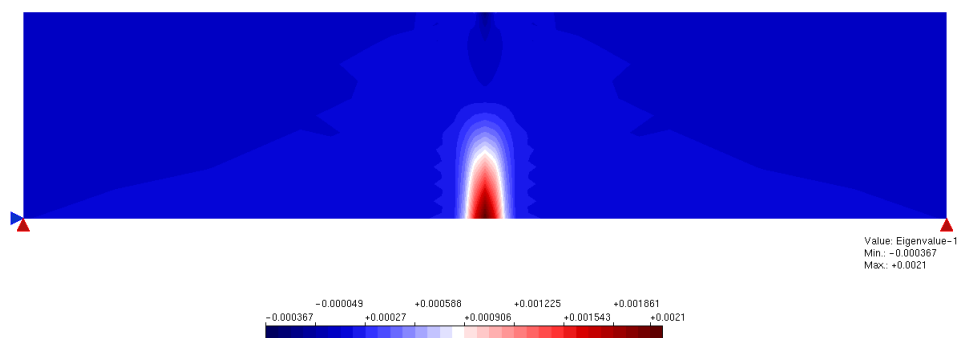


**Figura 3.48:** Deformação principal de Tração ao longo da estrutura para o Modelo Não Local no passo 34



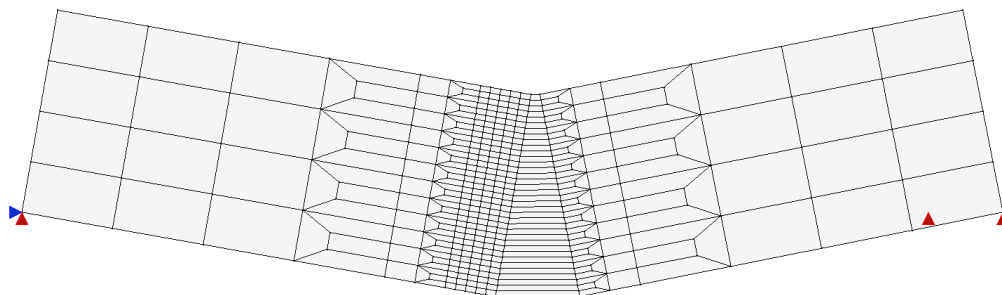
**Figura 3.49:** Deformação principal de Tração ao longo da estrutura para o Modelo Não Local no passo 35



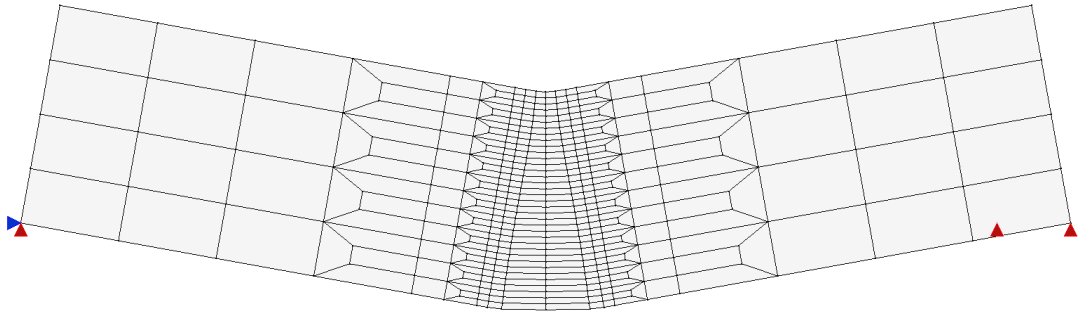


**Figura 3.50:** Deformação principal de Tração ao longo da estrutura para o Modelo Não Local no passo 200

Por fim, pode-se comparar a qualidade dos resultados a partir da deformada das estruturas. A Figura 3.51 apresenta a deformada da estrutura avaliada via modelo local, e nela, pode-se constatar inconsistências como a não simetria na deformada além da deformação excessiva de certos elementos com movimentos de corpo rígido de outros (fato que indica o fenômeno de localização de deformações). Já para a análise via modelo não local, Figura 3.52, os resultados se mostram bem mais consistentes, uma vez que os mesmos apresentam simetria na deformação, comportamento esperado em um problema de flexão em três pontos com carga centrada. Além disso, pode-se ainda constatar elementos com deformações elevadas e outros em movimento de corpo rígido, da mesma forma como observado na análise via modelo local, entretanto, este problema não contribuiu na qualidade dos resultados, interferindo nas trajetórias de equilíbrio.



**Figura 3.51:** Deformada da estrutura para o Modelo Local



**Figura 3.52:** Deformada da estrutura para o Modelo Local

# Capítulo 4

## Validação do Modelo

### 4.1 Introdução

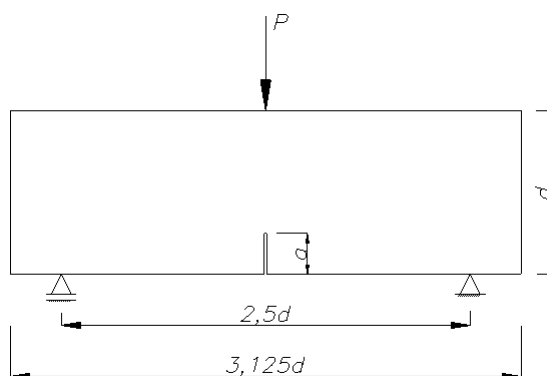
Este capítulo apresenta um estudo baseado no trabalho de Álvarez et al. (2012) e trata de um problema de flexão em três pontos, em uma viga com trinca centrada. Neste trabalho, a viga é modelada e seus resultados numéricos são obtidos e comparados com ensaios reais, de corpos de prova moldados em laboratório e submetidos à ruptura. O trabalho ainda realiza o mesmo ensaio para vigas de diferentes tamanhos, com o objetivo de se avaliar o comportamento dos modelos numéricos em relação ao efeito de tamanho das peças.

De posse dos resultados obtidos por Álvarez et al. (2012), este estudo tem como o objetivo avaliar o comportamento do modelo não local de dano ortotrópico, implementado no software INSANE e todas as suas variáveis. Com isso, além de se ter um comparativo entre o modelo implementado e dados experimentais de Álvarez et al. (2012), possibilitando a validação da implementação, tem-se ainda um comparativo das variáveis do próprio modelo, podendo verificar a eficiência e a resposta de cada uma delas.

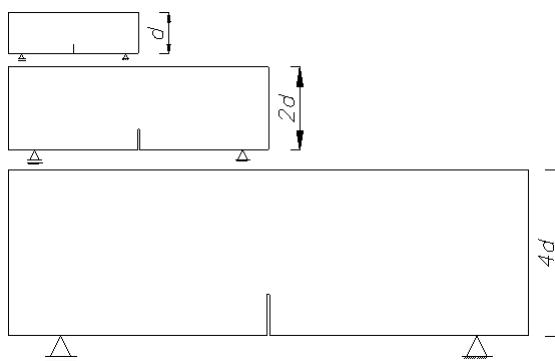
Em resumo, este estudo, além de se propor a validar o modelo constitutivo já implementado, se propõe a avaliar a resposta das leis de dano exponencial, polinomial e bi-linear, comparando a precisão de cada uma delas e a resposta das distribuições estatísticas de Gauss, Sino, Constante, Degrau e Linear.

## 4.2 Modelagem

As Figuras 4.1 e 4.2 apresentam os dados do ensaio, de modo que a primeira apresenta a geometria, condições de carregamento e contorno, enquanto a segunda apresenta a proporcionalidade entre os três tamanhos estudados.



**Figura 4.1:** Dados do Ensaio: Geometria, condições de carregamento e contorno

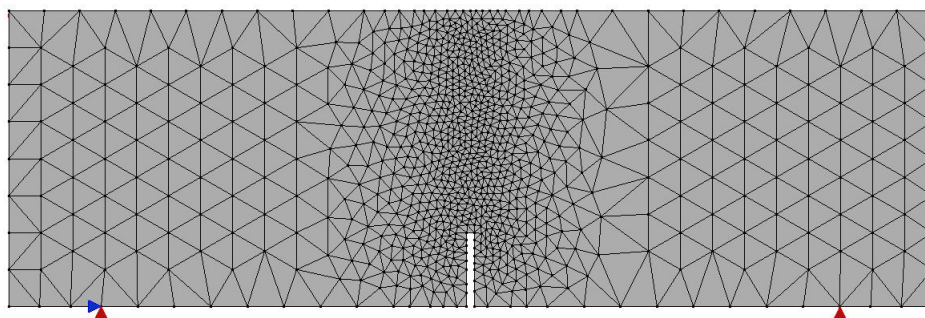


**Figura 4.2:** Dados do Ensaio: Proporção entre tamanhos

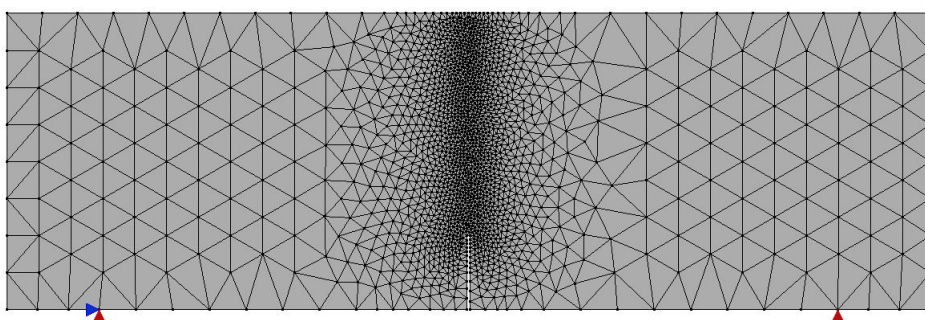
No ensaio realizado por Álvarez et al. (2012) os parâmetros geométricos adotados foram:  $d=80$  para o Tamanho 1,  $160$  para o Tamanho 2 e  $320$  para o Tamanho 3. Adotou-se a relação  $d/a=4$  para todos os tamanhos, assim como a espessura da viga ( $t=50\text{mm}$ ) e a carga aplicada ( $P=1\text{kN}$ ).

Na modelagem realizada, a trinca foi modelada como uma descontinuidade da malha com abertura de  $2\text{mm}$ , conforme Figuras 4.3, 4.4 e 4.5. Esta abertura não foi

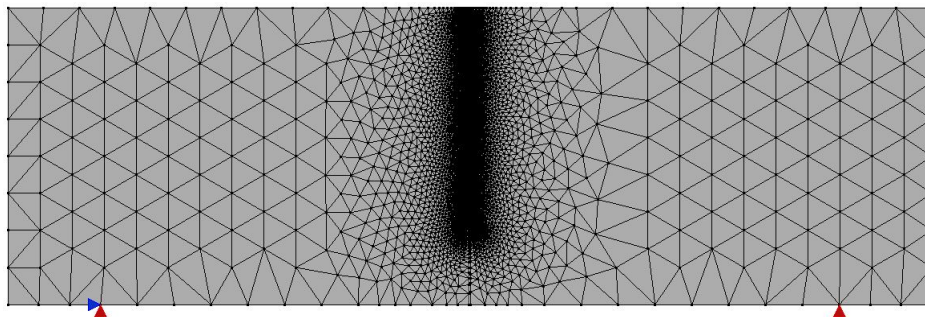
apresentada por Álvarez et al. (2012), e por isso, adotou-se um valor aproximado de uma serra para corte de concreto. Além disso, foram utilizadas malhas com elementos triangulares dispostos aleatoriamente ao longo da estrutura, com um refinamento acentuado na região da trinca. Para cada um dos tamanhos, adotaram-se os mesmos parâmetros de malha, ou seja, as dimensões de cada um dos elementos serão iguais, na região da trinca. Evitou-se ainda, modelar a trinca como uma descontinuidade triangular, para evitar a formação de uma região de localização de tensões, adotando-se, com isso, o formato retangular. As Figuras 4.3, 4.4 e 4.5 apresentam as malhas utilizadas para o problema.



**Figura 4.3:** Malha para Tamanho 1



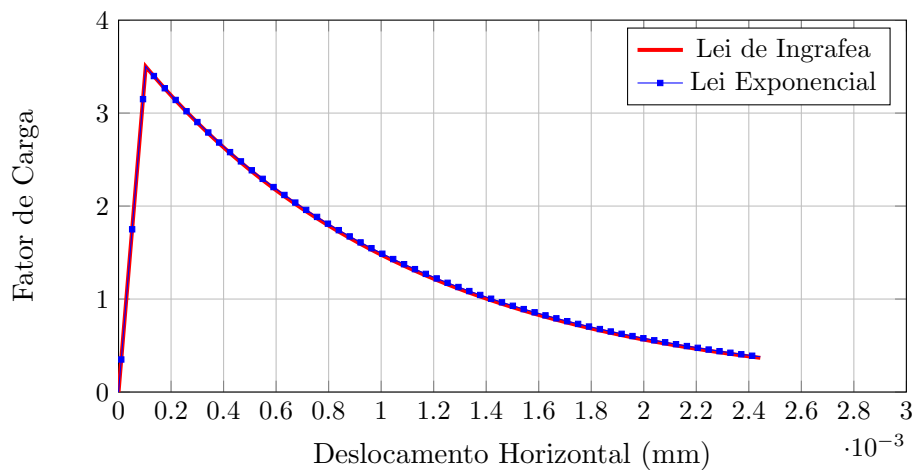
**Figura 4.4:** Malha para Tamanho 2



**Figura 4.5:** Malha para Tamanho 3

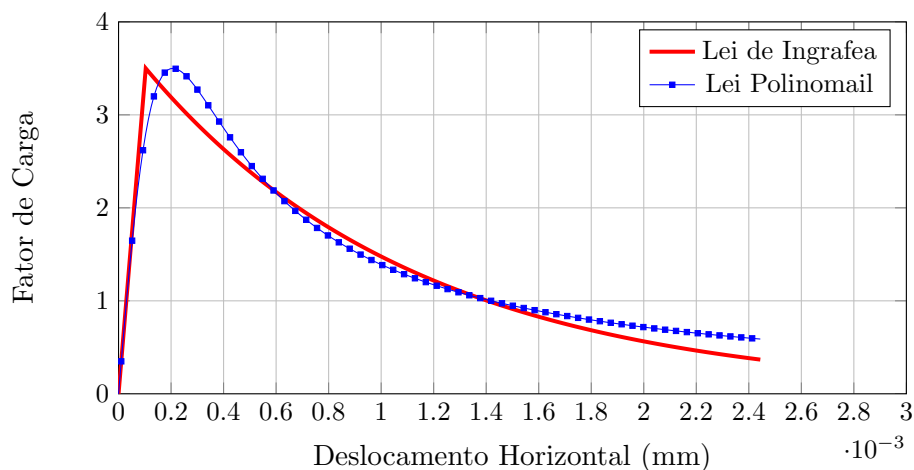
As propriedades do concreto, por sua vez, foram:  $f_t=3,5\text{MPa}$ ,  $E_c=33800\text{MPa}$ ,  $e_t=0,0001036$ ,  $G_f=80\text{N/m}$ ,  $h=0,022\text{m}$  e  $g_f=0,00364\text{MPa}$ . O modelo de dano ortotrópico, para a análise de problemas não lineares, necessita de uma lei de evolução de dano específica, para o cálculo das trajetórias de equilíbrio do problema. Na Seção 3, deste presente trabalho, foram apresentadas três leis de evolução de dano (Equações 2.27, 2.28 e 2.29), cada uma, com seus parâmetros específicos. Nesta modelagem, serão utilizadas estas três leis de dano para a solução do problema proposto por Álvarez et al. (2012), podendo-se assim, comparar a eficiência de cada uma delas, frente aos resultados experimentais. Entretanto, para a utilização de cada uma das três leis de dano, é necessário que se definam os parâmetros de cada lei. Esta definição será realizada, tendo-se como curva de referência aquela definida pela lei proposta por Boone e Ingraffea (1987) (Equação 2.2).

Para a lei exponencial, foi realizada a parametrização apresentada na Figura 4.6



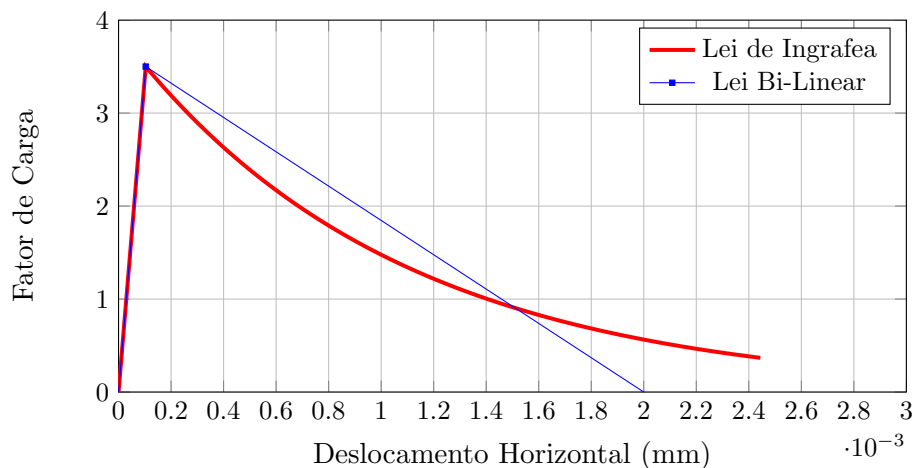
**Figura 4.6:** Parametrização para Lei exponencial

Para a lei polinomial, foi realizada a parametrização apresentada na Figura 4.7



**Figura 4.7:** Parametrização para Lei Polinomial

Finalmente, para a lei bi-linear, foi realizada a parametrização apresentada na Figura 4.8. Nesta parametrização, ressalta-se que a área sob ambas as curvas são equivalentes.



**Figura 4.8:** Parametrização para Lei Bi-Linear

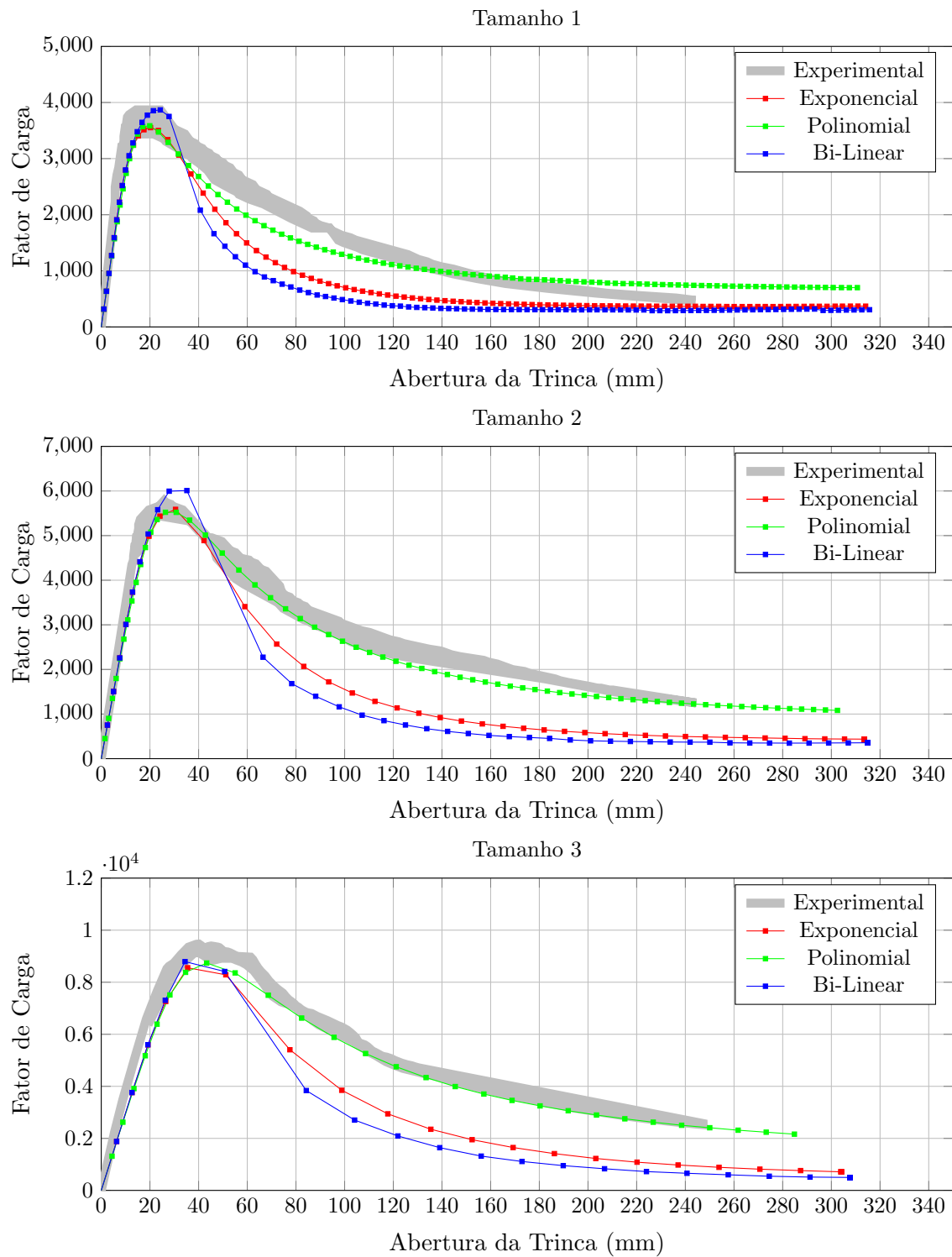
Os parâmetros obtidos a partir de todas as parametrizações foram:  $\alpha=0,99$ ,  $\beta=950$  e  $\kappa=0,00010355$ , para a lei exponencial,  $k=2$  e  $\epsilon_t=0,0002071$ , para a lei polinomial e  $k_0=0,00010355$  e  $k_f=0,002$ , para a lei bi-linear.

As trajetórias de equilíbrio foram obtidas com o método de controle de deslocamentos, com um incremento do fator de deslocamento vertical de  $0,001\text{mm}$ , no ponto de aplicação da carga, e tolerância para convergência de  $0,0001$ . As Figuras 4.9 e 4.10 apresentam as trajetórias de equilíbrio para cada uma das três malhas e três funções de carregamento, comparando-as com os resultados experimentais de Álvarez et al. (2012). A Figura 4.9 agrupa os resultados por tamanho da estrutura, enquanto a Figura 4.10 agrupa os resultados por função de evolução do dano.

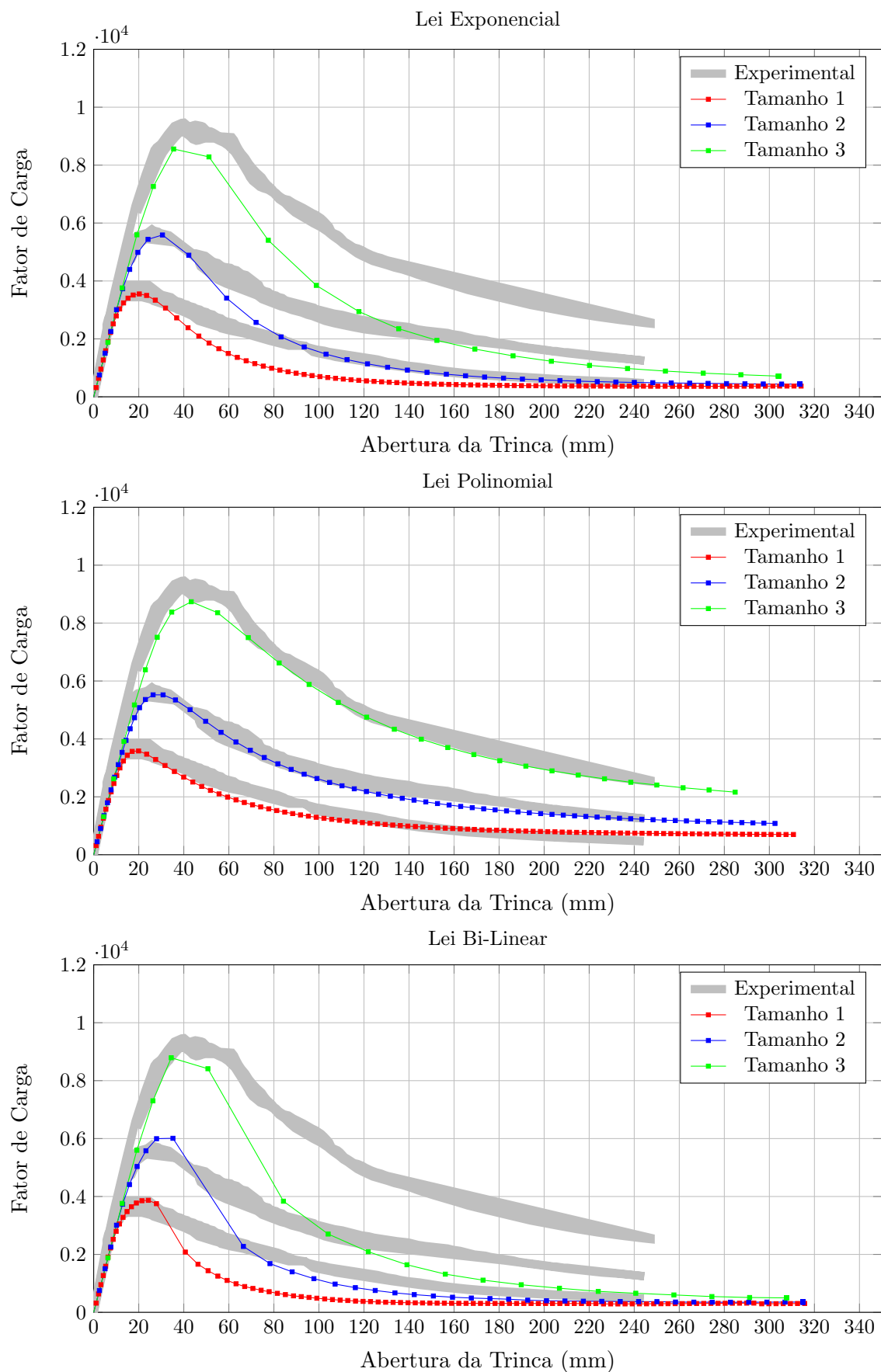
Os parâmetros não locais foram adotados como:  $L=30\text{mm}$  e  $k=8,0$ . Sabe-se que, em um problema de flexão em três pontos, com a viga apresentando trinca, tem-se uma região de concentração de tensão e deformação nos arredores desta, sendo esta região aquela com maior instabilidade numérica e propensa à localização de deformações numericamente induzidas. Com isso, para que se possam obter resultados representativos nesta análise, é fundamental que os pontos presentes nesta região tenham seus valores dependentes de pontos mais afastados, e por isso, adotou-se um raio no valor de  $30\text{mm}$ . Por outro lado, mesmo considerando pontos mais



afastados, a constante da função de carregamento ( $k$ ) limitará a influência de nós mais afastados, uma vez que adotou-se um valor relativamente elevado, 8,0.



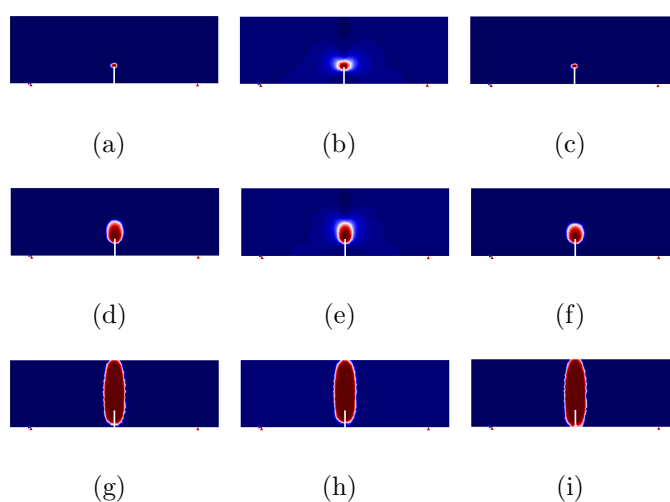
**Figura 4.9:** Trajetórias de Equilíbrio para Modelos Não Locais-Variação do Tamanho da Estrutura



**Figura 4.10:** Trajetórias de Equilíbrio para Modelos Não Locais-Varição da Função de Evolução do Dano

A partir dos resultados apresentados, nota-se que, para todos os tamanhos considerados, a lei de carregamento polinomial apresentou os melhores resultados, comparados aos resultados experimentais. Para esta lei, pode-se observar que o ramo de descarregamento, na trajetória de equilíbrio, apresenta seu comportamento muito mais suave, característica também apresentada pelos resultados experimentais. Pode-se concluir ainda que a função de evolução de dano adotada possui bastante influência no formato geral da trajetória de equilíbrio, principalmente no seu comportamento no ramo descendente.

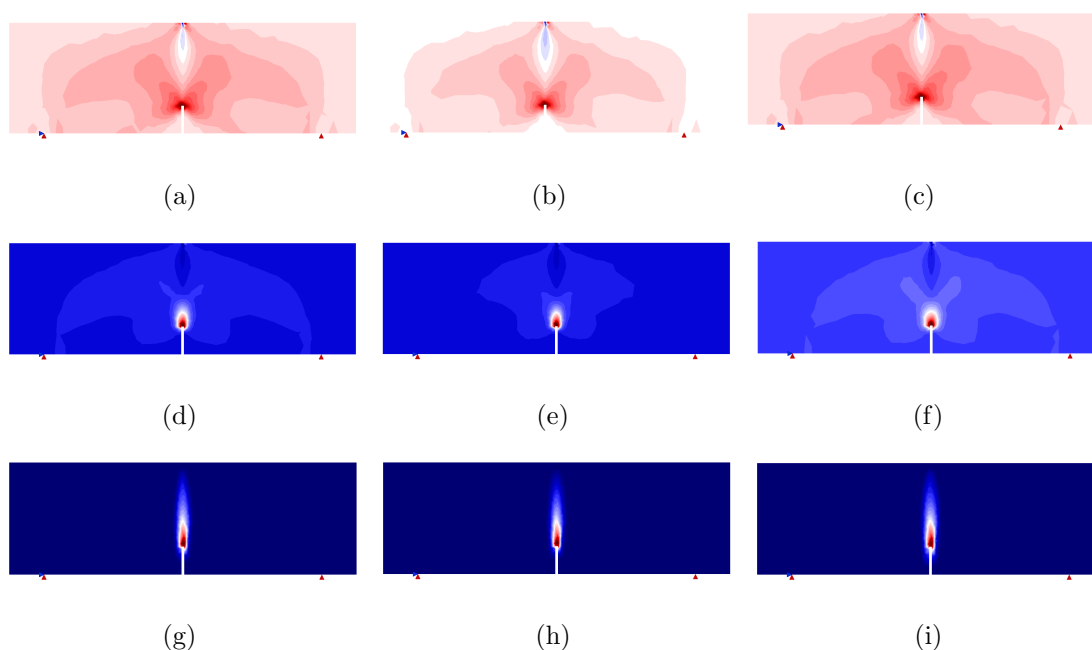
A mesma análise comparativa será realizada para as isofaixas de dano e da deformação principal de tração. Nesta análise, serão apresentados apenas os valores referentes à malha 1. Para uma melhor análise comparativa das isofaixas de cada uma das funções de evolução de dano, a Figura 4.11 coloca lado a lado cada uma das funções. Portanto, na Figura 4.11(a), (b) e (c) é apresentado o mesmo passo da análise, para as funções exponencial, polinomial e bi linear, respectivamente. Da mesma forma é realizado para os demais passos. Não é apresentado a escala de valores para estas isofaixas, neste momento. Porém, estes valores estão apresentados no Apêndice A.



**Figura 4.11:** Evolução do dano para modelo não local e as três funções de dano: Exponencial (a), (d) e (g); Polinomial (b), (e) e (h) e Bi-Linear (c), (f) e (i), passos 5, 10 e 198

Realiza-se esta mesma análise de isofaixas comparativa das funções de evolução de dano, porém, agora, na evolução da deformação principal de tração.

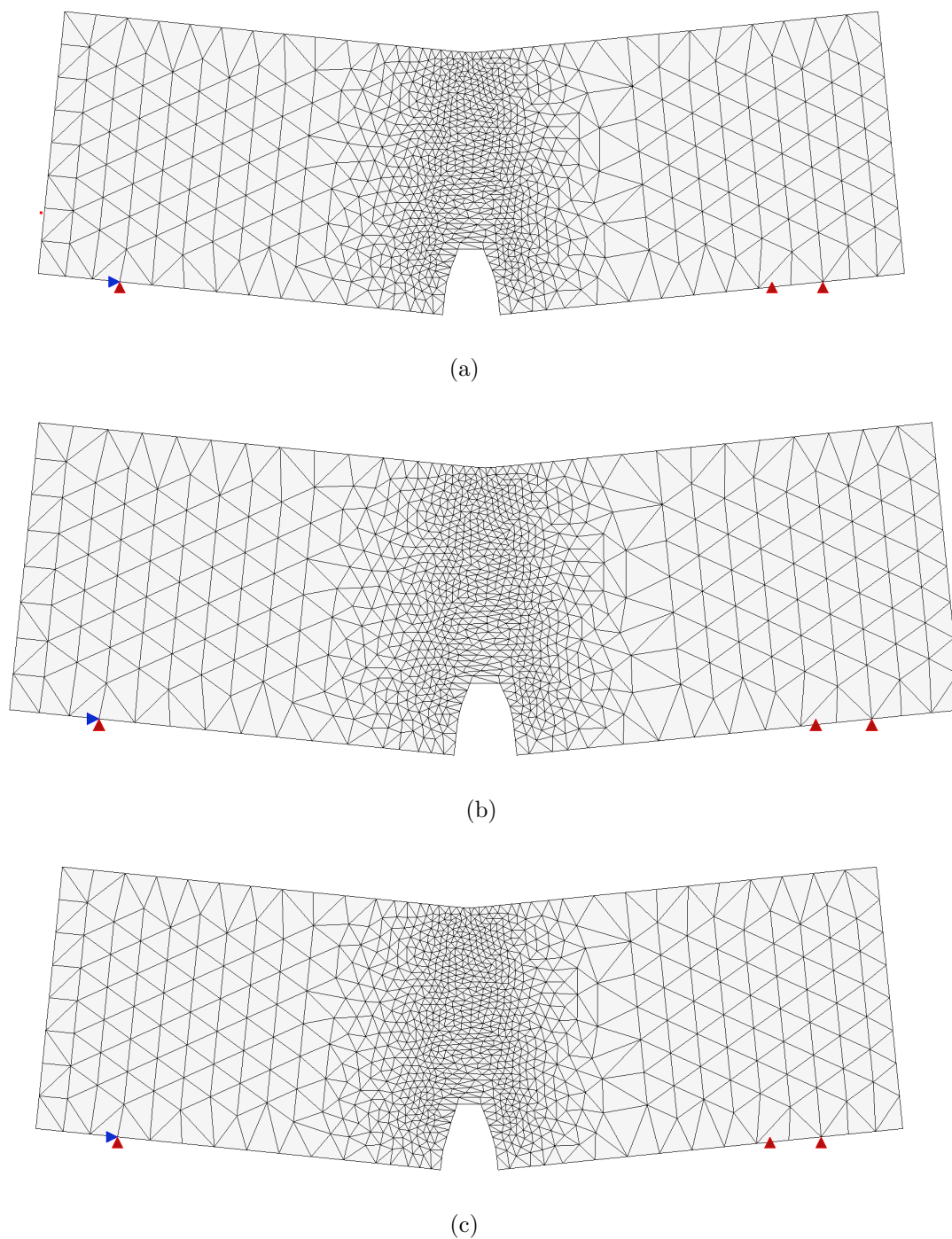
Da mesma forma como realizado com as isofaixas de dano, apresenta-se a Figura 4.12, com as três funções lado a lado, para cada passo. Novamente, não é apresentado a escala de valores para estas isofaixas, neste momento. Porém, estes valores estão apresentados no Apêndice A.



**Figura 4.12:** Isofaixas da deformação principal de tração para modelo não local e as três funções de carregamento: Exponencial (a), (d) e (g); Polinomial (b), (e) e (h) e Bi-Linear (c), (f) e (i), passos 5, 10 e 198

Avaliando todos os gráficos apresentados, pode-se dizer que a função de evolução de dano polinomial (que apresentou os melhores valores na trajetória de equilíbrio, comparando-se aos valores experimentais) apresentou uma evolução mais intensa nos valores do dano, comparada às demais funções, e uma menor região degradada, no final do carregamento. As três funções apresentaram-se numericamente bem comportadas, sem variações bruscas de um passo para o outro.

Finalmente, compara-se o gráfico da estrutura deformada para as três funções de carregamento.

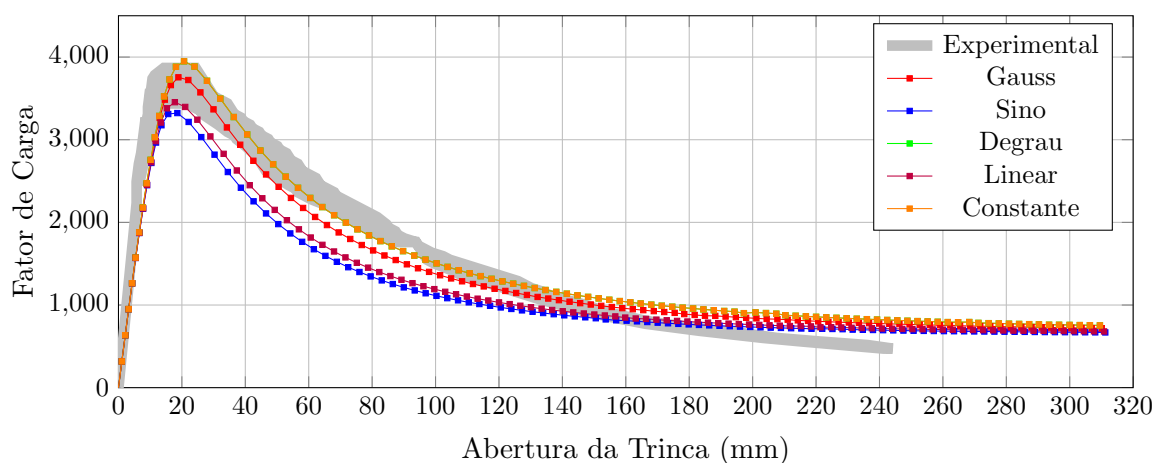


**Figura 4.13:** Estrutura deformada para modelo constitutivo não local e as três funções de carregamento: Exponencial (a), Polinomial (b) e Bi-Linear (c)

Após a realização do estudo comparativo entre funções de evolução de dano, este estudo se propõe a avaliar a influência de cada uma das funções de carregamento na solução do problema. Para se realizar esta análise comparativa, é necessário definir

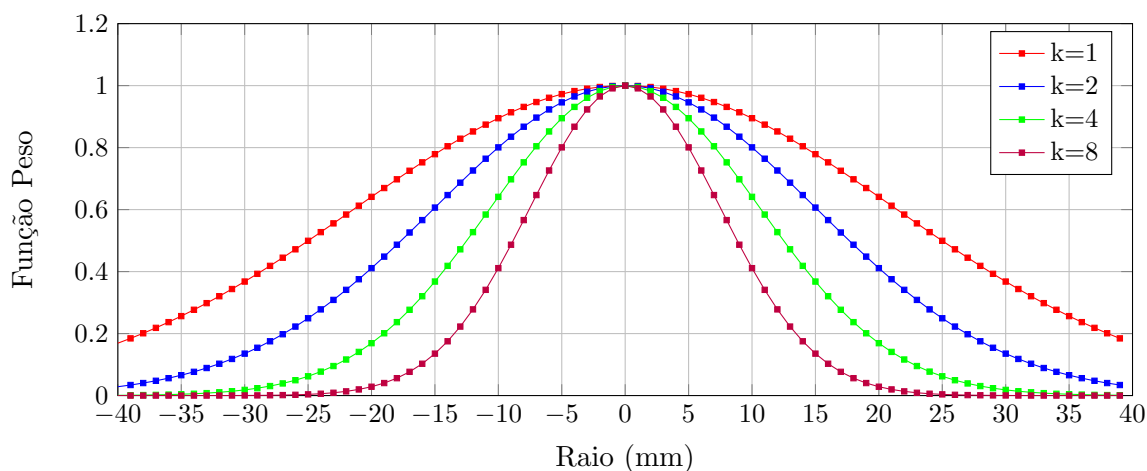
novos parâmetros não locais, diferentes daqueles já utilizados na análise precedente, pois as diferentes funções de distribuição não possuem as mesmas variáveis (raio e constante  $k$ ). As funções de distribuição do tipo “Degrau”, “Constante” e “Linear”, possuem apenas o raio como variável, enquanto as funções de “Gauss” e “Sino” utilizam o raio e a constante  $k$ . Dessa forma, para unificar a análise comparativa das funções, define-se  $k=1$  e se adéqua o raio para um novo valor padrão de:  $L=6,0\text{mm}$ .

A Figura 4.14 apresenta o comportamento de todas as funções de distribuição, comparadas aos resultados experimentais. Pode-se observar que todas as funções de distribuição conduziram o problema a uma solução próxima à solução de referência. As diferenças entre valores dos picos nas trajetórias de equilíbrio, podem ser adequados alterando o valor do raio da distribuição. Entretanto, com relação ao formato geral das trajetórias, pode-se dizer que a função de distribuição não altera, de maneira significativa o formato das mesmas, como ocorre com as funções de evolução de dano. Além disso, ressalta-se que o comportamento apresentado pelas funções Degrau e Constante são exatamente iguais. Isso ocorre porque a variável  $k$ , para a função Degrau, é unitária, o que significa que há apenas 1 “degrau” na função, tornando-a equivalente a uma função Constante.



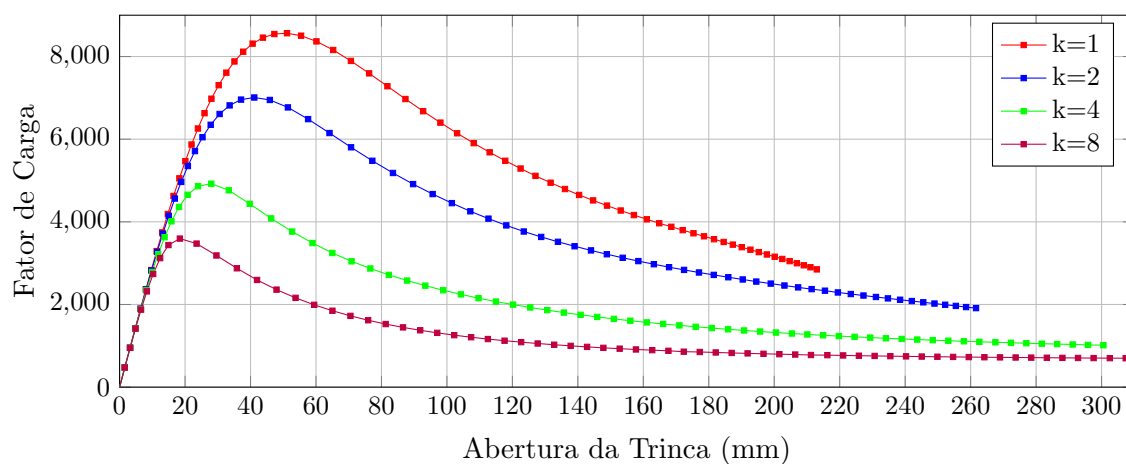
**Figura 4.14:** Influência das Funções de Distribuição nas Trajetórias de Equilíbrio para Modelos Não Locais

Avaliado a forma e o comportamento de cada uma das funções de distribuição, comparado aos resultados experimentais, neste momento, pretende-se avaliar a influência do parâmetro  $k$  para as funções de carregamento que fazem uso desta variável em sua lei. Assim, pretende-se apenas apresentar a influência na variação deste parâmetro, ou seja, não será realizado a comparação aos valores experimentais. O raio será o mesmo em todas as análises ( $L=30\text{mm}$ ), e a variável  $k$  será variada de 1 a 8. A Figura 4.15 apresenta a influência do parâmetro  $k$  para as funções de distribuição, sendo que, os valores utilizados para o modelo não local são unicamente aqueles situados no domínio da distribuição ( $L=-30\text{mm}$  a  $L=30\text{mm}$ ).

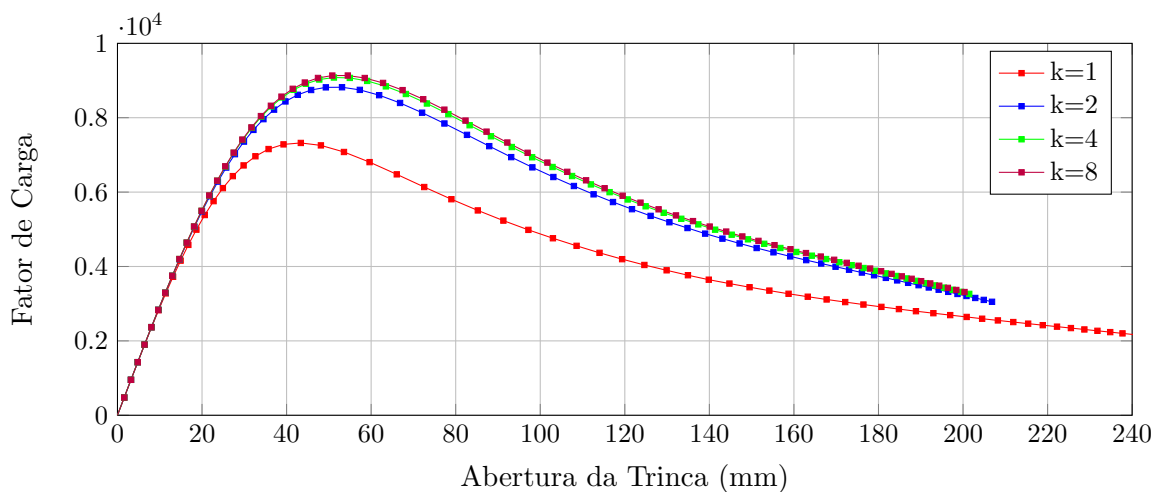


**Figura 4.15:** Influência do parâmetro  $k$  para a função de distribuição

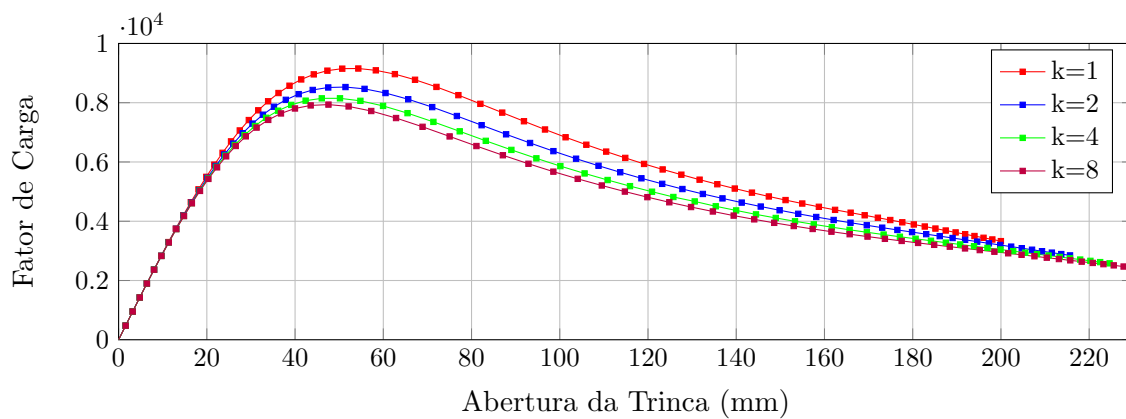
As Figura 4.16, 4.17 e 4.18 apresentam os resultados para as funções de distribuição de Gauss, Sino e Degrau, respectivamente.



**Figura 4.16:** Influência do parâmetro  $k$  para a função de distribuição de Gauss



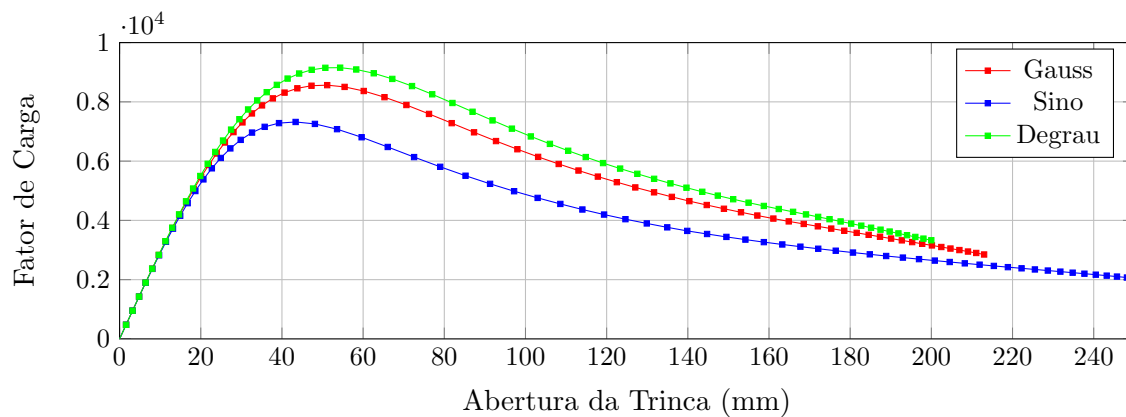
**Figura 4.17:** Influência do parâmetro  $k$  para a função de distribuição Sino



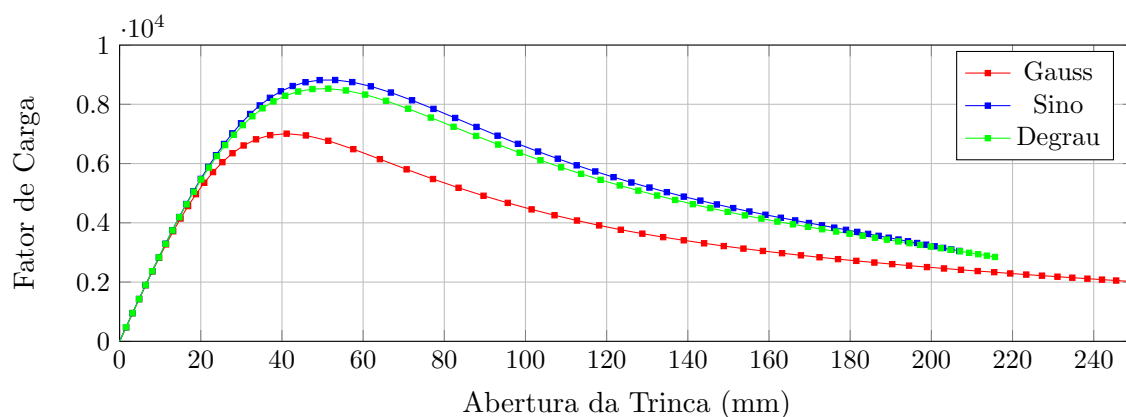
**Figura 4.18:** Influência do parâmetro  $k$  para a função de distribuição Degrau



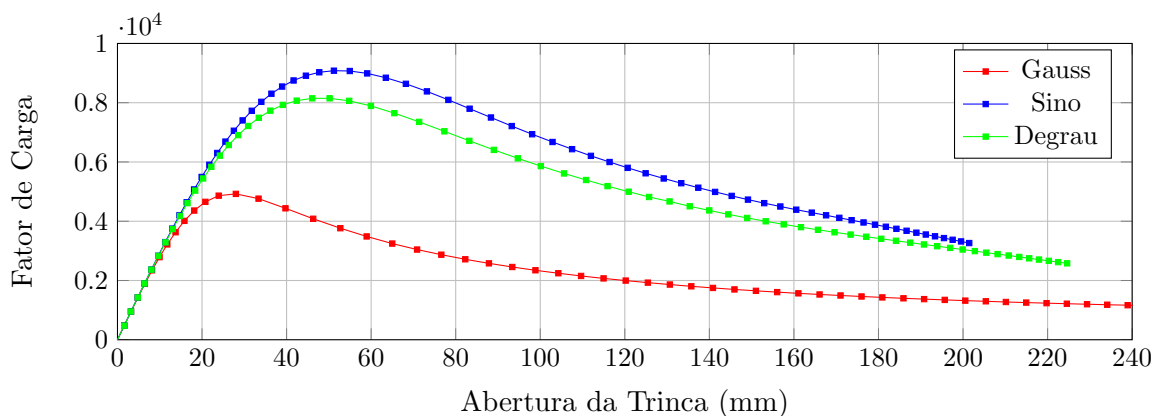
As Figuras 4.19, 4.20, 4.21 e 4.22 apresentam os mesmos resultados, porém agrupados por valor da constante “k”, comparando cada uma das funções de distribuição.



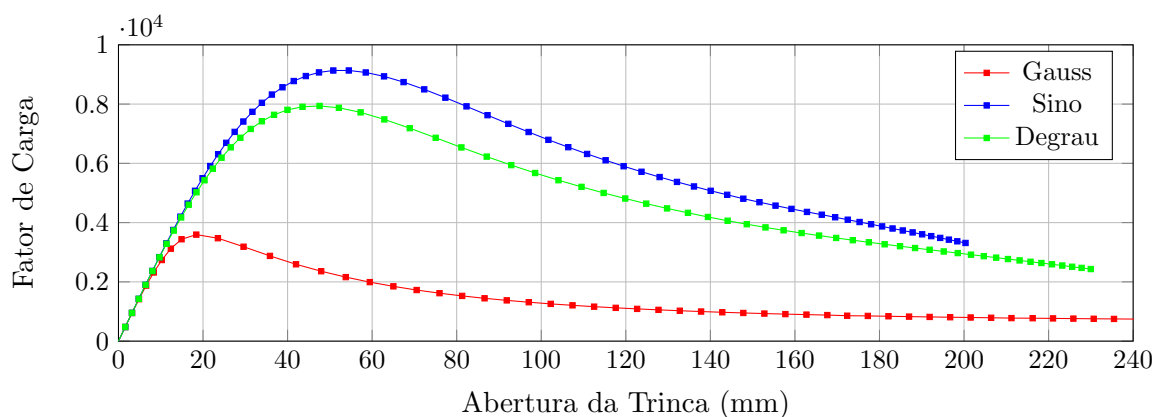
**Figura 4.19:** Influência da função de distribuição para k=1



**Figura 4.20:** Influência da função de distribuição para k=2

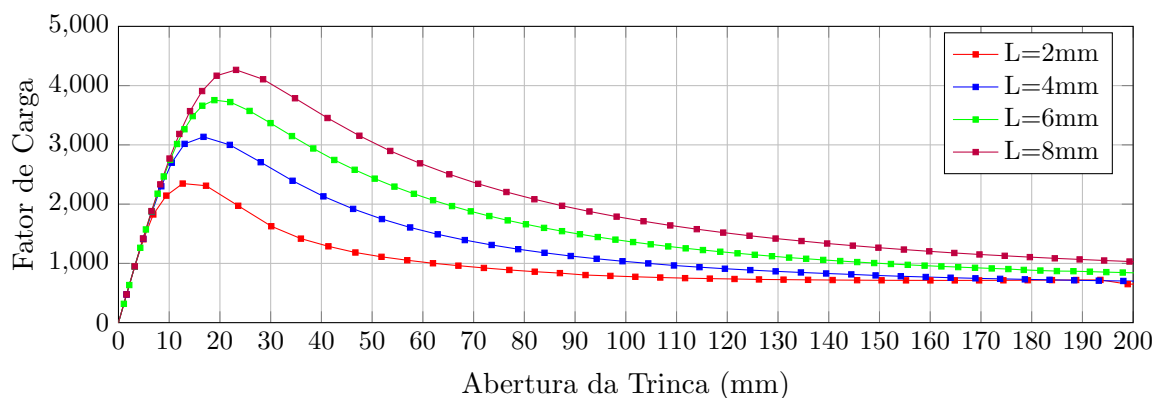


**Figura 4.21:** Influência da função de distribuição para k=4

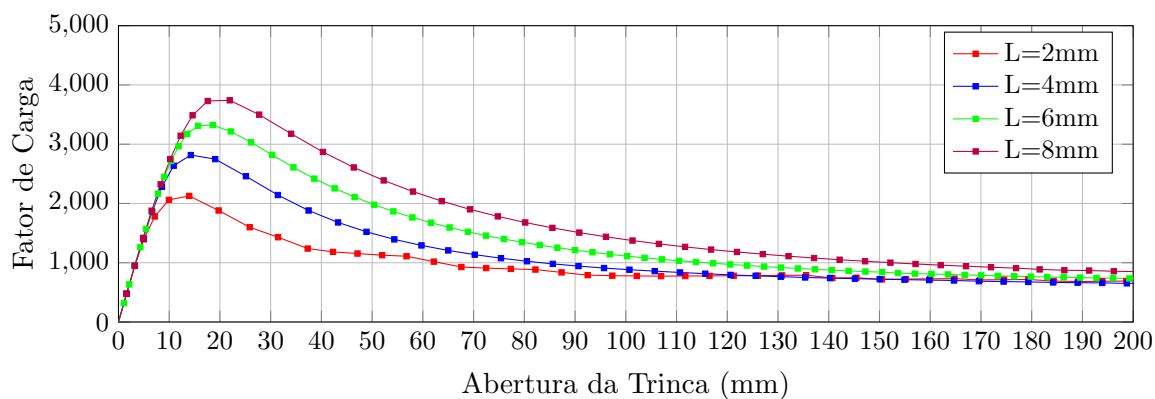


**Figura 4.22:** Influência da função de distribuição para  $k=8$

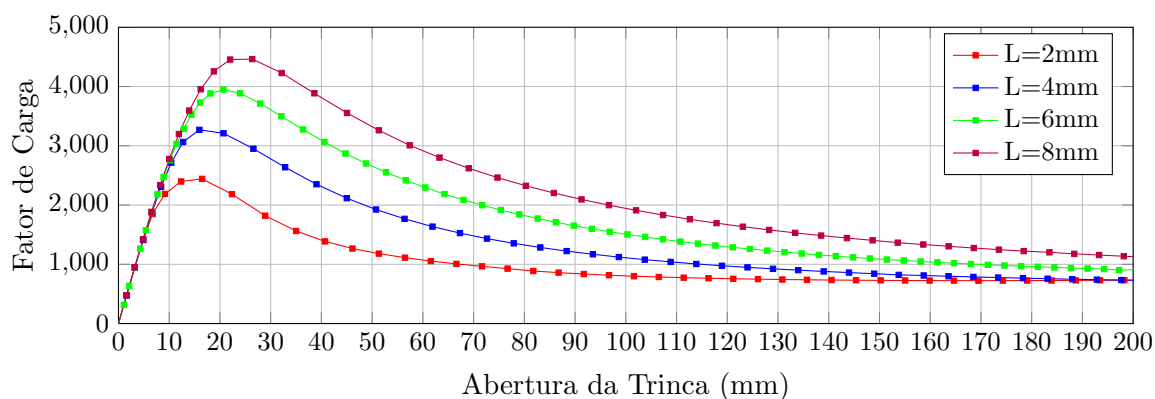
Realizado o estudo da influência do parâmetro  $k$ , apresenta-se a mesma análise, porém, da influência do parâmetro  $L$  em cada uma das funções de distribuição. Com isso, fixa-se o valor do parâmetro  $k$  e varia-se o valor de  $L$  para cada uma das funções de distribuição, para que se possa avaliar como a variação desta grandeza é capaz de alterar os resultados de cada uma das distribuições. As Figura 4.23, 4.24, 4.25 e 4.26 apresentam os resultados para as funções de distribuição de Gauss, Sino, Degrau e Linear, respectivamente. Ressalta-se que não será avaliada a função Constante pois, como o parâmetro  $k$  foi fixado com valor unitário, esta função terá comportamento análogo à função Degrau.



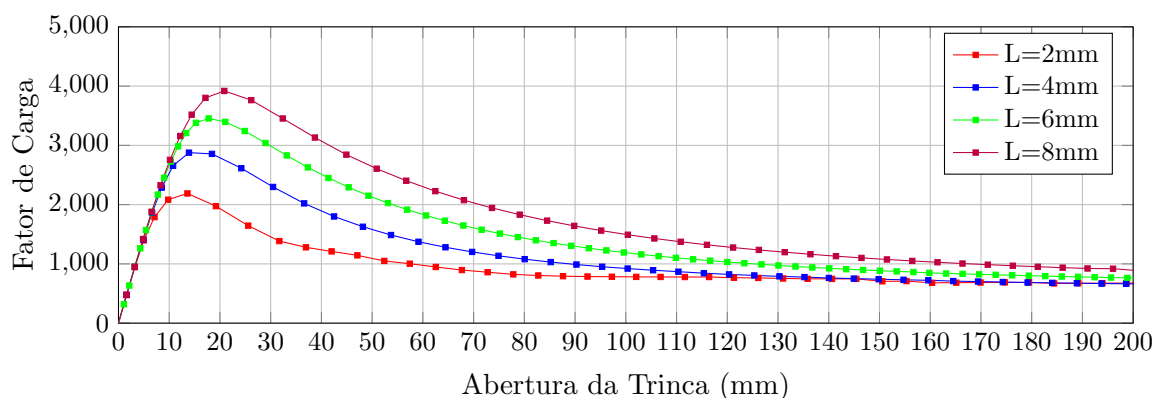
**Figura 4.23:** Influência do parâmetro  $k$  para a função de distribuição Gauss



**Figura 4.24:** Influência do parâmetro k para a função de distribuição Sino



**Figura 4.25:** Influência do parâmetro k para a função de distribuição Degrau



**Figura 4.26:** Influência do parâmetro k para a função de distribuição Linear

# Capítulo 5

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho se focou na solução de problemas de análise fisicamente não linear de estruturas de concreto, via método dos elementos finitos. Sabe-se que o método dos elementos finitos é uma das principais e mais importantes ferramentas de auxílio ao engenheiro de estruturas na solução de problemas de análise estrutural. Entretanto, ficou demonstrado neste trabalho que, no que tange à solução de problemas fisicamente não lineares, este método possui limitações que podem prejudicar a análise, fornecendo resultados não representativos. Dentre as principais limitações do método, este trabalho se concentrou no fenômeno de localização de deformações numericamente induzidas, fenômeno semelhante ao fenômeno real, mas que possui origens unicamente numéricas.

Tendo em vista as limitações do método, o engenheiro de estruturas deve sempre buscar alternativas de regularização da solução, para obter resultados aceitáveis em sua análise numérica. É neste contexto que este trabalho se propôs a estudar modelos não locais, que constituem uma alternativa à modelos convencionais (modelos locais) para a solução de problemas fisicamente não lineares.

### 5.1 Considerações sobre as Simulações Numéricas

As simulações realizadas no Capítulo 3 permitiram a realização de uma análise do comportamento de um modelo não local, na regularização de resultados de análises fisicamente não lineares em comparação com modelos locais.

Nas simulações tratadas nas Seções 3.1, 3.2 e 3.3 pôde-se observar a diferença na qualidade do resultado entre os modelos locais e não locais, sendo que, o modelo não local levou a estrutura a resultados representativos, atenuando o fenômeno de localização de deformações numericamente induzidas.

A simulação tratada na Seção 3.1 mostrou ainda como a definição dos parâmetros não locais altera de maneira significativa os resultados da análise, sendo que, diferentes parâmetros não locais podem representar situações diferentes e, muitas vezes, indesejadas. Por isso, é preciso que haja sempre um controle destas variáveis até que o resultado do problema seja representado de maneira satisfatória.

Com relação à simulação tratada na Seção 3.3, simulação que se propunha a avaliar um caso de convergência para uma solução, ressalta-se que, mesmo os dois modelos (locais e não locais) apresentando convergência para uma solução, os modelos locais convergiram para uma solução inadequada. Isso mostra que, durante a análise numérica de problemas fisicamente não lineares, deve-se sempre estar atento a qualquer indício que possam evidenciar a presença do fenômeno de localização de deformações numericamente induzidas.

Finalmente, na simulação tratada no Capítulo 4, por se tratar de um ensaio que compara resultados numéricos via análise não local com resultados experimentais, este se mostrou extremamente importante na validação da acurácia dos resultados obtidos. Os resultados obtidos, de uma maneira geral, se mostraram satisfatórios e próximos aos resultados experimentais, corroborando os resultados dos ensaios anteriores e indicando que os modelos não locais constituem um importante recurso na regularização de resultados em análises fisicamente não lineares. Com relação aos resultados obtidos por meio da variação das funções de evolução de dano, pode-se dizer que cada uma delas possui uma influência considerável no formato das trajetórias de equilíbrio, sendo a função polinomial aquela que mais se aproximou ao formato da curva obtida via análise experimental. Por outro lado, a variação das funções de distribuição trouxe pouca variação no formato das curvas de cada

trajetória de equilíbrio. Entretanto, os valores dos picos das curvas tiveram variação elevada, mantendo os mesmos parâmetros, o que mostra que é necessário um cuidado na calibração de cada variável para cada uma das funções.

## 5.2 Contribuições deste Trabalho

O software INSANE possui diversos modelos constitutivos já implementados, e destes, vários deles já estão preparados para serem utilizados com um enfoque não local. Com isso, este trabalho se focou no modelo constitutivo de dano ortotrópico, proposto por de Borst e Gutiérrez (1999) e implementado por Penna (2011), utilizando-o para a realização de um estudo da formulação não local.

O estudo da formulação se propôs a avaliar quatro aspectos:

1. A resposta da formulação não local em comparação à formulação local, avaliando-se a eficácia do primeiro para a solução de problemas de localização de deformações numericamente induzidas: sobre este item, pode-se dizer que, em todas as análises comparativas, os modelos não locais se mostraram adequados na regularização de resultados obtidos por meio da formulação convencional.
2. A influência das variáveis não locais (raio da distribuição e a constante  $k$ ) na resposta das análises: a influência do raio é fundamental na obtenção de um resultado satisfatório. Para a definição desta variável é necessário que se tenha uma noção da dimensão de cada elemento da malha, para garantir que os pontos de uma zona crítica da estrutura sofram influência de pontos de elementos vizinhos. A constante  $k$  é importante, principalmente, quando têm-se domínios relativamente grandes e necessita-se diferenciar a influência de pontos distantes à de pontos próximos ao ponto de análise. A utilização de raios de tamanho menor ou um pouco superior ao tamanho dos elementos da malha, faz com que a análise não local se mostre ineficiente, deixando-a semelhante à uma análise local.

3. A influência das funções de evolução de dano: foram avaliadas três funções de carregamento (exponencial, polinomial e bi-linear) e a resposta de cada uma delas se mostrou bem diferente, no que se refere ao formato das trajetórias de equilíbrio. Entretanto, todas as funções se mostraram eficientes na regularização de resultados via análise local, fornecendo trajetórias de equilíbrio livres da presença do fenômeno de localização de deformações numericamente induzidas.
4. A influência das funções de distribuição: foram avaliadas cinco funções de distribuição já implementadas e todas elas se mostraram eficientes e capazes de regularizar a resposta da análise frente aos problemas de localização de deformações numericamente induzidas. Entretanto, as variáveis não locais possuem um influência diferente em cada uma delas, de modo que, estas variáveis devem ser tratadas com um enfoque diferente para cada uma das funções adotadas, para que o resultado fornecido pela análise seja representativo.

### 5.3 Sugestão para Trabalhos Futuros

Realizado o estudo detalhado acerca da formulação não local, sugerem-se alguns temas que poderiam dar continuidade a este estudo e aprimorar a modelagem do software.

1. Aprimoramento da interface gráfica do software Insane possibilitando que o usuário possa optar por modelos não locais. Atualmente, para a realização da análise não local, é necessário que se realize, primeiramente, uma análise local e, editando o arquivo de entrada gerado desta análise, alterar os modelos constitutivos e incluir as variáveis não locais.
2. Unificar a implementação do software de modo que a formulação não local seja uma hipótese independente do modelo constitutivo. Atualmente, a implementação da formulação não local foi realizada criando-se novas classes. Por

exemplo, o modelo ortotrópico utilizado neste trabalho, possui uma classe local e outra não local, de forma que o usuário deve optar por qual delas utilizar. Com isso, sugere-se que a formulação não local possa ser acionada por qualquer uma das classes de modelos constitutivos existentes, sem a necessidade de que novas classes sejam criadas.

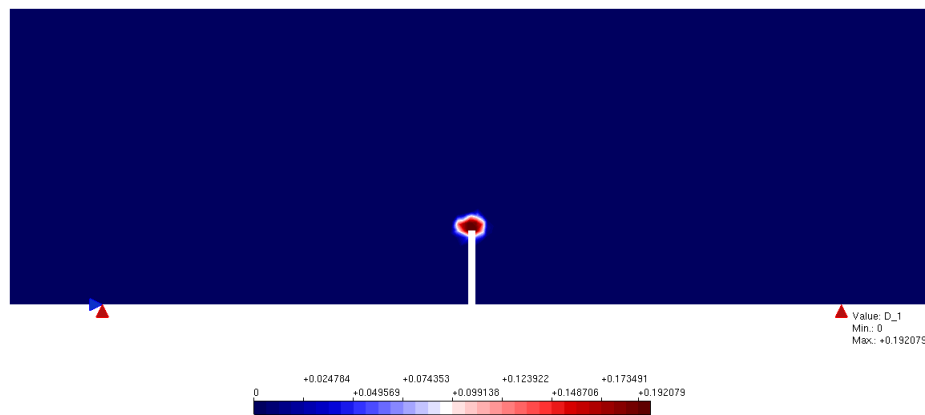


# Apêndice A

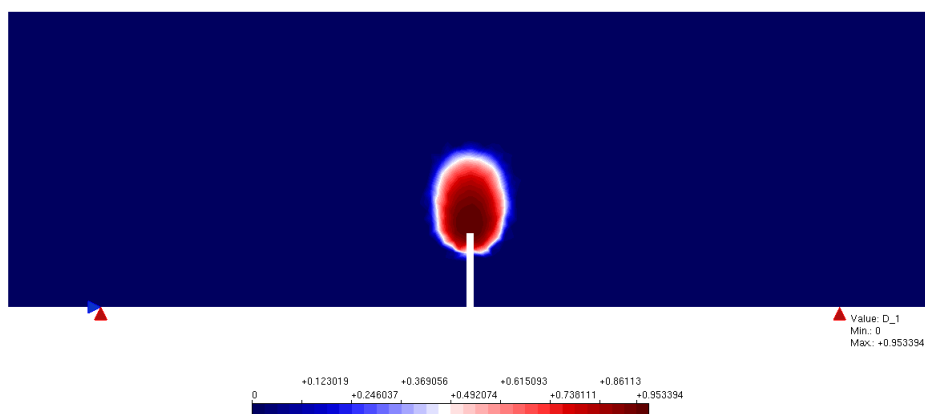
## Resultados das Isofaixas de Dano e Deformação Principal para Análise de Efeito de Tamanho

A seguir, serão apresentados maiores detalhes das figuras apresentadas no Capítulo 4.

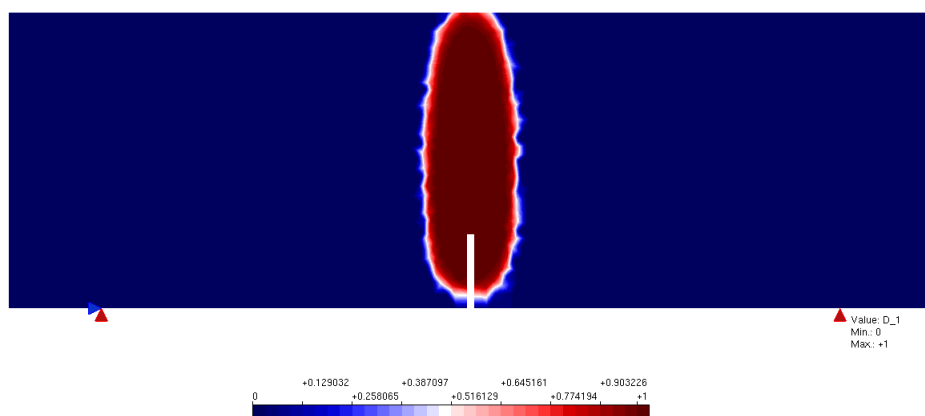
As Figuras A.1, A.2 e A.3 apresentam as isofaixas de dano para a função de evolução de dano exponencial.



**Figura A.1:** Isofaixas de dano para função de dano exponencial-passo 5

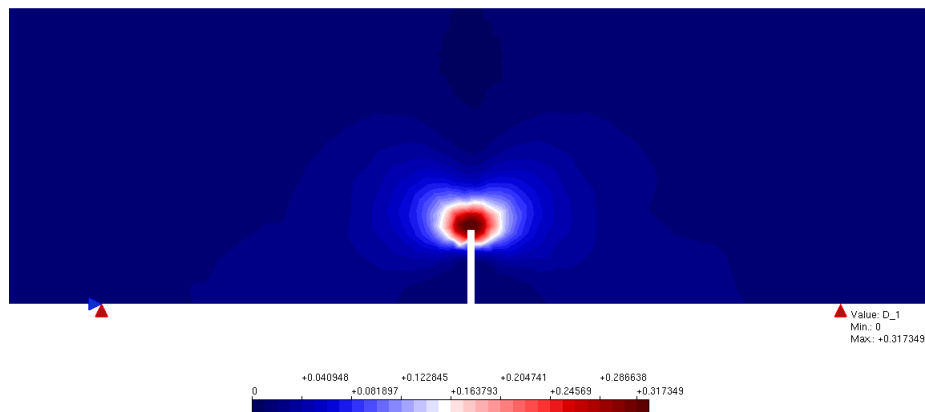


**Figura A.2:** Isofaixas de dano para função de dano exponencial-passo 15

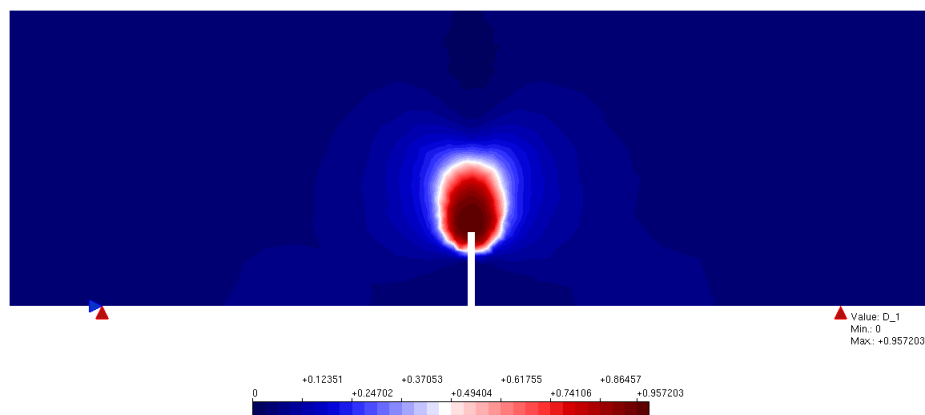


**Figura A.3:** Isofaixas de dano para função de dano exponencial-passo 198

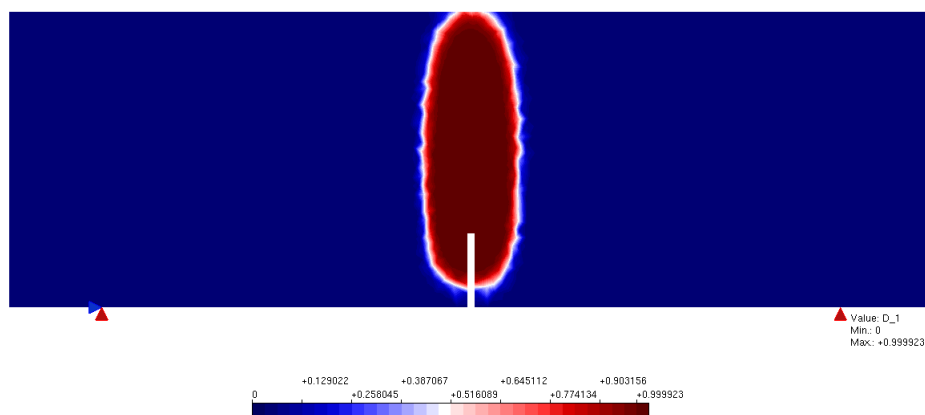
As Figuras A.4, A.5 e A.6 apresentam as isofaixas de dano para a função de evolução de dano polinomial.



**Figura A.4:** Isofaixas de dano para função de dano polinomial-passo 5

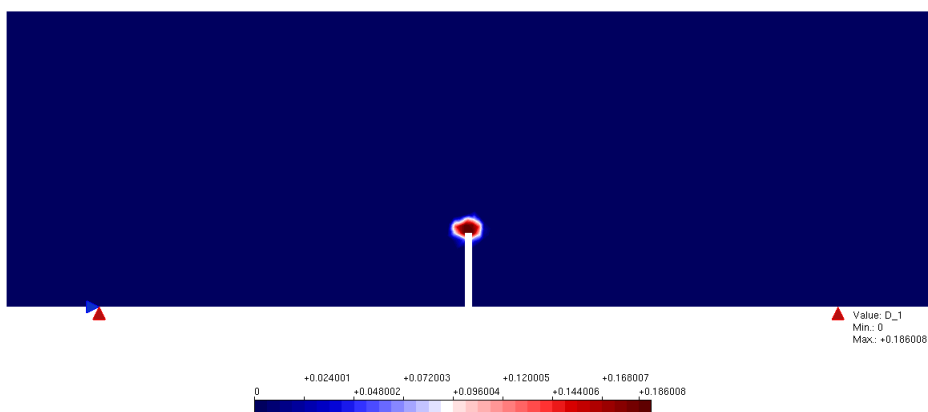


**Figura A.5:** Isofaixas de dano para função de dano polinomial-passo 15

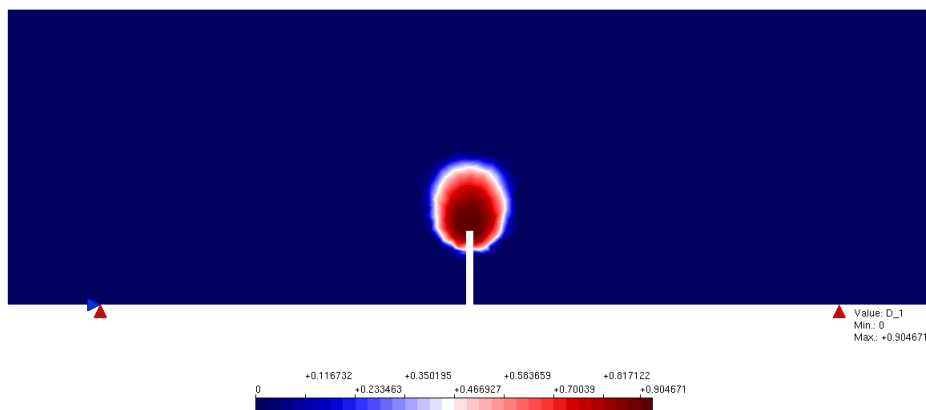


**Figura A.6:** Isofaixas de dano para função de dano polinomial-passo 198

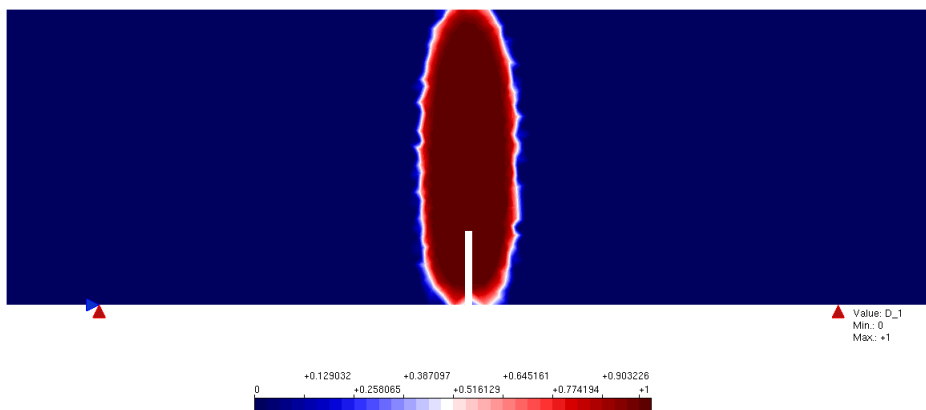
As Figuras A.7, A.8 e A.9 apresentam as isofoixas de dano para a função de evolução de dano bi linear.



**Figura A.7:** Isofaixas de dano para função de dano bi linear-passo 5



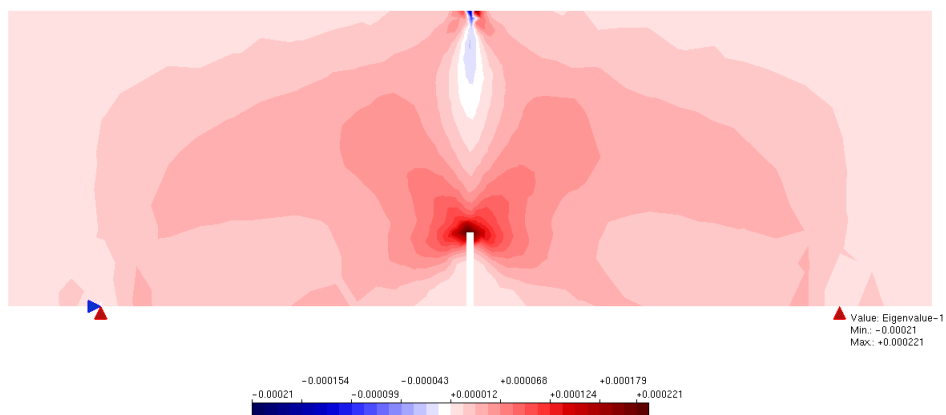
**Figura A.8:** Isofaixas de dano para função de dano bi linear-passo 15



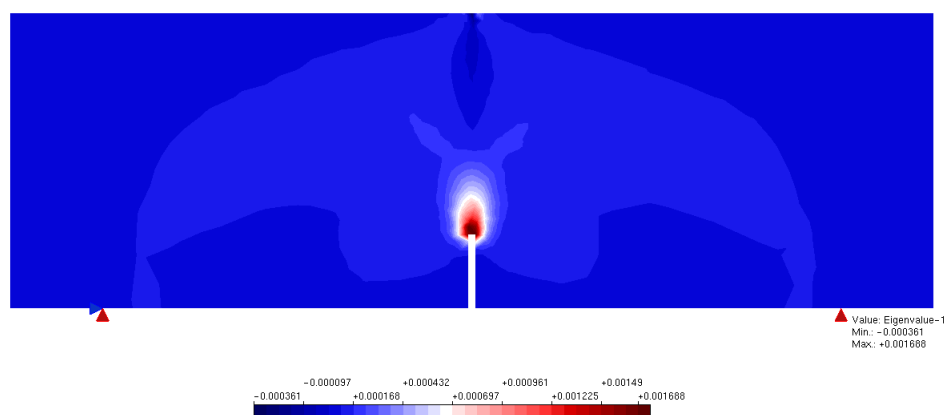
**Figura A.9:** Isofaixas de dano para função de dano bi linear-passo 198

As Figuras A.10, A.11 e A.12 apresentam as isoformas das deformação principal

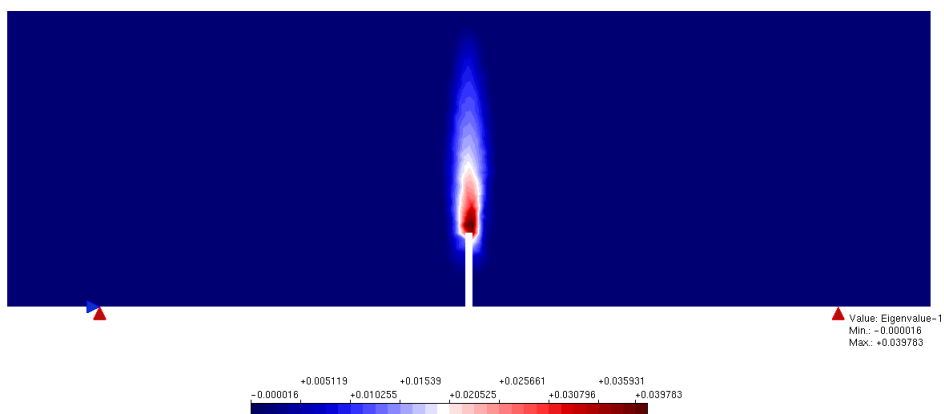
de tração para a função exponencial.



**Figura A.10:** Isofaixas da deformação principal de tração para função de dano exponencial-passo 5

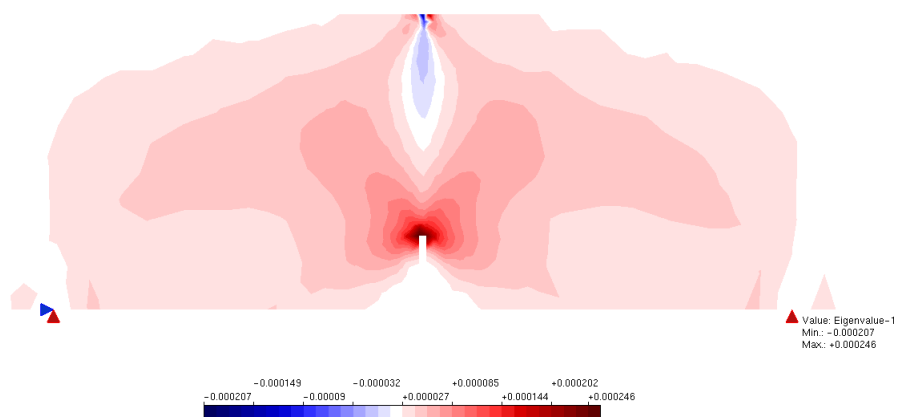


**Figura A.11:** Isofaixas da deformação principal de tração para função de dano exponencial-passo 15

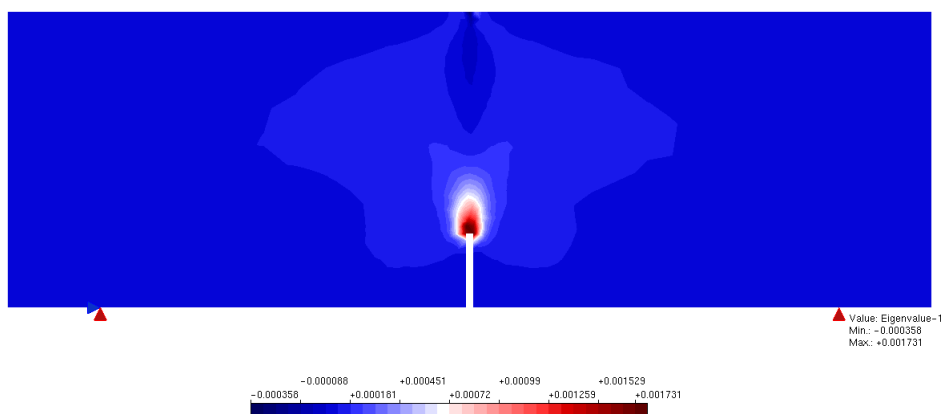


**Figura A.12:** Isofaixas da deformação principal de tração para função de dano exponencial-passo 198

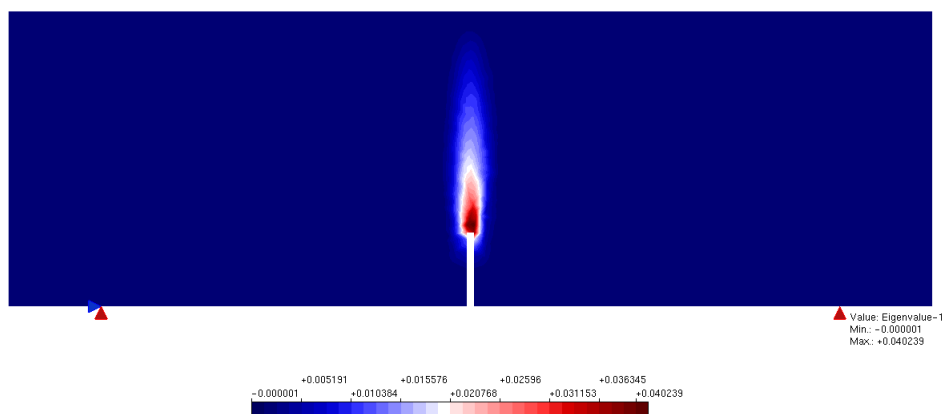
As Figuras A.13, A.14 e A.15 apresentam as isoformas da deformação principal de tração para a função de evolução de dano polinomial.



**Figura A.13:** Isofaixas da deformação principal de tração para função de dano polinomial-passo 5

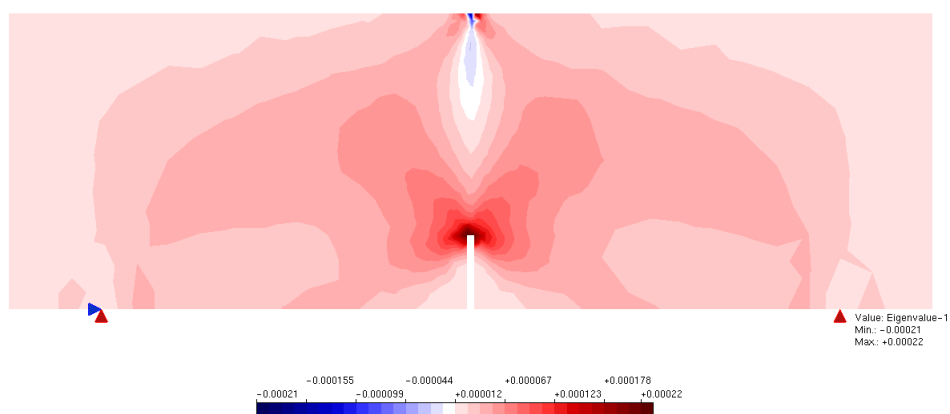


**Figura A.14:** Isofaixas da deformação principal de tração para função de dano polinomial-passo 15

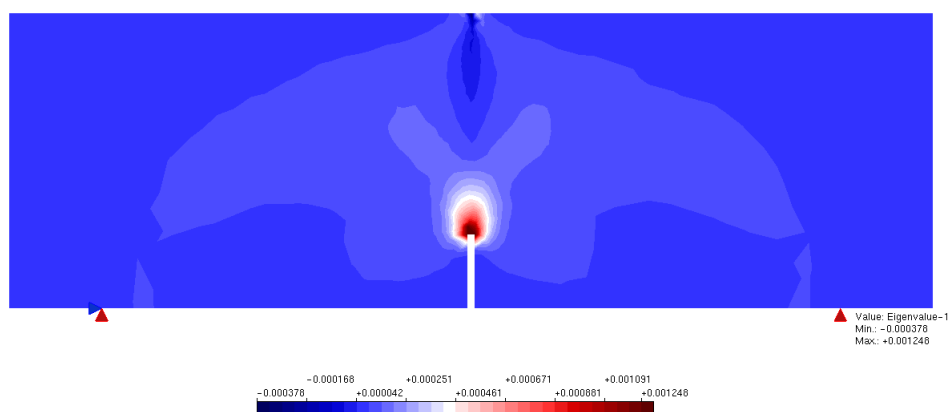


**Figura A.15:** Isofaixas da deformação principal de tração para função de dano polinomial-passo 198

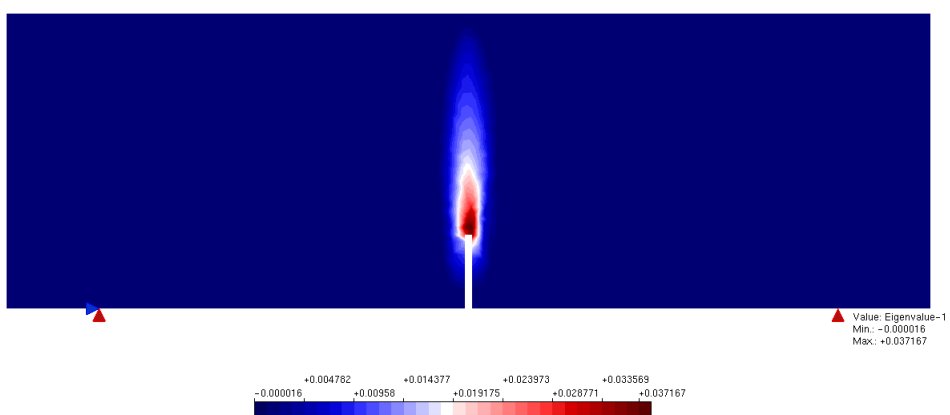
As Figuras A.16, A.17 e A.18 apresentam as isofaixas da deformação principal de tração para a função de evolução de dano bi linear.



**Figura A.16:** Isofaixas da deformação principal de tração para função de dano bi linear-passo 5



**Figura A.17:** Isofaixas da deformação principal de tração para função de dano bi linear-passo 15



**Figura A.18:** Isofaixas da deformação principal de tração para função de dano bi linear-passo 198



# Referências Bibliográficas

- Bazant, Z. P. e Cabot, G. P., 1987. ‘Modeling of distributed damage by nonlocal continuum with local strain’. *4th Intern. Conf. on Numerical Methods in Fracture Mechanics*, pp. 411–432.
- Bazant, Z. P. e Jirasek, M., 2002. ‘Nonlocal integral formulations of plasticity and damage: Survey of progress’. *American Society of Civil Engineers*, vol. 128, pp. 1119–1149.
- Bazant, Z. P. e Lin, F. B., 1988. ‘Non local smeared cracking model for concrete fracture’. *ASCE*, .
- Bazant, Z. P. e Oh, B. H., 1983. ‘Crack band for fracture of concrete’. *Matériaux et Constructions*, vol. 16, pp. 155–177.
- Bellégo, C. L., Dubé, J. F., Cabot, G. P. e Gerard, B., 2003. ‘Calibration of nonlocal damage model from size effect tests’. *European Journal of Mechanics A/Solids*, vol. 22, pp. 36–46.
- Boone, T. e Ingraffea, A. R., 1987. ‘Simulation of the fracture process at rock interfaces’. *Proceedings of the fourth international conference in Numerical Methods in fracture Mechanic*, pp. 519–531.
- Carreira, D. J. e Chu, K. H., 1985. ‘Stress-strain relationship for plain concrete in compression’. *American Concrete Institute Journal*, pp. 797–804.
- Cervenka, V., 1970. Inelastic Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Panels Under in Plane Loads. Tese de Doutorado, University of Colorado, Boulder, CO, USA.

- de Borst, R. e Gutiérrez, M. A., 1999. ‘A unified framework for concrete damage and fracture models including size effects’. *International Journal of Fracture*, vol. 95, pp. 261–277.
- de Sciarra, F. M., 2009. ‘On non-local and non-homogeneous elastic continua’. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 46, pp. 651–676.
- Filho, A. A., 2012. *Elementos Finitos-A Base da Tecnologia CAE: Análise Não Linear*. Erica, São Paulo.
- Fuina, J. S., 2004. Métodos de controle de deformações para análise não-linear de estruturas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Fuina, J. S., 2009. Formulações de Modelos Constitutivos de Microplanos para Contínuos Generalizados. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Jirasek, M., 2004. ‘Non-local damage mechanics with application to concrete’. *RFGC*, vol. 8, pp. 683–707.
- Álvarez, V. O. G., Gettu, R. e Carol, I., 2012. ‘Analysis of mixed-mode fracture in concrete using interface elements and a cohesive crack model’. *Sadhana*, vol. 37, pp. 187–205.
- Penna, S. S., 2011. Formulação Multipotencial para Modelos de Degradação Elástica: Unificação Teórica, Proposta de um Novo Modelo, Implementação Computacional e Modelagem de Estruturas de Concreto. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Pitangueira, R. L. S., 1998. Mecânica de Estruturas de Concreto com Inclusão de Efeitos de Tamanho e Heterogeneidade. Tese de Doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.
- Poh, L. H. e Swaddiwudhipong, S., 2009. ‘Over-nonlocal gradient enhanced plastic-damage model for concrete’. *International Journal of Fracture*, vol. 46, pp. 4369–4378.

- Rashid, Y. R., 1968. 'Ultimate strength analysis of prestressed concrete pressure vessels'. *Nuclear Engineering and Design*, vol. 7, pp. 334–344.
- Shah, S. P., Swartz, S. E. e Ouyang, C., 1995. *Fracture mechanics of concrete: applications of fracture mechanics to concrete rock, and other quasi-brittle materials*. John Wiley and Sons.
- Suidan, M. e Schnobrich, W. C., 1973. 'Finite element analysis of reinforced concrete'. *ASCE*, pp. 2109–2121.
- Vallippan, S. e Doolan, T. F., 1972. 'Nonlinear stress analysis of reinforced concrete'. *ASCE*, pp. 885–898.
- van Mier, J. G. M., 1995. 'Fracture mechanics of concrete: will applications start to emerge?'. *Heron*, vol. 40, pp. 147–162.
- Wight, J. K. e MacGregor, J. G., 2009. *Reinforced Concrete-Mechanich and Design*. Pearson.
- Yuzugullu, O. e Schnobrich, W. C., 1973. 'A numerical procedure for the determination of the behavior of a shear wall frame system'. *American Concrete Institute Journal*, pp. 474–479.